

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

Rafael Goulart Janke

**ESTIMATIVA DA LOCALIZAÇÃO DE CARROS
AUTÔNOMOS BASEADA NA FUSÃO DE SENSORES
IMU/GNSS UTILIZANDO O FILTRO DE KALMAN**

São Carlos

2024

Rafael Goulart Janke

**ESTIMATIVA DA LOCALIZAÇÃO DE CARROS
AUTÔNOMOS BASEADA NA FUSÃO DE SENSORES
IMU/GNSS UTILIZANDO O FILTRO DE KALMAN**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Elétrica com Ênfase em Sistemas de Energia e Automação, da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheiro Eletricista.

Orientador: Prof. Dr. Marco Henrique Terra

São Carlos

2024

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

G33e	<p>Goulart Janke, Rafael</p> <p>ESTIMATIVA DA LOCALIZAÇÃO DE CARROS AUTÔNOMOS BASEADA NA FUSÃO DE SENSORES IMU/GNSS UTILIZANDO O FILTRO DE KALMAN / Rafael Goulart Janke; orientador Marco Henrique Terra. São Carlos, 2024.</p> <p>Monografia (Graduação em Engenharia Elétrica com ênfase em Sistemas de Energia e Automação) -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2024.</p> <p>1. CARLA. 2. Autônomo. 3. GNSS. 4. IMU. I. Título.</p>
------	---

FOLHA DE APROVAÇÃO

Nome: Rafael Goulart Janke

Título: “Estimativa da localização de um carro autônomo baseada na fusão de sensores IMU/GNSS utilizando o Filtro de Kalman”

**Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado
em 27 / 06 / 2024,**

com NOTA (8,5), pela Comissão Julgadora:

Prof. Titular Marco Henrique Terra - Orientador - SEL/EESC/USP

Mestre Eduardo Godinho Ribeiro - Doutorando EESC/USP

Prof. Associado Roberto Santos Inoue - UFSCar

**Coordenador da CoC-Engenharia Elétrica - EESC/USP:
Professor Associado José Carlos de Melo Vieira Júnior**

Este trabalho é dedicado à minha mãe, ao meu pai, ao meu irmão e a todos àqueles cujos caminhos se cruzaram ao meu nessa jornada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente meus pais, pois sempre acreditaram nos meus projetos e fizeram o possível para que eu pudesse realizá-los. Agradeço a todos os companheiros e amigos que conheci na Universidade de São Paulo, pois todos que tiveram contato comigo contribuíram para a construção de quem eu sou hoje. Agradeço também à Universidade de São Paulo por ter me dado a possibilidade de ter feito uma dupla formação na França que moldou radicalmente minhas experiências e meus conhecimentos científico e humano.

“É preciso sonhar, mas com a condição de crer em nossos sonhos.”

Oswaldo Cruz

*“O correr da vida embrulha tudo, a vida é assim: esquenta e esfria, aperta e daí afrouxa,
sossega e depois desinquieta. O que ela quer da gente é coragem.”*

João Guimarães Rosa

RESUMO

JANKE, R. ESTIMATIVA DA LOCALIZAÇÃO DE CARROS AUTÔNOMOS BASEADA NA FUSÃO DE SENSORES IMU/GNSS UTILIZANDO O FILTRO DE KALMAN. 2024. 59 p. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

Atualmente, os carros autônomos estão com sua popularidade em franca ascensão tanto no meio acadêmico, quanto no cotidiano da população geral. No entanto, ainda hoje, é caro possuir e utilizar um carro autônomo para criar modelos e realizar treinamentos. Dessa maneira, neste trabalho, estudou-se a possibilidade de utilizar o simulador CARLA, acessível ao público geral, para desenvolver algoritmos de navegação para carros autônomos. Neste estudo, empregou-se a fusão de dois sensores, o IMU e o GNSS, na previsão de trajetórias de um carro autônomo. Além disso, para realizar os cálculos necessários às previsões das trajetórias do carro autônomo, utilizou-se o algoritmo de Kalman Estendido.

Palavras-chave: IMU. GNSS. GPS. Carros Autônomos. CARLA. Simulador.

ABSTRACT

JANKE, R. ESTIMATION OF THE LOCATION OF AN AUTONOMOUS CARS BASED ON THE FUSION OF IMU/GNSS SENSORS USING THE KALMAN FILTER. 2024. 59 p. Monograph (Conclusion Course Paper) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

Currently, autonomous cars are experiencing a significant rise in popularity both in academic circles and in the daily lives of the general population. However, even today, owning and using an autonomous car to create models and conduct training is expensive. Therefore, in this study, we explored the possibility of using the CARLA simulator, which is accessible to the general public, to develop navigation algorithms for autonomous cars. In this study, the fusion of two sensors, IMU and GNSS, was employed in the prediction of autonomous car trajectories. Additionally, the Extended Kalman Filter algorithm was used to perform the necessary calculations for predicting the trajectories of the autonomous car.

Keywords: IMU. GNSS. Autonomous Cars. CARLA. Simulator.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Algoritmo Filtro de Kalman Estendido	32
Figura 2 – Exemplo de IMU comercial	34
Figura 3 – Ilustração do sistema GNSS	35
Figura 4 – Cenário de simulação	44
Figura 5 – Caminho realizado pelo carro no CARLA	44
Figura 6 – Trajetória percorrida no plano XY e GNSS 25 Hz	45
Figura 7 – Estimativa GNSS 25 Hz	46
Figura 8 – Erro dos eixos 25 Hz	47
Figura 9 – Erro dos eixos 25 Hz	47
Figura 10 – Estimativa GNSS 50 Hz	48
Figura 11 – Erro dos eixos 50 Hz	49
Figura 12 – Erro dos ângulos 50 Hz	49
Figura 13 – Estimativa GNSS 100 Hz	50
Figura 14 – Erro dos eixos 100 Hz	51
Figura 15 – Erro dos ângulos 100 Hz	51

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Objetivos	17
1.2	Motivação	17
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	21
2.1	Probabilidades	21
2.2	Variáveis Aleatórias	22
2.3	Média e Variância	23
2.4	Distribuição Normal ou Gaussiana	24
2.4.1	Ruído Branco	25
2.4.1.1	Propriedades do Ruído Branco	25
2.4.2	Covariância	26
2.5	Estimativa Estocástica	26
2.5.1	Modelo Espaço de Estados	26
2.5.2	Ruído de Medição e de Processo	28
2.6	O Filtro de Kalman	28
2.6.1	O filtro de Kalman Linear	29
2.6.2	O Algoritmo	31
2.7	O filtro de Kalman Estendido	32
2.7.1	IMU	33
2.7.2	GNSS	35
2.8	Trabalhos Relacionados	36
3	METODOLOGIA	37
3.1	Apresentação do CARLA	37
3.1.1	O simulador	37
3.2	Modelagem do sistema	37
3.2.1	Estado do Veículo	38
3.2.2	Modelo de Movimento	38
3.2.3	Medição GNSS	40
3.3	EKF com IMU e GNSS	40
3.3.1	1. Atualizar o Estado com Entradas do IMU	41
3.3.2	2. Propagar a Incerteza	41
3.3.3	3. Correção com Medições de GNSS	41
3.3.4	4. Computar a Covariância Corrigida	42

4	IMPLEMENTAÇÃO E RESULTADOS	43
4.1	Simulação no Carla	43
4.2	Resultados	45
4.2.1	GNSS 25 Hz	46
4.2.2	GNSS 50 Hz	48
4.2.3	GNSS 100 Hz	50
5	CONCLUSÃO	53
5.1	Principais Resultados Obtidos e Conclusões	53
5.2	Trabalhos Futuros	53
	REFERÊNCIAS	55
	APÊNDICES	57
	APÊNDICE A – APÊNDICE(S)	59

1 INTRODUÇÃO

A crescente complexidade dos sistemas de transporte modernos exige soluções inovadoras para atender às necessidades de segurança, eficiência e sustentabilidade. Dentro desse contexto, a pesquisa e desenvolvimento de carros autônomos têm se destacado como uma área de estudo vital. O objetivo principal deste trabalho é investigar a estimativa de localização de um carro autônomo através da fusão de sensores IMU (Unidade de Medida Inercial) e GPS (Sistema de Posicionamento Global), utilizando o Filtro de Kalman.

Este trabalho se concentrará na criação de um filtro Estendido de Kalman e será testado através do simulador de veículos autônomos CARLA.

1.1 Objetivos

- Desenvolver um modelo que integre os dados de sensores IMU e GPS para melhorar a precisão da localização de veículos autônomos.
- Implementar e testar o Filtro de Kalman para processar e filtrar os dados provenientes dos sensores do simulador CARLA.
- Avaliar a eficácia do modelo proposto em cenários de simulação realistas.
- Contribuir para o avanço das tecnologias de navegação autônoma, promovendo maior segurança e confiabilidade no uso de veículos sem condutor.

1.2 Motivação

A história dos carros autônomos remonta às décadas de 1980 e 1990, quando universidades e instituições de pesquisa começaram a explorar a viabilidade de veículos automatizados. Projetos como o ALV (Autonomous Land Vehicle) do DARPA e o Navlab da Carnegie Mellon University foram pioneiros no desenvolvimento de tecnologias que permitiram a navegação autônoma em ambientes controlados. Na década de 2000, a competição DARPA Grand Challenge impulsionou ainda mais a pesquisa, levando ao surgimento de empresas especializadas e ao desenvolvimento de veículos autônomos comerciais. Atualmente, os carros autônomos estão em fases avançadas de testes e implementação, prometendo revolucionar o transporte urbano e rodoviário.

A motivação para este estudo é diversa. Primeiramente, o interesse do crescente uso de técnicas de automação digital. Estamos vivendo uma nova era de efervescência das técnicas de inteligências artificiais. Além disso, tem-se um novo mercado crescente da indústria automobilística e de tecnologia em desenvolver veículos autônomos, criando uma

demanda por soluções inovadoras e eficientes. Empresas como Tesla, Waymo e Uber têm investido massivamente em pesquisas relacionadas a carros autônomos, impulsionando a necessidade de novos talentos e conhecimento na área.

Do ponto de vista acadêmico, a fusão de sensores e o uso do Filtro de Kalman (Kalman, 1960) são tópicos de grande relevância e complexidade, oferecendo desafios que incentivam o desenvolvimento de habilidades técnicas e analíticas avançadas. O Filtro de Kalman, desenvolvido por Rudolf E. Kálmán na década de 1960, é uma técnica matemática amplamente utilizada para estimar o estado de um sistema dinâmico a partir de medições ruidosas. Além de sua aplicação em veículos autônomos, o Filtro de Kalman é utilizado em diversas outras áreas, como:

- **Navegação Aeronáutica e Espacial:** Utilizado em sistemas de navegação de aeronaves e espaçonaves para estimar a posição e a velocidade a partir de dados de sensores.
- **Robótica:** Empregado para a estimativa de estados e controle de robôs móveis e manipuladores robóticos.
- **Economia e Finanças:** Aplicado na previsão de séries temporais e na estimativa de variáveis econômicas ocultas.
- **Processamento de Sinais:** Usado em sistemas de comunicação para a filtragem de ruídos e recuperação de sinais.

A integração de inteligência artificial (IA) com técnicas como o Filtro de Kalman exemplifica o potencial sinérgico dessas tecnologias. A IA pode aprimorar a fusão de sensores através de algoritmos de aprendizado que adaptam os modelos em tempo real, enquanto o Filtro de Kalman fornece um framework matemático robusto para lidar com incertezas e ruídos nos dados. Essa combinação é crucial para alcançar uma localização precisa e confiável em veículos autônomos, que dependem de decisões rápidas e precisas baseadas em dados sensoriais dinâmicos.

A fusão de sensores é essencial para a navegação de carros autônomos e com a fusão do GNSS com o IMU tem-se um modelo robusto e realístico de navegação que posteriormente poderia ser usado em um carro real.

Adicionalmente, há uma motivação pessoal em contribuir para um campo de estudo que pode trazer benefícios tangíveis à sociedade. Melhorar a segurança no trânsito, promover a eficiência energética, e reduzir o impacto ambiental são objetivos que ressoam com as preocupações contemporâneas sobre desenvolvimento sustentável e qualidade de vida.

Organização do Trabalho

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos, incluindo esta introdução. A seguir, apresenta-se um breve resumo do conteúdo de cada capítulo:

- **Capítulo 1: Introdução** - Apresenta os objetivos, justificativa, motivação e organização do trabalho, fornecendo uma visão geral da importância e relevância do estudo de veículos autônomos e da fusão de sensores IMU/GPS.
- **Capítulo 2: Fundamentos Teóricos** - Revisa os principais conceitos, técnicas e trabalhos relacionados à fusão de sensores, filtros de Kalman e tecnologias de veículos autônomos. Faz uma análise crítica das abordagens existentes, destacando as lacunas e oportunidades para novas contribuições.
- **Capítulo 3: Metodologia** - Detalha os métodos e procedimentos utilizados para desenvolver e implementar o modelo de fusão de sensores proposto. Inclui a descrição dos sensores IMU e GPS, o algoritmo do Filtro de Kalman e os critérios de avaliação dos experimentos.
- **Capítulo 4: Resultados e Discussões** - Apresenta os resultados obtidos a partir dos experimentos e simulações, comparando a eficácia do modelo proposto com diferentes abordagens. Discussões sobre as implicações dos resultados e possíveis melhorias também estão incluídas.
- **Capítulo 5: Conclusão e Trabalhos Futuros** - Resume as principais conclusões do estudo, destacando as contribuições para a área de veículos autônomos. Também sugere direções para pesquisas futuras, baseadas nos achados e limitações do presente trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O filtro de Kalman é um algoritmo recursivo que fornece estimativas do estado de um processo estocástico, que é um processo aleatório que evolui ao longo do tempo. Em termos simples, ele combina previsões baseadas em um modelo de sistema com medições reais que contêm ruído (incerteza) para produzir uma estimativa mais precisa do estado do sistema (Welch; Bishop, 2001).

O processo estocástico descrito pelo filtro de Kalman pode ser entendido como um sistema dinâmico cujas mudanças são parcialmente imprevisíveis devido à presença de ruído branco. O filtro de Kalman trabalha em duas etapas principais: previsão e atualização.

Sendo assim, a fundamentação teórica deste trabalho irá explorar o conceito de processos estocásticos, definindo o que é probabilidade, variáveis discretas, e contínuas.

2.1 Probabilidades

A probabilidade de que o resultado de um evento discreto A , como o lançamento de uma moeda, aconteça é definida como:

$$p(A) = \frac{\text{Número de resultados que favorecem o evento } A}{\text{Número total de resultados possíveis}} \quad (2.1)$$

Diz-se que dois eventos são mutuamente exclusivos quando eles não podem ocorrer simultaneamente. Ou seja, a probabilidade de um resultado favorecer A ou B é dada por:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) \quad (2.2)$$

Se a probabilidade de dois resultados for independente (um não afeta o outro), então a probabilidade de ambos ocorrerem é o produto de suas probabilidades individuais:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \quad (2.3)$$

A probabilidade do resultado A , dado a ocorrência prévia do resultado B , é chamada de probabilidade condicional de A dado B , e é definida como:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad (2.4)$$

2.2 Variáveis Aleatórias

Ao contrário dos eventos discretos, no caso de rastreamento e captura de movimento, o interesse geralmente reside na aleatoriedade associada à dinâmica do evento (Welch; Bishop, 2001). Em cada caso, pode-se pensar no item de interesse como uma variável aleatória contínua. Uma variável aleatória é essencialmente uma função que mapeia todos os pontos do espaço amostral para números reais. Por exemplo, a variável aleatória contínua $X(t)$ pode mapear o tempo para a posição. Em qualquer ponto no tempo, $X(t)$ indicará a posição esperada.

No caso de variáveis aleatórias contínuas, a probabilidade de qualquer evento discreto A é, na verdade, zero. Ou seja, $p(A) = 0$. Em vez disso, pode-se apenas avaliar a probabilidade de eventos dentro de algum intervalo. Uma função comum que representa a probabilidade de variáveis aleatórias é definida como a função de distribuição acumulada:

$$F_X(x) = P((-\infty, x]) \quad (2.5)$$

Esta função representa a probabilidade acumulada da variável aleatória contínua X para todos os eventos (não contáveis) até e incluindo x . Propriedades importantes da função de distribuição acumulada são:

1. $F_X(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow -\infty$
2. $F_X(x) \rightarrow 1$ quando $x \rightarrow +\infty$
3. $F_X(x)$ é uma função não decrescente de x .

Ainda mais comum que a equação (2.5) é a sua derivada, conhecida como a função densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (2.6)$$

Com base nas propriedades acima da função de distribuição acumulada, a função densidade também tem as seguintes propriedades:

1. $f_X(x)$ é uma função não negativa
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$

Por fim, observe-se que a probabilidade sobre qualquer intervalo $[a, b]$ é definida como:

$$P_X([a, b]) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (2.7)$$

Assim, em vez de somar as probabilidades de eventos discretos como na equação (2.2), para variáveis aleatórias contínuas integra-se a função densidade de probabilidade sobre o intervalo de interesse.

2.3 Média e Variância

O conceito de média de uma sequência de números é amplamente utilizado, sendo que para N amostras de uma variável aleatória discreta X , a média ou média amostral é dada por:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N} \quad (2.8)$$

No rastreamento, lida-se com sinais contínuos (com um espaço amostral incontável), sendo útil pensar em termos de um número infinito de ensaios. Desta forma, o resultado final seria uma "*média*" dos resultados obtidos. Nesse contexto, o valor esperado de uma variável aleatória discreta poderia ser aproximado pela média dos eventos ponderados pela probabilidade:

$$\bar{X} \approx \frac{(p_1 N)x_1 + (p_2 N)x_2 + \cdots + (p_n N)x_n}{N} \quad (2.9)$$

Na prática, em N ensaios, esperaria-se ver $p_1 N$ ocorrências do evento x_1 , e assim por diante. Essa noção de ensaios infinitos (amostras) leva à definição convencional de esperança para variáveis aleatórias discretas:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i \quad (2.10)$$

para n possíveis resultados x_1, x_2, \dots, x_n e probabilidades correspondentes p_1, p_2, \dots, p_n . De modo semelhante, para a variável aleatória contínua, o valor esperado é definido como:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad (2.11)$$

Por fim, observa-se que a equação (2.10) e a equação (2.11) podem ser aplicadas a funções da variável aleatória X da seguinte forma:

$$E(g(X)) = \sum_{i=1}^n p_i g(x_i) \quad (2.12)$$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x) dx \quad (2.13)$$

O valor esperado de uma variável aleatória também é conhecido como o primeiro momento de uma variável aleatória. Pode-se aplicar a noção da equação (2.12) ou (2.13), deixando $g(X) = X^k$, para obter o k -ésimo momento de uma variável aleatória. O k -ésimo momento estatístico de uma variável aleatória contínua X é dado por:

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx \quad (2.14)$$

De particular interesse, tanto de forma geral como neste específico, é o segundo momento da variável aleatória. Ele é dado por:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx \quad (2.15)$$

Quando se deixa $g(X) = X - E(X)$ e aplica-se a equação (2.15), obtém-se a variância do sinal em relação à média. Desta forma,

$$\begin{aligned} \text{Variância } X &= E[(X - E(X))^2] \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

A variância é uma propriedade estatística muito útil para sinais aleatórios. Isso se deve ao fato de que, ao conhecer a variância de um sinal que, de outra forma, deveria ser “constante” em torno de algum valor (a média) a magnitude da variância proporciona uma noção de quanto ruído está presente no sinal.

A raiz quadrada da variância, ou desvio padrão, também é uma medida estatística útil. Ao contrário da variância, o desvio padrão é sempre positivo, e possui as mesmas unidades que o sinal original. O desvio padrão é dado por:

$$\text{Desvio padrão de } X = \sigma_X = \sqrt{\text{Variância de } X} \quad (2.16)$$

2.4 Distribuição Normal ou Gaussiana

Uma distribuição de probabilidade especial, conhecida como distribuição Normal ou Gaussiana, tem sido historicamente popular na modelagem de sistemas aleatórios por uma variedade de razões. Muitos processos aleatórios que ocorrem na natureza parecem ser normalmente distribuídos, ou muito próximos disso. De fato, sob algumas condições moderadas, é possível demonstrar que a soma de variáveis aleatórias com qualquer distribuição tende para uma distribuição normal. Esta propriedade é formalizada pelo

teorema do limite central. Além disso, a distribuição normal possui algumas propriedades interessantes que a tornam matematicamente tratável.

Dado um processo aleatório $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, onde X é um processo aleatório contínuo normalmente distribuído com média μ e variância σ^2 (desvio padrão σ), a função densidade de probabilidade para X é dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \text{para } -\infty < x < \infty \quad (2.17)$$

Finalmente, observa-se que, assim como no caso discreto e nas equações (2.2) e (2.3), a independência e a probabilidade condicional são definidas para variáveis aleatórias contínuas. Duas variáveis aleatórias contínuas X e Y são consideradas estatisticamente independentes se a sua probabilidade conjunta $f_{XY}(x, y)$ for igual ao produto de suas probabilidades individuais. Em outras palavras, elas são consideradas independentes se:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y). \quad (2.18)$$

2.4.1 Ruído Branco

Ruído branco é um termo estatístico usado para descrever um sinal aleatório que possui uma densidade espectral constante. Em outras palavras, ruído branco é um sinal aleatório que contém intensidade igual em diferentes frequências, proporcionando uma potência constante ao longo da banda de frequência dada.

2.4.1.1 Propriedades do Ruído Branco

O ruído branco possui várias propriedades importantes que o tornam um conceito útil em diversos campos, incluindo estatística e processamento de sinais. Essas propriedades incluem:

- **Estacionariedade:** O ruído branco é considerado um processo estacionário, o que significa que suas propriedades estatísticas, como média e variância, não mudam ao longo do tempo.
- **Independência:** No ruído branco, todas as variáveis aleatórias são independentes umas das outras. Isso implica que não há estrutura previsível ou padrão na sequência de valores de ruído.
- **Espectro Uniforme:** O ruído branco possui um espectro plano, o que significa que sua potência é distribuída uniformemente por todas as frequências dentro de um intervalo dado.

- **Distribuição Gaussiana:** Para esse trabalho, assume-se que o ruído branco segue uma distribuição Gaussiana (normal), com média zero e uma variância finita. Esse tipo de ruído branco é referido como ruído branco Gaussiano.

2.4.2 Covariância

A covariância na teoria das probabilidades e estatística é uma medida da variabilidade conjunta de duas variáveis aleatórias.

O sinal da covariância indica a tendência na relação linear entre as variáveis. Se valores maiores de uma variável correspondem principalmente a valores maiores da outra variável, e o mesmo se aplica a valores menores (ou seja, as variáveis tendem a apresentar um comportamento semelhante), a covariância é positiva. Por outro lado, quando valores maiores de uma variável correspondem principalmente a valores menores da outra (ou seja, as variáveis tendem a mostrar um comportamento oposto), a covariância é negativa. A magnitude da covariância é a média geométrica das variâncias que são comuns para as duas variáveis aleatórias. O coeficiente de correlação normaliza a covariância dividindo-a pela média geométrica das variâncias totais das duas variáveis aleatórias.

Variáveis aleatórias cuja covariância é zero são chamadas de não correlacionadas. Da mesma forma, os componentes de vetores aleatórios cuja matriz de covariância tem zero em todas as entradas fora da diagonal principal, também são chamados de não correlacionados.

2.5 Estimativa Estocástica

Enquanto existem muitas abordagens específicas de aplicação para estimar um estado desconhecido a partir de um conjunto de medições de processo, muitos desses métodos não consideram inerentemente a natureza tipicamente ruidosa das medições (Grewal.; Andrews, 2008). Por exemplo, considerando o trabalho em questão sobre rastreamento posicional interativo. Embora os requisitos para a informação de rastreamento variem com a aplicação, a fonte fundamental de informação é a mesma: as estimativas de posição são derivadas de medições elétricas ruidosas de sensores mecânicos, inerciais, ópticos, acústicos ou magnéticos. Esse ruído é tipicamente estatístico por natureza (ou pode ser efetivamente modelado como tal), o que nos leva a métodos estocásticos para resolver os problemas.

2.5.1 Modelo Espaço de Estados

Os modelos de espaço de estados são essencialmente uma conveniência notacional para problemas de estimação e controle, desenvolvidos para tornar tratável o que, de outra forma, seria uma análise notacionalmente intratável. Considere um processo dinâmico descrito por uma equação de diferenças de ordem n (similarmente uma equação diferencial)

da forma:

$$y_{i+1} = a_{0,i}y_i + \cdots + a_{n-1,i}y_{i-n+1} + u_i, \quad i \geq 0, \quad (2.19)$$

onde u_i é um processo de “ruído” aleatório branco (espectralmente) de média zero (estatisticamente) com autocorrelação:

$$E(u_i, u_j) = R_u = Q_i \delta_{ij}, \quad (2.20)$$

e os valores iniciais $y_0, y_{-1}, \dots, y_{-n+1}$ são variáveis aleatórias de média zero com uma matriz de covariância $n \times n$ conhecida:

$$P_0 = E(y_{-j}, y_{-k}), \quad j, k \in 0, n-1. \quad (2.21)$$

Também assume-se que:

$$E(u_i, y_i) = 0 \quad \text{para} \quad -n+1 \leq j \leq 0 \quad \text{e} \quad i \geq 0, \quad (2.22)$$

o que assegura que o ruído é estatisticamente independente do processo a ser estimado.

Essa equação de diferença pode ser reescrita, o que leva ao modelo de espaço de estados:

$$x_{i+1} = Ax_i + Gu_i, \quad (2.23)$$

$$y_i = H_i x_i. \quad (2.24)$$

A Equação (2.23) representa a forma como um novo estado x_{i+1} é modelado, sendo uma combinação linear do estado anterior x_i , e algum ruído do processo u_i . A Equação (2.24) descreve a forma como as medições ou observações do processo y_i são derivadas do estado interno x_i . Essas duas equações são frequentemente referidas, respectivamente, como o modelo de processo e o modelo de medição, e servem como base para virtualmente todos os métodos de estimação linear, como o filtro de Kalman descrito a seguir.

As muitas abordagens para esse problema básico são tipicamente baseadas no modelo de espaço de estados. Tipicamente, existe um modelo de processo que modela a transformação do estado do processo. Isso geralmente pode ser representado como uma equação de diferença estocástica linear semelhante à equação (2.23):

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_{k-1}. \quad (2.25)$$

Sendo que na equação (2.25) u_k representa o valor de entrada e w_{k-1} o ruído.

Além disso, existe algum tipo de modelo de medição que descreve a relação entre o estado do processo e as medições. Isso geralmente pode ser representado com uma expressão linear semelhante à equação (2.23):

$$y_k = Hx_k + v_k.$$

Os termos w_k e v_k são variáveis aleatórias representando o ruído do processo e o ruído da medição, respectivamente.

2.5.2 Ruído de Medição e de Processo

Consideramos aqui o caso comum de medições ruidosas de sensores. Existem muitas fontes de ruído em tais medições. Por exemplo, cada tipo de sensor tem limitações fundamentais relacionadas ao meio físico associado e, ao empurrar os limites dessas limitações, os sinais são tipicamente degradados. Além disso, uma certa quantidade de ruído elétrico aleatório é adicionada ao sinal através do sensor e dos circuitos elétricos. A relação variável ao longo do tempo entre o sinal "puro" e o ruído elétrico afeta continuamente a quantidade e a qualidade da informação. O resultado é que a informação obtida de qualquer sensor deve ser qualificada à medida que é interpretada como parte de uma sequência geral de estimativas, e modelos analíticos de medição tipicamente incorporam alguma noção de ruído de medição ou incerteza, como mostrado acima.

Existe também o problema adicional de que o modelo de transformação do estado real é completamente desconhecido. Embora possamos fazer previsões em intervalos relativamente curtos usando modelos baseados em transformações de estado recentes, tais previsões assumem que as transformações são previsíveis, o que nem sempre é o caso. O resultado é que, assim como a informação do sensor, estimativas contínuas do estado devem ser qualificadas à medida que são combinadas com medições em uma sequência geral de estimativas. Além disso, modelos de processo tipicamente incorporam alguma noção de movimento aleatório ou incerteza, como mostrado acima.

2.6 O Filtro de Kalman

Pode parecer estranho que o termo "filtro" se aplique a um estimador. Tradicionalmente, um filtro é um dispositivo físico para remover componentes indesejadas de misturas. Originalmente, um filtro resolvia o problema de separar componentes indesejados de misturas gás-líquido-sólido. Na era dos rádios de galena e tubos de vácuo, o termo passou a ser utilizado para descrever circuitos analógicos que filtram sinais eletrônicos. Esses sinais englobam diferentes componentes de frequência, e esses dispositivos físicos atenuam preferencialmente frequências indesejadas.

No entanto, com o filtro de Kalman, o termo "filtro" assumiu um significado que vai além da ideia original de separação dos componentes de uma mistura. Ele também passou a incluir a solução de um problema de inversão, onde as variáveis mensuráveis são representadas como funções das variáveis de principal interesse. Essencialmente, inverte-

se essa relação funcional para estimar as variáveis independentes a partir das variáveis dependentes (mensuráveis). Essas variáveis de interesse também podem ser dinâmicas, com comportamentos que são apenas parcialmente previsíveis.

O filtro de Kalman é uma das maiores descobertas na história da teoria de estimação estatística e uma das maiores descobertas do século XX. Ele possibilitou realizações que seriam impossíveis sem sua existência, tornando-se tão indispensável quanto o silício em muitos sistemas eletrônicos. Suas aplicações mais imediatas incluem o controle de sistemas dinâmicos complexos, como processos contínuos de manufatura, aeronaves, navios e espaçonaves. Para controlar um sistema dinâmico, é necessário primeiro saber o que ele está fazendo. Para essas aplicações, nem sempre é possível ou desejável medir todas as variáveis que se deseja controlar, e o filtro de Kalman fornece um meio de inferir as informações ausentes a partir de medições indiretas e ruidosas. O filtro de Kalman também é utilizado para prever os prováveis cursos futuros de sistemas dinâmicos que não se pretende controlar, como o fluxo de rios durante enchentes.

Matematicamente, o filtro de Kalman é o melhor estimador possível (ótimo) para uma grande classe de problemas, e um estimador muito eficaz e útil para uma classe ainda maior. Com algumas ferramentas conceituais, o filtro de Kalman torna-se muito fácil de utilizar.

Teoricamente, o filtro de Kalman é um estimador para o que é chamado de problema linear-quadrático. Esse problema envolve a estimativa do “estado” instantâneo de um sistema dinâmico linear perturbado por ruído branco, utilizando medições linearmente relacionadas ao estado, mas corrompidas por ruído branco. O estimador resultante é estatisticamente ótimo em relação a qualquer função quadrática do erro de estimação (Grewal; Andrews, 2008).

2.6.1 O filtro de Kalman Linear

O filtro de Kalman aborda o problema geral de tentar estimar o estado $x \in \mathbb{R}^n$ de um processo controlado em tempo discreto que é governado pela equação de diferença estocástica linear (Welch; Bishop, 2001)

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_{k-1}, \quad (2.26)$$

com uma medição $y \in \mathbb{R}^m$ dada por

$$y_k = Hx_k + v_k. \quad (2.27)$$

As variáveis aleatórias w_k e v_k representam o ruído do processo e da medição, respectivamente. Elas são assumidas como independentes, brancas e com distribuições de

probabilidade normais:

$$p(w) \sim \mathcal{N}(0, Q), \quad (2.28)$$

$$p(v) \sim \mathcal{N}(0, R). \quad (2.29)$$

Na prática, as matrizes de covariância do ruído do processo Q e do ruído da medição R podem mudar a cada passo de tempo ou medição, porém, aqui assumimos que são constantes.

A matriz A de dimensão $n \times n$ na equação de diferença (2.26) relaciona o estado no passo de tempo anterior $k - 1$ ao estado no passo atual k , na ausência de uma função de controle ou ruído do processo. Embora, na prática, A possa mudar a cada passo de tempo, aqui assumimos que ela é constante. A matriz B de dimensão $n \times l$ relaciona a entrada de controle opcional $u \in \mathbb{R}^l$ ao estado x . A matriz H de dimensão $m \times n$ na equação de medição (2.26) relaciona o estado à medição y_k . Embora, H também possa mudar a cada passo de tempo ou medição, aqui assumimos que ela é constante.

Define-se $\check{x}_k \in \mathbb{R}^n$ como a estimativa de estado a priori no passo k , dado o conhecimento do processo antes do passo k , e $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$ como a estimativa de estado a posteriori no passo k , dada a medição y_k . Podemos então definir os erros de estimativa a priori e a posteriori como

$$\check{e}_k \equiv x_k - \check{x}_k, \quad (2.30)$$

$$e_k \equiv x_k - \hat{x}_k. \quad (2.31)$$

A covariância do erro de estimativa a priori é então

$$\check{P}_k = E[\check{e}_k \check{e}_k^T], \quad (2.32)$$

e a covariância do erro de estimativa a posteriori é

$$P_k = E[e_k e_k^T]. \quad (2.33)$$

Para derivar as equações do filtro de Kalman, começamos com o objetivo de encontrar uma equação que compute uma estimativa de estado a posteriori \hat{x}_k como uma combinação linear de uma estimativa a priori \check{x}_k e uma diferença ponderada entre uma medição real y_k e uma previsão de medição $H\check{x}_k$, como mostrado abaixo na equação (2.34).

$$\hat{x}_k = \check{x}_k + K(y_k - H\check{x}_k) \quad (2.34)$$

A diferença $(y_k - H\check{x}_k)$ na equação acima é chamada de atualização da medição, ou residual. O residual reflete a discrepância entre a medição prevista $H\check{x}_k$ e a medição real y_k . Um residual de zero significa que os dois estão em completa concordância.

A matriz K de dimensão $n \times m$ na equação é escolhida para ser o ganho, isto é, o fator que minimiza a covariância do erro de estimativa a posteriori na equação (2.33). Esta

minimização pode ser realizada substituindo a equação (2.34) na definição acima para e_k , substituindo isso na equação (2.33), realizando as expectativas indicadas, tomando a derivada do traço do resultado em relação a K , igualando esse resultado a zero e resolvendo para K . Uma forma do K resultante que minimiza a equação (2.33) é dada por

$$K_k = \check{P}_k H^T (H \check{P}_k H^T + R)^{-1} \quad (2.35)$$

A atualização da covariância fica:

$$P_k = (I - K_k H) \check{P}_k \quad (2.36)$$

Outra maneira de pensar sobre a ponderação por K é que, à medida que a covariância do erro de medição R se aproxima de zero, a medição real y_k é cada vez mais "confiável", enquanto a medição prevista $H\check{x}_k$ é cada vez menos confiável. Por outro lado, à medida que a covariância do erro de estimativa a priori \check{P}_k se aproxima de zero, a medição real y_k é menos confiável, enquanto a medição prevista $H\check{x}_k$ é cada vez mais confiável.

2.6.2 O Algoritmo

O filtro de Kalman estima um processo utilizando uma forma de controle por feedback. Primeiro, o filtro estima o estado do processo em algum momento e então obtém feedback na forma de medições ruidosas. Assim, as equações para o filtro de Kalman se dividem em dois grupos: equações de atualização temporal e equações de atualização de medição. As equações de atualização temporal projetam, no tempo, o estado atual e as estimativas de covariância de erro para obter as estimativas a priori para o próximo passo de tempo. As equações de atualização de medição fornecem o feedback necessário, incorporando novas medições nas estimativas a priori para obter uma estimativa a posteriori aprimorada.

As equações de atualização temporal também podem ser pensadas como equações de predição, enquanto as equações de atualização de medição podem ser pensadas como equações de correção. De fato, o algoritmo final de estimação se assemelha ao de um algoritmo preditor-corretor para resolver problemas numéricos, como mostrado abaixo.

$$\check{x}_k = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k \quad (2.37)$$

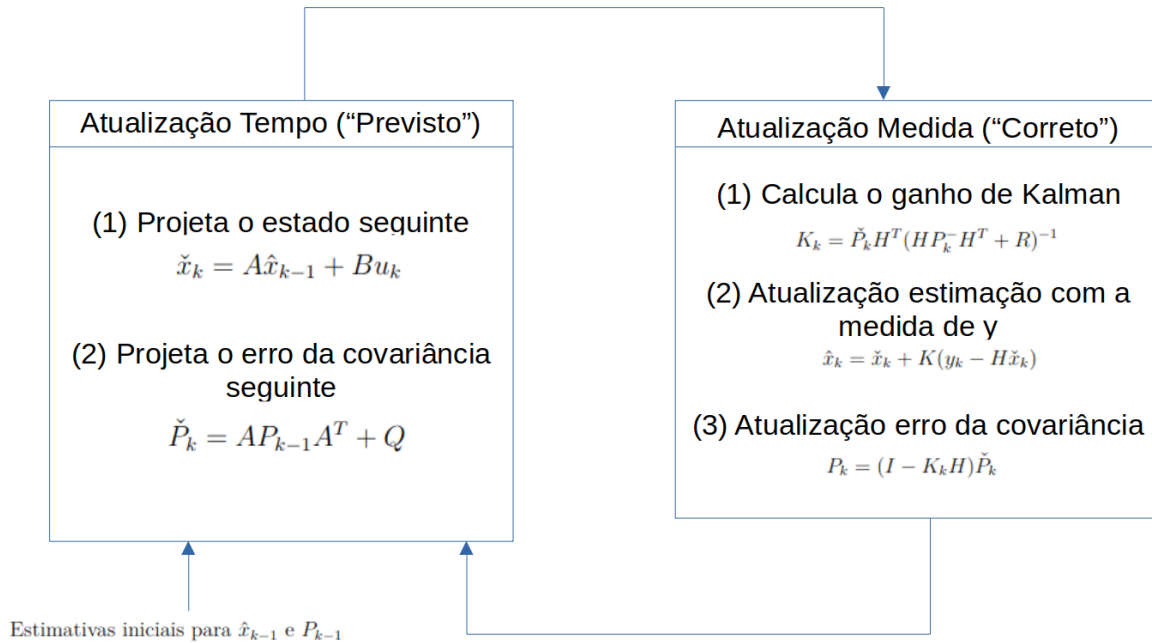
$$\check{P}_k = AP_{k-1}A^T + Q \quad (2.38)$$

As equações de atualização temporal nas equações projetam o estado e as estimativas de covariância do passo de tempo $k - 1$ para o passo k . A e B são da equação (2.26), enquanto Q é da equação (2.28).

A primeira tarefa durante a atualização de medição é calcular o ganho de Kalman, K_k . O próximo passo é medir o processo para obter y_k e então gerar uma estimativa de estado a posteriori incorporando a medição como na equação (2.34). O passo final é obter uma estimativa de covariância do erro a posteriori via equação (2.36).

Após cada par de atualização temporal e de medição, o processo é repetido utilizando as estimativas anteriores como base para projetar ou prever as novas estimativas subsequentes. Essa natureza recursiva é uma das características muito atraentes do filtro de Kalman, pois torna implementações práticas muito mais viáveis do que outros filtros que são projetados para operar em todos os dados diretamente para cada estimativa. O filtro de Kalman, em vez disso, condiciona recursivamente a estimativa atual em todas as medições passadas.

Figura 1 – Algoritmo Filtro de Kalman Estendido



Fonte: Adaptado de (Welch; Bishop, 2001)

2.7 O filtro de Kalman Estendido

O filtro de Kalman aborda o problema geral de tentar estimar o estado $x \in \mathbb{R}$ de um processo controlado em tempo discreto, que é governado por uma equação de diferença estocástica linear. Mas o que acontece se o processo a ser estimado e (ou) a relação de medição com o processo for não linear? Isso é comum, como no caso do presente trabalho, em que o GNSS não segue um padrão linear. Algumas das aplicações mais interessantes e bem-sucedidas do filtro de Kalman ocorreram em tais situações. Para lidar com isso, um tipo específico de filtro de Kalman, denominado filtro de Kalman estendido (EKF) é

utilizado. O EKF lineariza em torno da média e da covariância atuais para fazer estimativas em ambientes não lineares.

De maneira semelhante a uma série de Taylor, pode-se linearizar a estimativa em torno da estimativa atual usando as derivadas parciais das funções de processo e medição para calcular estimativas mesmo diante de relações não lineares. Para fazer isso, deve-se começar modificando algumas equações da seção acima. Suponha-se que o processo novamente tenha um vetor de estado $x \in \mathbb{R}^n$, mas que agora o processo seja governado pela equação de diferença estocástica não linear

$$x_k = f(x_{k-1}, u_k, w_{k-1}) \quad (2.39)$$

com uma medição $y \in \mathbb{R}^m$

$$y_k = h(x_k, v_k) \quad (2.40)$$

onde as variáveis aleatórias w_k e v_k novamente representam o ruído do processo e da medição, como nas equações (2.28) e (2.29). Neste caso, a função não linear f na equação de diferença (2.39) relaciona o estado no instante de tempo anterior $k - 1$ com o estado no instante de tempo atual k . Inclui como parâmetros qualquer função de controle u_k e o ruído do processo w_k de média zero. A função não linear h na equação de medição (2.40) relaciona o estado x_k à medição z_k .

Na prática, valores individuais do ruído w_k e v_k em cada instante de tempo não são conhecidos. No entanto, pode-se aproximar o vetor de estado e de medição sem eles como

$$\tilde{x}_k = f(\hat{x}_{k-1}, u_k, 0),$$

$$\tilde{y}_k = h(\tilde{x}_k, 0),$$

sendo \hat{x}_k é uma estimativa do estado de um instante de tempo anterior k .

É importante notar que uma falha fundamental do EKF é que as distribuições (ou densidades no caso contínuo) das várias variáveis aleatórias, deixam de ser normais após passarem por suas respectivas transformações não lineares. O EKF é essencialmente um estimador de estado que apenas aproxima a optimalidade da regra de Bayes através da linearização.

2.7.1 IMU

Dois sensores foram utilizados neste trabalho para fazer a fusão de dados. O primeiro deles, é o IMU, *Inertial Measurement Unit*, ou, em português, unidade de medição inercial,

que consiste em giroscópios para medir a taxa de rotação, e acelerômetros para medir a força específica onde ele está acoplado(VECTORNAV, 2024).

- Giroscópios: fornecem a medida da taxa angular.
- Acelerômetros: fornecem a medida da força específica/aceleração.
- Magnetômetros (opcional): medição do campo magnético ao redor do sistema.

Um acelerômetro é o sensor principal responsável por medir a aceleração inercial, ou a mudança de velocidade ao longo do tempo, e pode ser encontrado em uma variedade de tipos diferentes, incluindo acelerômetros mecânicos, acelerômetros de quartzo e acelerômetros MEMS.

Um giroscópio é um sensor inercial que mede a taxa angular de um objeto em relação a um referencial inercial. Existem muitos tipos diferentes de giroscópios disponíveis no mercado, que variam em diversos níveis de desempenho, incluindo giroscópios mecânicos, giroscópios de fibra óptica (FOGs), giroscópios a laser de anel (RLGs) e giroscópios de quartzo/MEMS.

Figura 2 – Exemplo de IMU comercial



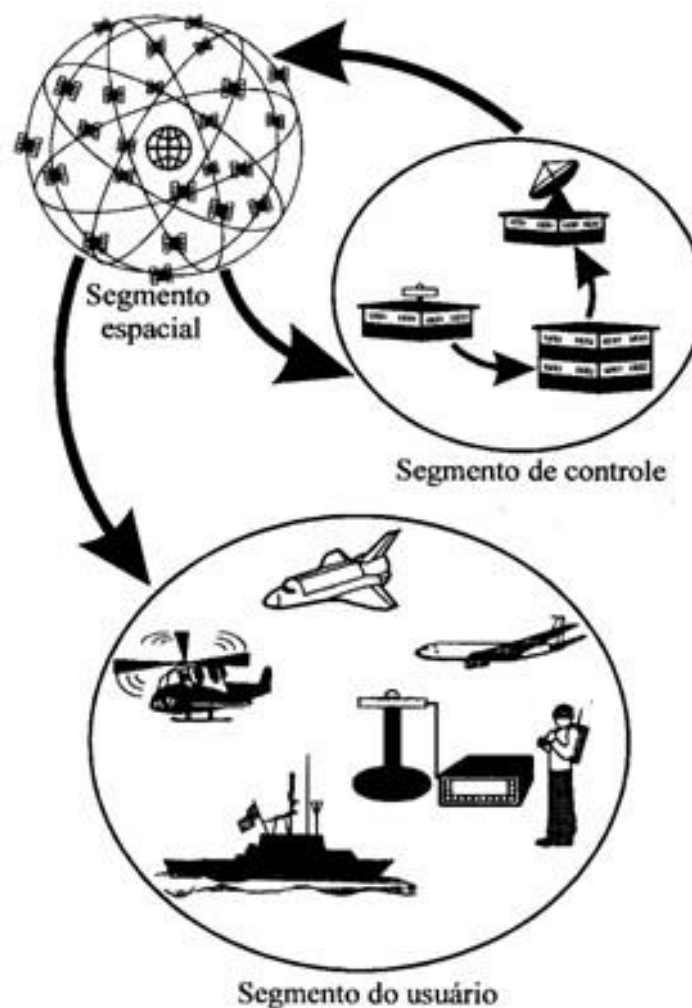
Fonte: (MEMSESE, 2024)

2.7.2 GNSS

Um sistema global de navegação por satélite (GNSS) é uma rede de satélites que transmite informações de tempo e órbita usadas para navegação e medições de posicionamento. Os satélites transmitem sinais contendo informações sobre suas posições e horários. Essas informações são utilizadas para determinar a localização de um ponto na terra. Através de uma série complexa de cálculos de trilateração, a tecnologia calcula a localização com base na sua posição em relação a pelo menos quatro satélites. (Programme, 2024)

Os GNSS são mais do que os satélites em órbita terrestre. Os múltiplos grupos de satélites, conhecidos como constelações, transmitem sinais para estações de controle principais e usuários de GNSS em todo o planeta. Esses três segmentos – espacial, de controle e de usuário – são todos considerados parte do GNSS. Mas, com mais frequência, GNSS é usado para descrever os satélites no espaço.

Figura 3 – Ilustração do sistema GNSS



Fonte: Adaptado de (ESALQ/USP, 2020)

O segmento espacial consiste em constelações de GNSS orbitando entre 20.000 e 37.000 quilômetros acima da Terra. Os satélites transmitem sinais identificando seu tempo, órbita e status. As principais constelações são GPS, GLONASS, Galileo e BeiDou, além dos sistemas regionais QZSS e IRNSS.

O segmento de controle é composto por estações de controle que recebem e monitoram os sinais dos satélites, comparando suas posições reais com modelos orbitais. Os operadores podem ajustar as trajetórias dos satélites para garantir precisão e evitar colisões com detritos, mantendo a precisão do posicionamento GNSS.

O segmento de usuário inclui equipamentos que recebem os sinais dos satélites e calculam a posição com base no tempo e na localização orbital de pelo menos quatro satélites. Isso envolve antenas receptoras, receptores de alta precisão e motores de posicionamento para corrigir erros de tempo.

O posicionamento GNSS pode ser utilizado em diferentes indústrias, entretanto, toda aplicação GNSS depende desses três segmentos para funcionar.

2.8 Trabalhos Relacionados

A combinação GPS/IMU com uma bússola digital é a principal configuração encontrada como solução para o problema de navegação dos veículos autônomos. Em (Zhang *et al.*, 2005), os autores enfatizam que é possível encontrar sensores baratos e de baixa precisão para realizar a fusão sensorial. No entanto, os autores utilizam uma versão diferente do filtro de Kalman, o chamado *Unscented Kalman Filter* (UKF), que é uma forma mais adequada para se trabalhar com equações que são não lineares e difíceis de serem linearizadas. Outros autores também utilizaram o UKM para fazer a fusão e obtiveram bons resultados, como por exemplo o trabalho. (Cahyadi *et al.*, 2023)

Este trabalho, como mencionado nas seções anteriores, empregará o filtro de Kalman Estendido para a fusão dos sensores. A abordagem adotada será mais simplificada em comparação com o estudo recente realizado por (Costa, 2013), pois os dados utilizados para os cálculos foram obtidos do simulador CARLA.

3 METODOLOGIA

3.1 Apresentação do CARLA

Para facilitar o processo de desenvolvimento, treinamento e validação de sistemas de condução, o CARLA evoluiu para se tornar um ecossistema de projetos, construído em torno de uma comunidade, uma vez que ele é todo de desenvolvimento aberto. Nesse contexto, é importante entender alguns aspectos sobre o funcionamento do CARLA, para compreender totalmente suas capacidades.

O CARLA é um simulador de condução autônoma de código aberto. Foi construído do zero para servir como uma API modular e flexível que aborda uma gama de tarefas envolvidas no problema da condução autônoma. Um dos principais objetivos do CARLA é ajudar a democratizar a pesquisa e desenvolvimento (P&D) de condução autônoma, servindo como uma ferramenta que pode ser facilmente acessada e personalizada pelos usuários. Para isso, o simulador deve atender aos requisitos de diferentes casos de uso dentro do problema geral da condução (por exemplo, aprendizado de políticas de condução, treinamento de algoritmos de percepção, etc.). O CARLA é baseado no Unreal Engine para executar a simulação e utiliza o padrão ASAM OpenDRIVE (versão 1.4 atualmente) para definir estradas e ambientes urbanos. O controle sobre a simulação é realizado por meio de uma API em Python e C++, que está em constante crescimento conforme o projeto evolui.

3.1.1 O simulador

O simulador CARLA consiste em uma arquitetura escalável cliente-servidor. O servidor é responsável por tudo relacionado à simulação: renderização de sensores, computação de física, atualizações no estado do mundo e seus atores, entre outros. Como o objetivo é obter resultados realistas, a melhor opção é executar o servidor com uma GPU dedicada, especialmente ao lidar com aprendizado de máquina. O lado do cliente consiste em um conjunto de módulos clientes que controlam a lógica dos atores em cena e definem as condições do mundo. Isso é alcançado aproveitando a API do CARLA (em Python ou C++), uma camada que medeia entre o servidor e o cliente, que está em constante evolução para fornecer novas funcionalidades.

3.2 Modelagem do sistema

O sistema foi modelado utilizando as formulações de (Kelly; Waslander, 2020)

3.2.1 Estado do Veículo

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_k \\ \mathbf{v}_k \\ \mathbf{q}_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{10} \quad (3.1)$$

- \mathbf{p}_k representa a posição do veículo.
- \mathbf{v}_k representa a velocidade do veículo.
- \mathbf{q}_k é o quaternion que parametriza a orientação do veículo.

3.2.2 Modelo de Movimento

A entrada do modelo de movimento consistirá em força específica e taxas de rotação provenientes da IMU:

$$\mathbf{m}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_k \\ \boldsymbol{\omega}_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

- \mathbf{m}_k representa a entrada do modelo de movimento.
- \mathbf{f}_k representa a força específica medida pela IMU.
- $\boldsymbol{\omega}_k$ representa as taxas de rotação medidas pela IMU.

Dessa forma, o estado do veículo e as entradas do modelo de movimento são fundamentais para a predição e correção do estado no Filtro de Kalman Estendido, utilizando os dados fornecidos pela IMU.

Posição:

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_{k-1} + \Delta t \mathbf{v}_{k-1} + \frac{\Delta t^2}{2} (\mathbf{C}_{ns} \mathbf{f}_{k-1} + \mathbf{g}) \quad (3.2)$$

Velocidade:

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{k-1} + \Delta t (\mathbf{C}_{ns} \mathbf{f}_{k-1} + \mathbf{g}) \quad (3.3)$$

Orientação:

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_{k-1} \otimes \mathbf{q}(\boldsymbol{\omega}_{k-1} \Delta t) = \Omega(\mathbf{q}(\boldsymbol{\omega}_{k-1} \Delta t)) \mathbf{q}_{k-1} \quad (3.4)$$

No contexto do Filtro de Kalman, a multiplicação de quaternions (\otimes) é crucial para a representação e atualização das orientações em sistemas de navegação e controle, especialmente em veículos autônomos e robótica. Os quaternions são usados devido à sua eficiência computacional e à capacidade de evitar as singularidades que ocorrem com

ângulos de Euler. A multiplicação de quaternions permite combinar rotações de maneira compacta e precisa. A multiplicação de quaternions à direita, em particular, é utilizada para atualizar a orientação de um corpo em movimento ao aplicar uma nova rotação relativa. Isso é fundamental no Filtro de Kalman estendido, onde a previsão da próxima posição e orientação requer a integração contínua das mudanças de atitude com base nas medições dos sensores, garantindo assim que as estimativas permaneçam precisas e consistentes ao longo do tempo.

sendo

$$\mathbf{C}_{ns} = \mathbf{C}_{ns}(\mathbf{q}_{k-1}) \quad (3.5)$$

$$\Omega \left(\begin{pmatrix} q_w \\ \mathbf{q}_v \end{pmatrix} \right) = q_w \mathbf{I} + \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{q}_v^\top \\ \mathbf{q}_v & -[\mathbf{q}_v]_\times \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{q}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{|\boldsymbol{\theta}|}{2}\right) \\ \frac{\boldsymbol{\theta}}{|\boldsymbol{\theta}|} \sin\left(\frac{|\boldsymbol{\theta}|}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Devido aos parâmetros de orientação, que expressam como uma matriz de rotação, o modelo de movimento não é linear. Para usá-lo no EKF, precisam linearizá-lo em relação a algum pequeno erro ou perturbação sobre o estado previsto. Para fazer isso, definirão um estado de erro que consiste em $\delta \mathbf{p}$, $\delta \mathbf{v}$ e $\delta \boldsymbol{\phi}$, onde $\delta \boldsymbol{\phi}$ é um erro de orientação 3×1 .

Estado de Erro:

$$\delta \mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p}_k \\ \delta \mathbf{v}_k \\ \delta \boldsymbol{\phi}_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^9 \quad (3.8)$$

Dinâmica do Erro:

$$\delta \mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1} \delta \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{L}_{k-1} \mathbf{n}_{k-1} \quad (3.9)$$

onde o termo *noise de medição* é representado por \mathbf{n}_{k-1} .

$$\mathbf{F}_{k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \Delta t & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & -[\mathbf{C}_{ns} \mathbf{f}_{k-1}]_\times \Delta t \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{L}_{k-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{n}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k) \quad \mathbf{Q}_k = \Delta t^2 \begin{bmatrix} \sigma_{\text{acc}}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\text{gyro}}^2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

3.2.3 Medição GNSS

Medição GNSS:

$$\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k) + \boldsymbol{\nu}_k \quad (3.13)$$

Para o modelo de medição, utiliza-se uma observação muito simples da posição, somada a algum ruído gaussiano aditivo. Defini-se uma covariância \mathbf{R}_{GNSS} para o ruído da posição GNSS. É importante notar que assumiram que o GNSS fornece-se medições de posição no mesmo quadro de coordenadas. Em uma implementação realista, as estimativas de posição do GNSS podem servir como uma forma de selecionar um mapa conhecido.

Medição Linearizada:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\nu}_k \quad \text{onde} \quad \mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Simplificação da Medição:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{p}_k + \boldsymbol{\nu}_k \quad (3.15)$$

Ruído da Medição:

$$\boldsymbol{\nu}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_{GNSS}) \quad (3.16)$$

3.3 EKF com IMU e GNSS

O filtro será executado toda vez que houver uma medição do IMU. Primeiro, usarão o modelo de movimento para prever um novo estado baseado no estado anterior. O estado anterior pode ser um estado totalmente corrigido ou um que também foi propagado usando apenas o modelo de movimento, dependendo se receberam ou não a medição do GNSS. Em seguida, propagarão a incerteza do estado através do modelo de movimento linearizado, novamente considerando se o estado anterior foi corrigido ou não. Neste ponto, se não tiver medições GNSS, pode repetir os passos um e dois. Se tiverem, primeiro calcularão o ganho de Kalman apropriado para a observação dada. Em seguida, calcula-se um estado de erro que será usado para corrigir o estado previsto. Esse estado de erro é baseado no produto do ganho de Kalman e na diferença entre a posição prevista e a observada. A seguir, corrigirá-se o estado previsto usando o estado de erro. Esta correção é direta para a posição e velocidade, mas álgebra mais complicada é necessária para corrigir o quaternion. Durante a atualização da orientação, é necessário considerar o erro de orientação global, o que significa que a atualização de orientação envolve multiplicar pelo quaternion do estado de erro à esquerda. Isso é diferente do passo de propagação, onde se multiplica pelo quaternion incremental que define a mudança de orientação à direita. Essa abordagem é uma simplificação que deriva do fato de que a mudança de quadro em quaternion envolve uma multiplicação, e isso pode ser generalizado para pequenos erros. Por fim, atualizarão a covariância do estado da maneira usual.

Loop do Filtro de Kalman Estendido (EKF):

1. Atualizar o estado com as entradas do IMU.
2. Propagar a incerteza.
3. Se a posição do GNSS ou LIDAR estiver disponível:
 - a) Calcular o ganho de Kalman.
 - b) Calcular o estado de erro.
 - c) Corrigir o estado previsto.
4. Computar a covariância corrigida.

3.3.1 1. Atualizar o Estado com Entradas do IMU

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}_k \\ \hat{\mathbf{v}}_k \\ \hat{\mathbf{q}}_k \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\hat{\mathbf{p}}_k = \mathbf{p}_{k-1} + \Delta t \mathbf{v}_{k-1} + \frac{\Delta t^2}{2} (\mathbf{C}_{ns} \mathbf{f}_{k-1} + \mathbf{g}_n) \quad (3.18)$$

$$\hat{\mathbf{v}}_k = \mathbf{v}_{k-1} + \Delta t (\mathbf{C}_{ns} \mathbf{f}_{k-1} + \mathbf{g}_n) \quad (3.19)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_k = \Omega(\mathbf{q}(\omega_{k-1} \Delta t)) \mathbf{q}_{k-1} \quad (3.20)$$

(\mathbf{p}_{k-1} , \mathbf{v}_{k-1} e \mathbf{q}_{k-1} podem ser corrigidos ou não corrigidos, dependendo de ter havido ou não uma medição GNSS no passo de tempo $k - 1$).

3.3.2 2. Propagar a Incerteza

$$\hat{\mathbf{P}}_k = \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{P}}_{k-1} \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{L}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{L}_{k-1}^T \quad (3.21)$$

3.3.3 3. Correção com Medições de GNSS

a. Calcular o Ganho de Kalman

$$\mathbf{K}_k = \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (3.22)$$

(\mathbf{R} é \mathbf{R}_{GNSS}).

b. Calcular o Estado de Erro

$$\delta \mathbf{x}_k = \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k) \quad (3.23)$$

c. Corrigir o Estado Previsto

$$\mathbf{p}_k = \hat{\mathbf{p}}_k + \delta \mathbf{p}_k \quad (3.24)$$

$$\mathbf{v}_k = \hat{\mathbf{v}}_k + \delta \mathbf{v}_k \quad (3.25)$$

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{q}(\delta \phi) \otimes \hat{\mathbf{q}}_k \quad (3.26)$$

($\delta \phi$ representa o erro de orientação global).

3.3.4 4. Computar a Covariância Corrigida

$$\hat{\mathbf{P}}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \check{\mathbf{P}}_k \quad (3.27)$$

4 IMPLEMENTAÇÃO E RESULTADOS

4.1 Simulação no Carla

A simulação no CARLA foi feita usando um carro com os sensores de IMU e GNSS acoplados a ele. Durante a execução do programa, a frequência de coleta de dados foi de 500 hertz, isto é, para cada iteração que o programa executava, as informações eram salvas. Durante a simulação, a cada iteração, os dados necessários eram salvos em uma tabela. Tal tabela possuía todos os valores do movimento real do carro e os valores da simulação para cada sensor. Para manter a simulação coerente com os dados de um caso real, os dados do GNSS também coletados na mesma frequência, mas para se fazer os cálculos, foi-se usado apenas 5%, 10% e 20% dos dados obtidos, respectivamente, ou seja, simulando uma frequência de 25 Hz, 50 Hz e 100 Hz que está na mesma ordem de grandeza de alguns dados reais. Além disso, como será visto na próxima sessão, a quantidade de pontos disponíveis do GNSS para o algoritmo influencia na estabilidade de alguns pontos críticos do caminho.

Outros conceitos importantes são as coordenadas ENU (East-North-Up), ECEF (Earth-Centered, Earth-Fixed) e Geodetic que são sistemas usados em geodésia e navegação para definir posições na Terra.

O sistema ENU é local, definindo posições relativas a um ponto específico na superfície da Terra. É muito útil em navegação, mapeamento local e navegação por GPS. Será a partir do ENU que vamos comparar o caminho verdadeiro (*Ground Truth*). No entanto, as Latitudes e Longitudes dadas pelo GNSS no CARLA estão em Geodetic, então, para comparar os valores, foi necessário fazer uma conversão de Geodetic -> ECEF -> ENU para assim comparar os valores.

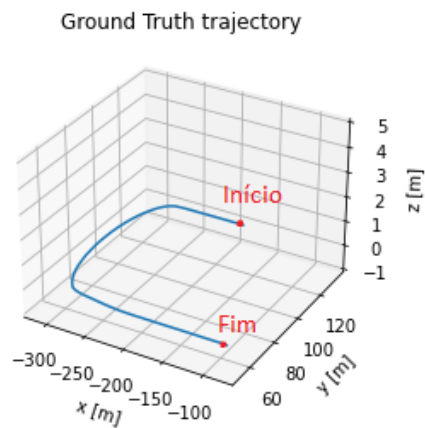
Assim, após feitas todas as considerações, temos o seguinte caminho:

Figura 4 – Cenário de simulação



Fonte: Elaboração Própria

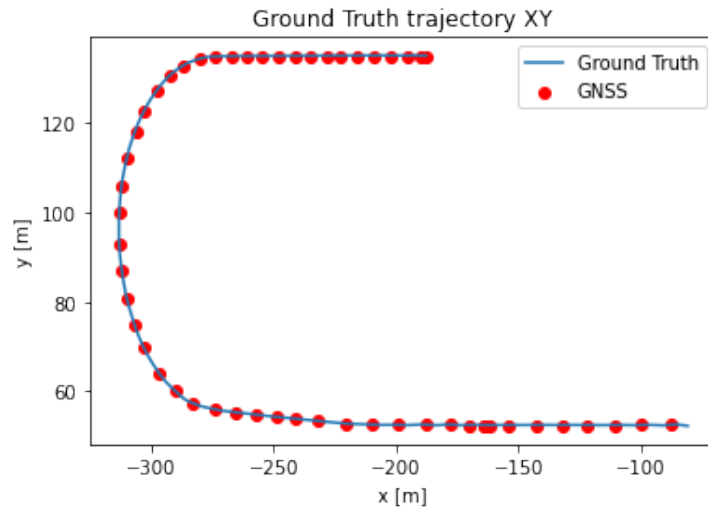
Figura 5 – Caminho realizado pelo carro no CARLA



Fonte: Elaboração Própria

Como pode ser observado na Figura 5, no trajeto não houve deslocamento no eixo vertical, dessa maneira, pode-se olhar apenas para o plano XY sem perder informações relevantes sobre a dinâmica do movimento. Na figura a seguir, tem-se o trecho percorrido pelo carro no plano XY e os valores do GNSS após a conversão.

Figura 6 – Trajetória percorrida no plano XY e GNSS 25 Hz



Fonte: Elaboração Própria

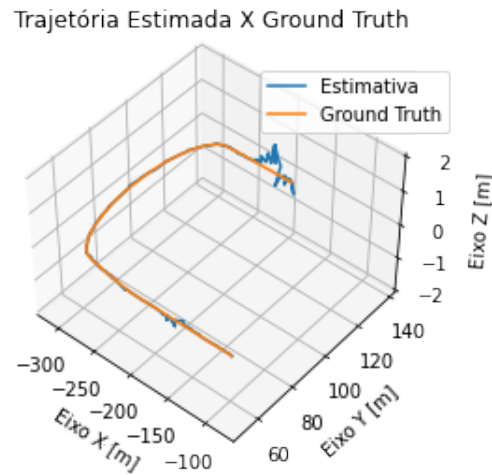
4.2 Resultados

Os dados coletados foram utilizados no código do Filtro de Kalman Estendido implementado em Python.

Durante a simulação, o CARLA possui dois momentos críticos que podem ser observados nos gráficos, que são no início do movimento e perto do final. Nesses locais, há a quebra da inércia do carro e nesses momentos, são os momentos mais ruidosos para as medidas do filtro de Kalman, pois os valores de velocidade e aceleração tendem ao infinito gerando assim no baco de dados valores cuja ordem de grandeza é 10000 vezes maior que os valores para o restante do trajeto.

4.2.1 GNSS 25 Hz

Figura 7 – Estimativa GNSS 25 Hz

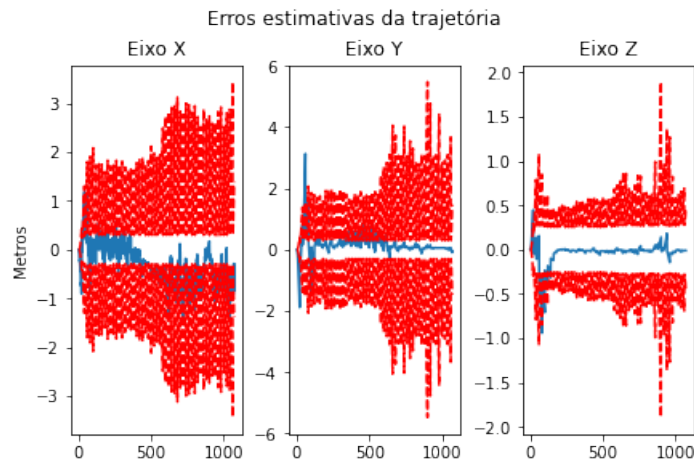


Fonte: Elaboração Própria

Como podemos verificar, o algoritmo de Kalman Estendido conseguiu fazer uma previsão robusta para o trecho simulado. Como pode ser observado, para os eixos X e Y, não houve grandes discrepâncias do resultado. Porém, pode-se ver uma pequena instabilidade no eixo Z que possui resultados substancialmente diferentes da referência. A hipótese levantada para justificar essa diferença no eixo Z foi a quantidade de dados usada para fazer a previsão. A simulação total produziu cerca de 1100 pontos com os dados da dinâmica do carro. Nesse caso, foram usados apenas cerca de 50 pontos para se fazer as correções do GNSS.

Para análise dos erros, foram feitos gráficos com a previsão e o desvio padrão das previsões:

Figura 8 – Erro dos eixos 25 Hz

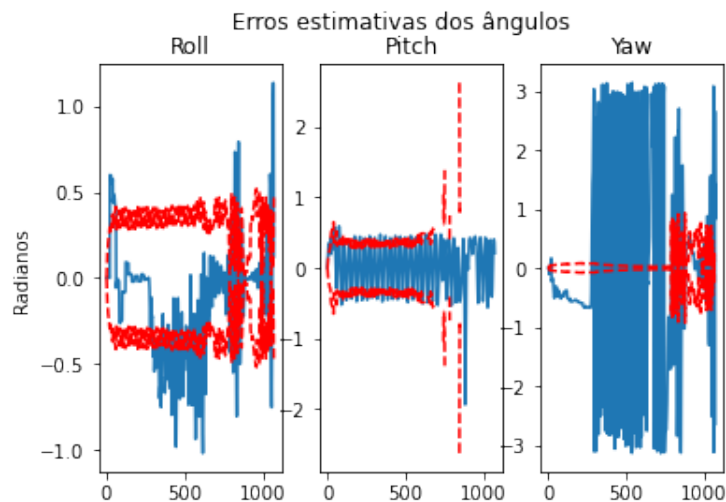


Fonte: Elaboração Própria

As linhas vermelhas representam o intervalo de 3 vezes o desvio padrão da previsão e as linhas azuis são o caminho verdadeiro para cada eixo menos o valor previsto, ou seja, os valores esperados são por volta de zero. Como podemos ver, os valores estão relativamente ruidosos, mas no geral os resultados estão dentro do intervalo esperado. É possível ver o gráfico os pontos no eixo Z que estão fora do intervalo de confiança e estão no mesmo intervalo do pico na figura 9.

No gráfico seguinte temos os desvios dos ângulos:

Figura 9 – Erro dos eixos 25 Hz



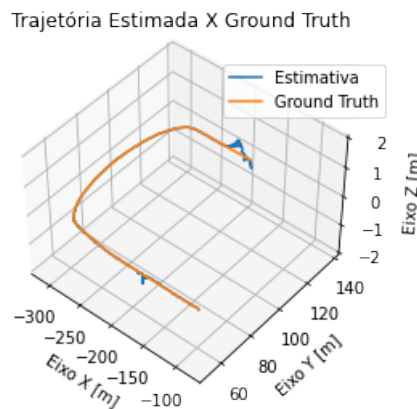
Fonte: Elaboração Própria

De forma semelhante à Figura 9, as linhas vermelhas representam o intervalo de 3 vezes o desvio padrão dos valores previstos e as linhas azuis são os valores dos ângulos verdadeiros decrescidos dos valores previstos.

Como podemos ver, os valores dos ângulos coerentes para as duas primeiras medidas, mas para a última ela possui grandes variações com relação ao desvio padrão calculado. Como os valores do Yaw estão por volta de 3, tal diferença pode ser justificada pela diferença de referencial no círculo trigonométrico, pois os valores próximos de 180° e -180° e foram considerados π e $-\pi$ respectivamente. Com uma mudança no referencial tais medidas poderiam estar próximas de 0.

4.2.2 GNSS 50 Hz

Figura 10 – Estimativa GNSS 50 Hz

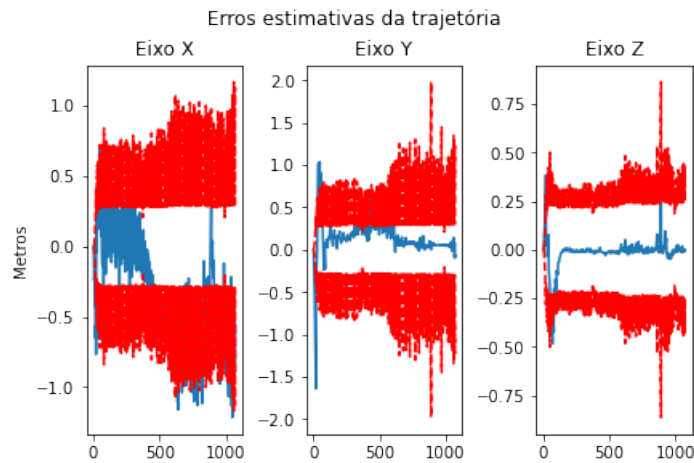


Fonte: Elaboração Própria

Nesta seção, a frequência de amostragem foi aumentada para 50 Hz. O algoritmo de Kalman Estendido mostrou-se ainda mais robusto, com previsões que se aproximam significativamente da referência. Para os eixos X e Y, as discrepâncias foram ainda menores. No entanto, ainda observamos alguma instabilidade no eixo Z, embora menos pronunciada do que na frequência de 25 Hz. Neste caso, a simulação produziu cerca de 1100 pontos de dados da dinâmica do carro, dos quais aproximadamente 100 pontos foram usados para as previsões.

Para análise dos erros, foram gerados gráficos com a previsão e o desvio padrão das previsões:

Figura 11 – Erro dos eixos 50 Hz

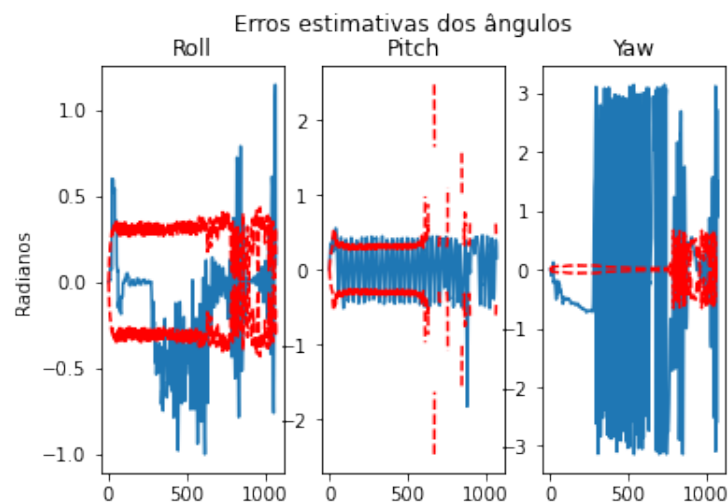


Fonte: Elaboração Própria

As linhas vermelhas representam o intervalo de 3 vezes o desvio padrão da previsão e as linhas azuis são o caminho verdadeiro para cada eixo menos o valor previsto, ou seja, os valores esperados são por volta de zero. Observa-se que os valores estão menos ruidosos e, em geral, dentro do intervalo esperado. A instabilidade no eixo Z, apesar de presente, é menos acentuada.

No gráfico a seguir, temos os desvios dos ângulos:

Figura 12 – Erro dos ângulos 50 Hz



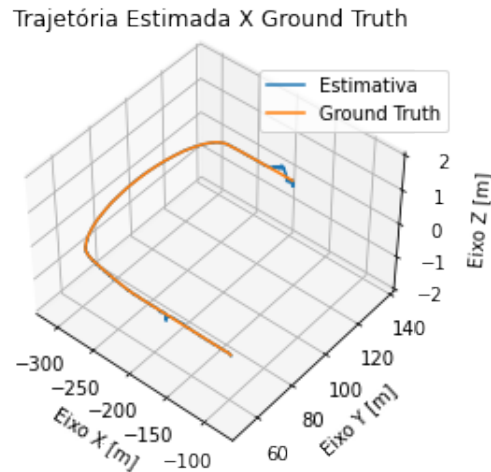
Fonte: Elaboração Própria

Os valores dos ângulos são consistentes com as duas primeiras medidas, mas a última medida continua apresentando grandes variações em relação ao desvio padrão calculado. Novamente, tal diferença também pode ser justificada pela diferença de referencial no círculo trigonométrico, pois os valores próximos de 180° e -180° e foram considerados

π e $-\pi$ respectivamente. Com uma mudança no referencial tais medidas poderiam estar próximas de 0.

4.2.3 GNSS 100 Hz

Figura 13 – Estimativa GNSS 100 Hz

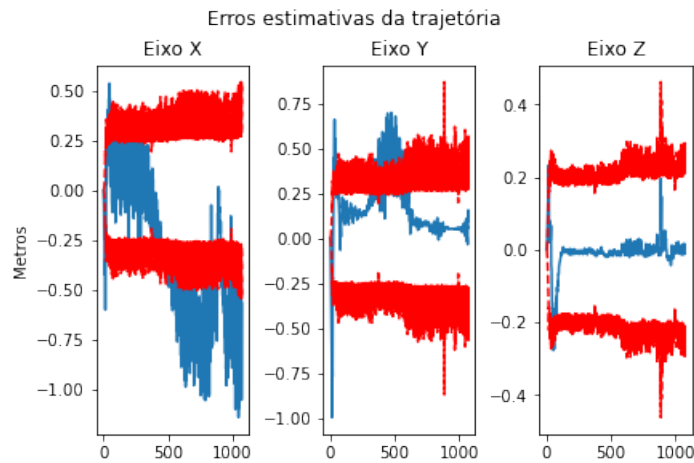


Fonte: Elaboração Própria

Para a frequência de amostragem de 100 Hz, o algoritmo de Kalman Estendido mostrou um desempenho superior. As previsões para os eixos X e Y foram extremamente precisas, com discrepâncias mínimas em relação à referência. No eixo Z, a instabilidade foi ainda mais reduzida. A simulação gerou cerca de 1100 pontos de dados da dinâmica do carro, com cerca de 200 pontos utilizados para as previsões.

Para a análise dos erros, foram criados gráficos com a previsão e o desvio padrão das previsões:

Figura 14 – Erro dos eixos 100 Hz

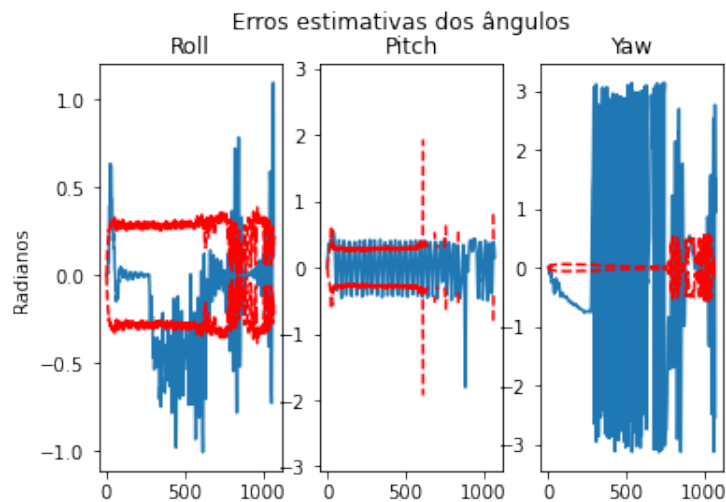


Fonte: Elaboração Própria

As linhas vermelhas representam o intervalo de 3 vezes o desvio padrão da previsão e as linhas azuis são o caminho verdadeiro para cada eixo menos o valor previsto, ou seja, os valores esperados são por volta de zero. Observa-se que os valores estão ainda menos ruidosos e, em geral, dentro do intervalo esperado. A instabilidade no eixo Z, embora presente, é mínima.

No gráfico a seguir, temos os desvios dos ângulos:

Figura 15 – Erro dos ângulos 100 Hz



Fonte: Elaboração Própria

Os valores dos ângulos são consistentes para as duas primeiras medidas, e a última medida apresenta menos variações em relação ao desvio padrão calculado. Mais uma vez, tal diferença pode ser justificada pela diferença de referencial no círculo trigonométrico, pois os valores próximos de 180° e -180° e foram considerados π e $-\pi$ respectivamente.

Com uma mudança no referencial tais medidas poderiam estar próximas de 0.

Ou seja, como pode ser visto, a quantidade de pontos usados fez diferença para manter a estabilidade no eixo Z no filtro de Kalman Estendido. As variações não foram grosseiras, pois, mesmo no pior caso, a diferença de altura marcada com relação ao eixo zero foi de 80 cm. Esse valor é elevado, mas não está numa dimensão totalmente impossível para o mundo real. O melhor caso, por sua vez, deu diferenças com relação ao eixo z de, no máximo 20 cm, que é um valor perfeitamente aceitável para uma diferença de altura de carro controlada pelo GNSS.

5 CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi desenvolver técnicas de fusão sensorial para serem utilizadas em um sistema de localização de um carro autônomo e simulá-las em um programa bem estabelecido na área, o simulador CARLA. As etapas de desenvolvimento deste trabalho passaram pela definição dos objetos matemáticos utilizados pelo estudo do filtro de Kalman, pela análise das técnicas de fusão. Por fim, foi utilizado o simulador para colher dados e aplicar o algoritmo criado para testar sua robustez e sua verossimilhança com uma trajetória simulad.

5.1 Principais Resultados Obtidos e Conclusões

Os resultados obtidos no capítulo anterior a respeito da reconstrução de trajetória realizadas no simulador CARLA evidenciaram que a fusão sensorial feita pelo filtro de Kalman foi funcional e adequada para a previsão do caminho. Durante à análise, foram utilizados três frequências diferentes para o GNSS afim de descobrir a influência desse fator no caminho previsto. Os resultados mostraram que o aumento de valores de GNSS melhoraram a estabilidade do algoritmo em momentos críticos. Além disso, foi possível ver que existe a possibilidade fazer o estudo usando o simulador e obter resultados confiáveis. Dessa maneira, conclui-se que o CARLA é uma ferramenta que pode baratear os custos na hora de testar ideias e algoritmos novos, uma vez que é possível ter resultados úteis sem a necessidade de um carro autônomo real.

Em suma, o projeto atendeu aos seus principais objetivos e proporcionou um estudo de conceitos relacionados à carros autônomos e sistemas estocásticos. Dessa maneira, usando os resultados obtidos, tem-se meios baratos para se testar novas ideias de algoritmos melhores e mais eficientes, uma vez que os resultados obtidos com o simulador são consistentes.

5.2 Trabalhos Futuros

Como apresentado, concluiu-se que o trabalho desenvolvido apresentou resultados positivos e esperados em diversos aspectos, porém esses resultados podem ser melhorados em diversos aspectos. Os resultados obtidos pelo CARLA poderiam ser mais estáveis do que os usados no presente trabalho. Isso poderia ser feito com o uso de um código mais eficiente dentro do CARLA ou um computador mais potente durante a simulação.

Outro ponto que poderia ser acrescentado seria fazer a fusão tripla entre IMU, GNSS e LIDAR deixando o algoritmo ainda mais robusto e mais realista, uma vez que poderia ter maiores informações sobre os arredores do carro. Assim, para um sistema ainda mais

real, poderiam ser adicionados mais carros e pedestres na simulação para fazer e testar algoritmos mais plausíveis de serem aplicados na vida real.

O principal interesse para um trabalho futuro, porém, seria em testar os algoritmos criados para a simulação em dados reais retirados de um carro autônomo real. Isso poderia ser realizado usando o carro disponível na universidade quando ele estiver pronto para que todo o desenvolvimento do algoritmo no CARLA pudesse ser replicado e utilizado em um caso real.

REFERÊNCIAS

- CAHYADI, M. N. *et al.* Performance of gps and imu sensor fusion using unscented kalman filter for precise i-boat navigation in infinite wide waters. **Geodesy and Geodynamics**, v. 14, n. 3, p. 265–274, 2023. ISSN 1674-9847. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1674984722000969>.
- COSTA, J. H. R. Implementação de fusão sensorial para localização de um veículo autônomo. 2013. Disponível em: http://www.coro.cpdee.ufmg.br/publications/joao_costa.pdf.
- ESALQ/USP, D. E. Global navigation satellite systems (gnss). 2020. Disponível em: <https://www.feis.unesp.br/Home/departamentos/fitossanidadeengenhariaruralesolos715/irrigacao5868/gnss.pdf>.
- GREWAL., M. S.; ANDREWS, A. P. Kalman filtering theory and practice using matlab. 2008.
- KALMAN, R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. **Journal of Basic Engineering**, v. 82, n. 1, p. 35–45, 03 1960. ISSN 0021-9223. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.3662552>.
- KELLY, J.; WASLANDER, S. State estimation and localization for self-driving cars. **University of Toronto**, 2020. Disponível em: <https://www.coursera.org/learn/state-estimation-localization-self-driving-cars/home/info>.
- MEMSESE. Inertial measurement unit. 2024. Disponível em: <https://www.memsense.com/products/ms-imu3050>. Acesso em: 29 May 2024.
- PROGRAMME, E. U. A. for the S. What is gnss. 2024. Disponível em: <https://www.euspa.europa.eu/eu-space-programme/galileo/what-gnss>.
- VECTORNAV. What is an inertial measurement unit? 2024. Disponível em: <https://www.vectornav.com/resources/inertial-navigation-articles/what-is-an-inertial-measurement-unit-imu>.
- WELCH, G.; BISHOP, G. An introduction to the kalman filter. 2001. Disponível em: <http://www.cs.unc.edu/~{welch,g}>.
- ZHANG, P. *et al.* Navigation with imu/gps/digital compass with unscented kalman filter. v. 3, p. 1497–1502 Vol. 3, 2005.

APÊNDICES

APÊNDICE A – APÊNDICE(S)

Todos os códigos usados estão no Github.

[https://github.com/rafaeljanke/Fusion-IMU-GNSS-Kalman-s-Filter-with-CARLA/
tree/main](https://github.com/rafaeljanke/Fusion-IMU-GNSS-Kalman-s-Filter-with-CARLA/tree/main)