

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
BACHARELADO EM MATEMÁTICA

**Teoria dos Modelos inspirada em
Geometria Algébrica Moderna**
Representação de Categorias por Feixes

Gabriel Bittencourt Rios

MONOGRAFIA FINAL
MAT 0148 — INTRODUÇÃO AO
TRABALHO CIENTÍFICO

Orientador: Prof. Dr. Hugo Luiz Mariano

São Paulo
2021

O conteúdo deste trabalho é publicado sob a
Licença Creative Commons Atribuição 4.0 In-
ternacional – CC BY 4.0



Ao meu pai, *in memoriam*, por ter sido meu companheiro.

Resumo

G. RIOS, **Teoria dos Modelos inspirada em Geometria Algébrica Moderna: Representação de Categoria por Feixes**. 2021. 58 p. Monografia – Bacharelado em Matemática – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2º Semestre de 2021.

Em suma, essa monografia é dedicada à representação de categorias por feixes. Tendo em mente o mantra “teorias são categorias com estruturas”, estamos então obtendo teorias como feixes. Começamos apresentando a representação de topoi por grupoides locais, de Joyal e Tierney. Para isso, desenvolvemos as técnicas básicas da teoria dos locais, além de concepções categoriais da teoria da descida. Em sequência, seguindo o trabalho de Carsten Butz e Ieke Moerdijk, estudamos uma representação por grupoides topológicos dos topoi de Grothendieck com ponto suficientes. Usamos esse resultado para melhorar nossa primeira representação de topoi por feixes. Após isso, acompanhamos a tese de Henrik Forssell, que refina a construção de Butz e Moerdijk para obter uma representação de teorias coerentes por grupoides. Exploraremos uma generalização da dualidade de Stone por meio dos grupoides de Forssell. Terminamos o trabalho seguindo a tese de Spencer Breiner, expondo os esquemas lógicos.

Com o intuito de tornar essa monografia suficiente ao leitor, incluímos também apêndices relembrando os fatos fundamentais de Categorias e Lógica Categorical.

Palavras-chave: topoi e grupoides; representações de topoi; esquemas lógicos.

Abstract

G. RIOS, **Model Theory Inspired by Modern Algebraic Geometry: Sheaf Representation of Categories**. ano. 58 p. Monografia – Bacharelado em Matemática – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2^a Semestre de 2021.

In short, this monograph is devoted to the representation of categories by sheaves. Keeping in mind the slogan “theories are categories with structures”, we are thus obtaining here theories as sheaves. We start by showing the Joyal and Tierney representation of topoi by localic groupoids. For this, we present categorical analogues to the theory of descent. Next, following the work of Carsten Butz and Ieke Moerdijk, we study a topological groupoid representation of Grothendieck topoi with enough points. We use this result to improve our first sheaf representation of topoi. We follow then with Henrik Forssell’s thesis, which builds over the construction of Butz and Moerdijk to obtain a representation of coherent theories by groupoids. We shall also explore a generalization of Stone’s duality through Forssell’s groupoids. We conclude the work following the thesis of Spencer Breiner, expounding the notion of logical schemes.

In order to make this monograph self-sufficient, we have also included appendices recalling the fundamental facts of Categories and Categorical Logic.

Keywords: topoi and groupoids; representation of topoi; logical schemes.

Sumário

0.1	Entre a Geometria e a Lógica	1
0.1.1	A Completude e o Nullstellensatz	1
0.1.2	Pontos como modelos	2
1	Locales	5
1.1	Locales e seus feixes	5
1.2	Descida para morfismos geométricos	9
1.3	Primeira representação de topos por feixes	12
2	Espaços	15
2.1	Teorias e Grupoides	15
2.2	Aplicação: Dualidade de Stone Generalizada	18
2.3	Topoi e Grupoides	23
2.4	Descida para categorias indexadas	26
2.5	Segunda Representação de Topoi por Feixes	31
2.6	Ultracategorias	33
3	Pretopoi	37
3.1	Método dos Diagramas	37
3.2	Esquemas Lógicos	39
3.3	Espaços axiomatizados	40
3.4	Grupo de Isotropia	43
A	Lógica Categorical	45
A.1	Sintaxe	45
A.2	Semântica Categorical	47
A.3	Teorias e Categorias	49
B	Revisão de categorias	51
B.1	Pretopoi	51
B.2	Categorias Internas	52
B.3	Topoi sobre uma base	54

Motivação

0.1 Entre a Geometria e a Lógica

Historicamente, a Teoria dos Modelos e a Geometria Algébrica aproximam-se quanto aos objetos estudados¹. Incluímos, abaixo, uma curta subseção ilustrando as conexões das duas disciplinas.

0.1.1 A Completude e o Nullstellensatz

Expomos aqui uma observação de [Mar], conectando os clássicos resultados do título acima. Começamos dando os teoremas em termos de operadores de fecho preparando, dessa forma, a linguagem em que os resultados serão comparados.

Dado teoria T deixe T^* o conjunto de modelos satisfazendo-a e, dado modelo M , faça M^* o conjunto de sentenças satisfeitas por esse. Com esse notação, a completude de Gödel pode então ser formulada como

$$T \subseteq T^*, \quad T \subseteq T' \Rightarrow T^* \subseteq (T')^*, \quad T^{**} = T$$

Analogamente, fixado um corpo algebricamente fechado Ω , deixe J^* o conjunto de zeros em Ω para um dado ideal $J \leq \Omega[x_1 x_2 \cdots x_n]$ e, dado subconjunto $I \leq \Omega$, deixe I^* o conjunto de polinômios identicamente nulos em I . O Nullstellensatz de Hilbert então toma forma

$$J \subseteq J^*, \quad J \subseteq J' \Rightarrow J^* \subseteq (J')^*, \quad J^{**} = \sqrt{J}$$

Onde \sqrt{J} o radical de J , isto é, o conjunto $\{x \in \Omega[x_1 x_2 \cdots x_n] : \exists n \in \mathbb{N} (x^n \in J)\}$.

O paralelo entre os dois resultados seria mais claro se o símbolo $\sqrt{}$ acontecesse no contexto lógico também. No entanto, não se admira sua omissão: \wedge admite contração, um modelo M desmonstra φ se, e somente se, também o faz para $\varphi \wedge \varphi$. Desse modo, poderíamos colocar $\sqrt{}$ sem risco de alterar o significado.

Seguindo, mostremos agora uma equivalência entre formas dos dois teoremas. Dado uma fórmula atômica φ em n -variáveis e sem relações, rescrevemo-a usando \perp, \top, \wedge e \oplus (ou exclusivo, ou XOR). Usando então a tradução $\perp \mapsto 0, \top \mapsto 1, a \wedge b \mapsto a.b$ e $\oplus \mapsto a + b$ podemos considerar φ com um elemento de $F_2[x_1, \cdots, x_n]$. Agora, se existe valoração v com $v(\varphi) = 0$ teremos

$$\varphi \in J^{**}$$

Para $J = \langle x_1^2 - x_1, \cdots, x_n^2 - x_n \rangle$. Logo, o Nullstellensatz (sobre o fecho algébrico) de F_2 garante $\varphi \in \sqrt{J}$, ou seja, φ é 0 em $F_2[x_1 \cdots x_n] / \sqrt{J}$. Concluímos que partindo do conjunto $\{x_1^2 - x_1, \cdots, x_n^2 - x_n\}$ e aplicando um número finito de combinações lineares e multiplicações obteremos $\neg\varphi$.

A recíproca é mais sutil, e recomendamos ao leitor o texto citado para mais detalhes. Sem embargo, fazemos aqui uma tradução livre de [Mar, pp. 163], à título de consciência,

Agradecemos a Hendrick Cordeiro Maia e Silva pela sugestão do assunto e de referências para essa seção

¹Como exemplo, lembramos da equação “Teoria dos Modelos = Geometria Algébrica - Corpos” proposta por Hodges em seu clássico compêndio, [Hod]

“O Nullstellensatz decorre da completude. Por exemplo, considere duas geometrias infinitas sobre F_2 . Uma induzida por multiplicação infinitária e outra por coordenadas infinitas $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$. Um teorema de Nullstellensatz para essa última segue da completude (forte) da lógica proposicional clássica, enquanto para a primeira usariamos da completude da lógica infinitária. Explorando a diferença dimensional, portanto, a lógica poderia contribuir para a geometria algébrica ∞ -dimensional”

0.1.2 Pontos como modelos

Seguindo, indicamos uma equivalência interessante à Geometria Algébrica e então esperamos aqui alguma familiaridade com a área. Especificamente, mostraremos como o teorema de Chevalley sobre conjuntos construtíveis equivale à célebre eliminação de quantificadores para teorias algebricamente fechadas, de Tarski. Usamos como referência o curto texto [Be].

Começamos definindo a teoria dos corpos algebricamente fechados na assinatura $\{0, 1, +, \cdot\}$, cujos axiomas são os usuais para corpos juntos do conjunto abaixo, que garante que todo polinômio tem raiz.

$$\{\forall a_0 \forall a_1 \cdots \forall a_n \exists x (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0) : n \in \omega\}$$

Seguindo, fixado anel R , estendemos a assinatura adicionando constantes c_r para cada $r \in R$ e formamos a teoria \mathbf{CAF}_R unindo os axiomas de corpos algebricamente fechados com as sentenças $c_1 = 1$, $c_{a+b} = c_a + c_b$ e $c_{ab} = c_a c_b$. Logo, modelos de \mathbf{CAF}_R são corpos algebricamente fechados k juntos de uma escolha de lementos $\{c_r\}_R$ respeitando as operações de R , isto é, um corpo k associado de um homomorfismo $R \rightarrow k$. Pelo teorema fundamental da Geometria Algébrica, temos uma bijeção dos homomorfismos $R \rightarrow k$ com os morfismos $\text{Spec}(k) \rightarrow \text{Spec}(R)$, isto é, com os pontos geométricos de R . Logo, os modelos de \mathbf{CAF}_R estão em bijeção natural com os pontos geométricos de R .

Lema 0.1.1. *Seja $S = R[t]/\langle p_i \rangle_n$ uma R -álgebra de apresentação finita e $\text{Spec}(S) \rightarrow \text{Spec}(R)$ o mapa estrutural. Um ponto geométrico $x : \text{Spec}(k) \rightarrow \text{Spec}(R)$ é levanta a $\text{Spec}(S)$ sse S , visto como modelo de \mathbf{ACF}_R , satisfaz a sentença $\exists y_1 \exists y_2 \cdots \exists y_n \left(\bigwedge_{j \leq n} f_j(y_j) = 0 \right)$. Essa fórmula sendo nomeada fórmula imagem associada à S .*

Demonstração: Com efeito, um levantamento do ponto x corresponde a um homomorfismo $R[t]/\langle p_i \rangle_n \rightarrow k$, isto é, a uma enupla $(y_i)_n \in k^n$ tal que $p_i(y_i) = 0$. O resultado segue. \square

Proposição 0.1.2. *Seja $Y \rightarrow X$ um morfismo de apresentação localmente finita de esquema e $x : \text{Spec}(k) \rightarrow X$ um ponto geométrico com ponto topológico subjacente $P \in |X|$. Temos que x levanta a Y sse P está na imagem de $Y \rightarrow X$.*

Demonstração: Seja κ_P o corpo residual em P , de forma que x fatore unicamente por $\text{Spec}(\kappa_P) \rightarrow X$. Temos que P está na imagem de $Y \rightarrow X$ sse a fibra $\text{Spec}(\kappa_P) \times_X Y$ é não trivial que, como $\kappa_P \rightarrow k$ é fielmente chato (*faithfully flat*), equivale a ser $\text{Spec}(k) \times_X Y$ não trivial. Pois, como temos apresentação finita sobre $\text{Spec}(k)$, o Nullstellensatz garante $\text{Spec}(k) \times_X Y$ não nulo sse há seu morfismo estrutural a $\text{Spec}(k)$ admite seção. Finalmente, pela propriedade universal, seção do produto fibrado estão em bijeção com levantamentos de x a Y . \square

Precisaremos agora do seguinte resultado de teoria dos modelos.

Lema 0.1.3 (Lema da transferência). *Seja $\Lambda_0 \Lambda$ alguma teoria de base e $\Gamma \Lambda$ um fragmento fechado sob \vee e \wedge . Suponha que uma frase ϕ tem a seguinte propriedade: sempre que A e B são dois modelos Γ tais que $A \models \phi$ e $\Gamma \cap A^* \subseteq B^*$ então $B \models \phi$. Então ϕ é equivalente em Λ_0 a uma fórmula de Γ .*

Teorema 0.1.4 (Chavelley). *Seja S uma R -álgebra finitamente apresentada. A imagem do mapa $|Spec(S)| \rightarrow |Spec(R)|$ é construtível. Equivalentemente, a fórmula imagem ϕ associada à $Spec(S) \rightarrow Spec(R)$ é equivalente sob \mathbf{CAF}_R a uma frase não quantificada.*

Demonstração: Traduzindo a proposição acima para a linguagem da teoria do modelo, vemos que se um modelo $x : R \rightarrow k$ de \mathbf{CAF}_R satisfaz a fórmula da imagem ϕ depende apenas de $\ker(x) \trianglelefteq R$. Em particular, se um modelo satisfaz ϕ depende apenas de quais sentenças livres de quantificador ele satisfaz. Assim, ϕ e o fragmento livre de quantificador de Λ satisfazem as condições do lema de transferência, onde tomamos $\Lambda_0 = \mathbf{CAF}_R$. Como consequência, vemos que é equivalente em \mathbf{CAF}_R a uma sentença livre de quantificadores, conforme desejado. Reciprocamente, ϕ é equivalente a uma frase da forma $\bigvee_i \left((b_i \neq 0) \wedge \bigwedge_j (a_{ij} = 0) \right)$. Traduzindo para a linguagem da teoria do esquema, um ponto geométrico de $Spec(R)$ está na imagem de $Spec(S) \rightarrow Spec(R)$ sse seu ponto topológico subjacente está em $\bigcup_i \left(D(b_i) \cap \bigcap_j V(a_{ij}) \right)$ \square

Capítulo 1

Locales

Mesmo sem fazer menções explícitas a essa, esse capítulo é profundamente influenciado pela interpretação de Grothendieck da teoria de Galois. De fato, o célebre tratamento de André Joyal e Myles Tierney dessa teoria em *An extension of the Galois theory of Grothendieck* ([JoTi]) foi basilar à maior parte da literatura citada aqui. Uma explicação da influência desse trabalho pode ser encontrada na representação obtida nesse, que caracteriza os topoi de Grothendieck como feixes de grupoides locais. Com efeito, conforme veremos na segunda seção, o resultado teve importância não só prática, mas como também ajudou a legitimar o *zeitgeist* da teoria. Exporemos nesse capítulo essa representação de Joyal e Tierney e, para isso, desenvolvemos também a linguagem dos locais e a teoria da descida. Finalmente, usaremos as técnicas construídas para obter uma segunda representação; essa caracterizando os topoi pequenos como as seções globais de feixes de locais coerentes, devida a Joachim Lambek e Ieke Moerdijk. Descrevemos abaixo a estrutura do capítulo.

Na primeira seção, tratamos dos locais e dos topoi de feixes construídos por meio desses. Em especial, falamos sobre cobertura de Diaconescu – uma técnica que nos permite associar um topos local a cada topos de Grothendieck, ferramenta que será fundamental na representação de topoi por grupoides mencionada na introdução. Mencionaremos também a importante fatoração hiperconectado-localica dos morfismos geométricos.

Na seção segunda aprofundamo-nos na teoria da descida, a linguagem desenvolvida ali permeando todo o seguinte da monografia. Notamos que exploramos aqui, primeiramente, a descida no contexto dos morfismos geométrico e prorrogamos ao próximo capítulo o caso da descida a longo de categorias indexadas.

Finalmente, na terceira seção, apresentamos nossa primeira representação de Topoi por feixes. Começamos lembrando o teorema fundamental da Geometria Algébrica, fazêmo-lo para contextualizar nossa representação, que será uma generalização quase direta das técnicas de esquemas afins.

1.1 Locales e seus feixes

O ponto de partida histórico da teoria dos topos é o estudo dos feixes sobre um espaço topológico. Até hoje, as categorias da forma $Sh(X)$ para X espaço tem um importante espaço na teoria, tanto prático quanto motivacional. No entanto, notamos que podemos definir um feixe sobre um espaço X sem fazer menção alguma aos pontos desse espaço. De fato, pondo **Con** a categoria dos conjuntos¹, um feixe é apenas um funtor

¹Antevemos o leitor que a notação vigente para a referida categoria é **Set**. Similarmente, preferimos $Fei(X)$ à $Sh(X)$ para denotar a categoria de feixes de um espaço X e demais convenções análogas. Alicerçamo-nos aqui em um precedente histórico: Grothendieck, Verdier, Deligne e e demais escreviam **Ens**, de *ensemble*!

$F : \mathcal{O}(X)^{op} \rightarrow \mathbf{Con}$ tal que para toda família $\{U_i\}_I$ de $\mathcal{O}(X)$ temos

$$\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}(X)}}(\bigvee U, F) \simeq \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}(X)}}(S, F)$$

com $U = \bigcup_I U_i$, S a peneira induzida pela família e $\widehat{\mathcal{O}(X)}$ a categoria pré-feixes, isto é, dos funtores $\mathcal{O}(X) \rightarrow \mathbf{Con}$ (para mais detalhes cf. [SGL, II]). Dessa forma, precisamos apenas do reticulado de abertos de um espaço para definir a noção de feixe e essa reflexão nos leva ao estudo dos quadros. Seguiremos aqui os tratamentos de [SGL, IX] e [JoTi].

Definição 1.1.1. Um *quadro* (*frame*) é um conjunto ordenado Q que admite ínfimos (\wedge) finito, supremos (\vee) quaisquer e satisfaz a lei distributiva abaixo

$$A \wedge \bigvee_{i \in I} B_i = \bigvee_{i \in I} (A \wedge B_i)$$

para quaisquer $A, B_i \in Q$. Naturalmente, um *morfismo entre quadros* $A \xrightarrow{\phi} B$ é uma função que preserva ordem, ínfimos finitos e supremos quaisquer. É claro então como podemos formar a categoria **Quadros** de morfismos entre quadros.

Seguindo, enquanto seria possível conduzir toda teoria usando apenas da noção de quadro, queremos, como indicado na introdução, uma generalização de espaços topológicos. Pois, gostaríamos então que nossa generalização tivesse, como os espaços, uma natureza geométrica. No entanto, nossa definição de quadros tem aparência marcadamente algébrica. Para retificar essa sensação, convencionou-se introduzir o conceito de *locales* e tratar esses como nossos espaços generalizados,

$$\mathbf{Locales} := (\mathbf{Quadros})^{op}$$

Ou seja, os locales tem uma existência puramente ficcional, são um truque simbólico que possibilita-nos a depositar sobre os locales nossas sensibilidades geométricas. A modo de sublimar essa contradição damos dois nomes ao mesmo objeto: denotaremos por $\mathcal{O}(X)$ o quadro correspondente ao locale X e por $f^{-1} : \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ o mapa entre quadros vindo do morfismo de locales $f : X \rightarrow Y$.

Observação 1.1.2 (Adjunção **Espaços** \dashv **Locales**). Claramente, todo espaço topológico X gera o locale $\mathcal{O}(X)$ e é então natural questionar se o caminho inverso é possível. Como obtemos $\mathcal{O}(X)$ “esquecendo os pontos” de X , é natural imaginar que para obter um espaço a partir de um locale devamos, de alguma forma, achar seus pontos. A intuição chave é que, em **Con**, os elementos de um conjunto A estão em bijeção com as funções $1 \rightarrow A$. Inspirados nisso, dado um locale L definimos um espaço cujos elementos são seus pontos $pt(L) := \mathbf{Locales}(1, L)$, onde 1 é locale terminal, e cuja topologia tem como abertos os conjuntos $\{p \in pt(L) : p^{-1}(U) = 1\}$, para $U \in \mathcal{O}(X)$. O leitor pode facilmente verificar que $\mathcal{O}(1) = \Omega_S$ e, em especial, para $S = \mathbf{Con}$ temos $\mathcal{O}(1) = \{0, 1\}$. Finalmente, pode-se verificar a adjunção $\mathcal{O}(-) \dashv pt$ entre **Locales** e espaços topológicos. Para um tratamento mais calmo, com uma discussão da restrição da adjunção acima a uma equivalência, recomendamos [SGL, IX.3].

Continuando, podemos agora definir feixes sobre um locale da mesma maneira que definimos para espaços topológicos. Por conveniência ao leitor, incluímos abaixo a definição.

Definição 1.1.3. Dado locale X , considere o conjunto ordenado $\mathcal{O}(X)$ como uma categoria da forma usual. Dado $F : \mathcal{O}(X)^{op} \rightarrow \mathbf{Con}$ denotaremos sua ação em $U \leq V$ como $(-) \upharpoonright_U : FV \rightarrow FU$. Dizemos o funtor F um *feixe* (*sheaf*) se para toda família $\{U_i\}_I$ de $\mathcal{O}(X)$ o diagrama abaixo é um equalizador

$$F(U) \xrightarrow{e} \prod_{i \in I} F(U_i) \xrightleftharpoons[p]{p} \prod_{i, j \in I} F(U_i \cap U_j)$$

Onde $U = \cup_I U_i$, $e(x) = x \upharpoonright_{U_i}$ e p e q são induzidos, respectivamente, pelas funções $(p_{ij})_{i,j \in I}$ e $(q_{ij})_{i,j \in I}$ dadas por

$$\prod_{i \in I} F(U_i) \xrightarrow{p_{ij}} F(U_i \cap U_j) \quad \prod_{i \in I} F(U_i) \xrightarrow{q_{ij}} F(U_i \cap U_j)$$

$$p_{ij}((x_k)_{k \in I}) = x_i \upharpoonright_{U_i \cap U_j} \quad q_{ij}((x_k)_{k \in I}) = x_j \upharpoonright_{U_i \cap U_j}$$

Denotamos por $\text{Fei}(X)$ a subcategoria plena de $\widehat{\mathcal{O}(X)}$ cujos objetos são os feixes. Diremos *locálico* (*localic*) um topos que é, a menos de uma equivalência, da forma $\text{Fei}(X)$ para algum locale X .

Aviso 1.1.4. Nesse trabalho, principalmente nessa seção, tomamos a habitual posição de adotar um topos fixado qualquer como nosso universo \mathcal{S} de conjuntos. Por meio da lógica interna, trabalhamos neste universo como faríamos na teoria dos conjuntos usual, com únicas exceções sendo que não usamos nem o axioma da escolha, nem a lei do terceiro excluído. A título de exemplo desse ponto de vista, a categoria dos locais no teorema 1.1.5 é, a valer, a categoria dos locais internos à \mathcal{S} .

Restringindo o teorema de Diaconescu (B.3.5) aos topoi locálicos, podemos obter o resultado abaixo.

Teorema 1.1.5. *Seja X um locale e $\mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{S}$ um \mathcal{S} -topos. Definindo o locale $\text{Loc}(\mathcal{E})$ como $\mathcal{O}(\text{Loc}(\mathcal{E})) := p_*\Omega_{\mathcal{E}}$ e considerando **Locales** como uma 2-categoria discreta, obtemos a equivalência*

$$\mathfrak{Topos}/\mathcal{S}(\mathcal{E}, \text{Fei}(X)) \simeq \mathbf{Locales}(\text{Loc}(\mathcal{E}), X)$$

natural em \mathcal{E} .

Demonstração (esboço): Primeiramente, notamos que $\text{Loc}(\mathcal{E})$ é de fato um locale. Com efeito, por ser um \mathcal{S} -topos, temos que \mathcal{E} é \mathcal{S} -completa e então construímos os supremos de $p_*\Omega_{\mathcal{E}}$ internamente por meio dos \mathcal{S} -colimites.

Seguindo, usando o teorema B.3.12, um morfismo qualquer $f : \mathcal{E} \rightarrow \text{Fei}_{\mathcal{S}}(X)$ em $\mathfrak{Topos}/\mathcal{S}$ equivale a um mapa contínuo plano $\hat{f} : \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{E}$. Pois, como \hat{f} é plano e $\mathcal{O}(X)$ tem limites finitos, o corolário B.3.4 garante que \hat{f} preserva limites finitos. Logo, como $\mathcal{O}(X)$ um conjunto ordenado com máximo, podemos garantir que a imagem \hat{f} está contida em $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(1)$ fato que, por meio da lógica interna, induz um morfismo $\mathcal{O}(X) \rightarrow p_*\Omega_{\mathcal{E}}$. Finalmente, a continuidade de \hat{f} garante que esse preserva supremos, ou seja, o mapa $\mathcal{O}(X) \rightarrow p_*(\mathcal{E})$ é um morfismo de quadros. \square

O teorema acima nos permite obter a

Corolário 1.1.6 (Reflexão Locálica). *O 2-functor **Locales** $\xrightarrow{\text{Fei}}$ $\mathfrak{Topos}/\mathcal{S}$ admite adjunto à esquerda, cuja ação nos objetos mapeia a $\text{Loc}(\mathcal{E})$ o \mathcal{S} -topos \mathcal{E} . Em especial, a counidade da adjunção é isomórfica à identidade, ou seja, Fei é plenifiel.*

Como toda reflexão, o teorema acima determina uma fatoração. Dado um morfismo geométrico $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$ temos o triângulo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\epsilon_{\mathcal{E}}} & \text{Fei}(\text{Loc}(\mathcal{E})) \\ & \searrow f & \downarrow \\ & & \mathcal{S} \end{array}$$

Notamos que a unidade $\mathcal{E} \rightarrow \text{Fei}(\text{Loc}(\mathcal{E}))$ preserva o classificador de subobjetos, isto é, é um morfismo geométrico *hiperconectado* (*hyperconnected*). Temos a seguinte caracterização de morfismos hiperconectados,

Lema 1.1.7. Para um morfismo geométrico $\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F}$, são equivalentes:

- i) f é hiperconectado.
- ii) f^* é plenifiel e sua imagem é fechada sob subobjetos.
- iii) f^* é plenifiel e sua imagem é fechada sob quocientes.
- iv) A unidade e a counidade da adjunção $f^* \dashv f_*$ são mônicas.

Ademais, morfismos hiperconectados são ortogonais aos locais, onde dizemos um morfismo geométrico $\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F}$ localíco sse \mathcal{E} localíco como um \mathcal{F} -topos.

Demonstração: Veja [Joh1, 1.5]. □

Em suma, temos a

Corolário 1.1.8. (Fatoração Hiperconectado - localíca) Todo morfismo geométrico $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$ pode ser fatorado em um morfismo hiperconectado seguido de um morfismo localíco.

Seguindo, introduzimos agora a noção de morfismo geométrico aberto, inspirada no conceito topológico de função aberta. Incluímos abaixo, indicando referências de demonstrações, duas proposições importantes. A primeira dessas caracteriza o conceito por meio de propriedades lógicas (segundo as sensibilidades dessa monografia), enquanto a segunda estabelece claramente o elo com o conceito da topologia.

Definição 1.1.9. Diremos um morfismo geométrico $\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F}$ aberto quando os mapas induzidos $f_X^* : \text{Sub}_{\mathcal{F}}(X) \rightarrow \text{Sub}_{\mathcal{E}}(f^*X)$ admitem adjuntos à esquerda $(f_X)_!$, de forma natural em X .

Proposição 1.1.10. Para um morfismo geométrico $\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F}$, são equivalentes:

- i) f é aberto.
- ii) f^* preserva quantificação universal, isto é, para todo par $S \mapsto X \xrightarrow{\alpha} Y$ temos

$$f^*(\forall_{\alpha} S) = \forall_{f^*(\alpha)} f^*(S)$$

Demonstração: Veja [JoTi, VII.1, prop. 1]. □

Proposição 1.1.11. O morfismo de locais $X \xrightarrow{f} Y$ induz um morfismo $\text{Sh}(X) \xrightarrow{f} \text{Sh}(Y)$ aberto se, e somente se, o mapa $f^{-1} : \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ admite adjunto à esquerda $f_!$ satisfazendo a identidade de Frobenius:

$$f_!(V \wedge f^{-1}U) = f_!(V) \wedge U$$

Demonstração: Veja [SGL, IX.7, prop. 2]. □

Feito essa introdução, podemos mostrar o resultado abaixo, que será fundamental às seções futuras.

Teorema 1.1.12 (Cobertura de Diaconescu). Seja \mathcal{S} um topos com objeto de número natural. Para todo \mathcal{S} -topos de Grothendieck \mathcal{E} há locale X e morfismo geométrico $\text{Fei}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{E}$ sobrejetivo e aberto.

Demonstração (esboço): Seja (\mathbb{C}, J) um sítio para \mathcal{E} . Defina o conjunto ordenado \mathbb{P} cujos elementos são sequências $(c_n \xrightarrow{f_{n-1}} c_{n-1} \xrightarrow{f_{n-2}} \cdots \xrightarrow{f_2} c_1 \xrightarrow{f_1} c_0)$ de setas de \mathbb{C} e cuja ordem é dada por $s \leq t$ sse s um segmento inicial de t (isto é, se $s = (f_{n-1}, \dots, f_0)$ então $t = (f_{n+m-1}, \dots, f_n, f_{n-1}, \dots, f_0)$). Definimos então $F : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{C}$ por $(c_n \rightarrow c_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow c_0) \mapsto c_n$ e colocamos K como a menor topologia em \mathbb{P} que preserva e levanta as coberturas de J . Por resultados padrões de teoria dos topoi (cf., e.g., [SGL, IX.8, prop. 1]), o morfismo F levanta-se a uma sobrejeção aberta $\text{Fei}(\mathbb{P}, K) \rightarrow \text{Fei}(\mathbb{C}, J) \simeq \mathcal{E}$. □

1.2 Descida para morfismos geométricos

Nessa seção, apresentaremos a primeira das duas generalizações presentes nesse trabalho da teoria de descida de Módulos, concebida por Grothendieck. Focaremos aqui na descida ao longo de morfismos geométricos e, posteriormente, no próximo capítulo, trataremos da descida ao longo de categorias indexadas, mas já adiantamos aqui que essa é uma instânciação daquela. Apresentaremos resultados fundamentais ao campo e que serão usados nas seções futuras. Acompanhamos de perto o celebrado artigo de Ieke Moerdijk, [Mo1].

Faremos a exposição da descida ao longo de morfismos geométricos usando da linguagem dos topoi simpliciais. Essa decisão é lastreada no fato que todo morfismo geométrico induz um topos simplicial conforme será exposto no exemplo 1.2.2.

Definição 1.2.1. Deixe Δ a categoria de conjuntos finitos $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ e mapas que preservam ordem. Um *topos simplicial* \mathcal{E}_\bullet é uma sequência $(\mathcal{E}_n)_\omega$ de topoi associada de funtores $\alpha^* : \mathcal{E}_m \rightarrow \mathcal{E}_n$ para cada mapa $\alpha : [n] \rightarrow [m]$ em Δ de forma que

- Para cada $n \in \omega$ há isomorfismo natural $\eta_n : (1_n)^* \xrightarrow{\cong} 1_{\mathcal{E}_n}$;
- Para cada par de mapas $n \xrightarrow{\alpha} m \xrightarrow{\beta} k$ de Δ há isomorfismo natural $\mu_{\alpha, \beta} : \alpha^* \beta^* \xrightarrow{\cong} (\beta\alpha)^*$;
- Para cada tripla de mapas $n \xrightarrow{\alpha} m \xrightarrow{\beta} k \xrightarrow{\gamma} l$ de Δ e para cada mapa $a \xrightarrow{\delta} b$ de Δ os diagramas abaixo comutam

$$\begin{array}{ccc} \alpha^* \beta^* \gamma^* & \xrightarrow{\alpha^* \mu_{\beta, \gamma}} & \alpha^* (\gamma\beta)^* \\ \mu_{\alpha, \beta} \gamma^* \downarrow & & \downarrow \mu_{\alpha, \beta\gamma} \\ (\beta\alpha)^* \gamma^* & \xrightarrow{\mu_{\beta\alpha, \gamma}} & (\gamma\beta\alpha)^* \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \delta^* (1_b)^* & \xrightarrow{\delta^* \eta_b} & \delta^* \\ \mu_{\delta, 1_b} \searrow & & \parallel \\ & & \delta^* \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \xleftarrow{\eta_a \delta^*} & (1_a)^* \delta^* \\ & \mu_{1_a, \delta} \swarrow & \\ & & \delta^* \end{array}$$

Exemplo 1.2.2. Todo morfismo geométrico $\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{S}$ induz um topos simplicial pondo $\mathcal{E}_0 := \mathcal{E}$ e $\mathcal{E}_{n+1} := \mathcal{E} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{E}_n$. Como indicado na introdução, esse é o tipo de topos simplicial que estamos capitalmente interessados em.

Observação 1.2.3. Usando a linguagem da seção 2.4, um topos simplicial é simplesmente um topos indexado por Δ . Em geral, categorias indexadas por Δ são chamadas categorias simpliciais. *En passant*, mencionamos que o estudo dessas é íntimo à álgebra homológica, uma das origens da teoria de categorias e, dessa forma, existe um interesse histórico nessa seção para além da teoria de descida.

É natural considerar os cocones sobre um topos simplicial.

Definição 1.2.4. Um *pseudococone sobre um topos simplicial* \mathcal{E}_\bullet é uma sequência de morfismos geométricos $f_n : \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{F}$ e isomorfismos $f_\alpha : f_n \circ \alpha^* \rightarrow f_m$ para os mapas $[n] \xrightarrow{\alpha} [m]$ de Δ de forma que esses dados são compatíveis com as condições de coerência do pseudofuntor \mathcal{E}_\bullet , isto é, tal que para todo $[n]$ e par $[m] \xrightarrow{\alpha} [k] \xrightarrow{\beta} [l]$ de Δ temos

$$f_{1_{[n]}} = 1_{\mathcal{E}_n} \quad \text{e} \quad f_{\beta\alpha}(f_n \tau) = f_\beta(f_\alpha \beta^*)$$

onde $\tau : \alpha^* \beta^* \cong (\beta\alpha)^*$ o isomorfismo dado pela estrutura de Δ -indexada. Seguindo, a descida ao longo de \mathcal{E}_\bullet será o pseudocolimite desse sistema, o pseudocone $\mathcal{E}_n \rightarrow \hat{\mathcal{E}}$ por qual

todo outro pseudocone é fatorado por, de forma (a menos de uma equivalência) unívoca. Graficamente:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{E}_n & & & & \\
 & \searrow \mu_n & & \nearrow \mu_m & \\
 & & \hat{\mathcal{E}} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{F} \\
 & \nearrow \mu_m & & \searrow \mu_n & \\
 \mathcal{E}_m & & & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & f_n & \\
 & \curvearrowright & \\
 & & \\
 & f_m &
 \end{array}$$

Temos também uma noção alternativa de cocone, que considera apenas as primeiras coordenadas de um topoi simplicial.

Definição 1.2.5. Dado um topoi simplicial \mathcal{E}_\bullet , considere o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{E}_2 & \xrightarrow{d_{01}} & \mathcal{E}_1 & \xrightarrow{d_0} & \mathcal{E}_0 \\
 & \searrow d_{12} & & \swarrow e & \\
 & & \mathcal{E}_1 & \xleftarrow{e} & \mathcal{E}_0 \\
 & \swarrow d_{02} & & \nwarrow d_1 &
 \end{array}$$

Onde, e.g., o morfismo d_{02} é dado pela seta de $[1] \rightarrow [2]$ que manda $0 \mapsto 0$ e $1 \mapsto 2$. Um *pseudococone curto sobre um topoi simplicial \mathcal{E}_\bullet* é um morfismo geométrico $\mathcal{E}_0 \xrightarrow{b} \mathcal{F}$ e uma transformação $bd_1 \xRightarrow{\mu} bd_0$ satisfazendo as condições de cociclo,

$$e^*(\mu) \cong 1 \quad d_{12}^*\mu \circ d_{01}^*\mu \cong d_{02}^*\mu$$

Denote por $Des(\mathcal{E}_\bullet)$ o cocone curto universal.

Notavelmente, os topoi $Des(\mathcal{E}_\bullet)$ e $\hat{\mathcal{E}}$ são equivalentes, ou seja, um cocone curto tem informação suficiente para ser estendido de forma unívoca a cocone.

Teorema 1.2.6. Os topoi $Des(\mathcal{E}_\bullet)$ e $\hat{\mathcal{E}}$ são equivalentes. Ademais, $Des(\mathcal{E}_\bullet)$ sempre existe e admite descrição explícita como a categoria cujos objetos são pares (X, θ) , onde $X \in \mathcal{E}_0$ e $\theta : d_1^*X \xrightarrow{\cong} d_0^*X$ um isomorfismo tal que $i^*\theta = 1$ e $d_{12}^*\theta \circ d_{01}^*\theta \cong d_{02}^*\theta$.

Demonstração: Veja [Mol1, 3.4]. □

Tendo agora acesso a uma descrição explícita do cocone universal, é instrutivo considerar alguns exemplos.

Exemplo 1.2.7. Dado $\text{Fei}(X) \xrightarrow{f} \mathcal{E}$, podemos formar, como no exemplo 1.2.2, o topoi simplicial para o morfismo f ,

$$\text{Fei}(X) \times_{\mathcal{E}} \text{Sh}(X) \times_{\mathcal{E}} \text{Fei}(X) \rightrightarrows \text{Fei}(X) \times_{\mathcal{E}} \text{Fei}(X) \rightrightarrows \text{Fei}(X) \xrightarrow{f} \mathcal{E}$$

Como locais são preservados por produtos fibrados (cf., e.g., [Joh1, 2.1]), teremos locais Y e Z com $\text{Fei}(X) \times_{\mathcal{E}} \text{Fei}(X) \simeq \text{Fei}(Y)$ e $\text{Fei}(X) \times_{\mathcal{E}} \text{Fei}(X) \times_{\mathcal{E}} \text{Fei}(X) \simeq \text{Fei}(Z)$. Ademais, por ser *Loc* 2-refletiva em $\mathfrak{Top}/\mathcal{S}$, podemos garantir $Z \cong Y \times_X Y$. Em suma, o diagrama acima é refletido ao grupoide localico

$$\begin{array}{ccccc}
 Y \times_X Y & \xrightarrow{d_{01}} & Y & \xrightarrow{d_0} & X \\
 & \searrow d_{12} & & \swarrow i & \\
 & & Y & \xleftarrow{i} & X \\
 & \swarrow d_{02} & & \nwarrow d_1 &
 \end{array}$$

e $Des(f)$, o cocone universal para o topoi simplicial induzido por f , terá como objetos os pares $E \in \text{Fei}(X)$ e $\theta : d_0^*E \xrightarrow{\cong} d_1^*E$ com

$$i^*\theta = 1_E \quad d_{12}^*\theta \circ d_{01}^*\theta = d_{02}^*\theta$$

O leitor então talvez reconheça $Des(f)$ como o topoi de feixes equivariantes do grupoide acima, exposto abaixo.

Definição 1.2.8. Dado um grupoide de locais

$$\mathbf{G} = G_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xleftarrow{i} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{d_1} \end{array} G_0$$

podemos formar um topos simplicial $\text{Fei}(\mathbf{G})_\bullet$ considerando os feixes do nervo de \mathbf{G} . Denotaremos por $B\mathbf{G}$ o cocone universal desse simplicial, conhecido como *topos classificante de \mathbf{G}* na literatura. O teorema 1.2.6 nos dá que $B\mathbf{G}$ é dado por pares $X \in \text{Sh}(G_0)$ e $\theta : s_0^*X \rightarrow s_1^*X$, onde $s_i : \text{Fei}(G_1) \rightarrow \text{Fei}(G_0)$ o morfismo induzido por $d_i : G_1 \rightarrow G_0$. Alternativamente, usando a equivalência $\text{Fei}(X) \simeq \text{Ét}(X)$ podemos descrever os elementos de $B\mathbf{G}$ como espaços étales $E \rightarrow G_0$ associados de uma ação $\mu : G_1 \times_{G_0} E \rightarrow E$ unitária e associativa.

Observação 1.2.9. Explicando a nomenclatura acima, quando \mathbf{G} um grupo (isto é, quando $G_0 = 1$), um resultado clássico da teoria dos feixes nos dá que para qualquer espaço X , temos $\text{Geom}(\text{Sh}(X), B\mathbf{G})$ equivalente aos G -fibrados principais (*principal G -bundles*) sobre X , isto é, $B\mathbf{G}$ é topos classificante dos G -fibrados principais. No caso geral, $B\mathbf{G}$ ainda é um topos classificante, mas o resultado é um pouco mais sutil, cf. [Mo2, 6.1] e [Bu, 3.4, 5.3].

Dado um morfismo geométrico $\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{S}$ e, usando a notação do exemplo 1.2.7, temos que a imagem inversa induz um morfismo canônico $\mathcal{S} \rightarrow \text{Des}(f)$. Em analogia com pilhas, estamos interessados em quais condições sobre f garantem que esse morfismo seja uma equivalência, isto é, em quando f é um *morfismo de descida efetivo* (*effective descent*). Seguindo, um celebrado teorema de Joyal e Tierney afirma que

Teorema 1.2.10 (Joyal-Tierney). *Morfismos geométricos abertos e sobrejetivos são morfismos de descida efetivos.*

Demonstração: Veja [JoTi, 2, thm 1]. □

Logo, pelo resultado acima, o teorema 1.1.12, em conjunção ao exemplo 1.2.7, nos dá a

Teorema 1.2.11 (Representação por grupoides locais). *Seja \mathcal{S} um topos com objeto de número natural. Para todo \mathcal{S} -topos de Grothendieck \mathcal{E} , há um grupoide localíco \mathbf{G} interno à \mathcal{S} tal que*

$$\mathcal{E} \simeq B\mathbf{G}$$

Para além de sua natureza técnica, temos interesse moral no resultado. O topos, como o nome trai², foi concebido como uma generalização de espaços topológicos. Deste modo, o resultado de Joyal-Tierney dá lastro a essa interpretação, classificando todo topoi de Grothendieck como os feixes equivariantes de um grupoide localíco, um objeto marcadamente geométrico.

Para o caso de topoi \mathcal{E} pontilhados (que admite ponto, isto é, morfismo geométrico $\mathbf{Con} \rightarrow \mathcal{E}$), conectado (cujo único morfismo $\mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Con}$ tem imagem inversa plenifiel) e atômico (cujo único morfismo $\mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Con}$ tem como imagem inversa um funtor lógico), o resultado acima toma uma forma especialmente agradável às sensibilidades lógicas dessa monografia.

Teorema 1.2.12. *Seja \mathcal{A} um topos de Grothendieck atômico e conexo que admita um ponto $\mathcal{S} \xrightarrow{x} \mathcal{A}$. Existe um grupo localíco $\mathbf{G} \in \mathcal{S}$ com $\mathcal{A} \cong B\mathbf{G}$. Ademais, se M_x o \mathcal{S} -modelo correspondente ao ponto mencionado, teremos \mathbf{G} o grupo $\text{Aut}(M)$.*

Demonstração: Veja [JoTi, VIII.3, thm 1]. □

²“Comme le terme de «topos» lui-même est censé précisément le suggérer, il semble raisonnable et légitime aux auteurs du présent Séminaire de considérer que l’objet de la Topologie est l’étude des topos”, [SGA4, IV, pp. 154]

1.3 Primeira representação de topos por feixes

Começamos lembrando da dualidade entre os esquemas afins e os anéis comutativos – da representação de anéis comutativos como feixes sobre um espaço. Fazemos essa digressão não só como régua moral às representações de topoi por feixes que mostraremos, mas como também para contextualizar-nos tecnicamente: a primeira representação de topoi por feixes, exposta por Lambek e Moerdijk em [LaMo], é uma generalização quase direta da técnica de esquemas afins.

Espectro de um anél. Dado anel comutativo A com unidade defina o espaço de Zariski, $\mathbf{Spec}(A) := \{p \triangleleft A : p \text{ é um ideal primo}\}$, cuja topologia tem como básicos os conjuntos $B_f := \{p \in \mathbf{Spec}(A) : f \notin p\}$ para $f \in A$. Considere então o feixe de anéis $\tilde{A} : \mathbf{Spec}(A) \rightarrow \mathbf{Con}$ dado por $\tilde{A}(B_f) := [f]^{-1}A$, onde $[f]^{-1}A$ a localização do anel por f , isto é, o anel de frações com numeradores em A e denominadores de forma f^n .

Teorema 1.3.1. *Dado um anel A , temos*

- i) *Para todo $p \in \mathbf{Spec}(A)$, a fibra \tilde{A}_p é um anel local (i.e., tem um único ideal maximal ou, equivalentemente, se $x + y = 1$ implica em ou $x = 1$ ou $y = 1$);*
- ii) *A é isomórfico às seções globais de \tilde{A} , i.e., $A \simeq \Gamma(\tilde{A})$.*
- iii) *Existe um monomorfismo $A \hookrightarrow \prod_p \tilde{A}_p$.*

Defina \mathbf{Esq}_{Af} – a categoria dos esquemas afins – como a subcategoria plena dos espaços anelados³ dada por pares $(\mathbf{Spec}(A), \tilde{A})$. Obtemos então que

Teorema 1.3.2. *Temos a adjunção $\mathbf{Esq}_{Af}^{op}(X, \mathbf{Spec}(A)) \cong \mathbf{anelCom}(\Gamma(\mathcal{O}_X), A)$. Em especial, obtemos $\mathbf{Esq}_{Af}^{op} \simeq \mathbf{anelCom}$.*

Seguindo, falemos de topoi. Dado um topos pequeno \mathcal{E} deixe $\mathbf{Spec}(\mathcal{E})$ o conjunto de ideais primos da álgebra de Heyting $\mathbf{Sub}_{\mathcal{E}}(1)$. Definamos uma topologia em $\mathbf{Spec}(\mathcal{E})$, pondo como base os conjuntos

$$B_p := \{P \in \mathbf{Spec}(\mathcal{E}) : p \notin P\}$$

para cada $p \in \mathbf{Sub}_{\mathcal{E}}(1)$. Definimos um pré-feixe $\tilde{\mathcal{E}}$ sobre $\mathbf{Spec}(\mathcal{E})$ pondo

$$\tilde{\mathcal{E}}(B_p) := \mathcal{E}/p$$

Note que temos $\Gamma(\tilde{\mathcal{E}}) = \tilde{\mathcal{E}}(B_{\top}) = \mathcal{E}/1 \cong \mathcal{E}$. Inspirados na representação dos anéis, definimos

Definição 1.3.3. Dizemos *sublocal*⁴ um topos \mathcal{E} onde $\mathbf{Sub}_{\mathcal{E}}(1)$ tem ideal maximal único.

Lema 1.3.4. *O funtor $\tilde{\mathcal{E}}$ é um feixe e todas suas fibras são topoi sublocais.*

Demonstração: Como $\mathbf{Spec}(\mathcal{E})$ acontece como espaço de ideais de um reticulado distributivo temo-lo um locale coerente⁵ e então, em especial, temo-lo compacto (cf., por exemplo, [Joh3, II.3]). Logo, para provar $\tilde{\mathcal{E}}$ um feixe basta mostrar que, para um par $p, q \in \mathbf{Sub}(1)$, temos o diagrama abaixo um equalizador.

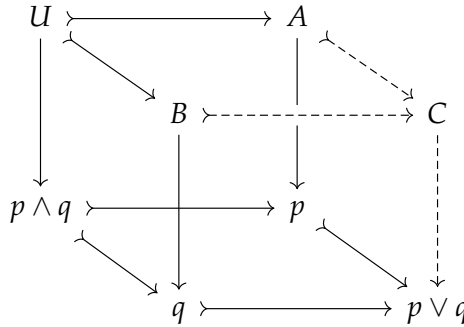
$$\mathcal{E}/(p \wedge q) \longrightarrow \mathcal{E}/p \times \mathcal{E}/q \rightrightarrows \mathcal{E}/(p \vee q)$$

³Lembramos que um espaço anelado é um par (X, \mathcal{O}_X) onde X um espaço topológico e \mathcal{O}_X um feixe de anéis sobre X .

⁴Originalmente, em especial em [LaMo], o adjetivo vinha sem prefixo, mas a segunda representação por feixes indicou-nos outra propriedade ao título.

⁵O conceito localíco que corresponde à noção de espaço espectral

Reproduzindo um belo argumento de [Aw2, 3, thm 3], usando elementos generalizados, notamos que o diagrama acima é um equalizador sse dado $U \rightarrow p \wedge q$, $A \rightarrow p$ e $B \rightarrow q$ tal que as faces do cubo abaixo com aresta comum $U \rightarrow p \wedge q$ são produtos fibrados, há único $C \rightarrow p \vee q$ que faz todas faces produtos fibrados.



Definimos então C como a soma amalgamada das setas $U \rightrightarrows \begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}$. Lembrando que a base do cubo é um pullback e um pushout, é rotina verificar que esse C satisfaz as condições pedidas. Seguindo, dado $P \in \text{Sub}(\mathcal{E})$, temos

$$\tilde{\mathcal{E}}_P = \varinjlim_{p \notin P} \mathcal{E}/p$$

Pelo teorema fundamental e por existirem colimites de topoi, temos que $\hat{\mathcal{E}}_P$ é de fato um topos. Para notarmos-lo sublocal, observe que o colimite filtrado acima nos dá, lembrando que colimites em $\mathcal{T}\text{opos}$ são limites em $\mathcal{C}\mathcal{A}\mathcal{T}$, que, considerando os seguintes conjuntos como álgebras de Heyting, temos $\text{Sub}_{\tilde{\mathcal{E}}_P}(1) \cong \text{Sub}_{\mathcal{E}}(1)/\{p : p \notin P\}$. Por ser P primo, $p \vee q$ em $\{x : x \notin P\}$ garante ou $p \notin P$ ou $q \notin P$, como queríamos. \square

Logo, temos a

Teorema 1.3.5 (Primeira representação por feixes). *Dado um topos pequeno \mathcal{E} , existe um espaço $\text{Spec}(\mathcal{E})$ e um feixe $\tilde{\mathcal{E}}$ sobre esse espaço tal que*

- i) *Para todo $P \in \text{Spec}(\mathcal{E})$, a fibra $\tilde{\mathcal{E}}_P$ é um topos sublocal;*
- ii) *\mathcal{E} é isomórfico às seções globais de $\tilde{\mathcal{E}}$, i.e., $\mathcal{E} \simeq \Gamma(\tilde{\mathcal{E}})$.*
- iii) *Existe um morfismo lógico conservativo $\mathcal{E} \rightarrow \prod_{P \in \text{Spec}(\mathcal{E})} \tilde{\mathcal{E}}_P$.*

Capítulo 2

Espaços

Nesse capítulo, passamos dos locais aos espaços, consequentemente desenvolvendo noções mais tratáveis às sensibilidades clássicas. Grande parte dos resultados desenvolvidos aqui são relações entre as naturezas sintática e semântica da lógica matemática. De certa forma, não se admira que esse seja o caso, o estudo das ligações entre essas é um *leitmotiv* notoriamente presente no campo; citamos os teoremas de correção e completude, as álgebras de Lindbaum-Tarski e o resultado de Post como menções da legião de instâncias da interação entre a sintaxe e a semântica. Colocamos abaixo um esqueleto do capítulo.

Começamos expondo uma representação por grupoides topológicos de teorias lógicas. Seguimos a tese de Henrik Forssell, um aluno de Awodey, e os artigos que a acompanharam. Mostramos como obter uma adjunção sintaxe-semântica usando desses grupoides, além de estabelecer uma conexão de Galois entre as subteorias e os subgrupoides. Continuamos seguindo a tese de Forssell no segundo capítulo, onde exploramos uma generalização da dualidade de Stone ao contexto da primeira ordem.

Seguindo, explicamos que a representação de Forssell é baseada nos resultados da tese Carsten Butz, tema da terceira seção. Orientado por Ietz Moerdijk, Butz mostra que restringindo nossas considerações aos topoi com pontos suficientes podemos obter uma representação desses em termos de grupoides topológicos.

Na seção quarta, cumprimos nossa promessa e expomos a descida ao longo de categorias indexadas, além de apresentarmos relações entre as duas maneiras de descida. Seguindo, aplicamos os resultados das duas últimas seções na seção cinco, melhorando nossa primeira representação de topoi por feixes, seguindo lá os passos da tese de Steve Awodey.

Terminamos, na sexta seção, com uma introdução concisa da teoria de ultracategorias, concebida por Makkai. Incluímos essa apresentação majoritariamente por motivos históricos, tendo sido a generalização da Dualidade de Stone para pretopoi originalmente obtida por meio dessa técnica. Seguimos a exposição de Jacob Lurie, [Lu], apresentando as definições e os principais teoremas, em especial, a celebrada completude conceitual. Finalmente, apresentamos um resultado que nos permite representar as ultracategorias como fibrações sobre espaços Hausdorff compactos, fato que combina com nosso interesse em pilhas para a topologia coerente.

2.1 Teorias e Grupoides

Nessa seção, exploramos a representação de teorias em termos de grupoides topológicos. Veremos, na seção três, como mencionado na introdução, que a representação obtida aqui é uma instância de uma construção categorial mais geral. No entanto, urge este capítulo haja vista a simplicidade que a construção toma quando restrita ao contexto lógico. De fato, enquanto a terceira seção fala de conjuntos de enumeração, objeto artificial à primeira vista, conversaremos aqui sobre isomorfismos dos modelos de nossa teoria!

Para evitar problemas com tamanho, restringimos nossas considerações aos modelos κ -pequenos. Seguimos a tese mencionada, [Fo1], além dos artigos que a acompanharam, [AwFo], [Fo2] e [Fo3].

Dado teoria \mathbb{T} sobre uma assinatura Σ , fixe um cardinal $\kappa \geq |\Sigma| \cup \omega$. Deixe $X_{\mathbb{T}}$ o espaço dos \mathbb{T} -modelos cujo conjunto subjacente é um elemento de κ , sua topologia tendo como básicos os conjuntos

$$\langle\langle \bar{x} : \varphi, \bar{a} \rangle\rangle := \left\{ M \in X_{\mathbb{T}} : \bar{a} \in \llbracket \bar{x} : \varphi \rrbracket^M \right\}$$

para as fórmulas coerentes φ de Σ com n -variáveis livres e listas $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \kappa^n$.

Observação 2.1.1. Poderíamos, sem grandes mudanças na teoria, definir $X_{\mathbb{T}}$ como o espaço dos modelos κ -pequenos, isto é, cuja cardinalidade é menor que κ . Enquanto essa descrição tem uma clara vantagem conceitual e didática, ela peca nos aspectos técnicos, em especial, citamos dois: *i)* $X_{\mathbb{T}}$ seria uma classe própria e *ii)* para definir nossa topologia precisaríamos achar um modo de identificar as sequências $\bar{a} \in \kappa^n$ com elementos do modelo. Um leitor motivado pode perceber que os espaços de enumeração de Butz e Moerdijk são uma resposta para *ii)*, e foi essa a técnica adotada por Spencer Breiner em sua tese.

Continuando, deixe $G_{\mathbb{T}}$ o grupoide de isomorfismos entre modelos. Sua topologia é a mais grossa que torna contínuos os mapas $d_0, d_1 : G_{\mathbb{T}} \rightrightarrows X_{\mathbb{T}}$, que associam a um isomorfismo seu domínio e codomínio, e contém, para todo tipo A de Σ e par $a, b \in \kappa$, os conjuntos

$$\langle\langle A, a \mapsto b \rangle\rangle := \left\{ f : M \xrightarrow{\cong} N \in G_{\mathbb{T}} : a \in \llbracket A \rrbracket^M \wedge f_A(a) = b \right\}$$

Como na representação de topoi, temos que

Lema 2.1.2. *Os espaços $G_{\mathbb{T}}$ e $X_{\mathbb{T}}$ são sóbrios.*

Demonstração: Veja [AwFo, 1.2.7]. □

Note agora que para qualquer fórmula φ temos um funtor $\llbracket \bar{x} : \varphi \rrbracket^{(-)} : X_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbf{Con}$ com ação $M \mapsto \llbracket \bar{x} : \varphi \rrbracket^M$. Por meio da equivalência $\mathbf{Con}^A \simeq \mathbf{Con}/A$, podemos então obter a projeção

$$\llbracket \bar{x} : \varphi \rrbracket_{X_{\mathbb{T}}} = \left\{ \langle M, \bar{a} \rangle : M \in X_{\mathbb{T}}, \bar{a} \in \llbracket \bar{x} : \varphi \rrbracket^M \right\} \xrightarrow{\pi} X_{\mathbb{T}}$$

Ponha a topologia de $\llbracket \bar{x} : \varphi \rrbracket_{X_{\mathbb{T}}}$ como a mais grossa que faz π contínua. Usando a descrição dos básicos de $X_{\mathbb{T}}$, é claro que

Lema 2.1.3. *Os básicos de $\llbracket \bar{x} : \varphi \rrbracket_{X_{\mathbb{T}}}$ são da forma*

$$\langle\langle \bar{x}, \bar{y} : \psi, \bar{a} \rangle\rangle := \left\{ \langle M, \bar{b} \rangle : \bar{b} \star \bar{a} \in \llbracket \bar{x}, \bar{y} : \varphi \wedge \psi \rrbracket^M \right\}$$

para ψ coerente e $\bar{a} \in \kappa^n$. Onde $\bar{b} \star \bar{a}$ denota a concatenação de \bar{b} e \bar{a} . Consequentemente, π é um homeomorfismo local.

Logo, a ação $(\bar{x} : \varphi) \mapsto \llbracket \bar{x} : \varphi \rrbracket_{X_{\mathbb{T}}}$ descreve um funtor $\mathbf{Sin}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbf{Fei}(X_{\mathbb{T}})$. Note que podemos estender esse funtor à $\mathcal{M} : \mathbf{Sin}(\mathbb{T}) \rightarrow BG_{\mathbb{T}}$ pondo $[\bar{x} : \varphi] \mapsto (\llbracket \bar{x} : \varphi \rrbracket_{X_{\mathbb{T}}}, \theta)$, onde

$$\theta(\langle M, \bar{a} \rangle, M \xrightarrow{f} N) = \langle N, f(\bar{a}) \rangle$$

Chamaremos *definíveis* os objetos na imagem de \mathcal{M} .

Proposição 2.1.4. *O funtor \mathcal{M} é coerente e reflete coberturas de $BG_{\mathbb{T}}$ em famílias da topologia coerentes. Em especial \mathcal{M} é conservativo e, pelo teorema B.3.12, \mathcal{M} induz um morfismo geométrico $BG_{\mathbb{T}} \xrightarrow{m} \mathbf{Fei}_{\text{Coe}}(\mathbf{Sin}(\mathbb{T}))$.*

Demonstração (esboço): Para $BG_{\mathbb{T}} \xrightarrow{U} \mathbf{Fei}(X_{\mathbb{T}}) \xrightarrow{U'} \mathbf{Con}/X_{\mathbb{T}}$ funtores de esquecimento, temos

$$\begin{array}{ccc}
 & & BG_{\mathbb{T}} \\
 & \nearrow \mathcal{M} & \downarrow U \\
 \mathbf{Sin}(\mathbb{T}) & \longrightarrow & \mathbf{Fei}(X_{\mathbb{T}}) \\
 & \searrow & \downarrow U' \\
 & & \mathbf{Con}/X_{\mathbb{T}}
 \end{array}$$

Como os esquecimentos refletem estrutura coerente e coberturas, basta mostrar que a ação $[\bar{x} : \varphi] \mapsto \llbracket \bar{x} : \varphi \rrbracket_{X_{\mathbb{T}}} \rightarrow X_{\mathbb{T}}$ também o faz para obter \mathcal{M} coerente e contínuo. Pois, temos o triângulo

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{Sin}(\mathbb{T}) & \\
 \swarrow & & \searrow F \\
 \mathbf{Con}/X_{\mathbb{T}} & \simeq & \varinjlim_{M \in X_{\mathbb{T}}} \mathbf{Con}/M
 \end{array}$$

Onde F é induzido pelas setas $M : \mathbf{Sin}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbf{Con}$. Temos então que, por \mathbb{T} ter suficientes modelos, F é conservativo e, por serem todos M coerentes, seu produto F também o é. Pela equivalência, segue $\mathbf{Sin}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbf{Con}/X_{\mathbb{T}}$ conservativo e coerente, logo ele também reflete coberturas, como queríamos. Para mais detalhes desse argumento, veja [Fo3, 3.2.2]. \square

Lema 2.1.5. *Dado $[\bar{x} : \varphi] \in \mathbf{Sin}(\mathbb{T})$, os abertos básicos de $\llbracket \bar{x} : \varphi \rrbracket_{X_{\mathbb{T}}}$ fechados sob a ação θ são da forma $\llbracket \bar{x} : \xi \rrbracket_{X_{\mathbb{T}}} \subseteq \llbracket \bar{x} : \varphi \rrbracket_{X_{\mathbb{T}}}$ para alguma fórmula coerente ξ .*

Demonstração: Seja $U = \langle \llbracket \bar{x}, \bar{y} : \psi \rrbracket, \bar{a} \rangle$ um aberto básico de $\llbracket \bar{x} : \varphi \rrbracket_{X_{\mathbb{T}}}$. Passando à um isomorfismo se necessário (cf. [Fo1, 2.3.4.1]), podemos assumir sem perda de generalidade que para $i < j$ com y_i, y_j de mesmo tipo temos $a_i \neq a_j$. Logo, pondo σ a conjunção das desigualdades $y_i \neq y_j$ para $i < j$ com y_i, y_j de mesmo tipo, afirmo que para $\xi = \exists \bar{y}(\sigma \wedge \psi \wedge \varphi)$ temos $\llbracket \bar{x} : \xi \rrbracket_{X_{\mathbb{T}}}$ o fecho de U sobre a ação θ . De fato, temos $U \subseteq \llbracket \bar{x} : \xi \rrbracket_{X_{\mathbb{T}}}$ e $\llbracket \bar{x} : \xi \rrbracket_{X_{\mathbb{T}}}$ fechado sob θ . Ademais, se $(M, \bar{b}) \in \llbracket \bar{x} : \xi \rrbracket_{X_{\mathbb{T}}}$ então há \bar{c} com $\bar{b} \star \bar{c} \in \llbracket \bar{x}, \bar{y} : \sigma \wedge \psi \wedge \varphi \rrbracket^M$. Podemos construir, um isomorfismo f que troca as listas \bar{b} e \bar{c} de lugar (cf., e.g., [AwFo, 1.2.5]), e então obtemos $\theta((M, \bar{b}), \bar{c}) \in U$, ou seja, obtemos (M, \bar{b}) está no fecho de U sob θ . \square

O lema acima nos permite concluir que os subobjetos de objetos definíveis são uniões de objetos definíveis. Em especial, um subobjeto de um objeto compacto $\mathcal{M}([\bar{x} : \varphi])$ será da forma $\bigvee_n \mathcal{M}([\bar{x} : \psi_i])$ que, tomando a disjunção, reduzimos a $\mathcal{M}([\bar{x} : \bigvee_n \psi_i])$, ou seja, \mathcal{M} é pleno nos subobjetos de compactos. Portanto, como \mathcal{M} reflete coberturas, podemos concluir que os definíveis são objetos compactos. Em especial, o gráfico de um morfismo entre dois objetos definíveis será definível e então, por ser \mathcal{M} coerente e conservativo, será o gráfico de um morfismo de $\mathbf{Sin}(\mathbb{T})$. Ou seja, \mathcal{M} é pleno. Ademais, temos também que

Proposição 2.1.6. *Os objetos definíveis geram o topos $BG_{\mathbb{T}}$.*

Demonstração: Veja [AwFo, 1.4.7]. \square

Teorema 2.1.7 (Representação de Butz-Moerdijk para teorias). *Temos que $BG_{\mathbb{T}}$ é o topos classificador da teoria \mathbb{T} . O funtor m da proposição 2.1.4 é metade de uma equivalência $BG_{\mathbb{T}} \simeq \mathbf{Fei}_{\text{Coe}}(\mathbf{Sin}(\mathbb{T}))$*

Demonstração: Pela proposição 2.1.6, os objetos definíveis são um sítio para $BG_{\mathbb{T}}$. Ademais, a discussão acima e a proposição 2.1.4 nos dão que \mathcal{M} é plenifiel e reflete coberturas, logo, pelo lema da comparação (veja, e.g., [Elephant, C, 2.2.3]), temos $BG_{\mathbb{T}} \simeq \text{Fei}_{\text{Coe}}(\text{Sin}(\mathbb{T}))$. \square

Finalmente, mencionamos que temos uma conexão de Galois entre os subgrupoides e subtopoi da nossa representação.

Teorema 2.1.8 (Conexão de Galois). *Seja \mathbb{T} uma teoria coerente, dado subtopos $\mathcal{H} \leq BG_{\mathbb{T}}$ há subteoria $\mathbb{T}' \subseteq \mathbb{T}$ com $\mathcal{H} \cong \text{Fei}(G_{\mathbb{T}'})$. Ademais, pondo $\text{Sub}(BG_{\mathbb{T}})$ a categoria de subtopoi de $BG_{\mathbb{T}}$ e $\text{Sub}(G_{\mathbb{T}})$ a categoria de subgrupoides de $G_{\mathbb{T}}$, defina um mapa $pt : \text{Sub}(BG_{\mathbb{T}}) \rightarrow \text{Sub}(G_{\mathbb{T}})$ pondo*

$$pt(BG_{\mathbb{T}'}) = \{M \in (G_{\mathbb{T}})_0 : M \models \mathbb{T}'\}$$

Defina também $B : \text{Sub}(G_{\mathbb{T}}) \rightarrow \text{Sub}(BG_{\mathbb{T}})$ pondo $B\mathcal{H} = BG_{Th(\mathcal{H})}$, onde

$$Th(\mathcal{H}) = \{\varphi : \forall M \in \mathcal{H}_0 (M \models \varphi)\}$$

Temos que os mapas acima formam uma conexão de Galois $B : \text{Sub}(G_{\mathbb{T}}) \rightleftarrows \text{Sub}(BG_{\mathbb{T}}) : pt$, no sentido que $B\mathcal{H} \leq \mathcal{F}$ se, e somente, $\mathcal{H} \leq pt(\mathcal{F})$.

Demonstração: Veja [Fo2, 3.2.2]. \square

2.2 Aplicação: Dualidade de Stone Generalizada

O assunto dessa seção é tangente ao tema principal do trabalho e os resultados são auto-contidos. O leitor que preferir ignorá-la em primeira leitura não sentirá falta dela nos capítulos futuros. Sem embargo, a dualidade de Stone é uma das jóias da teoria dos modelos clássicas e então recomendamos a leitura dessa seção a qualquer leitor interessado na lógica categorial.

Munidos da representação para teorias da seção anterior, podemos caminhar em direção a uma generalização da dualidade de Stone obtida por Henrik Forssell e Steve Awodey e exposta em [AwFo] e [Fo1]. Para contextualizar o que segue, incluimos abaixo o resultado clássico.

Observação 2.2.1 (Dualidade de Stone). Dado uma álgebra de boole B um *ultrafiltro* de B é a pré-imagem $f^{-1}(1)$ de um morfismo de álgebras de boole $f : B \rightarrow 2 (= \{0, 1\})$. Podemos tornar o conjunto de ultrafiltros de B em um espaço, por meio da base de *clopens* dada por $\{X \subseteq B : b \in X\}$ para $b \in B$. Seguindo, um *espaço de Stone* é um espaço compacto, Hausdorff e totalmente desconexo, equivalentemente, é o limite indutivo de espaços discretos finitos. Contas de rotina mostram que, dado espaço de stone S , seu conjunto de *clopens* é uma álgebra de Boole. Notavelmente, os conjuntos *clopen* de S correspondem a funções contínuas $S \rightarrow 2$, onde $2 = \{0, 1\}$ discreto. A dualidade de Stone afirma que essas duas ações são mutuamente inversas,

Teorema 2.2.2 (Dualidade de Stone). *Pondo **Stone** a subcategoria plena dos espaços de Stone, temos $\text{Stone}(-, 2) : \text{Stone}^{op} \rightleftarrows \mathbf{Bool} : \mathbf{Bool}(-, 2)$ são uma equivalência.*

Feito essa contextualização, precisamos definir dois conceitos antes de introduzir a primeira parte da nossa adjunção

Definição 2.2.3. Seja \mathbb{T} sobre uma assinatura Σ . Diremos que \mathbb{T} tem *igualdade decidível* se para todo tipo A temos um predicado \neq_A tal que, dado um par de variáveis distintas $x \neq y$ de tipo A , temos

$$(x \neq_A y) \wedge (x = y) \vdash_A \perp \quad \text{e} \quad \top \vdash_A (x \neq_A y) \vee (x = y)$$

Assumimos, durante a duração dessa seção, que a teoria \mathbb{T} com qual trabalhamos tem igualdade decidível.

Observação 2.2.4. Note que \mathbb{T} tem igualdade decidível sse $\mathbf{Sin}(\mathbb{T})$, sua categoria sintática, é decidível, isto é, sse para todo $A \in \mathbf{Sin}(\mathbb{T})$ a diagonal Δ_A é um subobjeto complementado. Em especial, se \mathbb{T} é uma teoria clássica teremos $\mathbf{Sin}(\mathbb{T})$ booliana e consequentemente \mathbb{T} terá igualdade decidível.

Como na seção anterior, para evitar problemas com tamanho precisamos restringir nossas considerações aos modelos “abaixo” de um cardinal κ . Para poder fazer isso, precisamos que nossas teorias não percam informação quando restringidas à esse contexto, isto é, que tenham suficientes κ -modelos.

Definição 2.2.5. Dado cardinal κ , deixe \mathbf{Con}_κ a subcategoria plena dos conjuntos hereditariamente menores¹ que κ . Uma categoria coerente \mathcal{D} tem *suficientes κ -modelos* (enough κ -models) sse os funtores coerentes $\mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Con}_\kappa$ juntamente refletem coberturas, isto é, sse dado uma família $\{f_i : d_i \rightarrow c\}_I$ de \mathcal{D} , se para todo funtor $M : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Con}_\kappa$ coerente temos

$$\bigcup_I \text{im}(f_i) = Mc$$

Então há i_1, i_2, \dots, i_n com $\bigvee_n Mf_{i_j} = c$.

Definimos \mathbf{CoeDec}_κ , a categoria que de funtores coerentes entre categorias pequenas decidíveis e coerentes com suficientes κ -modelos.

Observação 2.2.6. Note a relação entre as noção de suficientes κ -modelos com a de suficientes pontos. Usando a máxima “modelos são funtores”, a primeira afirmação equivale à suficientes κ -pontos e a segunda à suficientes modelos em \mathbf{Con} .

Podemos agora definir a primeira parte da nossa adjunção, que posteriormente restringiremos à um dualidade. Notamos que o “espírito” da adjunção que mostraremos é comum na lógica categorial, sendo uma adjunção entre sintaxe e semântica.

Dado \mathcal{D} de \mathbf{CoeDec}_κ defina o espaço $X_{\mathcal{D}} := \mathbf{CoeDec}(\mathcal{D}, \mathbf{Con}_\kappa)$, com topologia dada pelos sub-básicos

$$U_{\bar{f}, \bar{a}} := \left\{ M \in X_{\mathcal{D}} : \exists x \in Ma \left(\bigwedge_{i \leq n} Mf_i(x) = a_i \right) \right\}$$

para $\{f_i : a \rightarrow b_i\}_{i \leq n}$ uma família de setas de \mathcal{D} e a_i uma sequência de conjuntos hereditariamente menores que κ . Seguindo, o funtor $Mod : \mathbf{CoeDec}_\kappa \rightarrow \mathbf{Gpd}$ associa a uma categoria \mathcal{D} o conjunto de isomorfismos naturais entre os funtores de $X_{\mathcal{D}}$. Analogamente ao grupoide da seção anterior, a topologia de $Mod(\mathcal{D})$ é dada pela mais grossa que torna $d_0, d_1 : Mod(\mathcal{D}) \rightrightarrows X_{\mathcal{D}}$ contínuas e contém, para todo objeto $A \in \mathcal{D}$ e par de conjuntos a e b hereditariamente menores que κ , o conjunto

$$V_{A, a \rightarrow b} := \{f : M \xrightarrow{\cong} N : a \in MA \wedge f_A(a) = b\}$$

É rotina então verificar que, dado um funtor coerente $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ em \mathbf{CoeDec}_κ , a ação de composição

$$\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \begin{array}{c} \xrightarrow{M} \\ \cong \parallel \alpha \\ \xrightarrow{N} \end{array} \mathbf{Con}_\kappa \mapsto \mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{MF} \\ \cong \parallel \alpha F \\ \xrightarrow{NF} \end{array} \mathbf{Con}_\kappa$$

¹dizemos um conjunto hereditariamente menor que um dado cardinal α se todos seus elementos i) tem cardinalidade menor que α e ii) são hereditariamente menores que α .

induz morfismos contínuos f_0 e f_1 entre os grupoides,

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}(\mathcal{D}) & \xrightarrow{f_1} & \text{Mod}(\mathcal{A}) \\ d_0 \downarrow d_1 & & d_0 \downarrow d_1 \\ X_{\mathcal{D}} & \xrightarrow{f_0} & X_{\mathcal{A}} \end{array}$$

Chamamos $\text{Mod} : \mathbf{CoeDec}_{\kappa}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Gpd}$ de *functor semântico*. A notação Mod vem do caso² $\mathcal{D} = \mathbf{Sin}(\mathbb{T})$, uma vez que teremos $\text{Mod}(\mathbf{Sin}(\mathbb{T}))$ equivalente aos modelos de \mathbb{T} em \mathbf{Con}_{κ} , cf. o teorema A.3.3. Mostramos abaixo a relação do grupoide definido acima com o da seção anterior.

Teorema 2.2.7. *Para $\mathcal{D} \in \mathbf{CoeDec}_{\kappa}$, pondo $\mathbb{T}_{\mathcal{D}}$ a teoria gerada pela categoria \mathcal{D} (cf. apêndice A.3.4), temos um homeomorfismo de grupoides $\text{Mod}(\mathcal{D}) \cong G_{\mathbb{T}_{\mathcal{D}}}$. Consequentemente, obtemos a equivalência $\text{Fei}_{\text{Coe}}(\mathcal{D}) \simeq B(\text{Mod}(\mathcal{D}))$, ou seja, $B\text{Mod}(\mathcal{D})$ classifica \mathcal{D} .*

Demonstração: Sabemos que os pontos de $X_{\mathbb{T}_{\mathcal{D}}}$, isto é, os modelos de $\mathbb{T}_{\mathcal{D}}$ equivalem a funtores coerentes $M : \mathbf{Sin}(\mathbb{T}_{\mathcal{D}}) \rightarrow \mathbf{Con}$. Além disso, por definição de $X_{\mathbb{T}_{\mathcal{D}}}$, podemos garantir que esses funtores fatoram em \mathbf{Con}_{κ} . Pondo $\theta_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Sin}(\mathbb{T}_{\mathcal{D}})$ uma das metades da equivalência entre essas categorias (cf. proposição A.3.6), definimos um mapa $\phi_0 : X_{\mathbb{T}_{\mathcal{D}}} \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{D})_0$ pela ação $M : \mathbf{Sin}(\mathbb{T}_{\mathcal{D}}) \rightarrow \mathbf{Con}_{\kappa} \mapsto M \circ \theta_{\mathcal{D}}$, mostremos então ϕ_0 um homeomorfismo. Pois, por ser $\theta_{\mathcal{D}}$ metade de uma equivalência, é fácil ver que ϕ_0 admite inversa ψ_0 . Quanto à continuidade, note que dado sequências $\{f_i : a \rightarrow b_i\}_{i \leq n}$ e $\bar{a} \in \mathbf{Con}_{\kappa}$ é fácil ver

$$(\phi_0)^{-1}(U_{\bar{f}, \bar{a}}) = \left\langle \left[\bar{y} : \exists x \left(\bigwedge_n f_i(x) = y_i \right) \right], \bar{a} \right\rangle$$

para $y_i : b_i$. Analogamente, dado fórmula coerente $\bar{x}.\varphi$ com $x_i : A_i$ e lista $\bar{a} \in \kappa_n$, ponha $r : [\bar{x}.\varphi] \mapsto \prod_n A_i$ a interpretação interna de φ em \mathcal{D} . Com as projeções $\pi_i : \prod_n A_i \rightarrow A_i$ podemos ver

$$\psi_0^{-1}(\langle [\bar{x} : \varphi], \bar{a} \rangle) = U_{\pi_i \bar{r}, \bar{a}}$$

Ou seja, concluímos que ϕ_0 é um homeomorfismo. Seguindo, definimos $\phi_1 : G_{\mathbb{T}_{\mathcal{D}}} \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{D})_1$ por meio de $\phi_{\mathcal{D}}$ assim como ϕ_0 . Como acima, é claro que ϕ_1 terá inversa ψ_1 , ademais é rotina verificar

$$\phi_1^{-1}(V_{A, a \mapsto b}) = \langle A, a \mapsto b \rangle$$

e

$$\psi_1^{-1}(\langle A, a \mapsto b \rangle) = V_{A, a \mapsto b}$$

O resultado segue. □

Seguindo, consideramos um grupoide distinguido.

Lema 2.2.8. *Na assinatura com único tipo e par de relações binárias \neq e $=$, defina a teoria **neq**, cujos axiomas garantem que \neq é complemento de $=$ e que **neq** tem igualdade decidível.*

Seguindo, deixe S_{κ} o grupoide de isomorfismos entre objetos de \mathbf{Con}_{κ} , onde

- $(S_{\kappa})_0$ tem como básicos os conjuntos $\{X \in \mathbf{Con}_{\kappa} : a_1, a_2, \dots, a_n \in X\}$, para sequências $a_i \in \mathbf{Con}_{\kappa}$;
- $(S_{\kappa})_1$ tem como básicos os conjuntos $\{f : A \xrightarrow{\cong} B \in \mathbf{Con}_{\kappa} : a \in A, f(a) = b\}$, para pares $a, b \in \mathbf{Con}_{\kappa}$.

Temos $S_{\kappa} \cong G_{\mathbf{neq}}$ em \mathbf{Gpd} . Consequentemente, obtemos a equivalência $BS_{\kappa} \simeq BG_{\mathbf{neq}}$

²Lembramos que esse é sempre o caso, já que $\mathcal{D} \simeq \mathbf{Sin}(\mathbb{T}_{\mathcal{D}})$.

Demonstração (esboço): Para mostrar $S_\kappa \cong G_{\text{neq}}$ note que todo conjunto $X \in \mathbf{Con}_\kappa$ admite única extensão à **neq**-modelo, pondo \neq^M como $X^2 \setminus \Delta_X$, logo é fácil ver que há uma bijeção $S_\kappa \cong G_{\text{neq}}$. Mostrar que essa bijeção leva a um homeomorfismo é um argumento direto, mas longo; omitimos-o então, recomendando o leitor a [Fol1, 2.4.3.2]. \square

Observação 2.2.9. Mencionamos que temos uma outra equivalência, $BS_\kappa \simeq \mathbf{Con}^{(\mathbf{Con}_\omega)_i}$, onde $(\mathbf{Con}_\omega)_i$ a categoria de inclusões entre os conjuntos finitos, cf. [loc. cit., 2.4.3.3].

Pelo teorema 2.1.7, temos $BG_{\text{neq}} \simeq \text{Fei}_{\text{Coe}}(\mathbf{Sin}(\text{neq}))$ e então BG_{neq} classifica objetos decidíveis na categoria dos topoi, isto é, um morfismo geométrico $BG_{\text{neq}} \rightarrow \mathcal{E}$ equivale a um objeto decidível no topos \mathcal{E} . Isso, é claro, induz um objeto decidível genérico em BG_{neq} , que agora descrevemos.

Definição 2.2.10. O objeto decidível genérico em BG_{neq} é dado por $(\llbracket x : \top \rrbracket_{X_{\text{neq}}}, \theta)$. Percorrendo a equivalência do lema obtemos que o objeto decidível genérico em BS_κ é dado por $(\pi : \coprod_{A \in (S_\kappa)_0} A \rightarrow (S_\kappa)_0, \theta)$ com $\theta(g : x \rightarrow y, a) = g(a)$. A topologia de $\coprod_{A \in (S_\kappa)_0} A$ sendo a mais grossa que torna a projeção π contínua e contém, para todo a , o conjunto $\{(A, a) : A \in (S_\kappa)_0, a \in A\}$ como aberto.

Agora, precisaremos dos seguintes conceitos para definir nosso funtor sintático.

Definição 2.2.11. Lembramos que um objeto X de um topos é dito compacto se toda cobertura de X por subobjetos admite subcobertura finita. Dizemos um topos \mathcal{E} *fracamente coerente* (*weakly coherent*) sse esse admite um conjunto de geradores compactos e o produto finito de compactos é compacto. Dizemos um grupoide \mathbf{G} *fracamente coerente* sse o topos $B\mathbf{G}$ é fracamente coerente.

Defina \mathbf{fcGpd} como a subcategoria de \mathbf{Gpd} cujos objetos são grupoides fracamente coerentes e com morfismos $f : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$ aqueles que a imagem inversa do funtor induzido, $f^* : B\mathbf{H} \rightarrow B\mathbf{G}$, preserva objetos compactos.

Lema 2.2.12. A imagem do funtor $\mathbf{CoeDec}_\kappa^{op} \xrightarrow{\text{Mod}} \mathbf{Gpd}$ está em \mathbf{fcGpd} .

Demonstração: A proposição 2.2.7 garante $\text{Mod}(\mathcal{C})$ coerente e, portanto³, fracamente coerente. Logo, temos $\text{Mod}(\mathcal{C}) \in \mathbf{fcGpd}$ para $\mathcal{C} \in \mathbf{CoeDec}_\kappa$. Seguindo, dado $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ em \mathbf{CoeDec}_κ é rotina verificar que temos o quadrado abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ t_{\mathcal{C}} \downarrow & & \downarrow t_{\mathcal{D}} \\ B\mathcal{G}_{\mathcal{C}} & \xrightarrow{\text{Mod}(F)^*} & B\mathcal{G}_{\mathcal{D}} \end{array}$$

Onde $t_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \simeq \mathbf{Sin}(\mathbb{T}_{\mathcal{C}}) \xrightarrow{M} \text{Fei}_{\text{Coe}}(G_{\mathbf{Sin}(\mathbb{T}_{\mathcal{C}})}) \simeq B\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$. Logo, vemos que $\text{Mod}(F)^*$ manda os definíveis de $B\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ nos definíveis $B\mathcal{G}_{\mathcal{D}}$ e então preserva os objetos compactos. \square

Definamos agora o *funtor sintático*, a segunda parte da nossa adjunção. Dado grupoide $G \in \mathbf{fcGpd}$, ponha $\text{Form}(G)$ como a subcategoria plena de BG cujos objetos são da forma f^*U para algum $f : G \rightarrow S_\kappa$ de \mathbf{fcGpd} , onde U é o objeto decidível genérico. Felizmente, temos uma caracterização explícita de $\text{Form}(G)$.

Lema 2.2.13. Dado $G \in \mathbf{fcGpd}$, um feixe equivariante $(p : E \rightarrow G_0, \mu : E \times_{G_0} G_1 \rightarrow E)$ está em $\text{Form}(G)$ se e somente se

- i) $(p : E \rightarrow G_0, \mu : E \times_{G_0} G_1 \rightarrow E)$ é um objeto compacto e decidível de BG ;

³Vemos rapidamente que um topos é fracamente coerente se admite um conjunto gerador de objetos compactos fechados sob produtos finitos, e coerente se admite conjunto gerador de objetos compactos fechados sob limites finitos

- ii) Para todo $x \in G_0$, temos a fibra E_x em \mathbf{Con}_κ ;
- iii) Para todo $a \in \mathbf{Con}_\kappa$, temos que $\{x \in G_0 : a \in E_x\} \subseteq G_0$ é aberto e $\{x \in G_0 : a \in E_x\} \rightarrow E$, dado por $x \mapsto a$, é uma seção contínua;
- iv) Para todo par $a, b \in \mathbf{Con}_\kappa$, o conjunto $\{g : x \rightarrow y \in G_1 : a \in A_x, \mu(a, x) = b\} \subseteq G_1$ é aberto.

Demonstração: Veja [AwFo, 2.4.11]. □

Notamos então que,

Corolário 2.2.14. Dado $\mathbf{Sin}(\mathbb{T})$ em \mathbf{CoeDec}_κ , o funtor $\mathcal{M} : \mathbf{Sin}(\mathbb{T}) \rightarrow BG_{\mathbb{T}}$ fatora-se em $\mathbf{Sin}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbf{Form}(G_{\mathbb{T}}) \hookrightarrow BG_{\mathbb{T}}$

Lema 2.2.15. Dado grupoide $G \in \mathbf{fcGpd}$, a categoria $\mathbf{Form}(G)$ é coerente, decidível e tem suficientes κ -modelos. Ademais, para qualquer $f : H \rightarrow G \in \mathbf{fcGpd}$ o funtor induzido $BG \rightarrow BH$ restringe-se a um funtor coerente como no quadrado abaixo,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Form}(G) & \xrightarrow{\mathbf{Form}(f)} & \mathbf{Form}(H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ BG & \xrightarrow{f^*} & BH \end{array}$$

Ou seja, temos um funtor $\mathbf{Form} : \mathbf{fcGpd}^{op} \rightarrow \mathbf{CoeDec}_\kappa$

Demonstração: Veja [AwFo, 2.4.13, 2.4.14, 2.4.15]. □

Finalmente, podemos obter a

Teorema 2.2.16 (Adjunção Sintaxe-Semântica). Temos a adjunção

$$\mathbf{CoeDec}_\kappa^{op} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Mod}} \\ \perp \\ \xleftarrow{\text{Form}} \end{array} \mathbf{fcGpd}$$

Demonstração: Veja [loc. cit., 2.5.3]. □

Restringindo a adjunção acima, obtemos nossa generalização da dualidade de Stone.

Teorema 2.2.17 (Dualidade de Stone para lógica de primeira ordem). Deixe $\mathbf{BoolPTop}_\kappa$ a subcategoria plena de \mathbf{CoeDec}_κ cujos objetos são os pretopos booleanos. A adjunção sintaxe-semântica se restringe à dualidade

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\text{Mod}} & \\ \mathbf{BoolPTop}_\kappa^{op} & \simeq & \mathbf{StoneGpd} \\ & \xleftarrow{\text{Form}} & \end{array}$$

Ademais, tratando álgebras booleanas como categorias discretas, restringindo a equivalência acima ao longo da inclusão $\mathbf{BA}_\kappa \hookrightarrow \mathbf{BoolPTop}_\kappa$ obtemos a dualidade de Stone clássica,

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\text{Mod}} & \\ \mathbf{BA}_\kappa^{op} & \simeq & \mathbf{Stone} \\ & \xleftarrow{\text{Form}} & \end{array}$$

Demonstração: Veja [loc. cit., 2.6.2]. □

2.3 Topoi e Grupoides

Mostramos aqui uma versão mais tratável da representação de topoi por grupoides locais, devida à Carsten Butz e Ieke Moerdijk. Restringindo nossa atenção aos topoi de Grothendieck com suficientes pontos, podemos associar a cada um desses um grupóide topológico cujos feixes equivariantes equivalem ao topos inicial. Seguimos o par de artigos [BuMo1] e [BuMo2].

Começemos explicitando a noção de pontos e o que constitui ter suficientes desses.

Definição 2.3.1. Dado um topos de Grothendieck \mathcal{E} , um *ponto* de \mathcal{E} é um morfismo geométrico $x : \mathbf{Con} \rightarrow \mathcal{E}$ e, dado algum objeto $A \in \mathcal{E}$, a *fibra (stalk)* A_x de A em x é $x^*(A)$.

Dizemos que um topos de Grothendieck \mathcal{E} tem *suficientes pontos* se “isomorfismo pode ser testado fibra à fibra”, isto é, se para todo morfismo $f : A \rightarrow B$ de \mathcal{E} que não é um isomorfismo existe ponto $x : \mathbf{Con} \rightarrow \mathcal{E}$ com $x^*f : x^*A \not\cong x^*B$. Note que essa condição equivale à

$$\forall A \xrightarrow{f} B (\forall \mathbf{Con} \xrightarrow{x} \mathcal{E} (x^*f : x^*A \cong x^*B) \implies f : A \cong B)$$

Ou seja, à afirmação que a classe de pontos é juntamente conservativa. Um resultado clássico (cf. [Elephant, C, 2.2.11]) nos permite garantir que quando \mathcal{E} tem suficientes pontos então \mathcal{E} tem um conjunto de suficientes pontos, fato que faremos uso no que segue.

Observação 2.3.2. Mencionamos que a condição de suficientes pontos tem uma interpretação lógica interessante. Em suma, para um topos $\mathcal{S}[\mathbb{T}]$ que classifica um teoria \mathbb{T} , como cada ponto equivale a um modelo em \mathbf{Con} , ter suficientes pontos equivale à teoria ter suficientes modelos de conjuntos, isto é, satisfazer um teorema de completude para modelos de conjuntos. Notamos então que o caso ao qual restringimos nossa atenção, os topoi com pontos suficientes, é bastante comum no mundo lógico.

Feito essa introdução, podemos começar a definir nosso espaço topológico. Dado um topos de Grothendieck \mathcal{E} com suficientes pontos sejam

- $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ um conjunto de pontos juntamente conservativos;
- $S_{\mathcal{E}}$ um objeto de \mathcal{E} cujos subobjetos de potências (i.e., os feixes $B \leq S_{\mathcal{E}}^n$ para algum n natural) separam \mathcal{E} , e
- $I_{\mathcal{E}}$ um cardinal tal que $\text{card}(S_p) \leq I$ para todo $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{E}}$.

Observação 2.3.3. O objeto $S_{\mathcal{E}}$ sempre existe. Podemos tomá-lo como, e.g., a união disjunta dos objetos do sítio de definição de \mathcal{E} . Alternativamente, se \mathcal{E} o topos classificante de uma teoria então podemos tomar $S_{\mathcal{E}}$ como o modelo genérico dessa teoria.

Dado um conjunto A com $\text{card}(A) \leq I_{\mathcal{E}}$, considere o conjunto de enumerações de A ,

$$\text{En}_{I_{\mathcal{E}}}(A) = \left\{ D \xrightarrow{u} A : D \subseteq I_{\mathcal{E}}, \forall a \in A (f^{-1}(a) \text{ é infinito}) \right\}$$

Definiremos então o espaço $X_{\mathcal{E}}$ como o conjunto de enumerações dos S_p módulo isomorfismos das enumerações, isto é,

$$X_{\mathcal{E}} := \coprod_{p \in \mathcal{P}_{\mathcal{E}}} \text{En}_{I_{\mathcal{E}}}(S_p) / \sim$$

Onde \sim é a relação de equivalência gerada por

$$(D_1 \xrightarrow{u} S_p, p) \sim (D_2 \xrightarrow{v} S_q, q) \iff \exists \tau (\tau : p^* \cong q^* \wedge \tau_S \circ u = v)$$

Denotaremos a classe $(u, p)/\sim$ por $[u, p]$. Seguindo, definimos uma topologia em $X_{\mathcal{E}}$ colocando como abertos básicos os conjuntos

$$U_{B, \bar{a}} = \{[u, p] \in X_{\mathcal{E}} : (u(a_1), \dots, u(a_n)) \in B_p\}$$

para cada $B \leq S_{\mathcal{E}}^n$ de \mathcal{E} e $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in I_{\mathcal{E}}^n$.

Definamos agora um morfismo $\text{Fei}(X_{\mathcal{E}}) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{E}$. Começamos descrevendo a imagem inversa, especificando sua ação nas fibras: para cada objeto E de \mathcal{E} , ponha $(\varphi^*E)_{[u, p]} = E_p$. Mais explicitamente associamos a cada E o étale $\varphi^*E \rightarrow X_{\mathcal{E}}$, onde

$$\varphi^*E = \{([u, p], e) : [u, p] \in X_{\mathcal{E}}, e \in E_p\}$$

com abertos básicos, para $B \leq S^n$, $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in I_{\mathcal{E}}^n$ e $B \xrightarrow{f} C \in \mathcal{E}$

$$V_{B, \bar{a}, f} = \{([u, p], e) : [u, p] \in U_{B, \bar{a}}, e = f_p(u(\bar{a}))\}$$

e π a projeção óbvia. Pois, observando a ação nas fibras, é rotina então verificar que φ^* preserva limites finitos e colimites quaisquer, logo, podemos concluir que φ^* tem adjunto à direita, ou seja, determina um morfismo geométrico. Notamos ainda que a imagem inversa admite adjunto à esquerda $\text{Fei}(X_{\mathcal{E}}) \xrightarrow{\varphi!} \mathcal{E}$, definido nos básicos por $\varphi!(U_{\bar{a}, B}) = B$ e estendido por colimites.

Lema 2.3.4. *Dado ponto p ponha uma topologia em $\text{En}_{I_{\mathcal{E}}}(S_p)$ por meio dos básicos*

$$Z_{\bar{a}, \bar{s}} := \{u : D \rightarrow S_p : \bigwedge_n (u(a_i) = s_i)\}$$

Afirmo que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} \text{Fei}(\text{En}_{I_{\mathcal{E}}}(S_p)) & \xrightarrow{i_p} & \text{Fei}(X_{\mathcal{E}}) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathbf{Con} & \xrightarrow{p} & \mathcal{E} \end{array}$$

Demonstração: Notamos que os componentes conexos de $i_p^{-1}(U_{B, \bar{a}})$ são os básicos de forma $Z_{\bar{a}, \bar{s}}$ para $\bar{s} \in S_p^n$ e \bar{a} qualquer. Considere então a seção $U_{B, \bar{a}} \rightarrow V_{B, \bar{a}, f}$ dada por $\sigma([u, p]) = ([u, p], f_p(u\bar{a}))$ e observe que σ é constante nos nossos conexos $Z_{\bar{a}, \bar{s}}$, com valor $f_p(\bar{s})$. Concluimos que $i_p^*\varphi^*(E)$ é o feixe constante de fibra E_p e, como $\pi^*p^*(E) = E_p$, o resultado segue. \square

Podemos agora provar o seguinte resultado.

Proposição 2.3.5. *Seja \mathcal{E} um topos de Grothendieck com suficientes pontos. O morfismo geométrico $\text{Fei}(X_{\mathcal{E}}) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{E}$ é conexo, i.e., φ^* é plenifiel.*

Demonstração: Usemos a notação do quadrado do lema 2.3.4. Lembramos que φ^* é plenifiel sse temos um isomorfismo $\varphi_*\varphi^* \cong 1$, logo, por hipótese, basta checar fibra à fibra. Dado $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{E}}$, temos

$$\begin{aligned} \varphi!\varphi^*(X)_p &= {}^{\dagger} p^*\varphi!\varphi^*(E) \\ &= {}^* \pi_!(i_p)^*\varphi^*(X) \\ &= \pi_!\pi^*(X_p) \\ &= X_p \end{aligned}$$

Onde $=^{\dagger}$ vem da condição de Beck-Chevalley (lembrando que espaços de enumeração são localmente conexos, [BuMo2, 3.3]), $=^*$ do lema 2.3.4 e a última igualdade do fato que todo espaço de enumeração é conexo (cf. [loc. cit.]). \square

Observação 2.3.6. Note que a construção de $X_{\mathcal{E}}$ depende funtorialmente dos parâmetros que $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}, S_{\mathcal{E}}$ e $I_{\mathcal{E}}$. Com efeito, se expandimos o número de pontos $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$ então temos um funtor de inclusão $X_{\mathcal{E}}(\mathcal{P}) \rightarrow X_{\mathcal{E}}(\mathcal{P}')$. Análogamente, um epimorfismo $J \twoheadrightarrow I$ gera um funtor $X_{\mathcal{E}}(I) \rightarrow X_{\mathcal{E}}(J)$ assim como um feixe $S \leq S'$ induz um $X_{\mathcal{E}}(S') \rightarrow X_{\mathcal{E}}(S)$. Em especial, dado um morfismo geométrico $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ podemos fixar parâmetros \mathcal{P}_1 e I_1 para \mathcal{E} e escolher \mathcal{P}_2 e I_2 para \mathcal{F} grandes o suficiente de modo que os espaços X_1 e X_2 formam o digrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Fei}(X_1) & \longrightarrow & \text{Fei}(X_2) \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ \mathcal{E} & \xrightarrow{f} & \mathcal{F} \end{array}$$

Veja [BuMo2, 2.4] para mais detalhes.

Continuando, podemos agora descrever o grupoide topológico $G_{\mathcal{E}}$ que representará o topos \mathcal{E} . $G_{\mathcal{E}}$ terá, como objetos, pontos de $X_{\mathcal{E}}$ e, como mapas, isomorfismos entre pontos de \mathcal{E} que comutam com as enumerações. Explicitamente, os pontos de $G_{\mathcal{E}}$ são as triplas

$$“(u, p) \xrightarrow{\theta} (v, q)”$$

onde $(u, p), (v, q) \in \coprod_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}}} \text{En}(\mathcal{S}_p)$ e $\theta : p^* \cong q^*$, módulo a relação de equivalência

$$((u, p), (v, q), \theta) \equiv ((u', p'), (v', q'), \theta')$$

dada por

$$\exists \alpha, \beta [(\alpha : p^* \cong (p')^* \wedge \alpha_S \circ u = u') \wedge (\beta : q^* \cong (q')^* \wedge \beta_S \circ v = v') \wedge (\beta\theta = \theta'\alpha)]$$

As duas primeiras condições garantem que $[u, p] = [u', p']$ e $[v, q] = [v', q']$, enquanto a última que θ e θ' “preservam” essas equivalências. Denotaremos a classe $((u, p), (v, q), \theta) / \equiv$ por $[\theta : (u, p) \rightarrow (v, q)]$.

Observação 2.3.7. Note que todo ponto de G é da forma $[id : (u, p) \rightarrow (v, p)]$. De fato, basta notar que as classes $[\theta : (a, p) \rightarrow (b, q)]$ e $[id : (a, p) \rightarrow (\theta_S \circ b, p)]$ coincidem.

Seguindo, definimos uma topologia em $G_{\mathcal{E}}$. Para cada par de subfeixes $B, C \leq S_{\mathcal{E}}^n$ e par $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n), \bar{b} = (b_1, \dots, b_n) \in I_{\mathcal{E}}^n$, defina o aberto básico

$$W_{B, \bar{b}, C, \bar{c}} = \left\{ [(u, p) \xrightarrow{\theta} (v, q)] : u(\bar{a}) \in B_p \wedge v(\bar{b}) \in C_q \wedge \theta(u(\bar{a})) = v(\bar{b}) \right\}$$

Precisaremos do seguinte lema para provar nossa representação.

Lema 2.3.8. *Sejam $d_0, d_1 : BG_{\mathcal{E}} \rightrightarrows \text{Fei}(X_{\mathcal{E}})$ os mapas de codomínio e domínio⁴. O diagrama abaixo comuta e satisfaz a fórmula de Beck-Chevalley, “ $d_{0!}d_1^*(F) = \varphi^*\varphi_!(F)$ ”.*

$$\begin{array}{ccc} BG_{\mathcal{E}} & \xrightarrow{d_0} & \text{Fei}(X_{\mathcal{E}}) \\ d_1 \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \text{Fei}(X_{\mathcal{E}}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{E} \end{array}$$

Demonstração: Dado $[\theta : (u, p) \rightarrow (v, q)] \in G_{\mathcal{E}}$ e $E \in \mathcal{E}$, temos $d_0^*\varphi^*E_p = E_p$ e $d_1^*\varphi^*E_q = E_q$ e então as fibras do isomorfismo $d_0^*\varphi^* \rightarrow d_1^*\varphi^*$ vem do isomorfismo $E_p \rightarrow E_q$, induzido por θ . Seguindo, mostremos que $d_{0!}d_1^*(F) = \varphi^*\varphi_!(F)$. Dado ponto $x = (u, r) \in X_{\mathcal{E}}$ considere o diagrama

⁴Veja, por ser $G_{\mathcal{E}}$ um grupoide não precisamos de um “respectivamente”!

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Fei}(\mathrm{En}(S_r)) & \xrightarrow{k_{(u,r)}} & BG_{\mathcal{E}} & \xrightarrow{d_0} & \mathrm{Fei}(X) \\
\pi \downarrow & & \downarrow s & & \downarrow \varphi \\
\mathbf{Con} & \xrightarrow{x} & \mathrm{Fei}(X) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{E}
\end{array}$$

Para $\mathrm{En}(S_r)$ como no lema 2.3.4 e onde $k_{(u,r)} : \mathrm{En}(S_r) \rightarrow G_{\mathcal{E}}$ vem da ação $v \mapsto [id : (u, r) \rightarrow (v, r)]$. Note que $k_{(u,r)}^{-1}(W_{B, \bar{b}, C, \bar{c}}) = Z_{\bar{b}, u(\bar{c})}$ e então a função é contínua. Além disso, usando o fato que todo ponto $[\theta : (u, p) \rightarrow (v, q)]$ pode ser escrito como $[id : (u, p) \rightarrow (v, p)]$, notamos que $k_{(u,r)}^{-1}$ está em bijeção com $d_0^{-1}((u, r))$, logo temos $d_0^{-1}((u, r)) \cong \mathrm{En}(S_r)$, ou seja, o quadrado da esquerda é um produto fibrado. Seguindo, usando que o grupoide $G_{\mathcal{E}}$ é localmente conexo (cf. [BuMo1, 4.2]), podemos usar a condição de Beck-Chevalley para obter $x^*(d_0)_! \cong \pi_! k_{(u,r)}^*$. Ademais, como $d_1 \cdot k_{(u,r)} = i_p$ e $\varphi \cdot x = p$, o lema 2.3.4 garante $(\varphi x)^* \varphi_! = \pi_! (d_1 k_{(u,r)})^*$, e então, juntando as igualdades obtemos

$$d_{0!} d_1^*(F)_x = x^* d_{0!} d_1^* F = \pi_! k_{(u,r)}^* d_1^* F = \varphi^* \varphi_!(F) = \varphi^* \varphi_!(F)_x$$

Como queríamos. \square

Podemos agora provar a

Teorema 2.3.9 (Representação de Butz-Moerdijk para topoi). *Seja \mathcal{E} um topos de Grothendieck com suficientes pontos. O funtor $\varphi^* : \mathcal{E} \rightarrow \mathrm{Fei}(X_{\mathcal{E}})$ descrito acima induz uma equivalência de categorias $\mathcal{E} \simeq BG_{\mathcal{E}}$, onde $BG_{\mathcal{E}}$ o topos classificante do grupoide $G_{\mathcal{E}}$, como na definição 1.2.8.*

Demonstração: Pela proposição 2.3.5, \mathcal{E} é equivalente à categoria de coálgebras para comônada $\varphi^* \varphi_*$, ou seja, é equivalente às álgebras para mônada $\varphi^* \varphi_!$ em $\mathrm{Fei}(X_{\mathcal{E}})$. Mostremos então que essa última categoria é equivalente aos feixes equivariantes sobre $G_{\mathcal{E}}$. Por Beck-Chevalley, $d_{0!} d_1^*(F) = \varphi^* \varphi_!(F)$ e então um morfismo $\tau : \varphi^* \varphi_!(F) \rightarrow F$ equivale a um mapa $d_1^*(F) \rightarrow d_0^*(F)$ que, passando à projeção $d_0^*(F) \rightarrow F$, equivale à uma ação $\mu : d_1^*(F) \rightarrow F$. Mostremos que esse μ satisfaz as condições de cociclo sse o morfismo inicial τ é uma álgebra. Usando os lemas 2.3.4 e 2.3 temos, para qualquer $(u, p) \in X_{\mathcal{E}}$, que

$$\varphi^* \varphi_!(F)_{(u,p)} = \pi_! i_p^*(F) = \text{“conjunto das componentes conexas de } i_p^*(F)\text{”}$$

Logo, um ponto $x \in F_{(u,p)}$ define uma componente conexa $[x] \in i_p^*(F)$ e $\tau_{(u,p)}([x])$ define um ponto de $F_{(u,p)}$. Dado um ponto $[id : (u, p) \rightarrow (v, p)]$ de $G_{\mathcal{E}}$ e $x \in F_{(v,p)}$ temos $\mu(g, x) = \tau_{(u,p)}([x])$. Se τ uma álgebra, $\tau_{(u,p)}([x]) = x$ e $\tau_{(u,p)}([\tau_{(v,p)}([x])]) = \tau_{(u,p)}([x])$ e então obtemos $\mu(1, x) = x$ e $\mu(g \circ h, x) = \mu(g, (\mu h, x))$ e analogamente para a recíproca. \square

Observação 2.3.10. Poderíamos obter uma demonstração alternativa do teorema acima observando que temos resultados suficientes para mostrar φ comonádico e então usando o teorema 2.4.11 em conjunção ao exemplo 1.2.7. Enquanto essa seria uma demonstração mais “limpa”, não obteríamos uma descrição tão explícita do nosso grupoide $G_{\mathcal{E}}$.

Observação 2.3.11. Podemos estabelecer uma relação entre as duas representações que vimos. Dado uma teoria coerente \mathbb{T} , o teorema de Deligne garante que seu topos classificador, dado por $\mathcal{S}[\mathbb{T}] := \mathrm{Fei}_{\mathrm{Coe}}(\mathbf{Sin}(\mathbb{T}))$, tem suficientes pontos, portanto podemos usar o teorema 2.3.9 para obter um grupoide $G_{\mathcal{S}[\mathbb{T}]}$ que representa o topos $\mathcal{S}[\mathbb{T}]$. O corolário acima garante então que teremos $BG_{\mathcal{S}[\mathbb{T}]} \simeq BG_{\mathbb{T}}$, ou seja, que os grupoides obtidos serão “Morita equivalentes”.

2.4 Descida para categorias indexadas

Em certos pontos do nosso estudo de categorias somos forçados a considerar os aspectos 2-dimensionais da teoria. De fato, certas ideias naturalmente nos levam a um

ambiente 2-categorial e, em especial, a noção de descida é uma dessas. Para desenvolver a língua que a teoria de descida deve falada em, nós precisamos de uma noção de “2-pré-feixes” e é esse o papel das categorias indexadas. Aqui, a tese de Steve Awodey, [Aw1, V], e o artigo de Marta Bunge, [Bu], são nossas principais referências.

Definição 2.4.1. Dado categoria \mathcal{E} , uma categoria \mathcal{E} -indexada é um pseudofunctor $\underline{A}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E}^{op} \rightarrow \mathcal{CAT}$, ou seja, consiste de

- Para todo objeto i de \mathcal{E} , uma categoria A^i ;
- Para cada morfismo $i \xrightarrow{\alpha} j$ de \mathcal{E} , um funtor $A^j \xrightarrow{\alpha^*} A^i$;
- Para cada objeto e de \mathcal{E} , um isomorfismo natural $(1_e)^* \xrightarrow[\eta_e]{\cong} 1_{A^e}$;
- Para cada par $i \xrightarrow{\alpha} j \xrightarrow{\beta} k$ de \mathcal{E} , um isomorfismo natural $\alpha^* \beta^* \xrightarrow[\mu_{\alpha\beta}]{\cong} (\beta\alpha)^*$;

De forma que, para cada tripla $i \xrightarrow{\alpha} j \xrightarrow{\beta} k \xrightarrow{\gamma} l$ e para $a \xrightarrow{\delta} b$ os diagramas análogos ao da definição 1.2.1 comutam, isto é, as identidades abaixo são satisfeitas

$$\mu_{\alpha,\beta\gamma}(\alpha^* \mu_{\beta,\gamma}) = \mu_{\beta\alpha,\gamma}(\mu_{\alpha,\beta} \gamma^*) \quad \gamma^* \eta_b = \mu_{\delta,1_b} \quad \eta_a \gamma^* = \mu_{1_a,\delta}$$

Exemplo 2.4.2. Se \mathcal{E} tem todos produtos fibrados, podemos definir uma indexação canônica de \mathcal{E} sobre si mesma, que denotaremos por $\underline{\mathcal{E}}$, pela ação de produto fibrado: associamos à \mathcal{E}/i cada objeto i e ao pullback $\alpha^* : \mathcal{E}/j \rightarrow \mathcal{E}/i$ cada seta $\alpha : i \rightarrow j$. Como o pullback da composição é isomórfico à composição dos pullbacks, é rotina verificar que as condições de coerência são observadas. Generalizando, se $F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$ preleva produtos fibrados então \mathcal{C} tem \mathcal{E} -indexação canônica dada por $i \mapsto \mathcal{C}/Fi$.

Diremos *estrita* uma categoria indexada onde os isomorfismos de coerência são igualdades, ou seja, quando $\underline{A}_{\mathcal{E}}$ é um funtor. Convenientemente, toda indexada $\underline{A}_{\mathcal{E}}$ essencialmente pequena (isto é, cujas fibras A^i são equivalentes à categorias pequenas) é equivalente à uma categoria indexada estrita.

Lema 2.4.3. Toda categoria \mathcal{E} -indexada essencialmente pequena admite estritificação.

Demonstração (esboço): Uma demonstração completa desse fato estaria melhor colocada em um trabalho onde categorias indexadas têm um papel mais central, logo, restringimo-nos a um esboço. Em suma, a ideia é definir uma categoria indexada $\underline{B}_{\mathcal{E}}$ pondo

$$B^i := \underline{Hom}_{\mathcal{E}}([i], \underline{A}_{\mathcal{E}})$$

Onde $[i]$ é a categoria \mathcal{E} -indexada dada por $j \mapsto \mathcal{E}(j, i)$ e $\underline{Hom}_{\mathcal{E}}([i], A)$ denota a categoria das transformações naturais \mathcal{E} -indexadas entre os funtores \mathcal{E} -indexados $[i] \rightarrow \underline{A}_{\mathcal{E}}$ ou, em linguagem 2-categorial, $\underline{Hom}_{\mathcal{E}}([i], A)$ é a categoria das modificações entre as pseudotransformações naturais entre $[i]$ e $\underline{A}_{\mathcal{E}}$. Para mais detalhes, recomendando aos leitores o trabalho de [PaSc], que conta com descrições explícita dessa categoria e também com uma versão do lema de Yoneda (cf. [loc. cit., I.1.2]) para categorias indexadas que, em especial, garante que

$$\underline{Hom}_{\mathcal{E}}([i], \underline{A}_{\mathcal{E}}) \simeq A^i$$

Ou seja, que $B^i \simeq A^i$, como queríamos. Finalmente, lembrando-se que a ação de $\underline{B}_{\mathcal{E}}$ é $i \xrightarrow{\alpha} j \mapsto \mathcal{E}(-, j) \xrightarrow{\mathcal{E}(-, \alpha)} \mathcal{E}(-, i)$, vemos $\underline{B}_{\mathcal{E}}$ de fato estrita. \square

Podemos agora falar de objetos de descida e pilhas (*stacks*). Seguindo a motivação da introdução, se as categoria indexadas são nossos 2-pré-feixes então as pilhas serão nossos 2-feixes e os objetos de descida nossas famílias combinantes ou compatíveis (*matching families*).

Definição 2.4.4. Sejam \mathcal{E} uma categoria com pullbacks, $\underline{A}_{\mathcal{E}}$ uma categoria \mathcal{E} -indexada e $R = \{U_i \xrightarrow{r_i} U\}_I$ uma família de morfismos de \mathcal{E} . Um *objeto de descida* em $\underline{A}_{\mathcal{E}}$ ao longo de R é uma família $(c_i, \alpha_{ij})_{i,j \in I}$ onde

- Para cada $i \in I$ temos $c_i \in A^{U_i}$;
- Para cada $i, j \in I$ temos $(\pi_i)^*(c_i) \xrightarrow[\alpha_{ij}]{\cong} (\pi_j)^*(c_j)$, onde os mapas “ π ” vem do produto fibrado abaixo

$$\begin{array}{ccc} U_i \times_U U_j & \xrightarrow{\pi_i} & U_i \\ \pi_j \downarrow & \lrcorner & \downarrow r_i \\ U_j & \xrightarrow{r_j} & U \end{array}$$

De forma que esses dados satisfaçam as condições de cociclo:

$$\Delta_{U_i}^*(\alpha_{ii}) = 1_{c_i} \quad \pi_{jk}^*(\alpha_{jk}) \cdot \pi_{ij}^*(\alpha_{ij}) = \pi_{ik}^*(\alpha_{ik})$$

para todo $i, j, k \in I$, onde Δ_{U_i} a diagonal⁵ e os mapas “ π ” vem do cubo de pullbacks

$$\begin{array}{ccccc} U_i \times_U U_j \times_U U_k & \xrightarrow{\pi_{kj}} & U_k \times_U U_j & & \\ \pi_{ij} \searrow & & \downarrow & \searrow & \\ & U_i \times_U U_j & & U_j & \\ \pi_{ik} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U_i \times_U U_k & \xrightarrow{\quad} & U_k & & \\ & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ & U_i & & U & \end{array}$$

Podemos então formar $\mathbf{Desc}(\underline{A}_{\mathcal{E}}, R)$, a categoria de objetos de descida ao longo de R em $\underline{A}_{\mathcal{E}}$, onde um morfismo entre dois objetos de descida $(c_i, \alpha_{ij})_I \rightarrow (d_i, \beta_{ij})_I$ é dado por uma família $(f_i : c_i \rightarrow d_i)_I$ que faz o quadrado abaixo comutar

$$\begin{array}{ccc} \pi_i^* c_i & \xrightarrow{\alpha_{ij}} & \pi_j^* c_j \\ \pi_i^* f_i \downarrow & & \downarrow \pi_j^* f_j \\ \pi_i^* d_i & \xrightarrow[\beta_{ij}]{} & \pi_j^* d_j \end{array}$$

Finalmente, existe um claro funtor canônico $A^U \rightarrow \mathbf{Desc}(\underline{A}_{\mathcal{E}}, R)$, definido pela ação $c \mapsto \pi_i^* c$. Diremos então que $\underline{A}_{\mathcal{E}}$ *desce ao longo de* R quando esse mapa canônico é uma equivalência. Ademais, para um sítio (\mathcal{E}, J) , diremos a \mathcal{E} -indexada $\underline{A}_{\mathcal{E}}$ uma *pilha* (*stack*) se essa desce ao longo de todo R de J .

Observação 2.4.5. Convencionamos $\mathbf{Des}(\underline{A}_{\mathcal{E}}, \emptyset) \cong 1$.

Observação 2.4.6. Notamos que o paralelo entre objetos de descida e famílias combinantes é bem preciso: dado uma base K e família $\{f_i : d_i \rightarrow c\}$ de $K(c)$, uma família combinante para $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Con}$ é uma lista $x_i \in F(d_i)$ com $F\pi_i(x_i) = F\pi_j(x_j)$.

⁵A diagonal de um objeto X é mapa universal $\Delta : X \rightarrow X^2$ com $\pi_1 \Delta_X = \pi_0 \Delta_X = 1_X$

Exemplo 2.4.7. Existe uma ligação clara entre as duas noções de descida, dado morfismo geométrico $\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{S}$ formemos um topos simplicial $(\mathcal{E}')_\bullet$ usando uma técnica análoga (mas distinta!) à dada no exemplo 1.2.2 pondo $(\mathcal{E}')_0 := \mathcal{S}$ e $(\mathcal{E}')_{n+1} := (\mathcal{E}')_n \times_{\mathcal{S}} \mathcal{E}$. Considere então $\mathbf{Desc}(\mathcal{E}_\bullet, [1] \rightarrow [0])$, seus elementos são pares $x \in \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}$ e $\theta : d_0^*x \cong d_1^*x$ satisfazendo as condições de cociclo, ou seja, temos $\mathbf{Desc}(\mathcal{E}'_\bullet, [1] \rightarrow [0]) \simeq \mathbf{Des}(f)$.

Observação 2.4.8. Para além do exemplo acima, mencionamos uma segunda ligação entre as duas noções de descida: o resultado encontrado em [Bu, 2.1].

Proposição 2.4.9. *Seja \mathcal{S} um topos com objeto de número natural. Dado $\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{S}$ deixe $S[0]$ o topos classificante da teoria dos objetos (cf., e.g., [Elephant, D, 3.2]. Notamos que $S[0] \simeq [\mathcal{S}_{fin}, \mathcal{S}]$). Os seguintes são equivalentes,*

- i) f é um morfismo de descida efetivo.
- ii) A categoria $\mathcal{Top}/\mathcal{S}$ -indexada $\mathcal{Top}/\mathcal{S}(-, S[0])$ desce ao longo de f .

Exemplo 2.4.10. Seja \mathcal{C} uma categoria com produtos fibrados e a identifique com seu indexamento canônico sobre si mesma (cf. 2.4.2). Dado morfismo $i \xrightarrow{\alpha} j$ de \mathcal{C} considere o diagrama abaixo

$$i \times_j i \times_j i \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_{01}} \\ \xleftarrow{\pi_{12}} \\ \xrightarrow{\pi_{02}} \end{array} i \times_j i \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_0} \\ \xleftarrow{\Delta_i} \\ \xrightarrow{\pi_1} \end{array} i \xrightarrow{\alpha} j$$

Um objeto de descida em \mathcal{C} ao longo de α é dado por uma seta $c \rightarrow i$ de \mathcal{C} e um isomorfismo $\theta : \pi_0^*c \cong \pi_1^*c$ com

$$\Delta_i^*(\theta) = 1 \quad \pi_{12}^*(\theta) \circ \pi_{01}^*(\theta) = \pi_{02}^*(\theta)$$

Expandindo no exemplo acima, temos

Teorema 2.4.11 (Bénabou–Roubaud). *Seja $\underline{A}_{\mathcal{E}}$ uma categoria \mathcal{E} -indexada satisfazendo a condição de Beck-Chevalley. Para qualquer $\alpha : i \rightarrow j$ temos $\mathbf{Desc}(\underline{A}_{\mathcal{E}}, \{\alpha\})$ equivalente à coálgebra gerada pela comônada $\alpha^* \dashv \Pi_\alpha$ e, portanto, $\underline{A}_{\mathcal{E}}$ descenderá ao longo de α sse α^* for comonádico.*

Demonstração: Começamos, lembrando o leitor da condição de Beck-Chevally. Dizemos que uma categoria indexada $\underline{A}_{\mathcal{E}}$ a satisfaz se para todo morfismo $\alpha : i \rightarrow j$ de \mathcal{E} temos adjunto à direita $\alpha^* \dashv \Pi_\alpha$ tal que, para todo quadrado de produto fibrado como o na esquerda,

$$\begin{array}{ccc} i & \xrightarrow{\alpha} & j \\ \gamma \downarrow & \lrcorner & \downarrow \beta \\ l & \xrightarrow{\delta} & k \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A^j & \xrightarrow{\alpha^*} & A^i \\ \Pi_\beta \downarrow & \cong & \downarrow \Pi_\gamma \\ A^k & \xrightarrow{\delta^*} & A^l \end{array}$$

O mapa $\delta^*\Pi_\beta \rightarrow \Pi_\gamma\alpha^*$, vindo do adjunto de $\gamma^*\delta^*\Pi_\beta \cong \alpha^*\beta^*\Pi_\beta \xrightarrow{\alpha^*\eta} \alpha^*$, é um isomorfismo.

Agora, dado objeto de descida $\theta : \pi_0^*c \cong \pi_1^*c$ note que θ corresponde bijetivamente a um $c \rightarrow \Pi_{\pi_0}\pi_1^*c$ e, como $\Pi_{\pi_0}\pi_1^* \cong \alpha^*\Pi_\alpha$ por Beck-Chevally, obtemos o morfismo $\bar{\theta} : c \rightarrow \alpha^*\Pi_\alpha c$. Provemos então que essa ação é uma coálgebra sse o morfismo inicial $\theta : \pi_0^*c \cong \pi_1^*c$ satisfaz as condições de cociclo. Pois, vemos que $\Delta^*(\theta)$ corresponde à composição

$$c \xrightarrow{\bar{\theta}} \alpha^*\Pi_\alpha c \cong \Pi_{\pi_0}\pi_1^*c \xrightarrow{\eta^\Delta} \Pi_{\pi_0}\Pi_\Delta\Delta^*\pi_1^*(c) \cong \Pi_{\pi_0\Delta}(\pi_1\Delta)^*c \cong c$$

Com η^Δ a unidade de $\Delta^* \dashv \Pi_\Delta$. Note agora que, por Beck-Chevalley, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc}
\alpha^* \Pi_\alpha c & \xrightarrow{\eta^\alpha} & a \\
\cong \downarrow & & \downarrow \cong \\
\Pi_{\pi_0} \pi_1^* c & \longrightarrow & \Pi_{\pi_0} \Pi_\Delta \Delta^* \pi_1^*(c)
\end{array}$$

Logo, $\Delta^* \theta = 1$ sse $\eta \cdot \bar{\theta} = 1$. Analogamente, temos que $\pi_{12}^*(\theta) \pi_{01}^*(\theta)$ corresponde à

$$c \xrightarrow{\bar{\theta}} \alpha^* \Pi_\alpha c \xrightarrow{\alpha^* \Pi_\alpha(\bar{\theta})} \alpha^* \Pi_\alpha \alpha^* \Pi_\alpha c$$

e que $\pi_{02}^*(\theta)$ corresponde à

$$c \xrightarrow{\bar{\theta}} \alpha^* \Pi_\alpha c \xrightarrow{\mu_c} \alpha^* \Pi_\alpha \alpha^* \Pi_\alpha c$$

Com μ a multiplicação da comônada. Logo, θ é associativo sse a seta $\bar{\theta}$ também o for. \square

Observação 2.4.12. A condição sobre α do lema 2.4.11 é satisfeita, por exemplo, para a \mathcal{S} -indexada dada por $i \mapsto \mathcal{S}/F(i)$, onde $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ preserva produtos fibrados e \mathcal{C} é localmente cartesiana. Em especial, para qualquer \mathcal{S} -topos $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$, a \mathcal{S} -indexação correspondente à \mathcal{E} satisfaz as condições do lema.

Nesse trabalho, estaremos principalmente interessados nas pilhas para a topologia coerente – a topologia de Grothendieck dada pelas peneiras que contém famílias finitas juntamente epimórficas. Convenientemente, pilhas para essa topologia admitem uma boa descrição quando indexamos ao longo de um pretopos.

Lema 2.4.13. Se \mathcal{E} um pretopos, $\underline{A}_\mathcal{E}$ será uma pilha para a topologia coerente sse temos

- $A^0 \cong 1$
- Para todo par $i, j \in \mathcal{E}$ temos $A^{i+j} \cong A^i \times A^j$.
- Para todo epimorfismo $\alpha : i \rightarrow j$, $\underline{A}_\mathcal{E}$ desce ao longo de α .

Demonstração: Se $\underline{A}_\mathcal{E}$ uma pilha para a topologia coerente, note que, como a família vazia cobre 0 e convencionamos $\mathbf{Des}(\underline{A}_\mathcal{E}, \emptyset) \cong 1$ temos $A^0 \cong 1$. Seguindo, dado par i, j ponha $P = \{i \rightarrow i+j, j \rightarrow i+j\}$. Como pretopos tem produtos disjuntos o diagrama abaixo é um produto fibrado

$$\begin{array}{ccc}
0 & \xrightarrow{a} & i \\
b \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
j & \longrightarrow & i+j
\end{array}$$

Logo, usando $A^0 \cong 1$, dado par de objetos $x \in A^i$ e $y \in A^j$ temos $a^*(x) = b^*(y)$. É fácil verificar que a identidade vai satisfazer as condições de cociclo e, portanto, temos que $\mathbf{Desc}(\underline{A}_\mathcal{E}, P) \cong A^i \times A^j$. Seguindo, por ser P juntamente sobrejetiva temos então $A^{i+j} \cong A^i \times A^j$. Por fim, a última condição é trivialmente satisfeita.

Reciprocamente, dado cobertura $X = \{f_i : U_i \rightarrow V\}_n$ podemos fatorá-la nas famílias $Y = \{g_i : U_i \rightarrow \coprod_n U_i\}_n$ e $Z = \{f : \coprod_n U_i \rightarrow V\}$. Por hipótese, temos equivalência $\Phi : A \coprod_n U_i \rightarrow \prod_n A U_i : \Psi$. Note que um elemento de $\mathbf{Desc}(\underline{A}_\mathcal{E}, Z)$ será um par $(x \in A \coprod_n U_i, \alpha : k^*x \rightarrow k^*x)$ com $\Delta^* \alpha = 1$. Defina então um mapa $\mathbf{Desc}(\underline{A}_\mathcal{E}, Z) \rightarrow \mathbf{Desc}(\underline{A}_\mathcal{E}, X)$ por $(x, \alpha) \mapsto (\Psi(x), \alpha_{ij})$, com α_{ij} o mapa óbvio. É rotina mostrar que essa ação está bem definida (i.e., a família satisfaz as condições de cociclo) e induz um funtor. Seguindo, defina $\mathbf{Desc}(\underline{A}_\mathcal{E}, X) \rightarrow \mathbf{Desc}(\underline{A}_\mathcal{E}, Z)$ por $((x_i)_n, \alpha_{ij}) \mapsto (\Phi((x_i)_n), \alpha)$ com α o mapa induzido pelos α_{ij} . Verificamos então que $\mathbf{Desc}(\underline{A}_\mathcal{E}, Z) \simeq \mathbf{Desc}(\underline{A}_\mathcal{E}, X)$. Por hipótese, temos $\mathbf{Desc}(\underline{A}_\mathcal{E}, Z) \simeq A^V$. O resultado segue. \square

Finalmente, estamos em posição de provar o resultado abaixo, que será fundamental na representação de feixes de Awodey e Breiner.

Proposição 2.4.14. *Dado um pretopos \mathcal{P} sua \mathcal{P} -indexação canônica, $\underline{\mathcal{P}}$, definida no exemplo 2.4.2, é uma pilha para a topologia coerente.*

Demonstração: Basta verificar que as condições dos lema 2.4.13 são satisfeitas. Claramente temos $\mathcal{P}/0 \cong 1$ e $\mathcal{P}/(i+j) \cong \mathcal{P}/i \times \mathcal{P}/j$. Para a condição final, dado epimorfismo $\alpha : i \rightarrow j$ basta, pelo teorema 2.4.11, provar que α^* será comonádico, usemos então (co)monacidade de Beck. Por ser \mathcal{P} localmente cartesiana fechada, α^* tem adjunto à direita. Ademais, \mathcal{P} tem todos equalizadores que α^* , por ter adjunto à esquerda, preserva. Logo, resta apenas mostrar α^* conservativo e para isso usamos o resultado clássico que garante que a mudança de base $\alpha^* : \mathcal{P}/j \rightarrow \mathcal{P}/i$ em uma categoria regular é conservativa sse α um epimorfismo regular (cf., e.g., [Elephant, A, 1.3.2, 1.3.4]), lembrando que todo epimorfismo é regular em um pretopos, [loc. cit., A, 1.4.9]. \square

2.5 Segunda Representação de Topoi por Feixes

Podemos agora expor um resultado da tese de Steve Awodey, [Aw1], que melhora a primeira representação de topoi por feixes que obtemos.

Lema 2.5.1. *Toda pilha pequena estrita para a topologia coerente é equivalente a um feixe na topologia coerente.*

Demonstração: Seja $P : \mathcal{E}^{op} \rightarrow \mathcal{A}\mathcal{T}$ uma pilha e R uma peneira da topologia coerente, essa última gerada por uma família $\{\alpha_n : A_n \rightarrow I\}_n$ jutamente sobrejetiva. Mostremos que $Hom(R, P) \cong Hom(\downarrow I, P)$ por meio da inclusão $R \hookrightarrow \downarrow I$. Considere a seta induzida $y\alpha : \coprod_n \downarrow A_n \rightarrow \downarrow I$ e tome sua fatoração regular, que obtemos tomando o coequalizador do par núcleo de $\coprod_n \downarrow A_n \rightarrow \downarrow I$,

$$\begin{array}{ccc} \coprod_n \downarrow A_n \times_{\downarrow I} \coprod_n \downarrow A_n & \rightrightarrows & \coprod_n \downarrow A_n \\ & \searrow y\alpha & \downarrow q \\ & & \downarrow I \end{array}$$

Aplicando o funtor $Hom(-, P)$ e denotando $yA := \coprod_n \downarrow A_n$ podemos formar o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccccc} Hom(R, P) & \xrightarrow{q^*} & Hom(yA, P) & \xrightarrow[q_0]{q_1} & Hom(yA \times_{\downarrow I} yA, P) \rightrightarrows P(yA \times_{\downarrow I} yA \times_{\downarrow I} yA) \\ \uparrow r^* & \nearrow (y\alpha)^* & & & \\ Hom(\downarrow I, P) & & & & \end{array}$$

Note que $q^* : Hom(R, P) \hookrightarrow Hom(yA, P)$ é o equalizador do par que o segue. Seguindo, usando o lema 2.4.13 e denotando $A := \coprod_n A_n$, garantimos

$$Hom(yA, P) = Hom\left(\coprod_n \downarrow A_n, P\right) \cong \prod_n Hom(\downarrow A_n, P) \cong \prod_n P(A_n) \cong P\left(\coprod_n A_n\right) = P(A)$$

Também temos que

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}(yA \times_{\mathcal{I}} yA, P) &= \text{Hom}\left(\coprod_n \mathcal{I} A_n \times_{\mathcal{I}} \coprod_n \mathcal{I} A_n, P\right) \cong \text{Hom}\left(\coprod_{n,m} \mathcal{I} (A_n \times_I A_m), P\right) \\
 &\cong \prod_{n,m} \text{Hom}(\mathcal{I} (A_n \times_I A_m), P) \cong \prod_{n,m} P(A_n \times_I A_m) \\
 &\cong P\left(\coprod_{n,m} (A_n \times_I A_m)\right) \cong P\left(\coprod_n A_n \times_I \coprod_n A_n\right) = P(A \times_I A)
 \end{aligned}$$

Analogamente mostramos $P(A \times_I A \times_I A) \cong \text{Hom}(yA \times_{\mathcal{I}} yA \times_{\mathcal{I}} yA, P)$. Pondo $\alpha : \coprod_n A_n \rightarrow I$ a seta induzida pela família, formemos o diagrama abaixo, com u uma equivalência,

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{des}(\alpha) & \xrightarrow{\quad} & P(A) & \rightrightarrows & P(A \times_I A) & \rightrightarrows & P(A \times_I A \times_I A) \\
 u \uparrow & & \nearrow \alpha^* & & & & \\
 & & P(I) & & & &
 \end{array}$$

Usando as equivalências acima, podemos garantir $(y\alpha)^*$ um pseudoequalizador. Logo, existe, pela propriedade universal, um morfismo $s : \text{Hom}(R, P) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{I} I, P)$ e um isomorfismo natural $\theta : (y\alpha)^* s \Rightarrow q^*$ tal que $q_0\theta = q_1\theta$. Por ser q^* mônico, podemos concluir s fiel. Seguindo, note que $(y\alpha)^* sr^* \cong q^* r^* = (rq)^* = \alpha^*$ e então, por ser u uma equivalência e, portanto, $(\mathcal{I}\alpha)^*$ mônico, temos $sr^* = 1$, ou seja, s é essencialmente sobrejetor. Finalmente, resta provar s pleno. Dado $x, y : R \rightarrow P$ e $f : sx \rightarrow sy$, usando $q_0\theta = q_1\theta$ é rotina verificar que para $f' := \theta_y \circ (\mathcal{I}\alpha)^* f \circ \theta_x^{-1}$ temos $q_0 f' = q_1 f'$, logo há $h : x \rightarrow y \in \text{Hom}(R, P)$ com $q^* h = f'$. Note que $\theta_y \circ (\mathcal{I}\alpha)^* s(h) = q^*(h) \circ \theta_x$, e então

$$(\mathcal{I}\alpha)^* s(h) = \theta_y^{-1} \circ q^*(h) \circ \theta_x = \theta_y^{-1} \circ f' \circ \theta_x = \theta_y^{-1} \circ \theta_y \circ (\mathcal{I}\alpha)^* f \circ \theta_x^{-1} \circ \theta_x = (\mathcal{I}\alpha)^* f$$

Como $(\mathcal{I}\alpha)^*$ fiel, segue s pleno. Pois, concluímos s uma equivalência e, como $sr^* = 1$, obtemos nosso resultado. \square

Corolário 2.5.2. *Toda pilha pequena na topologia coerente é equivalente a um feixe na topologia coerente.*

Em especial, pelo lema 2.4.14, para todo topos \mathcal{E} pequeno sua externalização $\underline{\mathcal{E}}$ é equivalente a um feixe de categorias pequenas, que denotaremos por $\bar{\mathcal{E}} : \mathcal{E}^{op} \rightarrow \mathbf{Cat}$.

Definição 2.5.3. Diremos *local* um topos cujo objeto terminal é projetivo e indecomponível. Note que essas propriedades equivalem a, respectivamente, “ $M \models \varphi \vee \psi$ sse $M \models \varphi$ ou $M \models \psi$ ” e “ $M \models \exists x(\varphi(x))$ sse $M \models \varphi(c)$, para algum c ”.

Lema 2.5.4. *Dado um topos \mathcal{E} e um ponto $\text{Con} \xrightarrow{x} \text{Fei}_{\text{Coe}}(\mathcal{E})$ temos que $x^*(\bar{\mathcal{E}})$ é um topos local.*

Demonstração: Primeiramente, mostremos $x^*(\bar{\mathcal{E}})$ um topos. Lembramos que as fibras de um feixe F são dadas por

$$x^*(F) \cong \varinjlim_{(c,z) \in \int \mathcal{I}^{\text{Fei}}} Fc$$

para \mathcal{I}^{Fei} a feixificação de \mathcal{I} . Em especial, $x^*(\bar{\mathcal{E}}) \cong \varinjlim_{\int \mathcal{I}^{\text{Fei}}} \bar{\mathcal{E}}(c) \cong \varinjlim_{\int \mathcal{I}^{\text{Fei}}} \mathcal{E}/c$.

Temos $\int \mathcal{I}^{\text{Fei}}$ filtrado por ser \mathcal{I}^{Fei} exato à esquerda. Pelo teorema fundamental de topoi, todos cortes \mathcal{E}/c são topoi. Finalmente, como limites filtrados de topoi existem (cf, e.g., [Mo1, 2.5]) temos $x^*(\bar{\mathcal{E}})$ um topos. Seguindo, mostremos que $\bar{\mathcal{E}}$ é local. Dados $p, q \in$

$\text{Sub}_{x^*\bar{\mathcal{E}}}(1)$ com $p \vee q = 1$, existem $(I_p, y_p), (I_q, y_q) \in \int \mathcal{J}^{\text{Fei}}$ e setas $p' \rightarrow 1$ em \mathcal{E}/I_p e $q' \rightarrow 1$ em \mathcal{E}/I_q projetando em, respectivamente, p e q . Por ser $\int \mathcal{J}^{\text{Fei}}$ filtrado, há (I, y) com setas $(I, y) \rightarrow (I_p, y_p)$ e $(I, y) \rightarrow (I_q, y_q)$. Restringindo p' e q' ao longo dessas setas obtemos $p'', q'' \rightarrow 1$ em \mathcal{E}/I . Como $p \vee q = 1$ no colimite, há $h : (J, z) \rightarrow (I, y)$ com $h^*(p'' \vee q'') = 1$. Note então que dado $a \rightarrow 1$ e $b \rightarrow 1$ em \mathcal{E}/c com $a \vee b = 1$ teremos $a + b \rightarrow 1$ épico, logo, com $m : p + q \rightarrow 1$ temos ou $m^*(p) = 1$ ou $m^*(q) = 1$. Portando, há seta $k : (K, w) \rightarrow (J, z)$ com ou $k^*h^*(p'') = 1$ ou $k^*h^*(q'') = 1$. Note que, passado ao colimite temos $k^*h^*(p'')$ projetando em p e $k^*h^*(q'')$ projetando em q . Logo 1 é indecomponível em $x^*(\bar{\mathcal{E}})$. A demonstração que 1 é projetivo é perfeitamente análoga, omitimos-a então e recomendamos o leitor a [Aw1, V.2.1] para essa. \square

Podemos então obter

Teorema 2.5.5 (Awodey). *Todo topos pequeno \mathcal{E} admite um espaço $A_{\mathcal{E}}$ e um feixe $F_{\mathcal{E}}$ sobre $A_{\mathcal{E}}$ com*

- i) *Para todo ponto $P \in A_{\mathcal{E}}$, a fibra $(F_{\mathcal{E}})_P$ é um topos local;*
- ii) *\mathcal{E} é isomórfico às seções globais de $F_{\mathcal{E}}$, i.e., $\mathcal{E} \simeq \Gamma(F_{\mathcal{E}})$*
- iii) *Existe um morfismo lógico conservativo $\mathcal{E} \rightarrow \prod_{P \in \text{Spec}(\mathcal{E})} (F_{\mathcal{E}})_P$.*

A saber, podemos por $A_{\mathcal{E}} = X_{\text{Fei}_{\text{Coe}}(\mathcal{E})}$ e $F_{\mathcal{E}} := \varphi^*(\bar{\mathcal{E}})$, onde $\text{Fei}_{\text{Coe}}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\varphi^*} \text{Fei}(X_{\text{Fei}_{\text{Coe}}(\mathcal{E})})$ vem do teorema 2.3.5, que podemos aplicar pelo Teorema de Deligne.

Podemos melhorar um pouco o resultado no caso booleano.

Teorema 2.5.6. *Dizemos uma categoria bem pontilhada (well-pointed) sse o funtor de seções globais $\text{Hom}(1, -)$ é fiel. Dado topos booleano pequeno \mathcal{E} e pondo $F_{\mathcal{E}}$ como acima, podemos garantir que toda fibra $(F_{\mathcal{E}})_P$ é bem pontilhada.*

Demonstração: Veja [Aw1, V, 2.4]. \square

Finalmente, mencionamos uma propriedade lógica interessante dos topoi locais

Teorema 2.5.7. *Lógica intuicionista é completa para modelos em topoi locais.*

Demonstração: Veja [loc. cit, V, 3.3]. \square

2.6 Ultracategorias

Incluimos essa seção por completude histórica. Mostramos aqui uma outra generalização da dualidade de Stone, obtida por Michael Makkai por meio da teoria de ultracategorias. Essencialmente, uma ultracategoria é uma categoria associada de estrutura suficiente para desenvolver a teoria de ultraproductos. Lembramos, por fim, que os ultraproductos são uma ferramenta importante da teoria dos modelos clássica, vide teorema de Łós, e são então de interesse da lógica categorial as técnicas de Makkai.

Seguimos a exposição de Jacob Lurie, [Lu], e, devido ao caráter tangente ao resto do trabalho dessa seção, omitimos as demonstrações.

Definição 2.6.1. Uma ultracategoria é uma categoria S associada de

- Para todo conjunto I e ultrafiltro U em I , um funtor $S^I \xrightarrow{\int_I(-)dU} S$

- Para uma família $\{M_i\}_I \in S^I$ e elemento $i_0 \in I$, um isomorfismo

$$\epsilon_{(I, i_0)} : \int_I M_i d(i_0) \xrightarrow{\cong} M_{i_0}$$

onde (i_0) o ultrafiltro principal gerado por i_0 . Ademais, o isomorfismo tem que depender funtorialmente da família M_{iI} ;

- Seja $\{M_i\}_I \in S^I$. Dado uma família $U = \{U_j\}_J$ de ultrafiltros de I e ultrafiltro K de J , temos

$$\eta_{(U, K)} : \int_I M_i d \left(\prod_J U_j / K \right) \rightarrow \int_J \left(\int_I M_i d U_j \right)_j dK$$

De forma que, os demais fixados, o isomorfismo η é funtorial na família $\{M_i\}_I$.

Assumimos que esses dados satisfazem as seguintes condições de coerência,

- Dado $\{M_i\}_I \in S^I$ e uma família $U = \{U_j\}_J$ de ultrafiltros de I , para qualquer $j_0 \in J$ o morfismo

$$\int_I M_i d \left(\prod_J U_j / (j_0) \right) \xrightarrow{\eta_{(U, (j_0))}} \int_J \left(\int_I M_i d U_j \right)_j d(j_0)$$

é inverso do morfismo

$$\int_J \left(\int_I M_i d U_j \right)_j d(j_0) \xrightarrow{\epsilon_{(j_0)}} \int_I M_i d U_{j_0} \cong \int_I M_i d \left(\prod_J U_j / (j_0) \right)$$

- Dado $\{M_i\}_I \in S^I$, injeção $f : J \hookrightarrow I$ e ultrafiltro U de J , pondo $f^*U := \prod_{j \in J} (f(j)) / U$ a transformação abaixo é um isomorfismo

$$\eta_{(\{f(j)\}_I, U)} : \int_I M_i d f^*U \cong \int_J \left(\int_I M_i d (f(j)) \right)_j dU$$

- Dado $\{M_i\}_I \in S^I$, uma família $\{U_j\}_J$ de ultrafiltros de I , uma família $\{V_k\}_K$ de ultrafiltros de J e um ultrafiltro T de K temos que, pondo

$$\alpha := \prod_{k \in K} \left[\left(\prod_{j \in J} U_j \right) / V_k \right] / T = \left(\prod_{j \in J} U_j \right) / \left[\left(\prod_{k \in K} V_k \right) / T \right]$$

O diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} \int_I M_i d \alpha & \xrightarrow{\eta} & \int_K \left[\int_I M_i d \left(\left(\prod_{j \in J} U_j \right) / V_k \right) \right] dT \\ \eta \downarrow & & \downarrow \int_K (\eta) dT \\ \int_J \left(\int_I M_i d U_j \right)_j d \left(\left(\prod_{k \in K} V_k \right) / T \right) & \xrightarrow{\eta} & \int_K \left[\int_J \left(\int_I M_i d U_j \right) d V_k \right] dT \end{array}$$

Um ultrafuntor à esquerda $S \xrightarrow{F} R$ entre duas ultracategorias é um funtor $S \xrightarrow{F} M$ associado de, para todo conjunto I e ultrafiltro U de I , uma transformação natural

$$\sigma_U : F \circ \int_I (-) dU \rightarrow \int_S (-) dU \circ F^I$$

Tal que,

- Para toda família $\{M_i\}_I \in S^I$ e $i_0 \in I$, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} F(\int_I M_i d(i_0)) & \xrightarrow{\sigma} & \int_I FM_i d(i_0) \\ & \searrow F\epsilon \quad \swarrow \epsilon & \\ & FM_{i_0} & \end{array}$$

- Para $\{M_i\}_I \in S^I$, família $\{U_j\}_J$ de ultrafiltros de I e ultrafiltro K de J , o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} F(\int_I M_i d(\prod_J U_j / K)) & \xrightarrow{\sigma} & \int_I FM_i d(\prod_J U_j / K) \\ F\eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ F(\int_J (\int_I M_i dU_j) dK) & \xrightarrow{\sigma} \int_J F(\int_I M_i dU_j) dK & \xrightarrow{\int_J(\sigma)dK} \int_J (\int_I FM_i dU_j) dK \end{array}$$

Finalmente, quando todos os σ forem isomorfismos diremos o funtor um *ultrafuntor*. Denotamos por $LUlt(M, N)$ a categoria de ultrafuntores à esquerda e por $Ult(M, N)$ a categoria de ultrafuntores entre duas ultracategorias.

Assim como todo conjunto admite estrutura de ultracategoria, podemos definir ultraproductos canônicos sobre uma categoria com estrutura suficiente.

Teorema 2.6.2. *Se S uma categoria que admite produtos e colimites filtrados então podemos promove-la a ultracategoria pondo*

$$\int_I M_i dU := \lim_{P \in U^{op}} \left(\prod_I M_i \right) / P$$

Ademais, se S e M tem produtos e colimites filtrados então qualquer funtor $S \rightarrow R$ que preserva esses pode ser promovido à ultrafuntor e qualquer funtor que preserva colimites filtrados pode ser promovido à ultrafuntor à esquerda.

Demonstração: Veja [Lu, 1.3.8]. □

Dado um pretopos pequeno \mathcal{P} , deixe $Mod(\mathcal{P})$ a categoria de modelos em **Con** da teoria de \mathcal{P} (equivalentemente, dos funtores $\mathcal{P} \rightarrow \mathbf{Con}$). Note que, por Łós, podemos garantir que $Mod(\mathcal{P})$ é uma ultracategoria. Temos então

Teorema 2.6.3. *Dado um pretopos pequeno \mathcal{P} , temos*

- (Completeness) O funtor $ev : \mathcal{P} \rightarrow Ult(Mod(\mathcal{P}), \mathbf{Con})$, cuja ação manda $p \mapsto ((F : Mod(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbf{Con}) \mapsto F(p))$, induz uma equivalência.
- $LUlt(Mod(\mathcal{P}), \mathbf{Con}) \simeq Fei_{Coe}(\mathcal{P})$.
- (Dualidade) Para qualquer par de pretopos pequenos \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 , temos que

$$\mathbf{PTopos}(\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_1) \simeq Ult(Mod(\mathcal{P}_1), Mod(\mathcal{P}_2))$$

Demonstração: Veja [Lu, 2.3.1, 2.2.2, 2.3.3]. □

Teorema 2.6.4 (Dualidade de Stone generalizada - Makkai). *Deixe **BoolPtop** a subcategoria plena de **PTopos** cujos objetos são pretopos booleanos. Deixe $UltGpd$ a subcategoria plena de ultracategorias cujas categorias subjacente são grupoides. Temos então a equivalência $\mathbf{BoolPtop}^{op} \simeq UltGpd$.*

Demonstração: Veja [Ma, 8.1]. □

Finalmente, mostramos como podemos tratar de ultracategorias como pilhas. Dado uma ultracategoria S deixe $KHaus_S$ a categoria cujos objetos são pares (X, O_X) onde X um espaço de Hausdorff compacto e $X \xrightarrow{O_X} M$ é um ultrafuntor à esquerda. Temos que

Lema 2.6.5. *A fibração $KHaus_M \rightarrow KHaus$ é uma pilha para a topologia coerente.*

Demonstração: Veja [Lu, 4.1.5]. □

Dado fibrações $F : C \rightarrow S$ e $G : D \rightarrow S$ defina $Cart_S(F, G)$ pondo, como objetos, morfismos $H : C \rightarrow D$ de fibrações que mandam F -cartesianos em G -cartesianos e, como morfismos, 2-morfismos estritos de fibração. Temos então que

Teorema 2.6.6. *Dado ultracategorias S e M temos*

$$LUlt(S, M)^{op} \simeq Cart_{KHaus}(KHaus_S, KHaus_M)$$

Demonstração: Veja [Lu, 4.3.3]. □

Capítulo 3

Pretopoi

Nesse capítulo final, seguimos de perto a tese de PhD de Spencer Breiner. Como instância final das representação por feixes que viemos desenvolvendo durante essa monografia, expomos os esquemas lógicos. Tal qual o nome indica, esquemas lógicos serão os objetos que associaremos às nossas teorias de primeira ordem em um esforço de espelhar ao contexto lógico a relação entre esquemas afins (cf. seção 1.3) e anéis comutativos. Desenvolvemos mais ainda essas idéias, definidos nossos análogos à esquemas e provando um lema de colagem.

Por fim, incluímos com uma curta exposição de aplicação dos métodos desse capítulo, descrevendo o grupo de isotopia de um topos por meio de automorfismos definíveis.

3.1 Método dos Diagramas

Mostramos aqui uma adaptação do clássico método de diagramas de Robinson ao contexto da lógica categorial. Os objetos definidos aqui serão fundamentais no que segue, já que as fibras dos nossos esquemas afins supracitados serão descritas em termos de diagramas.

Definição 3.1.1. Seja \mathcal{P} um pretopos. Dado um diagrama filtrado $J^{op} \xrightarrow{D} \mathcal{P}$, definimos a localização de \mathcal{P} em D como

$$\mathcal{P} := \varinjlim_{j \in J} \mathcal{P} / D_j$$

Usando resultados padrões de teoria das categorias, temos.

Lema 3.1.2. A localização de um pretopos \mathcal{P} por um diagrama filtrado qualquer D é um pretopos.

Lembremamos agora de um conceito da teoria dos modelos clássica.

Definição 3.1.3. Seja \mathbb{T} uma teoria na assinatura Σ . O *diagrama de Robinson* de um \mathbb{T} -modelo M é uma extensão $\mathbb{T} \subseteq \mathcal{D}(M)$ construída na assinatura Σ_M , obtida adicionando uma constante c_m à Σ para cada $m \in M$, e cujas sequentes são $\mathbb{T} \cup \{\top \vdash \varphi(c_a) : a \in \varphi^M\}$.

Notoriamente, o diagrama de um modelo classifica os homomorfismos partindo desse.

Teorema 3.1.4. Dado \mathbb{T} -modelo M , homomorfismos $h : M \rightarrow N$ estão em bijeção com extensões de N à $\mathcal{D}(M)$ -modelo.

Demonstração: Dado extensão $N' \supseteq N$ ponha $h(m) := c_m^{N'}$ e dado homomorfismo $h : M \rightarrow N$ ponha $c_m^{N'} := h(m)$. É trivial verificar que essas ações estão bem definidas. \square

Notavelmente, podemos dar uma descrição do pretopos classificante do diagrama de Robinson de um dado modelo por meio da técnica de localizações.

Definição 3.1.5. Dado um modelo $\mathcal{P} \xrightarrow{M} \mathbf{Con}$, defina o *diagrama de M* como a localização de \mathcal{P} pelo diagrama $\int M^{op} \rightarrow \mathcal{P}$,

$$\mathbf{Diag}(M) := \varinjlim_{(A,x) \in \int M} \mathcal{P}/A$$

Observação 3.1.6. Como M preserva limites finitos categoria $\int M$ é filtrada, confira o corolário B.3.4.

Temos então o surpreendente teorema.

Teorema 3.1.7. *Seja \mathcal{P} o pretopos classificador da teoria \mathbb{T} e $\mathcal{P} \xrightarrow{M} \mathbf{Con}$ um modelo qualquer. $\mathbf{Diag}(M)$ é o pretopos classificante do diagrama de Robinson do modelo (correspondente à) M .*

Provemos antes o lema

Lema 3.1.8. *Seja \mathcal{P} um pretopos e φ um elemento de \mathcal{P} . O corte \mathcal{P}/φ classifica os definíveis por φ , isto é, dado pretopos \mathcal{Q} temos*

$$\mathbf{PTopos}(\mathcal{P}/\varphi, \mathcal{Q}) \cong \bigsqcup_{M:\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}} \mathcal{Q}(1, M\varphi)$$

Demonstração: Especificamos que os objeto da categoria na esquerda são pares $(M : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}, a : 1 \rightarrow M\varphi)$ e os morfismos $(M, a) \rightarrow (N, b)$ são transformações $\alpha : M \Rightarrow N$ com $\alpha_\varphi(a) = b$. Dado $M : \mathcal{P}/\varphi \rightarrow \mathcal{Q}$ enviamos-o ao par $(M\varphi^*, M(\Delta_\varphi))$, onde $\varphi^* : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}/\varphi$ com ação $A \mapsto \pi : A \times \varphi \rightarrow \varphi$ e Δ_φ a diagonal $\Delta_\varphi : \varphi \rightarrow \varphi \times \varphi$, lembrando que $1_{\mathcal{P}/\varphi} \cong \varphi$ e $\varphi \times \varphi \cong \varphi^*(\varphi)$. A ação nos morfismos então é óbvia.

Recíprocamente, dado par (M, a) definimos $\bar{M} : \mathcal{P}/\varphi \rightarrow \mathcal{Q}$ mandando $x : A \rightarrow \varphi$ ao produto fibrado de Mx ao longo de a . É rotina então verificar que essas ações estão bem definidas e são mutualmente inversas. Para mais detalhes, veja [Br, 2.3.1]. \square

Demonstração do Teorema (esboço): Um funtor $\mathbf{Diag}(M) \rightarrow \mathcal{Q}$ decompõe-se em uma família $(\mathcal{P}/\varphi \rightarrow \mathcal{Q})_{\int M}$ que, pelo lema, equivale à $N_\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}, a : 1 \rightarrow N\varphi)_{\int M}$. Pois, os funtores N_A correspondem a um modelo $\bar{N}_A \in \mathbb{T}\text{-Mod}(\mathcal{Q})$. Logo, o funtor $\mathbf{Diag}(M) \rightarrow \mathcal{Q}$ determina para cada $(\varphi \in \mathcal{P}, x \in \varphi^M)$ um \mathbb{T} -modelo N_φ em \mathcal{Q} e uma constante $c : 1 \rightarrow N\varphi$ que então, passando ao colimite, induz um modelo $N \in \mathbb{T}\text{-Mod}(\mathcal{Q})$ associado de constantes c_x para cada $x \in \varphi^M$.

Para mais detalhes, veja [Br, 2.4.3]. \square

Proposição 3.1.9. *Todo diagrama $\mathbf{Diag}(M)$ é um pretopos local, isto é, o objeto terminal de $\mathbf{Diag}(M)$ é projetivo e indecomponível.*

Demonstração: Veja [Br, 2.4.8]. \square

Mencionamos, por fim, a relação do ponto de vista categorial dos conjuntos definíveis com o diagrama da nosso modelo.

Definição 3.1.10. Dado modelo M , dizemos $S \subseteq MA$ definível sse há fórmula $\varphi \mapsto A \times B$ e $b \in MB$ tal que $S = \{x \in MA : M \models \varphi(x, b)\}$. Deixamos $\mathbf{Def}(M)$ denotar a categoria dos conjuntos definíveis de um modelo M .

Proposição 3.1.11. *A fatoração quociente-conservativo do modelo $\mathbf{Diag}(M) \rightarrow \mathbf{Con}$ é dada por*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Diag}(M) & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{Con} \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathbf{Def}(M) & \end{array}$$

Demonstração: Veja [Br, 2.4.4]. \square

3.2 Esquemas Lógicos

Podemos agora expor a noção de esquemas lógicos, mas antes lembremos de alguns fatos.

Dado um pretopos \mathcal{P} , lembramos que sua indexação canônica sobre si mesmo, $\overline{\mathcal{P}}$, definida no exemplo 2.4.2, é uma pilha para a topologia coerente e, portanto (cf. corolário 2.5.2) equivale à um feixe na topologia coerente $\underline{\mathcal{P}} \in \text{Fei}_{\text{Coe}}(\mathcal{P})$ que por sua vez, pelo teorema 2.3.9, equivale à um feixe equivariante $\mathcal{O}_{\mathcal{P}} \in BG_{\text{Fei}_{\text{Coe}}}(\mathcal{P})$. Alternativamente, como todo pretopos \mathcal{P} classifica uma teoria \mathbb{T} , podemos equivalentemente descrever $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ como um feixe equivariante em $BG_{\mathbb{T}}$, pela proposição 2.1.7. Nomemamos $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ de o *feixe estrutural* de \mathcal{P} . Daremos abaixo uma descrição explícita desse feixe como um objeto de $BG_{\mathbb{T}}$, mas antes relembremos o leitor da descrição do grupoide da nossa teoria \mathbb{T} .

Observação 3.2.1. Durante essas seção, trabalharemos com pretopoi associados das teorias que esses classificam, isto é, pares \mathcal{P} e \mathbb{T} com $\mathcal{P} \simeq P\text{Top}(\mathbf{Sin}(\mathbb{T}))$, onde $P\text{Top}(-)$ o completamento a pretopos. Pois, lembrando que o funtor $\mathbf{Sin}(\mathbb{T}) \rightarrow P\text{Top}(\mathbf{Sin}(\mathbb{T}))$ é plenifiel e conservativo, indentificamos $\mathbf{Sin}(\mathbb{T})$ com sua imagem em \mathcal{P} .

Definição 3.2.2 (bis). Deixe $X_{\mathbb{T}}$ o espaço dos modelos cujos conjuntos subjacentes são elementos de $\kappa := \max(|\Sigma|, \omega)$ e cuja topologia é dada pelos básicos

$$B_{\varphi(a)} := \{M \in X_{\mathbb{T}} : a \in \varphi^M\}$$

Para φ uma fórmula coerente em n variáveis livres e $a = (a_i)_n \in \kappa^n$. Seguindo, $G_{\mathbb{T}}$ é o grupoide de isomorfismos entre os modelos de $X_{\mathbb{T}}$, cuja topologia é a mais grossa que torna os mapas de domínio e codomínio $d_0, d_1 : G_{\mathbb{T}} \rightrightarrows X_{\mathbb{T}}$ contínuos e contém, para todo tipo A e par $a, b \in \kappa$, os conjuntos

$$V_{A, a \mapsto b} := \{f : M \xrightarrow{\cong} N : a \in A^M, f_A(a) = b\}$$

Obtemos agora a descrição de $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$.

Teorema 3.2.3. *Seja \mathcal{P} o pretopos classificante da teoria \mathbb{T} . Temos $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(B_{\varphi(a)}) \simeq \mathcal{P}/\varphi$. Em especial, $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathcal{P}}) \simeq \mathcal{P}$.*

Demonstração: Lembramos que estabelecemos a equivalência $BG_{\mathbb{T}} \simeq \text{Fei}_{\text{Coe}}(\mathbf{Sin}(\mathbb{T}))$ mostrando que os feixes equivariantes $(\llbracket \varphi \rrbracket, \theta)$, onde

$$\llbracket \varphi \rrbracket = \{(M, a) : M \in X_{\mathbb{T}}, a \in \varphi^M\} \xrightarrow{\pi} X_{\mathbb{T}} \quad \text{e} \quad \theta(f : M \rightarrow N, (M, a)) = (N, f(a))$$

geram o topoi $BG_{\mathbb{T}}$. Logo, garantimos que a equivalência¹ $BG_{\mathbb{T}} \simeq \text{Fei}_{\text{Coe}}(\mathcal{P})$ envia $(\llbracket \varphi \rrbracket, \theta)$ ao representável \mathcal{P}/φ . Logo,

$$\text{Hom}(\llbracket \varphi \rrbracket, \mathcal{O}_{\mathcal{P}}) \simeq \text{Hom}(\mathcal{P}/\varphi, \overline{\mathcal{P}})$$

Seguindo, dado étale equivariante (E, μ) de $BG_{\mathbb{T}}$ e seção $s : B_{\varphi(a)} \rightarrow E$, afirmo que há extensão única

$$\begin{array}{ccc} B_{\varphi(a)} & \hookrightarrow & \llbracket \varphi \rrbracket \\ & \searrow s & \downarrow \bar{s} \\ & & E \end{array}$$

¹Lembramos que, para $\mathcal{P} \simeq P\text{Top}(\mathbf{Sin}(\mathbb{T}))$ temos uma equivalência $\text{Fei}_{\text{Coe}}(\mathbf{Sin}(\mathbb{T})) \simeq \text{Fei}_{\text{Coe}}(P\text{Top}(\mathbf{Sin}(\mathbb{T})))$ dada levantando a inclusão $\mathbf{Sin}(\mathbb{T}) \hookrightarrow P\text{Top}(\mathbf{Sin}(\mathbb{T}))$

Com efeito, dado $(M, b) \in \llbracket \varphi \rrbracket$ é fácil construir um isomorfismo $f : M \Rightarrow N$ que manda a sequência b em a . Como \bar{s} deve ser equivariante, teremos que

$$\begin{aligned} \bar{s}((M, b)) &= f^{-1} f \bar{s}((M, b)) \\ &= f^{-1} \cdot \bar{s}(f \cdot (M, b)) \\ &= f^{-1} \cdot \bar{s}((N, f(b))) \\ &= f^{-1} \cdot \bar{s}((N, a)) \\ &= f^{-1} \cdot s(N) \end{aligned}$$

Por ser equivariante, é claro que a definição acima não depende do isomorfismo f e que determina univocamente \bar{s} . Em suma, para um feixe equivariante F , teremos $F(B_{\varphi(a)}) \cong \text{Hom}(\llbracket \varphi \rrbracket, F)$.

Finalmente, podemos obter

$$\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(B_{\varphi(a)}) \cong \text{Hom}(\llbracket \varphi \rrbracket, \mathcal{O}_{\mathcal{P}}) \simeq \text{Hom}(\lrcorner \varphi, \overline{\mathcal{P}}) \simeq \overline{\mathcal{P}}(\varphi) = \mathcal{P} / \varphi$$

Em especial, $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathcal{P}}) = \text{Hom}(\llbracket 1 \rrbracket, \mathcal{O}_{\mathcal{P}}) \simeq \text{Hom}(\lrcorner 1, \overline{\mathcal{P}}) \simeq \overline{\mathcal{P}} / 1 \simeq \mathcal{P}$. \square

Teorema 3.2.4. *Seja \mathcal{P} o pretopos classificante da teoria \mathbb{T} . Dado um modelo $M \in X_{\mathbb{T}}$, temos $(\mathcal{O}_{\mathcal{P}})_M \simeq \text{Diag}(M)$*

Demonstração: Veja [Br, 3.2.4]. \square

Corolário 3.2.5 (Representação subdireta). *Todo pretopos admite mergulho em um produto de pretopoi locais.*

Em suma,

Teorema 3.2.6 (Breiner). *Seja \mathcal{P} o pretopos classificante da teoria \mathbb{T} . Pondo $G_{\mathbb{T}} \rightrightarrows X_{\mathbb{T}}$ o grupoide e $\mathcal{O}_{\mathcal{P}} \in BG_{\mathbb{T}}$ o feixe equivariante definidos acima, temos*

- i) *Para todo ponto $M \in X_{\mathbb{T}}$, a fibra $(\mathcal{O}_{\mathcal{P}})_M$ é um pretopos local;*
- ii) *\mathcal{P} é isomórfico às seções globais de $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$, i.e., $\mathcal{P} \simeq \Gamma(\mathcal{O}_{\mathcal{P}})$*
- iii) *Existe um morfismo conservativo de pretopos $\mathcal{P} \rightarrow \prod_{M \in X_{\mathbb{T}}} (\mathcal{O}_{\mathcal{P}})_M$.*

Somos então motivados à seguinte definição.

Definição 3.2.7. Para todo pretopos \mathcal{P} , denotamos por $\text{Spec}(\mathcal{P})$ o par $(\mathcal{P}, \mathcal{O}_{\mathcal{P}})$, e referimos-nos a ele como o *esquema lógico afim* (affine logical scheme) associado à \mathcal{P} .

3.3 Espaços axiomatizados

Continuando no nossa translação das técnicas da Geometria Algébrica ao contexto lógico, adaptamos as seguintes definições clássicas (cf., e.g., [EGA1, 1]) ao nosso ambiente.

Definição 3.3.1. Um *espaço axiomatizado* é um par $(\mathcal{G}, \mathcal{O}_{\mathcal{G}})$, onde \mathcal{G} um grupoide topológico e $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$ um feixe equivariante de pretopoi em \mathcal{G} . Dizemos $(\mathcal{G}, \mathcal{O}_{\mathcal{G}})$ *localmente axiomatizado* (locally axiomatized) sse, para todo $x \in \mathcal{G}_0$ temos a fibra $(\mathcal{O}_{\mathcal{G}})_x$ um pretopos local. Um morfismo entre espaços axiomatizados $(\mathcal{G}, \mathcal{O}_{\mathcal{G}}) \rightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ é um morfismo de grupoides $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ associado de um morfismo de pretopoi $\phi : \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\mathcal{G}}$ em $B\mathcal{F}$. Um morfismo entre espaços localmente axiomatizados $(f, \phi) : (\mathcal{G}, \mathcal{O}_{\mathcal{G}}) \rightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ é um morfismo entre espaços axiomatizados tal que cada fibra do mapa transposto $\phi^{\sharp} : f^* \mathcal{O}_{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ preserva o ideal máximo (dos subobjetos do terminal) das fibras de $f^* \mathcal{O}_{\mathcal{G}}$.

Mostremos que o funtor esquema afim $\mathbf{Spec}(-)$ é um morfismo de \mathbf{PTopos} aos localmente axiomatizados.

Teorema 3.3.2. *Seja \mathcal{P} e \mathcal{Q} os pretopoi classificante de, respectivamente, \mathbb{T}_0 e \mathbb{T}_1 . Afirmo que um morfismo de pretopoi $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ induz um morfismo de grupoides $f : G_{\mathbb{T}_1} \rightarrow G_{\mathbb{T}_0}$ e um morfismo de pretopoi $\phi : \mathcal{O}_{\mathcal{P}} \rightarrow f_*\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}$ tal que as fibras do mapa transposto $\phi^\sharp : f^*\mathcal{O}_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}$ são conservativas².*

Demonstração: Usando as equivalências

$$\mathbb{T}_0\text{-Mod}(\mathbf{Con}) \simeq \mathbf{PTopos}(\mathcal{P}, \mathbf{Con}) \quad \mathbb{T}_1\text{-Mod}(\mathbf{Con}) \simeq \mathbf{PTopos}(\mathcal{Q}, \mathbf{Con})$$

é claro que temos um morfismo $f : G_{\mathbb{T}_1} \rightarrow G_{\mathbb{T}_0}$ induzido por pós-composição. Ademais, como a metade $\mathbb{T}_1\text{-Mod}(\mathbf{Con}) \rightarrow \mathbf{PTopos}(\mathcal{Q}, \mathbf{Con})$ da equivalência acima é dada enviando modelo M ao funtor cuja ação em $\mathbf{Sin}(\mathbb{T}_1)$ é $\psi \mapsto \llbracket \psi \rrbracket^M$, dado $\varphi \in \mathcal{P}$ teremos

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_{\varphi(k)}) &= \{M \in X_{\mathbb{T}_1} : k \in \llbracket \varphi \rrbracket^{fM}\} \\ &\cong \{\mathcal{Q} \xrightarrow{\overline{M}} \mathbf{Con} : k \in (\overline{MF})(\varphi)\} \\ &= \{\mathcal{Q} \xrightarrow{\overline{M}} \mathbf{Con} : k \in \overline{M}(F(\varphi))\} \\ &\cong \{M \in X_{\mathbb{T}_1} : k \in \llbracket F\varphi \rrbracket^M\} \\ &\cong B_{(F\varphi)(k)} \end{aligned}$$

E então $f_0 : X_{\mathbb{T}_1} \rightarrow X_{\mathbb{T}_0}$ contínuo. Analogamente, mostramos que f_1 contínua e, poranto, temos f de fato um morfismo de grupoides. Seguindo, ϕ é definido na base como o óbvio

$$\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(B_{\varphi}(k)) \simeq \mathcal{P}/\varphi \rightarrow \mathcal{Q}/F\varphi \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(B_{F\varphi}(k))$$

Finalmente, lembrando que as fibras de $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ são diagrams (cf. teorema 3.2.4) e a imagem inversa f^* preserva fibras, é fácil ver que as fibras do adjunto $\phi^\sharp : f^*\mathcal{O}_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}$ são da forma $\mathbf{Diag}(FM) \rightarrow \mathbf{Diag}(M)$. Pois, lembrando que um morfismo entre pretopoi é conservativo sse é injetivo nos subobjetos (cf. [Br, 2.2.1]), usando que $\mathbf{Diag}(M)$ é o pretopos classificador de $D(M)$ temos o morfismo em questão conservativo por ser FM um reduto do modelo M , cf. [loc. cit., 3.3.1]. \square

Estamos agora em posição de definir nossa versão de esquemas, mas antes precisamos falar sobre subabertos e coberturas.

Definição 3.3.3. Dado espaço axiomatizado $(\mathcal{G}, \mathcal{O}_{\mathcal{G}})$ e subgrupoide $U \subseteq \mathcal{G}$, *subespaço axiomatizado associado* a U é definido restringindo $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$ à U_0 , com ação herdada de $U_1 \subseteq \mathcal{G}_1$. Geralmente, indentificamos um subgrupoide com seu subespaço associado. Um subespaço $U \subseteq \mathcal{G}$ é dito aberto sse $U_0 \subseteq G_0$ e $U_1 \subseteq G_1$ são ambos abertos. Finalmente, dizemos uma família de subespaços abertos $\{U_i\}_I$ uma *cobertura aberta* para \mathcal{G} para qualquer $\alpha : x \rightarrow y \in \mathcal{G}_1$ há sequência $\beta_i : z_i \rightarrow z_{i+1} \in (U_{i_n})_1$, $i \in [0, n)$, com $z_0 = x$ e $z_n = 1$ e $\alpha = \beta_n \beta_{n-1} \cdots \beta_1 \beta_0$. Note que, em especial, teremos $\bigcup_I (U_i)_0 = \mathcal{G}_0$.

Definição 3.3.4 (Esquemas). Um *esquema lógico* (logical scheme) é um espaço localmente axiomatizado $(\mathcal{G}, \mathcal{O}_{\mathcal{G}})$ que admite uma cobertura aberta $\{U_i\}_I$ tal que há pretopoi \mathcal{P}_i com $U_i \simeq \mathbf{Spec}(\mathcal{P}_i)$. Deixe \mathbf{EsqLog} a subcategoria plena de \mathbf{EspAx} cujos objetos são esquemas lógicos.

Temos a seguinte interessante resultado, que nos permite tratar esquemas lógicos como objetos de descida.

²e, portanto, preservam o máximo de $f^*\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$

Proposição 3.3.5. *Se $(\mathcal{G}, \mathcal{O}_{\mathcal{G}})$ um esquema lógico e $\{U_i\}_I$ uma cobertura aberta então o morfismo geométrico canônico $i : \coprod_I BU_i \rightarrow B\mathcal{G}$ é uma sobrejeção aberta. Em especial, pelo teorema 1.2.10, temos $B\mathcal{G} \simeq \text{Des}(i)$.*

Demonstração: Veja [Br, 3.3.5]. □

Seguindo, estabelecemos que a propriedade de ser esquema é estável, e que ser esquema lógico é estável para básicos.

Lema 3.3.6. *O subespaço aberto $B_{\varphi(a)} \subseteq \text{Spec}(\mathcal{P})$ é afim, com $B_{\varphi(k)} \simeq \text{Spec}(\mathcal{P}/\varphi)$. O subespaço aberto $U \subseteq \mathcal{G}$ de um esquema \mathcal{G} é um esquema.*

Demonstração: Veja [Br, 3.4.1] □

Mostramos também um resultado de colagem de esquemas

Observação 3.3.7. Abaixo, para facilitar a leitura (e escrita), denotamos \mathcal{G}^1 e \mathcal{G}^0 para, respectivamente, os morfismos e objetos de um grupoide \mathcal{G} .

Lema 3.3.8 (Colagem). *Seja $(\mathcal{G}_i, \mathcal{O}_{\mathcal{G}_i})_I$ uma família de espaços axiomatizados, $(U_{ij})_I$ uma família de subespaços $U_{ij} \subseteq \mathcal{G}_i$ e $\varphi_{ij} : U_{ij} \rightarrow U_{ji}$ uma família de isomorfismos de **EspAx** tal que esses dados satisfazem $U_{ii} = \mathcal{G}_i$, $\varphi_{ij}^{-1}(U_{ji} \cap U_{jk}) = U_{ij} \cap U_{ik}$ e*

$$\varphi_{ii} = 1_{\mathcal{G}_i} \quad \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik} \quad (\star)$$

Então existe espaço axiomatizado $(\mathcal{G}, \mathcal{O}_{\mathcal{G}})$, cobertura aberta $\{U_i\}_I$ de \mathcal{G} e isomorfismos de espaços axiomatizados $\varphi_i : \mathcal{G}_i \rightarrow U_i$ tal que $\varphi_i(U_{ij}) = U_i \cap U_j$ e $\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$. Ademais, dado espaço $(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$, os morfismos entre espaço axiomatizados $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ estão em bijeção com as famílias $f_i : \mathcal{G}_i \rightarrow \mathcal{F}$ que satisfazem $f_j \circ \varphi_{ij} = f_i$.

Demonstração: Para $k \in \{0, 1\}$, defina $\mathcal{G}^k := \coprod_I (\mathcal{G}_i^k) / \sim$ onde $(x, i) \sim (y, j)$ sse $x \in U_{ij}^k$, $y \in U_{ji}^k$ e $\varphi_{ij}^k(x) = y$, note que as equações em (\star) garantem \sim uma equivalência. Ponha $\varphi_i^k : \mathcal{G}_i^k \rightarrow \mathcal{G}^k$ os mapas de inclusão, a topologia em \mathcal{G}^k é dada por “ $V \subseteq \mathcal{G}^k$ é aberto sse $(\varphi_i^k)^{-1}(V) \subseteq \mathcal{G}_i^k$ para todo $i \in I$ ”. O mapa codomínio $d_0 : \mathcal{G}^1 \rightarrow \mathcal{G}^0$ é dados por, representado por $[-]$ as classes de equivalência, $[f : x \rightarrow y] \mapsto [x]$. Como $d_0 \varphi_{ij}^1 = \varphi_{ij}^0 d_0$ temos que a ação está bem definida. Ademais, dado aberto $V \subseteq \mathcal{G}_i^0$ temos

$$(\varphi_i^1)^{-1}(d_0^{-1}(V)) = (d_0 \varphi_i^1)^{-1}(V) = (\varphi_i^0 d_0)^{-1}(V) = d_0^{-1}((\varphi_i^0)^{-1}(V))$$

Logo d_0 é contínuo. Análogamente, mostramos os demais mapas do grupoide bem definidos e contínuos. Pondo $U_i := \varphi_i(\mathcal{G}_i)$ note $(\varphi_i^k)^{-1}U_j = U_{ij}^k$ e então é claro a família uma cobertura aberta de \mathcal{G} . Ademais, dado aberto $W \subseteq \mathcal{G}_i^k$ temos $(\varphi_i^k)^{-1}(\varphi_i(W)) = (\varphi_{ij}^k)^{-1}(W \cap U_{ij})$, logo $\varphi_{ij}^k : \mathcal{G}_i \rightarrow U_i$ são homeomorfismos³. Finalmente, definimos o feixe $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$ colando os feixes $\mathcal{O}_{\mathcal{G}_i}$ como usual. Sua ação equivariante é definida fibra à fibra: dado $f : x \rightarrow y \in \mathcal{G}^1$ há $i \in I$ e $\bar{f} : \bar{x} \rightarrow \bar{y}$ com $\varphi_i^1(\bar{f}) = f$, ponha então por

$$((d_0)^* \mathcal{O}_{\mathcal{G}})_f \cong (\mathcal{O}_{\mathcal{G}})_{d_0(f)} = (\mathcal{O}_{\mathcal{G}})_x \cong (\mathcal{O}_{\mathcal{G}_i})_{\bar{x}} \rightarrow (\mathcal{O}_{\mathcal{G}_i})_{\bar{y}} \cong ((d_1)^* \mathcal{O}_{\mathcal{G}})_f$$

Seguindo, dado família f_i como no enunciado, definimos, para $x \in U_i$ e $k \in \{0, 1\}$, mapas $f^k(\varphi_i(x)) = f_i^k(x)$. A ação é obviamente bem definida. Esquecendo a estrutura de grupoide, o enunciado nos dá informação suficiente para colar os mapas de feixes e portanto obtemos um morfismo $\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\mathcal{G}}$ de feixes e, como equivariância é checada fibra a fibra, temos-o um morfismo de feixes equivariantes. Ademais, como temos $(\mathcal{O}_{\mathcal{G}})_{\varphi_i(x)} \cong (\mathcal{O}_{\mathcal{G}_i})_x$ notamos que os morfismos vão preservar o ideal maximal.

Finalmente, dado $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ simplesmente defina $f_i := f \circ \varphi_i$. É rotina então verificar que essa família satisfará a condição requirida. □

³É rotina verificar que um homomorfismo de grupoides levanta à isomorfismo de espaços axiomatizados.

Obtemos agora um resultado fundamental.

Teorema 3.3.9. *Temos a seguinte adjunção*

$$\begin{array}{ccc} & \text{Spec} & \\ \text{PTopos}^{op} & \xrightarrow{\quad} & \text{EsqLog} \\ & \Gamma & \end{array}$$

Em especial, $\mathbf{PTopos}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \simeq \mathbf{EsqLog}(\mathbf{Spec}(\mathcal{F}), \mathbf{Spec}(\mathcal{E}))$.

Demonstração (esboço): Dado \mathcal{G} , fixe uma cobertura afim $\{\mathbf{Spec}(\mathcal{P}_i)\}$. Note que as seções globais induzem uma família $s_i : \Gamma(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{E}_i$ que, pelo teorema 3.3.2, levantam a $\bar{s}_i : \mathbf{Spec}(\mathcal{E}_i) \rightarrow \mathbf{Spec}(\Gamma(\mathcal{G}))$. Definimos então a counidade $\eta : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Spec}(\Gamma(\mathcal{G}))$ pondo $\eta(x) := \bar{s}_i(x)$ para $x \in \mathbf{Spec}(\mathcal{P}_i)$. Definimos o mapa estrutural $\varphi^\sharp : \eta^* \mathcal{O}_\Gamma(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{O}_\mathcal{G}$ usando que, por 3.3.5, temos $B\mathcal{G} \simeq \text{Des}(J)$ e então herdando os mapas $s_i^\sharp : s_i^* \mathcal{O}_\Gamma(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{Spec}(\mathcal{P}_i)}$. Seguindo, a unidade é dada pela equivalência $\mathcal{P} \simeq \Gamma(\mathbf{Spec}(\mathcal{P}))$.

Para a verificação dos diagramas triangulares, veja [Br, 3.5.1] \square

Teorema 3.3.10. *A categoria dos esquemas lógicos admite limites finitos, sendo esses calculados como colimites na categoria dos pretopoi.*

Demonstração: Veja [Br, 3.5.4]. A ideia da demonstração é clara: usar o teorema 3.3.9 para obter diretamente os limites dos esquemas afins como colimites de pretopoi e, no caso geral, colar esquemas ao longo de uma base afim, por meio do lema 3.3.8. \square

3.4 Grupo de Isotropia

Apresentamos agora uma aplicação dos nossos métodos de esquemas lógicos. Consideramos aqui a teoria de “Topoi Cruzados (*Crossed Topoi*)”, desenvolvida por Jonathon Funk, Pieter Hofstra e Benjamin Steinberg, [FHS]. Os objetos são os análogos topos-teóricos aos módulos cruzados (*Crossed Modules*) da álgebra homológica. O trabalho explora (e define!) o grupo de isotropia de um topos, objeto que pode ser usado para induzir estrutura cruzada canônica. Nosso interesse aqui, no entanto, é na descrição lógica desse grupo obtida por Breiner, que o caracteriza por meio de automorfismos definíveis.

Definição 3.4.1. Dado um topos \mathcal{E} , o *functor de isotropia* é o mapa $\mathcal{Z} : \mathcal{E}^{op} \rightarrow \mathbf{Grp}$ que associa a cada $a \in \mathcal{E}$ o grupo de automorfismos da projeção $\mathcal{E}/a \rightarrow \mathcal{E}$. No trabalho de Funk *et al* é verificado que \mathcal{Z} preserva colimites e é, portanto, representável. Chamamos de *grupo de isotropia* o grupo $Z \in \mathbf{Grp}(\mathcal{E})$ que representa nosso functor \mathcal{Z} .

Um caso especial de interesse é o

Proposição 3.4.2. *Para \mathcal{P} um pretopos, o grupo de isotropia de $\text{Fei}_{\text{Coe}}(\mathcal{P})$ é dado por*

$$Z(A) := \text{Aut}(A^*) = \left\{ \alpha \mid \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{P}/A \\ & \cong \alpha & \\ & \xleftarrow{\quad} & \end{array} \right\}$$

Demonstração: [Br, 4.3.3] \square

Introduzimos agora os objetos lógicos que descreverão nosso grupo de isotropia.

Definição 3.4.3. Dado pretopos \mathcal{P} e modelo $M : \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{Con}$, dizemos que um automorfismo $\alpha : M \cong M$ é definível sse para todo tipo B há objeto A_B , elemento $x_0 \in A_B^M$ e fórmula $\sigma(x, y, z)$ tal que

$$\alpha(a) = b \iff M \models \sigma(a, b, x_0)$$

Seja A um tipo. Dado uma família de fórmulas $\{xyz : \sigma_B\}_B$, com $x, y : B$ e $z : A$, dizemos-a uma família de automorfismos A -definíveis sse para todo modelo M e $a \in A^M$, as fórmulas $\{\sigma_B(x, y, a)\}_B$ definem um automorfismo de M .

Seja M um modelo. Dado uma família de fórmulas $\{\sigma_B(x, y, a_B)\}_B$ no diagrama de Robinson de M , com $x, y : B$ e a_B uma constante, dizemos-a uma família de automorfismos M -definíveis sse para todo homomorfismo $h : M \rightarrow N$ as fórmulas $\{\sigma_B(x, y, h(a_B))\}_B$ definem um automorfismo de N .

Proposição 3.4.4. Dado pretopos \mathcal{P} e $A \in \mathcal{P}$, o grupo de isotropia $Z(A)$ é isomórfico à família de automorfismos A -definíveis. Ademais, dado modelo $M : \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{Con}$, a fibra Z_M do grupo de isotropia é isomórfica à família de automorfismos M -definíveis.

Demonstração: Veja [Br, 4.3.7, 4.3.9]. □

Apêndice A

Lógica Categorical

A.1 Sintaxe

Definimos abaixo a sintaxe da nossa língua. Trabalhamos em uma linguagem tipada, como usual em lógica categorial.

Definição A.1.1. Uma *assinatura* (signature) Σ é

- Um conjunto Σ_t , cujos membros chamamos de *tipos*;
- Para cada lista A_1, A_2, \dots, A_n de tipos, um conjunto (possivelmente vazio) $(\Sigma_R)_{A_1, A_2, \dots, A_n}$ de *relações*. Escrevemos $R \leq A_1 A_2 \dots A_n$ para denotar que R está em $(\Sigma_R)_{A_1, A_2, \dots, A_n}$. Permitimos que $n = 0$ e, nesse caso, chamamos R de variável proposicional;
- Para cada lista A_1, A_2, \dots, A_n, B de tipos, um conjunto (possivelmente vazio) $(\Sigma_f)_{A_1, A_2, \dots, A_n, B}$ de *funções*. Escrevemos $A_1 A_2 \dots A_n \xrightarrow{f} B$ para denotar que f está em $(\Sigma_f)_{A_1, A_2, \dots, A_n, B}$. Permitimos que $n = 0$ e, nesse caso, chamamos f de constante e escrevemos $f : B$;

Exemplo A.1.2. Damos abaixo dois exemplos de assinaturas,

- a) A teoria dos anéis é geralmente especificada na assinatura que tem um único tipo \star , par de constantes $0, 1 : \star$, terna de funções $+, * : \star \star \rightarrow \star$ e $(-)^{-1} : \star \rightarrow \star$ e nenhuma relação.
- b) A teoria dos espaços vetoriais é geralmente especificada em uma assinatura com dois tipos, um para escalares e outro para vetores.

Podemos agora definir uma língua sobre nossa assinatura.

Definição A.1.3. Dado uma assinatura Σ , os *termos sobre Σ* são uma família de conjuntos $(\mathbf{Term}(\Sigma)_A)_{A \in \Sigma_t}$ definidos recursivamente por

- i) Para cada número natural i e tipo A de Σ , temos a *variável* x_i^A em $\mathbf{Term}(\Sigma)_A$. Geralmente, omitiremos o sobrescrito das variáveis.
- ii) Para cada constante $c : A$, temos $c \in \mathbf{Term}(\Sigma)_A$;
- iii) Para cada função $A_1 A_2 \dots A_n \xrightarrow{f} B$ e sequência $t_i \in \mathbf{Term}(\Sigma)_{A_i}$ para $i \leq n$, temos $f(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbf{Term}(\Sigma)_B$.

Geralmente escrevemos $t \in \mathbf{Term}(\Sigma)_A$ como $t : A$.

Seguindo, o conjunto das *fórmulas sobre Σ* , denotado por $\mathbf{Form}(\Sigma)$, é definido recursivamente por

- i) $\top, \perp \in \mathbf{Form}(\Sigma)$;

- ii) Para cada par de termos $t, s \in \mathbf{Term}(\Sigma)$ com $t, s : A$, temos $t = s \in \mathbf{Form}(\Sigma)$;
- iii) Para cada relação $R \leq A_1 A_2 \cdots A_n$ e sequência $t_i \in \mathbf{Term}(\Sigma)_{A_i}$ para $i \leq n$, temos $R(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbf{Form}(\Sigma)$.
- iv) Para cada par $\varphi, \psi \in \mathbf{Form}(\Sigma)$ temos $\varphi \vee \psi$ e $\varphi \wedge \psi$ em $\mathbf{Form}(\Sigma)$;
- v) Para cada $\varphi \in \mathbf{Form}(\Sigma)$, i natural e tipo A temos $\exists x_i^A \varphi \in \mathbf{Form}(\Sigma)$;
- vi) Para cada par $\varphi, \psi \in \mathbf{Form}(\Sigma)$ temos $\varphi \rightarrow \psi$ e $\neg \varphi$ em $\mathbf{Form}(\Sigma)$.
- vii) Para cada $\varphi \in \mathbf{Form}(\Sigma)$, i natural e tipo A temos $\forall x_i^A \varphi \in \mathbf{Form}(\Sigma)$;

O subconjunto de $\mathbf{Form}(\Sigma)$ fechado para as condições de i) a v) será o conjunto de *fórmulas coerentes de Σ* , denotado por $\mathbf{Form}_{Co}(\Sigma)$

As fórmulas admitem uma noção similar a de tipo, mas para descrever essa precisamos definir o conceito de variável livre. Intuitivamente, diremos que uma ocorrência de variável é livre quando não é quantificada.

Definição A.1.4. Dado uma assinatura Σ , defina recursivamente a função VL em $\mathbf{Term}(\Sigma)$ pondo $VL(x_i) = x_i$ e $VL(f(t_1, t_2, \dots, t_n)) = \bigcup_n VL(t_i)$. Seguindo, defina VL em $\mathbf{Form}(\Sigma)$ pondo

- i) $VL(\top) = VL(\perp) = \emptyset$;
- ii) $VL(t = s) = VL(t) \cup VL(s)$;
- iii) $VL(R(t_1, t_2, \dots, t_n)) = \bigcup_n VL(t_i)$;
- iv) $VL(\varphi \wedge \psi) = VL(\varphi \vee \psi) = VL(\varphi \rightarrow \psi) = VL(\varphi) \cup V(\psi)$;
- v) $VL(\exists x_i^A \varphi) = VL(\forall x_i^A \varphi) = VL(\varphi) \setminus \{x_i^A\}$;
- vi) $VL(\neg \varphi) = VL(\varphi)$.

As *variáveis livres* de uma fórmula φ são os elementos de $VL(\varphi)$.

Podemos agora definir fórmulas contextualizadas. Um *contexto* é uma lista finita $\bar{x} = x_1 x_2 \cdots x_n$ de variáveis distintas. O caso $n = 0$ é permitido, denotamos esse *contexto vazio* por $[]$. O *tipo de um contexto* é a lista (possivelmente com repetições) dos tipos das variáveis que ocorrem no contexto em questão, em ordem de aparecimento. Diremos um contexto \bar{x} adequado a uma fórmula φ se todas variáveis livres de φ ocorrem em \bar{x} . Uma *fórmula contextualizada* é um par $\bar{x}. \varphi$, onde \bar{x} um contexto adequado à fórmula φ .

Observação A.1.5. Uma variável pode ser livre em uma fórmula mesmo tendo instâncias não livres, como em $\varphi = (\exists x_1 (x_1 = x_2)) \vee (x_1 = x_1)$, onde apenas as duas últimas ocorrências de x_1 são livres, mas $VL(\varphi) = \{x_1, x_2\}$.

Podemos agora definir teorias.

Definição A.1.6. Um *sequente* (*sequent*) é uma expressão formal $(\varphi \vdash_{\bar{x}} \psi)$, com φ e ψ fórmulas e \bar{x} um contexto adequado à ambas. Uma *teoria* é um conjunto \mathbb{T} (possivelmente vazio) de fórmulas.

A.2 Semântica Categórica

Descrevemos nessa seção uma maneira de interpretar as expressões lógicas da seção anterior dentro de uma categoria. O conteúdo abaixo é fundamental à lógica categorial.

Definição A.2.1. Seja Σ uma assinatura e \mathcal{P} um pretopos. Uma Σ -estrutura M em \mathcal{P} consiste dos seguintes dados,

- Para cada tipo A de Σ , um objeto MA de \mathcal{P} . Extendemos essa definição pondo $M(A_1 A_2 \cdots A_n) = \prod_n MA_i$;
- Para cada relação $R \leq A_1 A_2 \cdots A_n$, um subobjeto $MR \leq M(A_1 A_2 \cdots A_n)$ de \mathcal{P} ;
- Para cada função $A_1 A_2 \cdots A_n \xrightarrow{f} B$, um morfismo $M(A_1 A_2 \cdots A_n) \xrightarrow{Mf} MB$ em \mathcal{P} ;

Um *homomorfismo* $M \xrightarrow{h} N$ entre duas Σ -estruturas M e N em \mathcal{P} é uma família de morfismos $MA \xrightarrow{h_A} NA$ de \mathcal{P} para cada tipo A tal que

- i) Para toda relação $R \leq A_1 A_2 \cdots A_n$, existe um morfismo $MR \rightarrow NR$ que faz o diagrama abaixo comutar

$$\begin{array}{ccc} MR & \xrightarrow{\quad} & M(A_1 \cdots A_n) \\ \downarrow & & \downarrow (h_{A_i})_n \\ NR & \xrightarrow{\quad} & N(A_1 \cdots A_n) \end{array}$$

- ii) Para toda função $A_1 A_2 \cdots A_n \xrightarrow{f} B$, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} M(A_1 \cdots A_n) & \xrightarrow{Mf} & MB \\ \prod_n h_{A_i} \downarrow & & \downarrow h_B \\ N(A_1 \cdots A_n) & \xrightarrow{Nf} & NB \end{array}$$

Definimos $\Sigma\text{-Str}(\mathcal{P})$ como a categoria dos homomorfismos entre Σ -estruturas.

Seguindo, podemos estender as interpretações de uma Σ -estrutura ao resto da nossa língua.

Definição A.2.2. Seja \mathcal{P} um pretopos e $M \in \Sigma\text{-Str}(\mathcal{P})$. Dado um termo $t : B$ e um contexto \bar{x} de tipo $A_1 A_2 \cdots A_n$ tal que todas variáveis presentes em t ocorrem em \bar{x} , definimos a seta $\llbracket \bar{x}.t \rrbracket^M : M(A_1 \cdots A_n) \rightarrow MB$ como

- Se t é uma variável, teremos-o igual a um dos x_i e então pomos $\llbracket \bar{x}.t \rrbracket^M$ como a i -ésima projeção de $M(A_1 \cdots A_n)$;
- Se t é da forma $f(t_1, \dots, t_n)$ então $\llbracket \bar{x}.t \rrbracket^M := Mf \circ (\llbracket \bar{x}.t_i \rrbracket^M)_n$

Analogamente, definimos recursivamente as interpretações das fórmulas. Assumindo que em todos os casos abaixo \bar{x} é adequado à fórmula em questão, temos que

- $\llbracket \bar{x}.\top \rrbracket^M$ e $\llbracket \bar{x}.\perp \rrbracket^M$ são, respectivamente, o objeto máximo e mínimo de $\text{Sub}_{\mathcal{P}}(M(A_1 \cdots A_n))$;
- Para cada par de termos $t, s \in \mathbf{Term}(\Sigma)$ com $t, s : B$, $\llbracket \bar{x}.(t = s) \rrbracket^M$ é o equalizador do par $\llbracket \bar{x}.t \rrbracket^M, \llbracket \bar{x}.s \rrbracket^M : M(A_1 \cdots A_n) \rightrightarrows MB$;

- Para cada relação $R \leq B_1 B_2 \cdots B_n$ e sequência $t_i \in \mathbf{Term}(\Sigma)_{B_i}$ para $i \leq n$, $\llbracket \bar{x}.R(t_1, t_2, \dots, t_n) \rrbracket^M$ é definido pelo produto fibrado abaixo

$$\begin{array}{ccc} \llbracket \bar{x}.R(t_1, t_2, \dots, t_n) \rrbracket^M & \longrightarrow & MR \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ M(A_1 \cdots A_n) & \xrightarrow{(\llbracket \bar{x}.t_i \rrbracket^M)_n} & M(B_1 \cdots B_n) \end{array}$$

- Para cada $\varphi \in \mathbf{Form}(\Sigma)$, pomos $\llbracket \bar{x}.\neg\varphi \rrbracket^M := \neg\llbracket \bar{x}.\varphi \rrbracket^M$ em $\mathbf{Sub}_{\mathcal{P}}(M(A_1 \cdots A_n))$;
- Para cada par $\varphi, \psi \in \mathbf{Form}(\Sigma)$, pomos

$$\begin{aligned} \llbracket \bar{x}.\varphi \vee \psi \rrbracket^M &:= \llbracket \bar{x}.\varphi \rrbracket^M \vee \llbracket \bar{x}.\psi \rrbracket^M \\ \llbracket \bar{x}.\varphi \rightarrow \psi \rrbracket^M &:= \llbracket \bar{x}.\varphi \rrbracket^M \rightarrow \llbracket \bar{x}.\psi \rrbracket^M \\ \llbracket \bar{x}.\varphi \wedge \psi \rrbracket^M &:= \llbracket \bar{x}.\varphi \rrbracket^M \wedge \llbracket \bar{x}.\psi \rrbracket^M \end{aligned}$$

Onde cada operação é definida em $\mathbf{Sub}_{\mathcal{P}}(M(A_1 \cdots A_n))$;

- Para cada $\varphi \in \mathbf{Form}(\Sigma)$ e variável y de tipo B , pomos $\llbracket \bar{x}.\exists y\varphi \rrbracket^M$ como a imagem da composição

$$\llbracket \bar{x}y.\varphi \rrbracket^M \hookrightarrow M(A_1 A_2 \cdots A_n B) \xrightarrow{\pi} M(A_1 A_1 \cdots A_n)$$

Analogamente, $\llbracket \bar{x}.\forall y\varphi \rrbracket^M := \forall_{\pi}(\llbracket \bar{x}y.\varphi \rrbracket^M)$, onde π é o mesmo mapa que acima.

Dado uma sequeute $\sigma = (\varphi \vdash_{\bar{x}} \psi)$, dizemos que M satisfaz σ se $\llbracket \bar{x}.\varphi \rrbracket^M \leq \llbracket \bar{x}.\psi \rrbracket^M$ em $\mathbf{Sub}(M(A_1 \cdots A_n))$. Quando M satisfaz todas sequeutes de uma teoria \mathbb{T} dizemos-o um *modelo de \mathbb{T}* . Denotamos por $\mathbb{T}\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{P})$ a subcategoria plena de $\Sigma\text{-}\mathbf{Str}(\mathcal{P})$ dos modelos de \mathbb{T} .

Observação A.2.3. É claro, se reduzirmos nossas considerações à fragmentos da nossa língua, não precisamos de toda estrutura categorial que um pretopos dispõe de. Um exemplo trivial: se estamos interessados apenas em fórmulas geradas por conjunções de atômicas então uma categoria com limites finitos nos basta.

Lema A.2.4. *Funtores de pretopos preservam validação. Explicitamente, seja $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ em \mathbf{PTopos} e $M \in \mathbb{T}\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{P})$. Defina $FM \in \Sigma\text{-}\mathbf{Str}(\mathcal{Q})$ pondo $(FM)A := F(MA)$, $(FM)R := F(MR)$ e $(FM)f := F(Mf)$. Temos então $FM \in \mathbb{T}\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{Q})$. Ademais, dado sequeute σ , se $M \models \sigma$ então $FM \models \sigma$, com a recíproca valendo se T é conservativo.*

Demonstração: Trivial. Para a condição final basta notar que $M \models (\varphi \vdash \psi)$ sse $\llbracket \varphi \wedge \psi \rrbracket \cong \llbracket \varphi \rrbracket$. \square

Exemplo A.2.5. Mencionamos dois de interpretações de teorias em uma categoria.

1. Um exemplo comum de interpretação de teorias em um topoi é dado pelos feixes de anéis, que o leitor pode reconhecer como $\mathbf{AnélCom} - \mathbf{Mod}(\mathbf{Fei}(X))$, com $\mathbf{AnélCom}$ a teoria dos anéis comutativos.
2. Outro exemplo comum são os grupos de Lie, que reconhecemos como $\mathbf{Grupo} - \mathbf{Mod}(\mathbf{VarSua})$, com \mathbf{Grupo} a teoria dos grupos e \mathbf{VarSua} a categoria das variedades suaves. Note que \mathbf{VarSua} não é um pretopos, mas ainda assim tem estrutura suficiente¹ para interpretar a teoria dos grupos, cf. a observação A.2.3.

¹Nomeadamente, a estrutura necessária é a presença de produtos finitos

A.3 Teorias e Categorias

Mostramos agora uma maneira de obter uma categoria a partir de uma teoria e vice-versa.

Definição A.3.1. Dado contextos $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, diremos as fórmulas $\bar{x}.\varphi$ e $\bar{y}.\psi$ α -equivalentes se podemos obter ψ substituindo as ocorrências livres de x_i por y_i em φ . Dado uma teoria coerente \mathbb{T} , sua *categoria sintática* (*syntactical category*), $\mathbf{Sin}(\mathbb{T})$, tem como objetos classe de fórmulas coerentes $[\bar{x}.\varphi]$ α -equivalentes e como morfismos² $[\bar{x}.\varphi] \rightarrow [\bar{y}.\psi]$ classes de fórmulas coerentes $[\bar{x}\bar{y}.\theta]$ \mathbb{T} -demonstravelmente funcionais, isto é, tal que as sequentes abaixo são demonstráveis³ em \mathbb{T}

$$\varphi \vdash_{\bar{x}} \exists \bar{y}(\theta) \quad \theta \vdash_{\bar{x}\bar{y}} \varphi \wedge \psi \quad \theta \wedge \theta' \vdash_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} \bar{y} = \bar{z}$$

Onde θ' é θ onde toda instância livre de y_i foi substituída por z_i , para \bar{z} um contexto qualquer disjunto de \bar{x} e \bar{y} .

Proposição A.3.2. $\mathbf{Sin}(\mathbb{T})$ é uma categoria coerente.

Demonstração: Veja [Elephant, D, 1.4.10]. □

Proposição A.3.3. Dado uma teoria coerente \mathbb{T} , temos uma equivalência natural em \mathcal{D}

$$\mathbf{Coe}(\mathbf{Sin}(\mathbb{T}), \mathcal{D}) \simeq \mathbb{T}\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{D})$$

para uma categoria coerente \mathcal{D} . Analogamente, pondo $\mathcal{P}[\mathbb{T}]$ o completamento a pretopos (cf. B.1.3) de $\mathbf{Sin}(\mathbb{T})$, temos equivalência natural em \mathcal{Q}

$$\mathbf{PTopos}(\mathcal{P}[\mathbb{T}], \mathcal{Q}) \simeq \mathbb{T}\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{Q})$$

para um pretopos \mathcal{Q} . Em especial, temos uma equivalência $\mathbf{PTopos}(\mathcal{P}[\mathbb{T}], \mathcal{Q}) \simeq \mathbf{Coe}(\mathcal{P}[\mathbb{T}], \mathcal{Q})$, natural no pretopos \mathcal{Q} .

Demonstração (esboço): Veja [loc. cit., D, 1.4.12] para os detalhes. Mencionamos que a metade $\mathbb{T}\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathbf{PTopos}(\mathcal{P}[\mathbb{T}], \mathcal{Q})$ da equivalência envia M no funtor cuja ação é $[\varphi] \mapsto \llbracket \varphi \rrbracket^M$. A outra metade, por Yoneda, corresponde à tomar o funtor $\mathcal{P}[\mathbb{T}] \rightarrow \mathcal{Q}$ em algum objeto genérico $U \in \mathcal{P}[\mathbb{T}]$, que batizamos de *modelo genérico de \mathbb{T}* . Considerações análogas se aplicam ao caso coerente. □

Fazemos agora o caminho inverso da definição A.3.1, definindo uma teoria a partir de uma categoria.

Definição A.3.4. Dado uma categoria coerente pequena \mathcal{C} , defina uma assinatura $\Sigma_{\mathcal{C}}$ pondo

- Para cada $c \in \mathcal{C}_0$, um tipo $[c]$;
- Para cada subobjeto $R : \prod_n A_i \rightarrow B$, uma relação $[R] : \prod_n [A_i] \leq [B]$.
- Para cada morfismo $f : \prod_n A_i \rightarrow B$, uma função $[f] : \prod_n [A_i] \rightarrow [B]$.

Defina então a teoria $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}$ sobre $\Sigma_{\mathcal{C}}$ cujas sequentes são

- $\top \vdash_x [1_c](x) = x$, para cada $c \in \mathcal{C}_0$;
- $\top \vdash_x [gf](x) = [g]([f](x))$, para cada $c \xrightarrow{f} d \xrightarrow{g} e \in \mathcal{C}$;

²assumimos \bar{x} e \bar{y} disjuntos. Como estamos falando de classes de fórmulas α -equivalentes não há perda de generalidade

³Dizemos uma sequente σ demonstrável sse para todo $M \in \mathbb{T}\text{Mod}(\mathbf{Con})$ temos $M \models \sigma$

- $\top \vdash_{\square} \exists x(\top)$ e $\top \vdash_{x,y} x = y$, para qualquer par de variáveis x e y de tipo $[1]$, com 1 o terminal de \mathcal{C} ;
- $\top \vdash_x [[h]([f](x)) = [k]([f](g))], [[h](x) = [k](y)] \vdash_{x,y} [\exists z([f](z) = y) \wedge ([g](z) = y)]$ e $[[f](x) = [f](y)] \wedge ([g](x) = [g](y)) \vdash_{x,y} x = y$, as chaves adicionadas para facilitar a leitura, para cada produto fibrado em \mathcal{C} como o abaixo

$$\begin{array}{ccc} A \times_{\mathcal{C}} B & \xrightarrow{k} & A \\ h \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

- $\top \vdash_x \bigvee_n (\exists y_i ([f_i](y_i) = x))$, para cada família finita juntamente epimórfica $\{f_i : U_i \rightarrow U\}_n$

Lema A.3.5. *Dado categorias coerentes \mathcal{C} e \mathcal{D} , um funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ que preserva limites finitos é coerente sse ele preserva família finitas juntamente epimórfica.*

Demonstração: Lembramos que um funtor é coerente sse é regular e preserva uniões finitas. Pois, um funtor é regular sse preserva limites finitos e epimorfismos regulares. Note que em uma categoria regular os epimorfismos regulares coincidem com os epimorfismos ortogonais à monomorfismos pela esquerda. Como F preserva famílias finitas juntamente epimórfica, em especial, ele preserva epimorfismos. Ademais, por preservar limites finitos, o funtor preserva monomorfismos. É claro então que um epimorfismo é ortogonal à um monomorfismo pela esquerda então sua imagem por F também o será, logo F é regular. Finalmente, note que uma família finita de subobjetos $\{U_i \rightarrow U\}_n$ é juntamente epimórfica sse $\bigvee_n U_i = U$, portanto F preserva uniões. \square

Proposição A.3.6. *Para toda categoria coerente \mathcal{C} , temos $\mathbf{Sin}(\mathbb{T}_{\mathcal{C}}) \simeq \mathcal{C}$. Para todo pretopos \mathcal{P} , temos $P\mathbf{Top}(\mathbf{Sin}(\mathbb{T}_{\mathcal{P}})) \simeq \mathcal{P}$.*

Demonstração: Dado categoria coerente \mathcal{D} , a equivalência entre modelos $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{D})$ e funtores $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ que preservam limites finitos e famílias finitas juntamente sobrejetivos é imediata. Logo, pelo lema, temos $\mathbf{Coe}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \simeq \mathbb{T}_{\mathcal{C}}\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{D})$. Obtemos então a equivalência $\mathbf{Coe}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \simeq \mathbf{Coe}(\mathbf{Sin}(\mathbb{T}_{\mathcal{C}}), \mathcal{D})$ e, por Yoneda, obtemos $\mathbf{Sin}(\mathbb{T}_{\mathcal{C}}) \simeq \mathcal{C}$. O caso para um pretopos é análogo. \square

Apêndice B

Revisão de categorias

B.1 Pretopoi

Relembramos aqui alguns fatos básicos de pretopoi e categorias coerentes que serão usados durante o trabalho.

Definição B.1.1. Dizemos que uma categoria \mathcal{C} tem *imagens* sse para todo $f : x \rightarrow y$ existe subobjeto $im(f) \rightarrowtail y$ tal que $im(f)$ é o menor subobjeto pelo o qual f fatora por, ou seja, sse a inclusão $Sub(y) \hookrightarrow \mathcal{C}/y$ admite adjunto à esquerda im . Uma categoria é dita *coerente* (*coherent*) sse *i*) tem limites finitos; *ii*) tem imagens; *iii*) epimorfismos regular (i.e., aqueles que acontecem como coequalizadores) são estáveis sob produtos fibrados e *iv*) os reticulados de subobjetos tem uniões e essas são estáveis sob produtos fibrados. Um funtor entre categorias coerentes é dito *coerente* sse preserva limites finitos, epimorfismos regulares e uniões. Denotamos por **Coe** a categoria dos funtores coerentes entre categorias coerentes.

Definição B.1.2. Dado $A, B \in \mathcal{C}$ dizemos o coproduto $A \coprod B$ *disjunto* sse as inclusões $A \rightarrowtail A \coprod B$ e $B \rightarrowtail A \coprod B$ são mônicas e sua intersetecção (em $Sub(A \sqcup B)$) é o objeto inicial. Dizemos *positiva* uma categoria coerente onde os coprodutos são disjuntos.

Dado subobjeto $R \rightarrowtail A^2$ em uma categoria \mathcal{C} com limites finitos, dizemos-o *uma relação de equivalência* sse, pondo $\pi_0, \pi_1 : A^2 \rightarrow A$ as projeções, *i*) há $r : A \rightarrow R$ com $\pi_0 R r = 1_A = \pi_1 R r$; *ii*) há $s : R \rightarrow R$ com $\pi_0 R s = \pi_1 R$ e $\pi_1 R s = \pi_0 R$; *iii*) há $t : P \rightarrow R$, com P o fibrado abaixo

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{q} & R \\ p \downarrow & \lrcorner & \downarrow \pi_0 R \\ R & \xrightarrow{\pi_1 R} & A \end{array}$$

tal que $\pi_0 R t = \pi_0 R p$ e $\pi_1 R t = \pi_1 R q$. Note que todo núcleo par (*kernel-pair*) de um morfismo induz uma relação de equivalência. Dizemos *efetiva* uma categoria onde toda relação de equivalência vem de um núcleo par.

Um *pretopos* é uma categoria regular positiva e efetiva. Denotamos por **PTopos** a subcategoria plena de **Coe** cujos objetos são pretopoi.

Teorema B.1.3 (Completamento a Pretopos). *O funtor inclusão $\mathbf{PTopos} \hookrightarrow \mathbf{Coe}$ admite adjunto à esquerda $PTop(-)$. Ademais, a unidade $\mathcal{C} \rightarrow PTop(\mathcal{C})$ é conservativa, plena e plena nos subobjetos¹.*

Demonstração: Veja [Elephant, A, 1.4.5, 3.3.10] □

¹Isto é, se para qualquer $B \leq IA$ há $A' \in \mathcal{P}$ com $IA' \cong B$

Por ser conservativo, identificaremos \mathcal{C} com sua imagem em $P\text{Top}(\mathcal{C})$.

Observação B.1.4. Como toda categoria coerente acontece como uma categoria sintática $\text{Sin}(\mathbb{T})$, podemos descrever o completamento a pretopos como uma operação nas teorias. Uma observação celebrada de Makkai e Reyes (cf. [MaRe]) afirma que o funtor acima corresponde à $\mathbb{T} \mapsto \mathbb{T}^{eq}$, com \mathbb{T}^{eq} a eliminação de imaginários da teoria, como definido por Shelah.

Falemos agora de fatoração de morfismos entre pretopoi.

Definição B.1.5. Dizemos um funtor entre pretopos $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ um *quociente* sse i) para todo $B \in \mathcal{Q}$ existe $A \in \mathcal{P}$ com epimorfismo $IA \twoheadrightarrow B$ e ii) F é pleno nos subobjetos.

Proposição B.1.6 (Fatoração conservativo-quociente). *Todo funtor entre pretopos $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ admite fatoração em um funtor quociente seguido de um funtor conservativo. Ademais, os morfismos quocientes são ortogonais aos conservativos.*

Demonstração: Veja [Br, 2.2.4]. □

Observação B.1.7. Notamos que o funtor de feixes coerentes, Fei_{Coe} , manda a fatoração conservativo-quociente de morfismos coerentes na fatoração sobrejeção-mergulho de morfismos geométricos.

B.2 Categorias Internas

Expomos aqui alguns fatos sobre categorias interna. Incluímos essa seção em tentativa de tornar o trabalho mais autosuficiente, fornecendo ferramentas para a próxima seção. Fixamos um topos \mathcal{S} no que segue.

Definição B.2.1. Uma *categoria \mathbb{C} interna à \mathcal{S}* consiste de

- Objetos C_1 e C_0 de \mathcal{S} , que serão tratados como, respectivamente, os objetos de morfismos e de objetos da categoria \mathbb{C} ;
- Morfismos $C_1 \rightrightarrows_{d_1}^{d_0} C_0 \xrightarrow{i} C_1$ e $C_2 \xrightarrow{c} C_1$ de \mathcal{S} , com C_2 sendo definido por

$$\begin{array}{ccc} C_2 & \xrightarrow{\pi_1} & C_1 \\ \pi_0 \downarrow & \lrcorner & \downarrow d_0 \\ C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0 \end{array}$$

De forma que esses dados satisfazem os axiomas usuais de categorias na lógica interna à \mathcal{S} . Explicitamente,

$$d_0 i = 1_{C_0} = d_1 i \quad d_0 c = d_0 \pi_1 \quad d_1 c = d_1 \pi_0 \quad c(1 \times c) = c(c \times 1) \quad c(1 \times i) = 1_{C_1} = c(i \times 1)$$

Analogamente, um *funtor interno \mathbb{F} entre categorias internas \mathbb{C} e \mathbb{D} à \mathcal{S}* é um par de morfismos $C_0 \xrightarrow{f_0} D_0$ e $C_1 \xrightarrow{f_1} D_1$ de \mathcal{S} com

$$f_0 d_0^{\mathbb{C}} = d_0^{\mathbb{D}} f_0 \quad f_1 d_1^{\mathbb{C}} = d_1^{\mathbb{D}} f_1 \quad i^{\mathbb{D}} f_0 = f_1 i^{\mathbb{C}} \quad f_1 c^{\mathbb{C}} = c^{\mathbb{D}} (f_1 \times f_1)$$

Denotamos por $\text{Cat}(\mathcal{S})$ a categoria de funtores internos à \mathcal{S} .

Observação B.2.2. Existe uma boa relação entre as categorias internas definidas aqui e as indexadas, tratadas no primeiro capítulo. Toda categoria \mathbb{C} interna à \mathcal{S} admite indexação canônica $[\mathbb{C}]_{\mathcal{S}}$. De fato, a cada i de \mathcal{S} associemos à categoria $[\mathbb{C}]^i$, cujos objetos são da forma $i \xrightarrow{x} C_0$ e morfismos “ $x \xrightarrow{f} y$ ” são setas $i \xrightarrow{f} C_1$ satisfazendo o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} i & \xrightarrow{x} & C_0 \\ y \downarrow & \searrow f & \uparrow s \\ C_0 & \xleftarrow{t} & C_1 \end{array}$$

A ação $\mathbb{C} \mapsto [\mathbb{C}]$ define um mergulho pleno da 2-categoria $\mathbf{Cat}(\mathcal{S})$ à 2-categoria das categorias \mathcal{S} -indexadas, cf. [Elephant, B, 2.3.3]

Dado uma categoria \mathcal{S} -indexada $\underline{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}}$ e uma \mathbb{C} interna à \mathcal{S} , um diagrama de formato \mathbb{C} em $\underline{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}}$ é um par $(F \in \mathcal{D}^{C_0}, d_0^* F \xrightarrow{\mu} d_1^* F)$ de forma que μ é, a menos de isomorfismo, unitário é associativo, onde $(-)^*$ denota a ação de pullback. Note que um diagrama de formato \mathbb{C} na indexação canônica de \mathcal{S} é simplesmente um par $(F \xrightarrow{f} C_0, d_1^* F \xrightarrow{\mu} F)$, com μ uma ação unitária e associativa. Um morfismo de diagramas $(F, \mu) \rightarrow (G, \sigma)$ é uma seta $F \rightarrow G$ em $\underline{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}}^{C_0}$ que comuta com μ e σ . Denotamos por $[\mathbb{C}, \underline{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}}]$ a categoria de diagramas de formato \mathbb{C} em $\underline{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}}$.

Lema B.2.3. Para uma categoria interna \mathbb{C} e uma \mathcal{S} -indexada $\underline{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}}$, a categoria $[[\mathbb{C}]_{\mathcal{S}}, \underline{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}}]$ de transformações naturais \mathcal{S} -indexadas, é equivalente à $[\mathbb{C}, \underline{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}}]$.

Demonstração: Veja [Elephant, B, 2.3.13] □

Uma fibração discreta em \mathcal{S} é um funtor interno $\mathbb{J} \xrightarrow{\mathbb{F}} \mathbb{C}$ tal que o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} J_1 & \xrightarrow{d_1} & J_0 \\ F_1 \downarrow & \lrcorner & \downarrow F_0 \\ C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0 \end{array}$$

É um produto fibrado.

Lema B.2.4. Fazendo $\mathbf{dFib}(\mathcal{S})$ é a categoria de fibrações internas entre categorias internas à \mathcal{S} então, para qualquer \mathbb{C} interna à \mathcal{S} , temos

$$\mathbf{dFib}(\mathcal{S})/\mathbb{C} \simeq [\mathbb{C}^{op}, \mathcal{S}]$$

Evocativamente, denotamos a fibração discreta corespondente a um diagrama $\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathcal{S}$ por $\int F$

Demonstração (esboço): Dado diagrama $(F \xrightarrow{f} C_0, d_1^* F \xrightarrow{\mu} F)$ considere o produto fibrado abaixo,

$$\begin{array}{ccc} C_1 \times_{C_0} F & \xrightarrow{\pi} & F \\ \pi \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0 \end{array}$$

É rotina mostrar que as setas $\mu, \pi : C_1 \times_{C_0} F \rightrightarrows F$ formam uma categoria (com $d_1 = \pi$ e $d_0 = \mu$), que claramente define uma fibração discreta sobre \mathbb{C} . Seguindo, temos a clara ação nas setas

$$[(F \xrightarrow{f} C_0, d_1^* F \xrightarrow{\mu} F) \xrightarrow{k} (G \xrightarrow{g} C_0, d_1^* G \xrightarrow{\phi} G)] \mapsto (F_0 \xrightarrow{k} G_0, C_1 \times_{C_0} \xrightarrow{1 \times_{C_0} k} C_1 \times_{C_0} G)$$

O “lema do pullback” mostra que, para um par de funtores internos $\mathbb{A} \xrightarrow{f} \mathbb{B} \xrightarrow{g} \mathbb{C}$, temos f uma fibração discreta sse gf uma fibração discreta, e então a ação acima é bem definida.

Reciprocamente, dado uma fibração discreta

$$\begin{array}{ccc} J_1 & \xrightarrow{d_1} & J_0 \\ F_1 \downarrow & \lrcorner & \downarrow F_0 \\ C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0 \end{array}$$

Como $d_1^* J_0 \cong J_1$ basta associar a fibração ao diagrama $(J_0 \xrightarrow{F_0}, d_1^* J_0 \xrightarrow{d_1} J_0)$.

As ações são rapidamente vistas como, a menos de um isomorfismo, mutuamente inversas e o resultado segue. Para mais detalhes, cf. [Elephant, B, 2.5.3] \square

B.3 Topoi sobre uma base

Fazemos aqui uma curta exposição da teoria de Topoi sobre uma base, seguimos os textos [Elephant, B] e [Joh2].

Um \mathcal{S} -topos é simplesmente um morfismo geométrico $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$. Dado \mathbb{C} uma categoria interna à \mathcal{S} e um \mathcal{S} -topos $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$, note que definindo $p^*\mathbb{C}$ da maneira óbvia, obtemos uma categoria interna à \mathcal{E} . Note ademais que um diagrama $\mathbb{C} \rightarrow \underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{S}}$ equivale a um $p^*\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{E}$.

Observação B.3.1. Note que todo \mathcal{S} -topos $\mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{S}$ induz um topos \mathcal{S} -indexado pondo $\underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{S}}^i = \mathcal{E}/p^*i$. Por meio dessa ação, podemos considerar $\mathcal{T}\mathcal{o}\mathcal{p}\mathcal{o}\mathcal{s}/\mathcal{S}$, a 2-categoria dos \mathcal{S} -topoi, como uma sub-2-categoria da 2-categoria dos topoi \mathcal{S} -indexados, $\mathcal{T}\mathcal{o}\mathcal{p}\mathcal{o}\mathcal{s}_{\mathcal{S}}$. Uma demonstração disso pode ser encontrada em [Elephant, B, 3.1.5].

Definição B.3.2. Seja $\mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{S}$ um \mathcal{S} -topos e \mathbb{C} uma categoria interna à \mathcal{S} . Diremos que um diagrama $\mathbb{C}^{op} \xrightarrow{F} \mathcal{E}$ é *plano (flat)* sse, para $\int F \rightarrow p^*\mathbb{C}$ a fibração discreta correspondente ao F , temos $\int F$ uma categoria filtrada na lógica interna à \mathcal{S} . Denotamos por $\mathbf{Pla}(\mathbb{C}^{op}, \mathcal{E})$ a subcategoria plena de diagramas planos.

Teorema B.3.3. Dado $\mathbb{C} \in \mathbf{Cat}(\mathcal{S})$, \mathbb{C} é filtrada sse o funtor $\mathcal{S}^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\text{colim}_{\mathbb{C}}} \mathcal{S}$, dado por

$$\text{colim}_{\mathbb{C}}(\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}) := \text{coeq}(D_1 \rightrightarrows D_0)$$

preserva limites finitos

Demonstração: Veja [Joh2, 2.58] \square

Corolário B.3.4. Seja $\mathbb{C} \in \mathbf{Cat}(\mathcal{S})$ e $\mathcal{E} \in \mathcal{T}\mathcal{o}\mathcal{p}\mathcal{o}\mathcal{s}/\mathcal{S}$. Se \mathbb{C} tem limites finitos então $\mathbb{C}^{op} \xrightarrow{F} \mathcal{E}$ é plano sse F preserva limites finitos

Teorema B.3.5 (Diaconescu). Dado \mathcal{S} -topos $\mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{S}$ e categoria interna \mathbb{C} , temos a equivalência

$$\mathbf{Pla}(\mathbb{C}^{op}, \mathcal{E}) \simeq \mathcal{T}\mathcal{o}\mathcal{p}\mathcal{o}\mathcal{s}/\mathcal{S}(\mathcal{E}, [\mathbb{C}, \mathcal{S}])$$

natural em \mathcal{E} .

Demonstração: Veja [Elephant, B, 3.2.7] \square

Teorema B.3.6. Dado um \mathcal{S} -topos $\mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{S}$, são equivalentes

- i) $\underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{S}}$ tem admite família \mathcal{S} -indexda de separadores;

- ii) Existe um objeto B de \mathcal{E} tal que todo objeto e de \mathcal{E} aconte como subquociente de algum $p^*i \times B$, isto é, para todo objeto e de \mathcal{E} há i de \mathcal{S} e a de \mathcal{E} com morfismos

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ \swarrow & & \searrow \\ p^*i \times B & & e \end{array}$$

Se as condições acima ocorrem diremos p limitado e B um limite para p .

Demonstração: Veja [Elephant, B, 3.1.6]. □

Lema B.3.7. O \mathcal{S} -topos $[\mathbb{C}, \mathcal{S}]$ é limitado.

Demonstração: Veja [loc. cit., B, 3.2.1] □

Teorema B.3.8 (Giraud para \mathcal{S} -topoi). Dado um \mathcal{S} -topos $\mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{S}$, são equivalentes

- i) p é limitado;
- ii) Existe categoria interna \mathbb{C} à \mathcal{S} e uma inclusão $\mathcal{E} \hookrightarrow [\mathbb{C}, \mathcal{S}]$

Demonstração: Veja [loc. cit., B, 3.3.4] □

Para entender o paralelo do teorema acima com o resultado clássico de Giraud, precisamos lembrar-nos da equivalência entre subtopoi e categorias de feixes internos.

Definição B.3.9. Dado um topos \mathcal{E} com classificador de subobjetos Ω , um operador local em \mathcal{E} é um morfismo $\Omega \xrightarrow{j} \Omega$ que faz os diagramas comutarem

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{\top} & \Omega & & \Omega & \xrightarrow{j} & \Omega & & \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\wedge} & \Omega \\ & \searrow \top & \downarrow j & & \searrow j & \downarrow j & & j \times j \downarrow & & \downarrow j \\ & & \Omega & & \Omega & & & \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\wedge} & \Omega \end{array}$$

Como Ω representa o (pseudo)funtor Sub , o operador local j induz uma ação nos subobjetos que denotaremos por $\overline{(-)} : \text{Sub}(A) \rightarrow \text{Sub}(A)$. Dizemos j -feixe um objeto $F \in \mathcal{E}$ tal que, para todo subobjeto $S \leq A$ com $\overline{S} = A$, a inclusão induz uma bijeção

$$\mathcal{E}(S, F) \cong \mathcal{E}(A, F)$$

Denotamos por $\text{Fei}_j(\mathcal{E})$ a subcategoria plena de j -feixes.

Teorema B.3.10. Operadores locais em um topos \mathcal{S} equivalem a inclusões $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{S}$ por meio da ação $j \mapsto (\text{Sh}_j(\mathcal{S}) \hookrightarrow \mathcal{S})$. Para a ação inversa, se L o refletor de $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{S}$ note que para $S \leq A$ temos $LS \leq LA$ e, portanto, fazendo o pullback ao longo da unidade $A \rightarrow LA$, obtemos um subobjeto $c_L(A) \leq A$. No total, temos um endomorfismo em $\text{Sub}(A)$ natural em A que, por Yoneda, induz um mapa $\Omega \rightarrow \Omega$.

Demonstração: Veja [Elephant, A, 4.4.8]. □

Obtemos então

Teorema B.3.11. Dado \mathbb{C} interna à \mathcal{S} , defina topologias de grothendieck internas e feixes internos usando a lógica interna. Para cada topologia de grothendieck interna J existe operador local j correspondente à J com $\text{Fei}_j[\mathbb{C}, \mathcal{S}] \simeq \text{Fei}_J \mathbb{C}$.

Demonstração: Uma demonstração para $\mathcal{S} = \mathbf{Con}$ está disponível em [SGL, V, 1.2]. Obtemos o caso geral por meio da lógica interna, cf. 1.1.4. □

Deixe $\mathbf{Pla}_{\mathbb{J}}(\mathbb{C}, \mathcal{E})$ a subcategoria plena de $\mathbf{Pla}(\mathbb{C}, \mathcal{E})$ dos funtores \mathbb{J} -contínuos.

Teorema B.3.12. *Dado \mathcal{S} -topos $\mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{S}$ e sítio interno (\mathbb{C}, \mathbb{J}) , temos a equivalência*

$$\mathbf{Pla}_{\mathbb{J}}(\mathbb{C}, \mathcal{E}) \simeq \mathfrak{Topos}/\mathcal{S}(\mathcal{E}, \mathbf{Fei}_{\mathcal{S}}(\mathbb{C}, \mathbb{J}))$$

natural em \mathcal{E} .

Demonstração: Para $\mathcal{S} = \mathbf{Con}$, veja [SGL, VII, 10.2]. Confira a observação acima. \square

Referências Bibliográficas

- [AwFo] S. Awodey e H. Forssell, *First-Order Logical Duality*, *Annals of Pure and Applied Logic* **164**, 2013.
- [Aw1] S. Awodey, *Logic in Topoi: Functorial Semantics for Higher-Order Logic*, tese de Ph.D, 1997.
- [Aw2] S. Awodey, *Sheaf Representations and Duality in Logic* in Joachim Lambek: *The Interplay of Mathematics, Logic, and Linguistics*, C Casadio e P. Scott, Springer International Publishing, pp. 39–57, 2021.
- [Be] A. Betts, *The First-Order Theory of Geometric Points of Schemes: Chevalley’s theorem and quantifier elimination*, preprint, disponível em arxiv.org/abs/1504.03377v1, 2015.
- [Br] S. Breiner, *Scheme representation for first-order logic*, tese de Ph.D, Disponível em arxiv.org/abs/1402.2600v1, 2014.
- [Bu] M. Bunge, *An application of descent to a classification theorem for toposes*, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **107**, pp. 59–79, 1990.
- [BuMo1] C. Butz e I. Moerdijk, *Representing topoi by topological groupoids*, *Journal of Pure and Applied Algebra* **130**, pp. 223–235, 1998.
- [BuMo2] C. Butz e I. Moerdijk, *Topological Representation of Sheaf Cohomology of Sites*, *Compositio Mathematica*, **118(2)**, pp 217–233, 1999.
- [EGA1] A. Grothendieck e J. Dieudonné, *Éléments de Géométrie Algébrique: Le Langage des schémas*, Institut des Hautes Études Scientifiques, 1960.
- [Elephant] P. Johstone, *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium*, Oxford University Press, 2002.
- [Fo1] H. Forssell, *First-Order Logical Duality*, tese de Ph.D, 2008.
- [Fo2] H. Forssell, *Subgroupoids and Quotient Theories*, preprint, Disponível em <https://arxiv.org/pdf/1111.2952.pdf>.
- [Fo3] H. Forssell, *Topological Representation of Geometric Theories*, *Mathematical Logic Quarterly* **58**, pp. 380–393, 2012.
- [FHS] J. Funk, P. Hofstra, and B. Steinberg. *Isotropy and crossed toposes*, *Theory and Applications of Categories* **26(24)**, pp. 660 – 709, 2012.
- [Hod] W. Hodges, *A Shorter Model Theory*, Cambridge University Press, 1997.
- [Joh1] P. Johstone, *Factorization theorems for geometric morphisms, I*, *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, Tome 22, No 1, pp. 3–17, 1981.
- [Joh2] P. Johstone, *Topos Theory*, Academic Press, 1977.

- [Joh3] P. Johnstone, *Stone Spaces*, Cambridge University Press, 1982.
- [JoTi] A. Joyal e M. Tierney, *An extension of the Galois theory of Grothendieck*, *Memoirs of the American Mathematician Society* **309**, 1984.
- [LaMo] J. Lambek e I. Moerdijk, *Two sheaf representations of elementary toposes*, in *The L.E.J. Brouwer Centenary Symposium, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, vol. 110, A. Troelstra e D. van Dalen, 1982.
- [Lu] J. Lurie, *Ultracategories*, disponível online em people.math.harvard.edu/~lurie/papers/Conceptual.pdf, acesso em 08/11/2021.
- [Ma] M. Makkai, **Duality and Definability in First Order Logic**, *Memoirs of the American Mathematician Society* **503**, 1993.
- [Mar] M. Maruyama, *Meaning and Duality: from categorical logic to quantum physics*, Tese de PhD, University of Oxford, 2016.
- [MaRe] M. Makkai e G. E. Reyes, **First Order Categorical Logic**, *Lecture Notes in Mathematics* **611**, Springer-Verlag, 1977.
- [Mo1] I. Moerdijk, *The Classifying Topos of a Continuous Groupoid. I*, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 310, No. 2, pp. 629–668, 1988.
- [Mo2] I. Moerdijk, *The Classifying Topos of a Continuous Groupoid. II*, *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, Tome 31, No. 2 pp. 137–168, 1990.
- [PaSc] R. Paré e D. Schumacher, *Abstract families and the adjoint functor theorems*, *Lecture Notes in Mathematics* **661**, pp. 1–125, 1978.
- [SGL] S. Mac Lane e I. Moerdijk, **Sheaves in Geometry and Logic**, Universitext, Springer-Verlag, 1994.
- [SGA4] M. Artin, A. Grothendieck, J. Verdier, **Theorie de Topos et Cohomologie Etale des Schemas, Tome I**, *Lecture Notes in Mathematics* **269**, Springer, 1971.