

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

GUSTAVO RINALDI DE OLIVEIRA SEGANTINI

Projeto e simulação de sistema de controle de diferencial  
eletrônico para veículo elétrico de competição Fórmula  
Estudantil

São Carlos  
2024



GUSTAVO RINALDI DE OLIVEIRA SEGANTINI

Projeto e simulação de sistema de controle de diferencial  
eletrônico para veículo elétrico de competição Fórmula  
Estudantil

Monografia apresentada ao  
Curso de Engenharia Elétrica  
com Ênfase em Sistemas de  
Energia e Automação, da Escola  
de Engenharia de São Carlos  
da Universidade de São Paulo,  
como parte dos requisitos para  
obtenção do Título de Engenheiro  
Eletricista

Orientador(a): Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maira  
Martins da Silva

São Carlos  
2024

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,  
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS  
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da  
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

R578p Rinaldi de Oliveira Segantini, Gustavo  
Projeto e simulação de sistema de controle de  
diferencial eletrônico para veículo elétrico de  
competição Fórmula Estudantil / Gustavo Rinaldi de  
Oliveira Segantini; orientadora Maira Martins da Silva.  
São Carlos, 2024.

Monografia (Graduação em Engenharia Elétrica com  
ênfase em Sistemas de Energia e Automação) -- Escola de  
Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo,  
2024.

1. Veículo Elétrico. 2. Regulador Linear  
Quadrático (LQR). 3. Controle Ótimo. 4. Diferencial  
Eletrônico. I. Título.

# FOLHA DE APROVAÇÃO

**Nome: Gustavo Rinaldi de Oliveira Segantini**

**Título: “Projeto e simulação de sistema de controle de diferencial eletrônico para veículo elétrico de competição Fórmula Estudantil”**

**Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado  
em 20/06/2024,**

**com NOTA** 9,0 ( nove , zero ),

**pela Comissão Julgadora:**

**Profa. Associada Maíra Martins da Silva - Orientadora -  
SEM/EESC/USP**

**Prof. Associado José Carlos de Melo Vieira Júnior - SEL/EESC/USP**

**Prof. Titular Marco Henrique Terra - SEL/EESC/USP**

**Coordenador da CoC-Engenharia Elétrica - EESC/USP:  
Professor Associado José Carlos de Melo Vieira Júnior**



*Este trabalho é dedicado a todos que acreditam no poder transformador da educação.*





## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais, Cesar e Silvana, e ao meu irmão, Felipe, por todo auxílio e incentivo incondicionais dado ao longo da vida e da graduação. À minha namorada Aline, por todos os bons momentos compartilhados, pelo apoio e por toda força dada em momentos difíceis. Aos meus amigos Maurício, Helton, Gabriel Freitas, João Victor Rios, Gabriel Cairo, Gabriel Saretti, Gustavo Takaoka e Cássio por terem me acompanhado nessa árdua jornada. A minha orientadora Maira, por todas as oportunidades que me proporcionou durante a graduação.



*“Não é o conhecimento, mas o ato de aprender,  
não a posse, mas o ato de chegar lá, que concede a maior alegria.”*  
*Carl Friedrich Gauss*



## RESUMO

RINALDI, G. **Projeto e simulação de sistema de controle de diferencial eletrônico para veículo elétrico de competição Fórmula Estudantil**: 2024. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

Veículos elétricos são, atualmente, fundamentais devido ao seu papel na redução das emissões de carbono e na transição para uma mobilidade mais sustentável, já que sua construção utiliza uma quantidade menor de peças e seu aperfeiçoamento tecnológico resulta em maior durabilidade e reduz a quantidade de manutenções necessárias. Diante disso, dentre as oportunidades de aperfeiçoamento com menor custo concomitante a maior impacto, surge como alternativa o diferencial eletrônico. Este trabalho visa melhorar o desempenho de um veículo de Fórmula Estudantil elétrico por meio do projeto de uma estratégia de controle para um diferencial eletrônico, utilizando um Regulador Linear Quadrático (LQR). Essa abordagem inclui a modelagem dinâmica do veículo e o desenvolvimento da planta de controle ótimo para sistemas com ganho fixo e escalonável, realizando também testes de observabilidade e controlabilidade, e análises de resposta no tempo. Após a realização dos testes, é feito um comparativo dos sistemas controlados e de malha aberta para verificar qual apresenta melhores resultados diante de métricas como estabilidade, parâmetros de resposta ao degrau e desempenho em manobra de mudança dupla de faixa. No trabalho, verifica-se que existem dois candidatos promissores dentre os sistemas analisados: o LQR de Ganho Escalonável e o LQR de Ganho Fixo em 25m/s. Comparando estes, o LQR de Ganho Escalonável apresenta o melhor desempenho, proporcionando controle com respostas mais rápidas, estáveis e maior versatilidade para diferentes velocidades.

Palavras-chave: Veículo Elétrico. Diferencial Eletrônico. Controle Ótimo. Regulador Linear Quadrático (LQR).



## ABSTRACT

RINALDI, G. **Project and Simulation of a Control System for the Electronic Differential of an Electric Formula Student Competition Vehicle**. 2024. Monography (Undergraduate thesis) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

Electric vehicles are currently essential due to their role in reducing carbon emissions and facilitating the transition to more sustainable mobility, since your construction uses less mechanical parts and its technological development results in better durability and reduces the need for maintenance. Accordingly, among the improvement opportunities with lower cost and simultaneous greater impact, the electronic differential emerges as an alternative. Thus, this project aims to enhance the performance of an electric Formula Student vehicle through the development of a control strategy for an electronic differential using the Linear Quadratic Regulator (LQR). The approach includes dynamic vehicle modeling, optimal control plant development with observability and controllability tests, and time-response analysis. After executing the tests, a comparative is made between the controlled and non-controlled systems to check which gives better results regarding stability, step-response parameters, and performance in double-lane change manouvers. In this work, it is verified that there are two promising candidates between the analyzed systems: the Fixed Gain in 25m/s LQR and the Gain Scheduled LQR. Comparing them, the Gain Scheduled LQR has the better performance and is suitable for quicker and stabler response and is more versatile for a different range of longitudinal speeds.

Keywords: Electric vehicle (EV). Electronic differential system (EDS). Optimal Control. Linear Quadratic Regulator (LQR).





## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplo de Diferencial Eletrônico aplicado a dois motores elétricos . . .	26
Figura 2 – Protótipo T-05 da EESC-USP Tupã . . . . .	28
Figura 3 – Modelo Dinâmico Plano Sem Rolamento . . . . .	31
Figura 4 – Modelo Dinâmico Single Track . . . . .	32
Figura 5 – Sistema básico de controle realimentado . . . . .	35
Figura 6 – Sistema de controle realimentado com múltiplas entradas e saídas . . .	35
Figura 7 – Sistema de controle no domínio do tempo . . . . .	36
Figura 8 – Sistema de Primeira Ordem no Domínio da Frequência . . . . .	38
Figura 9 – Sistema de Primeira Ordem no Domínio da Frequência . . . . .	39
Figura 10 – Mapa de Polos e Zeros de um Sistema Instável . . . . .	43
Figura 11 – Sistema LQR de Malha Aberta . . . . .	44
Figura 12 – Sistema LQR de Malha Fechada . . . . .	45
Figura 13 – Manobra de Mudança de Faixa Dupla . . . . .	46
Figura 14 – Mapa de Polos e Zeros do Sistema de Malha Aberta . . . . .	51
Figura 15 – Mapa de Polos e Zeros do Sistema com LQR Fixo em 1m/s . . . . .	51
Figura 16 – Mapa de Polos e Zeros do Sistema com LQR Fixo em 7m/s . . . . .	52
Figura 17 – Mapa de Polos e Zeros do Sistema com LQR Fixo em 15m/s . . . . .	52
Figura 18 – Mapa de Polos e Zeros do Sistema com LQR Fixo em 25m/s . . . . .	53
Figura 19 – Mapa de Polos e Zeros do Sistema com LQR Escalonável . . . . .	53
Figura 20 – Resposta ao Degrau do Sistema de Malha Aberta . . . . .	55
Figura 21 – Resposta ao Degrau do Sistema com LQR Fixo em 1m/s . . . . .	56
Figura 22 – Resposta ao Degrau do Sistema com LQR Fixo em 7m/s . . . . .	56
Figura 23 – Resposta ao Degrau do Sistema com LQR Fixo em 15m/s . . . . .	57
Figura 24 – Resposta ao Degrau do Sistema com LQR Fixo em 25m/s . . . . .	57
Figura 25 – Resposta ao Degrau do Sistema com LQR de Ganho Escalonável . . .	58
Figura 26 – Resposta à condição inicial do Sistema com LQR Fixo em 7m/s . . . .	60
Figura 27 – Resposta à condição inicial do Sistema com LQR Fixo em 15m/s . . . .	61
Figura 28 – Resposta à condição inicial do Sistema com LQR Fixo em 25m/s . . . .	61
Figura 29 – Resposta à condição inicial do Sistema com LQR de Ganho Escalonável	62
Figura 30 – Ângulo de esterço para a manobra de dupla mudança de faixa . . . . .	63
Figura 31 – Taxa de guinada de regime permanente em manobra de dupla mudança de faixa . . . . .	64
Figura 32 – Taxa de guinada em manobra de dupla mudança de faixa . . . . .	64



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabela Comparativa de Modelos Dinâmicos . . . . .	31
Tabela 2 – Parâmetros do Modelo Dinâmico Single Track . . . . .	47
Tabela 3 – Tabela de Controlabilidade, Observabilidade e Gradiente de Subesterço	48
Tabela 4 – Autovalores para sistemas de Malha Aberta, LQR Ganho Fixo e LQR Escalonável . . . . .	50
Tabela 5 – Métricas de Estabilidade obtidas pela Resposta ao Degrau . . . . .	59



## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

CG	Centro de Gravidade
DLC	Dupla Mudança de Faixa (Double-Lane Change)
EDS	Sistema de Diferencial Eletrônico (Electronic Differential System)
EESC	Escola de Engenharia de São Carlos
EV	Veículo Elétrico (Electric Vehicle)
LPV	Linear e Variante em Parâmetros (Linear Parameter-Varying)
LQR	Regulador Linear Quadrático (Linear Quadratic Regulator)
USP	Universidade de São Paulo
SAE	Sociedade dos Engenheiros Automotivos (Society of Automotive Engineers)



## LISTA DE SÍMBOLOS

$\rho$	Posição do centro de massa dado referencial inercial
$x_o$	Eixo x no referencial inercial
$y_o$	Eixo y no referencial inercial
$z_o$	Eixo z no referencial inercial
$V_o$	Velocidade linear no referencial inercial
$\omega_o$	Velocidade angular no referencial inercial
$C_{ob}$	Matriz de transformação do referencial inercial para o referencial do veículo
$V_b$	Velocidade linear no referencial do veículo
$\omega_b$	Velocidade angular
$\gamma$	Taxa de guinada
$\delta$	Ângulo de esterço
$\beta$	Ângulo de escorregamento do corpo
$\alpha$	Ângulo de escorregamento da roda
$V_b$	Velocidade linear no referencial do veículo
$M_z$	Momento angular no eixo Z
$C_j$	Rigidez em curva do pneu
$F_y$	Força aplicada no eixo y no referencial do veículo
$I_z$	Momento linear no eixo Z
$R$	Raio de curvatura
$L$	Distância do eixo ao centro de gravidade
$y$	Saída do sistema de controle
$x$	Entrada do sistema de controle
$K$	Ganho de malha fechada
$P$	Solução da Matriz de Riccati

$J$	Funcional (Função Custo)
$V(i)$	Vetor velocidade longitudinal discreta na posição 'i'
$r_{ss}$	Taxa de guinada em regime permanente (rad/s)
$r_b$	Taxa de guinada de referência em regime permanente (rad/s)
$sgn$	Função sinal
$\mu$	Coeficiente de atrito entre pneus e estrada
$c$	Coeficiente de segurança relativo ao erro produzido por $\mu$
$r_{ref}$	Taxa de guinada de referência (rad/s)
$GL$	Graus de Liberdade



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>25</b>
<b>1.1</b>	<b>Contexto . . . . .</b>	<b>25</b>
<b>1.2</b>	<b>Motivação . . . . .</b>	<b>27</b>
<b>1.3</b>	<b>Objetivos . . . . .</b>	<b>28</b>
<b>2</b>	<b>METODOLOGIA . . . . .</b>	<b>31</b>
<b>2.1</b>	<b>Modelagem Dinâmica do Veículo . . . . .</b>	<b>31</b>
<b>2.2</b>	<b>Resposta de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>2.3</b>	<b>Modelagem do Veículo no Espaço de Estados . . . . .</b>	<b>40</b>
<b>2.4</b>	<b>Gradiente de Subesterço . . . . .</b>	<b>40</b>
<b>2.5</b>	<b>Modelo em Regime Permanente . . . . .</b>	<b>41</b>
<b>2.6</b>	<b>Estabilidade, Observabilidade e Controlabilidade . . . . .</b>	<b>43</b>
<b>2.7</b>	<b>Regulador Linear Quadrático . . . . .</b>	<b>44</b>
<b>2.8</b>	<b>Manobra de Dupla Mudança de Faixa . . . . .</b>	<b>46</b>
<b>3</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>47</b>
<b>3.1</b>	<b>Modelagem no Espaço de Estados . . . . .</b>	<b>47</b>
<b>3.2</b>	<b>Controlabilidade e Observabilidade . . . . .</b>	<b>48</b>
<b>3.3</b>	<b>Estabilidade . . . . .</b>	<b>49</b>
<b>3.4</b>	<b>Resposta ao Degrau . . . . .</b>	<b>55</b>
<b>3.5</b>	<b>Resposta à Condição Inicial . . . . .</b>	<b>60</b>
<b>3.6</b>	<b>Manobra de Dupla Mudança de Faixa . . . . .</b>	<b>63</b>
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>67</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>69</b>



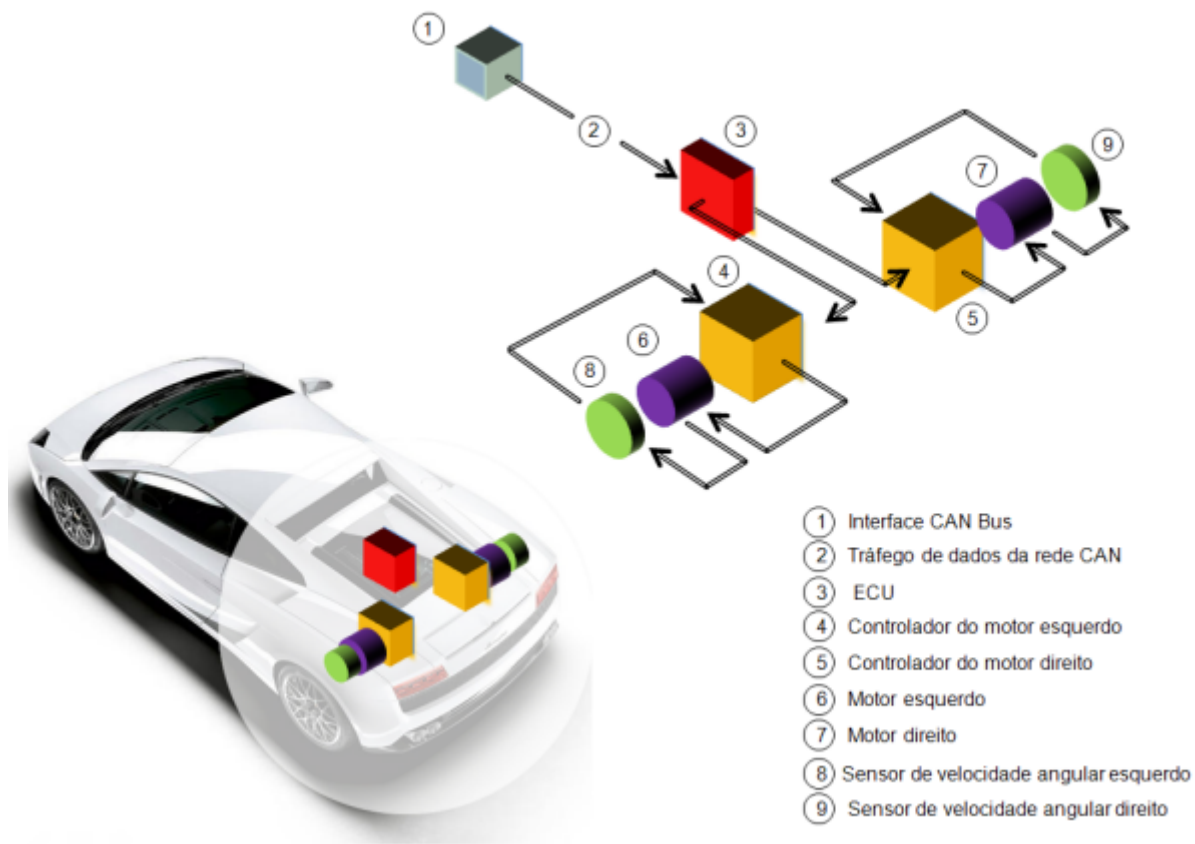
# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Contexto

O mercado automotivo é um dos mais importantes da atualidade. De acordo com (SANGUESA et al., 2021), sua importância não se limita a nível econômico, mas também é contemplada em termos de pesquisa e desenvolvimento, aliada a uma crescente demanda por uma mobilidade mais limpa e menos dependente da emissão de poluentes.

Os veículos elétricos, segundo (MENDONÇA, 2021), são uma tendência mundial no setor automotivo, pois oferecem vantagens como maior eficiência energética, menor impacto ambiental e menor custo de manutenção. Em um estudo de caso brasileiro, (VARGAS, 2020) cita que o mercado de veículos elétricos vem crescendo nos últimos anos, apesar de possuir desafios como o alto preço de aquisição e a infraestrutura de recarga ainda em expansão. Isso, de acordo com (SECINARO, 2022), altera a percepção do consumidor, que pondera essas barreiras frente a fatores tidos pelos mesmos como positivos, como o peso da consciência ambiental na escolha por um veículo elétrico e a economia agregada a longo prazo. Desta forma, (OLIVEIRA et al., 2022) evidencia que o mercado de veículos elétricos no Brasil ainda é incipiente, mas possui potencial para se expandir nos próximos anos, acompanhando a tendência global de transição energética e descarbonização do setor de transportes.

Figura 1 – Exemplo de Diferencial Eletrônico aplicado a dois motores elétricos



Fonte: extraída de (SAMPAIO, 2011)

Um importante recurso empregado a esse tipo de veículo é o diferencial eletrônico, representado pela Figura 1. Tradicionalmente, veículos possuem um eixo mecânico denominado diferencial, que é responsável pela distribuição dos torques gerados pelos motores para as rodas. Segundo (XUE et al., 2020), com dois motores elétricos, um acoplado a cada um dos dois eixos laterais do veículo, é possível controlar essa distribuição de torques através de uma malha de controle que, baseada em informações obtidas em tempo real, decide como o fazer e produz distribuição de torque precisa se comparada ao dispositivo mecânico.

## 1.2 Motivação

A Formula SAE é uma competição estudantil definida pela Sociedade de Engenheiros Automotivos (SAE) (INTERNATIONAL, 2023), organizadora do evento como um ambiente competitivo onde se preparam estudantes de graduação e pós-graduação em diversas áreas da engenharia para o desenvolvimento de tecnologia e habilidades relacionadas à indústria da mobilidade, por meio de desafios com aplicações reais de engenharia. Dentre as habilidades a serem desenvolvidas pelos participantes durante o processo, o documento menciona:

- "Gerenciamento de projetos, orçamento, comunicação e habilidades de gerenciamento de recursos;
- Colaboração em equipe;
- Aplicação de regras e regulamentos da indústria;
- Projetar, construir e testar o desempenho de um veículo real;
- Interagir e competir com outros estudantes ao redor do mundo;
- Desenvolver e preparar documentação técnica."

Além disso, os participantes também desenvolvem exposição profissional e engajamento com profissionais da indústria para aprimorar habilidades de aprendizagem do século XXI, construir sua própria rede e ajudá-los a se preparar para o mercado de trabalho.

A competição conta com uma etapa brasileira, a Formula SAE Brasil, fundada em 2004. Desde então, foram realizadas 19 Competições da categoria, sendo divididas entre Combustão e Elétrico. Anualmente, as equipes vitoriosas representam o Brasil em duas competições internacionais realizadas nos Estados Unidos da América. Enquanto competição, seu objetivo é similar ao das etapas internacional, ou seja, incentivar o desenvolvimento de profissionais e de tecnologias para a indústria automotiva (BRASIL, 2022).

Fundada em 2012, a Equipe EESC-USP Tupã é a equipe de fórmula estudantil elétrico da Escola de Engenharia de São Carlos, cujo objetivo é projetar, manufaturar e validar um carro elétrico de alto desempenho, com foco na competição da Fórmula SAE. O grupo estudantil oferece oportunidades e desafios para seus membros, ajudando a desenvolver habilidades importantes como trabalho em equipe, organização, gestão e liderança (TUPã, 2021). Anualmente, a equipe projeta veículos como o da Figura 2:

Figura 2 – Protótipo T-05 da EESC-USP Tupã



Fonte: Extraída de (TUPã, 2021)

Tendo como foco o desenvolvimento de tecnologias que possam melhorar o desempenho do veículo com o menor custo de desenvolvimento e implementação simultaneamente gerar maior impacto, neste trabalho é proposto o projeto e desenvolvimento de um sistema de controle de apoio para um diferencial eletrônico (EDS) para o veículo de competição da categoria Formula SAE Elétrico da equipe EESC-USP Tupã da Universidade de São Paulo, Campus São Carlos.

### 1.3 Objetivos

Este projeto busca propor um controlador cuja saída possa ser processada e utilizada em um sistema de distribuição de torque entre os dois motores do veículo em diversas situações de pistas. O controlador em questão deve utilizar uma técnica de controle baseada no regulador linear quadrático, usualmente denotado pelo acrônimo *LQR*. Após o desenvolvimento do controlador, devem ser feitas análises de parâmetros de desempenho para avaliar o desempenho deste. Uma vez selecionado um dos sistemas de controle, este será submetido a uma manobra-teste para avaliar sua capacidade de seguimento de referência.

Desta forma, os objetivos específicos deste trabalho são:

1. Desenvolvimento de conjunto de equações dinâmicas para modelar um veículo de quatro rodas;
2. Parametrização e modelagem do veículo no espaço de estados;
3. Análise do gradiente de subesterço do veículo;
4. Análise do comportamento do veículo em regime permanente;
5. Implementação do Regulador Linear Quadrático de ganho fixo;
6. Análises de estabilidade, observabilidade e controlabilidade do sistema;
7. Implementação de Regulador Linear Quadrático de Ganho Escalonável e comparação com sistema controlado de Ganho Fixo;
8. Análise de resultados e comparação entre a utilização dos três tipos de sistema: Malha Aberta, LQR de Ganho Fixo e LQR de Ganho Escalonável;
9. Teste de manobra de mudança dupla de faixa.





## 2 METODOLOGIA

### 2.1 Modelagem Dinâmica do Veículo

Existem diversos modelos que permitem representar um veículo em termos de seu comportamento dinâmico. (NETO, 2005) define o processo de modelagem como o desenvolvimento de "hipóteses simplificadoras a respeito do comportamento do sistema real", bem como sugere alguns modelos, que variam em complexidade, de acordo com a Tabela 1:

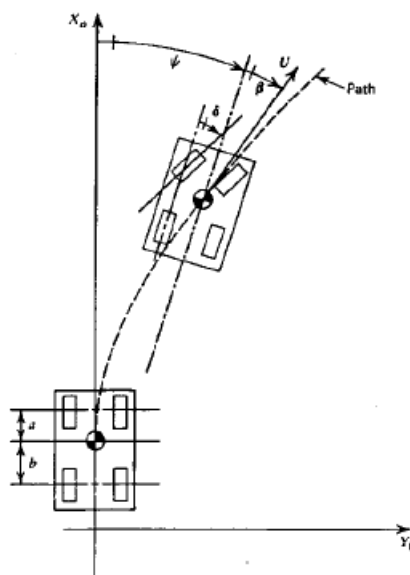
Tabela 1 – Tabela Comparativa de Modelos Dinâmicos

Modelo	GL	Entradas	Dimensões	Transf. de carga lateral
Bicicleta (Single-Track)	3	2	2	Ausente
Plano de 4 rodas	3	4	2	Aproximada
Duas massas	4	4	3	Aproximada
3-D com geometria da suspensão	18	4	3	Exata

Fonte: extraída de (NETO, 2005)

O primeiro modelo sugerido foi o 'Modelo plano sem rolamento', que representa três graus de liberdade do veículo e a transferência lateral de carga aproximada, como indicado na Figura 3.

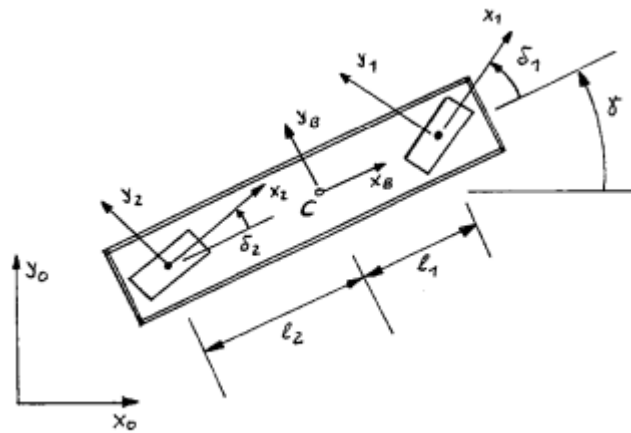
Figura 3 – Modelo Dinâmico Plano Sem Rolamento



Fonte: extraída de (NETO, 2005)

Para implementar o diferencial eletrônico ao veículo de interesse, foi adotado o modelo físico Single-Track (também chamado de Modelo Bicicleta) para representá-lo. Este modelo, apresentado na Figura 4 e desenvolvido em (NETO, 2005), simplifica a análise e o desenvolvimento de um conjunto de equações diferenciais que representem o comportamento dinâmico do veículo. O modelo utiliza um único eixo longitudinal com duas rodas, de forma que a roda dianteira representa o eixo dianteiro de um carro de quatro rodas e, analogamente, a roda traseira representa o eixo traseiro. Vale observar que este modelo foi escolhido por não representar transferência lateral de carga.

Figura 4 – Modelo Dinâmico Single Track



Fonte: extraída de (NETO, 2005)

Retomando o modelo bicicleta, de acordo com (NETO, 2005), através dos ângulos formados entre o sistema de coordenadas indicado na Figura 4 é possível extrair um conjunto de equações de movimento dado o referencial inercial. Seja o centro de massa do veículo posicionado em:

$$r_o = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Com  $Z_0 = 0$  e constante.

A partir disto, estabelecem-se, respectivamente, as velocidades linear e angular do centro de massa em relação ao referencial inercial:

$$V_o = \begin{bmatrix} \dot{X}_0 \\ \dot{Y}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\omega_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Para se estabelecer um referencial de coordenadas no veículo, as coordenadas generalizadas serão:  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $Z_0$  e  $\gamma$ . A matriz de transformação do referencial inercial para o referencial do veículo utilizada foi:

$$C_{ob} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Aplicando-a e expressando as equações de velocidade do centro de massa em relação ao referencial do veículo, são obtidas:

$$V_b = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\omega_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Manipulando algebricamente as equações anteriormente apresentadas, é possível alcançar o seguinte conjunto de equações diferenciais generalizadas das posições em função das velocidades:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \omega_z \\ \dot{X}_0 &= V_x \cdot \cos\gamma - V_y \cdot \sin\gamma \\ \dot{Y}_0 &= V_x \cdot \sin\gamma + V_y \cdot \cos\gamma \end{aligned} \quad (2.7)$$

Seja o índice 1 atribuído às grandezas referentes à roda dianteira do modelo bicicleta e o índice 2 referido analogamente à traseira, é possível obter, em função dos ângulos e grandezas demonstradas na Figura 4, as equações de força e torque:

$$F_{x_b} = F_{x_1} \cdot \cos\delta_1 - F_{y_1} \cdot \sin\delta_1 + F_{x_2} \cdot \cos\delta_2 - F_{y_2} \cdot \sin\delta_2 \quad (2.8)$$

$$M_{z_b} = (F_{y_1} \cdot \sin\delta_1 + F_{x_1} \cdot \cos\delta_1) \cdot L_1 + (F_{y_2} \cdot \sin\delta_2 + F_{x_2} \cdot \cos\delta_2) \cdot L_2 + M_{z_1} + M_{z_2} \quad (2.9)$$

Para a linearização deste sistema, foram adotadas algumas hipóteses simplificadoras:

- $V$  é constante;
- $\beta = \tan^{-1} \frac{V_y}{V_x} \ll 1$  e  $\beta \ll 1$ ;
- $\gamma = \omega_z$  resulta em valor pequeno;

- Sem aceleração, sem frenagem:  $F_{x1} \ll F_{y1}$  e  $F_{x2} \ll F_{y2}$ ;
- $\delta_1 \ll 1$  e  $\delta_2 \ll 1$ ;
- $M_{z1}, M_{z2} \ll (F_{y1} \cdot L_1 - F_{y2} \cdot L_2)$ ;
- Força lateral linear.

Com elas, simplificam-se:

- $V_x = V \cdot \cos\beta \approx V$ ;
- $V_y = V \cdot \sin\beta \approx V\beta$ ;
- $\dot{V}_x \approx 0$ ;
- $\dot{V}_x \approx V\dot{\beta}$ ;
- $\omega_z \cdot V_y = \omega_z \cdot V \cdot \sin\beta \approx 0$ ;
- $\omega_z \cdot V_x = \omega_z \cdot V \cdot \cos\beta \approx \omega_z \cdot V$ .

Destes resultados, são obtidas as seguintes expressões:

$$F_{y1} \cdot L_1 + F_{y2} L_2 = I_z \cdot \dot{\omega}_z \quad (2.10a)$$

$$F_{y1} = -C_1 \cdot \alpha_1 \quad (2.10b)$$

$$F_{y2} = -C_2 \cdot \alpha_2 \quad (2.10c)$$

Para finalizar a modelagem dinâmica, é necessário avaliar o ângulo de escorregamento do pneu. De acordo com a Figura 4, respeitando os índices 1 e 2 anteriormente estabelecidos e utilizando a matriz de transformação proposta na Equação 2.4, obtém-se:

$$\tan(\alpha_1) = \beta - \delta_1 + \frac{L_1 \cdot \omega_z}{V} \approx \alpha_1 \quad (2.11)$$

$$\tan(\alpha_2) = \beta - \delta_2 + \frac{L_2 \cdot \omega_z}{V} \approx \alpha_2 \quad (2.12)$$

Substituindo nas Equações 2.10b e 2.10c:

$$\begin{aligned} F_{y1} &= -C_1 \cdot \left[ \beta - \alpha_1 + \frac{L_1 \cdot \omega_z}{V} \right] \\ F_{y2} &= -C_2 \cdot \left[ \beta - \alpha_2 + \frac{L_2 \cdot \omega_z}{V} \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Retomando a hipótese simplificadora que compara a velocidade de rotação em Z à taxa de guinada, são obtidas as equações que servirão de base para o modelo no espaço de estados:

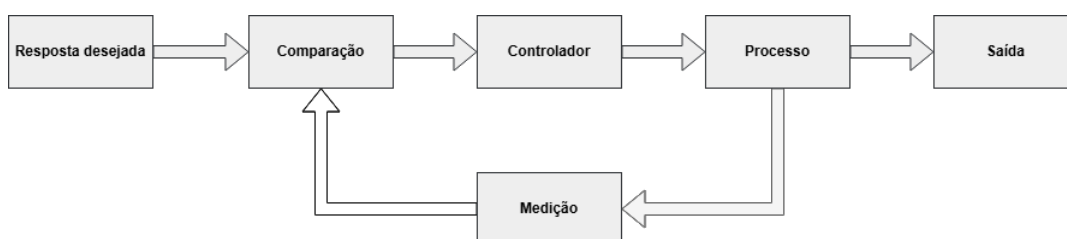
$$m \cdot V(\dot{\psi} + \dot{\beta}) = (C_1 + C_2)\beta - \frac{\dot{\psi}}{V}(C_1 * L_1 - C_2 * L_2) + C_1\delta \quad (2.14)$$

$$I_z \cdot \ddot{\psi} = -(C_1 * L_1 - C_2 * L_2)\beta - \frac{\dot{\psi}}{V}(C_1 * L_1^2 - C_2 * L_2^2) + C_1 * L_1\delta \quad (2.15)$$

## 2.2 Resposta de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

Sistemas de controle evoluíram significativamente ao longo do século XX. Com o desenvolvimento de sensores mais precisos e de sistemas de comunicação mais velozes, tornou-se possível a implementação de versões mais modernas de controle na indústria. (DORF RICHARD C.; BISHOP, 1998) define o sistema de controle como "uma interconexão de componentes formando uma configuração de sistema que produzirá uma resposta desejada de um sistema". Como exemplos, podem ser mencionados desde sistemas com termostatos sendo usados para controle de temperatura da água, até sistemas de controle de deformação em suspensões ativas veiculares.

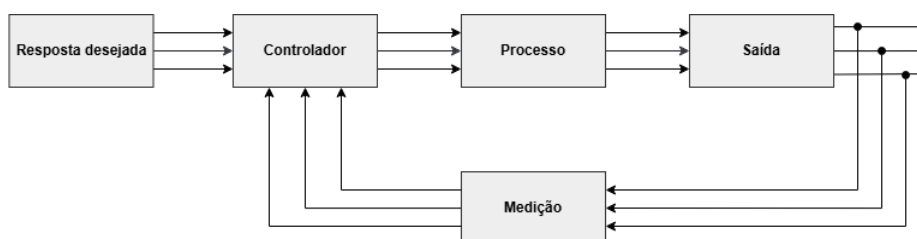
Figura 5 – Sistema básico de controle realimentado



Fonte: adaptada de (DORF RICHARD C.; BISHOP, 1998)

(OGATA; SEVERO, 1998) define o sistema de controle com realimentação como "Um sistema que estabeleça uma relação de comparação entre a saída e a entrada de referência, utilizando a diferença como meio de controle". Na Figura 5, observa-se um sistema básico de controle realimentado. Nele, um sinal de referência é comparado a um sinal medido e a partir disso, o controlador altera variáveis do processo para alcançar o resultado desejado. Vale observar que sistemas de controle podem possuir múltiplas entradas e saídas, bem como múltiplos sinais de referência para reajustar o processo, como na Figura 6:

Figura 6 – Sistema de controle realimentado com múltiplas entradas e saídas



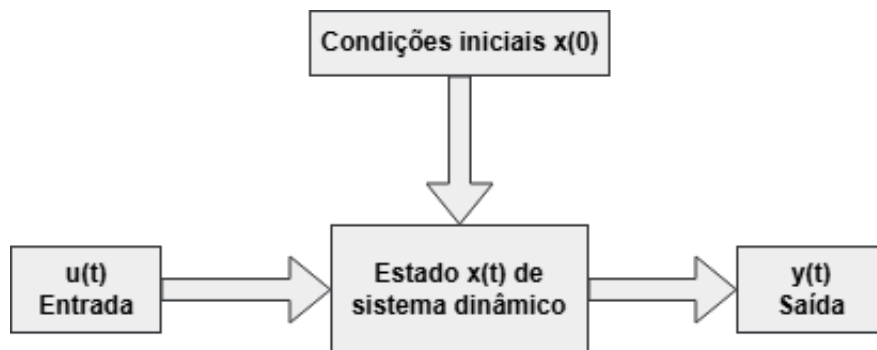
Fonte: adaptada de (DORF RICHARD C.; BISHOP, 1998)

A dinâmica de um modelo pode ser analisada do ponto de vista matemático. Como definido em (OGATA; SEVERO, 1998) e (DORF RICHARD C.; BISHOP, 1998), o sistema de controle representado neste trabalho aplica o princípio de causalidade, ou seja, a saída

atual do sistema depende de seu estado anterior, mas não depende da entrada futura. Isso possibilita o desenvolvimento de modelos matemáticos baseados em dois eixos principais: equações diferenciais ordinárias e espaço de estados. Em controle, frequentemente modela-se matematicamente um sistema através de equações diferenciais ordinárias linearizadas em torno de um ponto de operação, que indicam o quanto e como os estados e saídas variam em função de suas entradas. Essas equações, por sua vez, podem ser convertidas em um espaço de estados, foco da teoria de controle moderno. Para viabilizar este desenvolvimento, é necessário definir algumas grandezas de interesse nestes sistemas.

Refere-se por *estado* o menor conjunto de variáveis possíveis que, junto às entradas, permitam que se defina um sistema por completo. Para que um estado possa ser definido, é necessário analisar suas *variáveis de estado*, que são as grandezas físicas envolvidas no processo e que são modificadas pelo comportamento dinâmico do sistema. Neste trabalho, o sistema a ser analisado é o veículo representado pelo modelo dinâmico bicicleta e suas variáveis de estado são os ângulos de escorregamento de corpo ( $\beta$ ) e ângulo de esterçamento ( $\delta$ ). Em posse desses dados, é possível descrever o conjunto de equações diferenciais que modelam um espaço de estados. Seja um sistema de controle no domínio do tempo dado pela Figura 7:

Figura 7 – Sistema de controle no domínio do tempo



Fonte: adaptada de (DORF RICHARD C.; BISHOP, 1998)

Sejam as grandezas  $u_i(t)$  as entradas,  $y_i(t)$  as saídas e  $x_i(t)$  os estados para quaisquer índices  $i$  inteiros e positivos, com  $x(t) \in R^n$  e  $u(t) \in R^m$  e  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$  coeficientes de ajuste, é possível equacioná-las de acordo com a Equação 2.16 em termos de suas  $n$  variáveis de estado:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m \quad (2.16a)$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2m}u_m \quad (2.16b)$$

⋮

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm}u_m \quad (2.16c)$$

As equações podem ser reorganizada matricialmente, resultando em:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

A matriz-coluna contendo as variáveis de estado é denominada vetor de estados, e é representada por:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Analogamente, define-se o vetor de sinais de entrada por:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

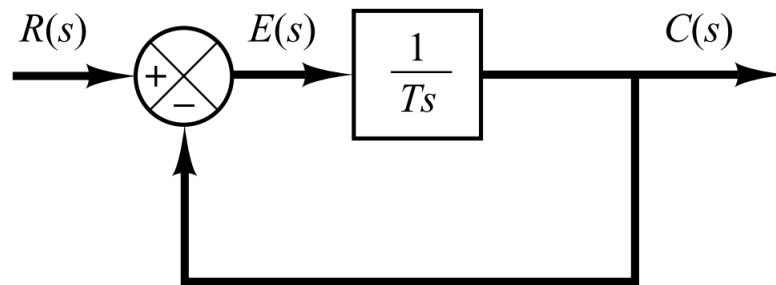
Sejam A uma matriz quadrada de tamanho  $n \times n$  e B uma matriz de tamanho  $n \times m$ , e C e D matrizes de coeficientes, é possível expressar o sistema a partir das equações diferenciais de estados, dadas pelo conjunto:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.20a)$$

$$y = Cx + Du \quad (2.20b)$$

O processo de desenvolvimento de um sistema de controle também envolve a seleção de métricas de análise. (OGATA; SEVERO, 1998) sugere que para sistemas lineares e invariantes no tempo, um método apropriado de análise envolve a inspeção de duas partes distintas da resposta do sistema a uma função degrau unitário aplicada em sua entrada: o transiente e o regime permanente. Para exemplificar, seja um sistema de primeira ordem no domínio da frequência dado pela Figura 8:

Figura 8 – Sistema de Primeira Ordem no Domínio da Frequência



Fonte: extraída de (OGATA; SEVERO, 1998)

Dado um determinado período  $T$ , o sistema descrito na Figura 8 pode ter sua relação entre entrada e saída definida no domínio da frequência por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (2.21)$$

Nesta equação,  $C(s)$  representa a saída e  $R(s)$  representa a entrada, ambas no domínio da frequência. Considerando que deseja-se analisar a resposta ao degrau unitário, define-se a função degrau unitário no domínio do tempo por:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0. \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Considerando que essa função pode ser descrita no domínio da frequência por  $1/s$  e aplicando-a como entrada na Equação 2.21, obtém-se, através de manipulação de matemática:

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + (\frac{1}{T})} \quad (2.23)$$

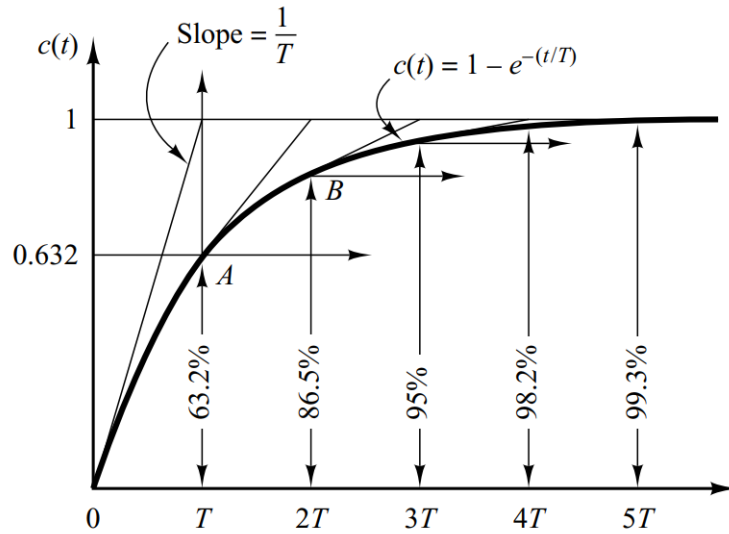
Aplicando a Transformada Inversa de Laplace, obtém-se:

$$c(t) = 1 - e^{(-\frac{t}{T})}, t \geq 0 \quad (2.24)$$

A Equação 2.24 indica também que para  $t=0$ , a saída é 0 e eventualmente se torna unitária. (OGATA; SEVERO, 1998) define outra característica importante sendo o fato de que ao substituir  $t = T$  na Equação 2.24, é possível observar que neste ponto, a resposta atinge 63,2% de seu valor de regime. Por ser um valor notável, o período  $T$  é nomeado como *constante de tempo*, já que ao traçar uma reta tangente dada por  $1/T$  à curva de resposta, obtém-se  $c(t) = 1$  quanto  $t = T$ , como é possível observar na Figura 9:



Figura 9 – Sistema de Primeira Ordem no Domínio da Frequência



Fonte: extraída de (OGATA; SEVERO, 1998)

Além disso, é possível observar que após a primeira, a cada constante de tempo percorrida, o incremento é menor, enquanto o valor unitário, chamado de valor de regime permanente, só é alcançado matematicamente com  $t = \infty$ . Analiticamente, uma aproximação aceitável é a de que para se considerar que a curva atingiu seu valor de regime permanente, ela esteja ao menos a 2% da linha do final valor, o que equivaleria a pelo menos quatro constantes de tempo ( $t \geq 4T$ ). Assim, a partir da resposta em transiente do sistema, (OGATA; SEVERO, 1998) define as métricas de interesse:

- Tempo de atraso,  $t_d$ : Tempo para que a resposta alcance metade do valor de regime pela primeira vez;
- Tempo de subida,  $t_r$ : Tempo para que o valor da resposta saia de 10% para 90% do valor de regime;
- Sobressinal (Overshoot),  $M_p$ : O sobressinal máximo é o valor máximo de pico da curva de resposta medido a partir do valor unitário. Se o valor final de regime permanente for diferente de um, é comum utilizar o sobressinal percentual máximo, definido por:

$$M_{p_{mx}}(\%) = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} * 100\% \quad (2.25)$$

- Tempo de pico,  $t_p$ : Tempo para que a resposta alcance o primeiro pico do sobressinal
- Tempo de acomodação,  $t_s$ : Tempo necessário para a curva de resposta alcançar e ficar dentro de um intervalo do valor especificado percentualmente de regime permanente (usualmente 2% ou 5%). O tempo de acomodação está relacionado à maior constante de tempo do sistema de controle.

No software MATLAB R2022b, após serem definidas as matrizes A,B,C,D, a função *step* desempenha o papel de gerar o gráfico da resposta ao degrau unitário, contando com ferramentas para a análise dos critérios supracitados.

### 2.3 Modelagem do Veículo no Espaço de Estados

De acordo com (STOOP, 2014), com as equações do modelo dinâmico obtidas na Seção 2.1, é possível montar um modelo no espaço de estados, dado por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.26)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{C_1+C_2}{MV} & -1 - \frac{C_1.L_1-C_2.L_2}{M.V^2} \\ -\frac{C_1.L_1-C_2.L_2}{I_z} & -\frac{C_1.L_1^2+C_2.L_2^2}{I_z.V} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_1}{MV} & \frac{C_2}{MV} \\ \frac{C_1.L_1}{I_z} & -\frac{C_2.L_2}{I_z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Tal que  $A \in R^{n \times n}$  e  $B \in R^{n \times m}$ .

Como proposto em (MONTAGUE, 2017), é possível modificar o sistema para que não seja necessário trabalhar com duas entradas de controle (sendo elas os ângulos de steering dos eixos dianteiro e traseiro), mas sim com uma única entrada, que seria  $Mz$ , o momento de inércia no eixo Z. Neste caso, o sistema seria dado pelas Equações 2.26 e 2.28, tal que a última seja:

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{C_1+C_2}{MV} & -1 - \frac{C_1.L_1-C_2.L_2}{M.V^2} \\ -\frac{C_1.L_1-C_2.L_2}{I_z} & -\frac{C_1.L_1^2+C_2.L_2^2}{I_z.V} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_z} \end{bmatrix} Mz \quad (2.28)$$

Em posse das Equações 2.27 e 2.28, podem ser montadas as matrizes A e B do modelo no Espaço de Estados.

### 2.4 Gradiente de Subesterço

Além disso, também de acordo com (STOOP, 2014), é possível analisar o comportamento do veículo em regime permanente e descobrir onde ele se encontra no gradiente de subesterço, uma métrica de estabilidade veicular. Sejam  $m_f$  e  $m_r$  respectivamente as massas distribuídas entre a dianteira e traseira, (WANG et al., 2018) define o gradiente de subesterço como:

$$K_v = \frac{M * (L_1 * C_1 - L_2 * C_2)}{L^2 * C_1 * C_2} \quad (2.29)$$

Na Equação 2.29, também são utilizados os dados de Rigidez em Curvas dos eixos dianteiro e traseiro, que são propriedades que indicam a capacidade de um pneu de se restituir após deformar durante curvas. Por meio dela, podem ser obtidas três situações:

- $K_v < 0$  e  $\alpha_1 < \alpha_2$ : Sobresterço
- $K_v = 0$  e  $\alpha_1 = \alpha_2$ : Esterço neutro
- $K_v > 0$  e  $\alpha_1 > \alpha_2$ : Subesterço

Para o propósito deste trabalho, é desejável que o veículo, em curva, se encontre na terceira categoria, o Subesterço, pois permite que pilotos menos experientes possuam maior controle em curvas com menos esforço.

## 2.5 Modelo em Regime Permanente

Ainda de acordo com (NETO, 2005), faz-se necessária a análise do modelo em regime permanente para gerar valores de referência. Sendo  $R$  o raio de curvatura, em regime, são impostas as condições:

- $\dot{\beta} = 0$
- $\dot{\omega}_z = 0$
- $\omega_z = \frac{V}{R}$

Retomando o conjunto a equação 2.10a, em regime permanente, obtém-se:

$$F_{y1} * L_1 + F_{y2} * L_2 = 0 \quad (2.30)$$

Em uma situação de curva, é possível relacionar as forças no eixo Y ao movimento circular, tal como em:

$$F_{y1} + F_{y2} = M * \frac{V^2}{R} \quad (2.31)$$

Como consequência de 2.10b e 2.10c, obtém-se os ângulos de escorregamento das rodas:

$$\alpha_1 = -\frac{L_2 * M}{C_1(L_1 + L_2)} * \frac{V^2}{R} \quad (2.32)$$

$$\alpha_2 = -\frac{L_1 * M}{C_2(L_1 + L_2)} * \frac{V^2}{R} \quad (2.33)$$

Além disso, (WANG et al., 2018) propõe a utilização da equação 2.34 para o cálculo da taxa de guinada em regime permanente:

$$r_{ss} = -\frac{v_x}{L * (1 + K_v * v_x^2)} * \delta \quad (2.34)$$

Considerando que a equação 2.34 indica uma relação linear entre a taxa de guinada e o ângulo de esterço e impondo as condições de regime permanente em curvas, é possível limitar a taxa de guinada de referência em regime permanente entre:

$$r_b = \min\{|r_{ss}|, c \frac{\mu g}{v_x}\} * \text{sgn}(\delta) \quad (2.35)$$

Na Equação 2.35, dois coeficientes se destacam:  $\mu$  é o coeficiente de atrito entre o pneu e a estrada, que é quem limita a taxa de guinada máxima. Além deste,  $c$  é o coeficiente de segurança que lida com o erro produzido pela estimativa de  $\mu$ . O autor indica que  $c < 1$  é a faixa de valores aceitáveis para este coeficiente, de modo que aumentá-lo ou diminuí-lo altera o equilíbrio entre desempenho em curvas e segurança. Adicionalmente, utiliza-se a função matemática  $\text{sgn}$  representada pela Equação 2.36 para corrigir a direção da taxa de guinada de referência:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & , \text{se } x < 0 \\ 0 & , \text{se } x = 0 \\ 1 & , \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

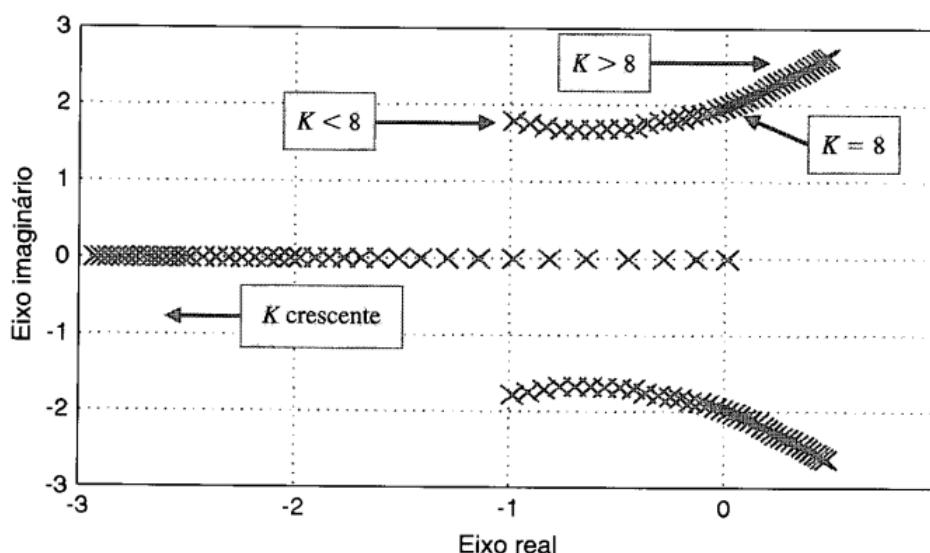
Assim, (LI GANG JIA; SONG, 2015) propõe a possibilidade de obter o valor de referência da taxa de guinada a partir da taxa de guinada de referência para regime permanente e da aplicação de um filtro passa-baixa nela, que resulta em:

$$r_{ref} = \frac{1}{1 + \tau_r s} r_b \quad (2.37)$$

## 2.6 Estabilidade, Observabilidade e Controlabilidade

Antes de se aplicar qualquer técnica de controle em um sistema dinâmico, é importante entender e avaliar as características de estabilidade do mesmo. Um importante método para avaliar a estabilidade absoluta de sistemas lineares ou linearizados é, segundo (DORF RICHARD C.; BISHOP, 1998), um desdobramento do Método de Routh-Hurwitz. Por meio dele, é possível afirmar se um sistema é estável por meio da posição de seus autovalores em um plano constituído por eixo real e eixo imaginário. Se existir ao menos um autovalor positivo e real, o sistema é considerado instável. A ausência de autovalores positivos e reais implica em estabilidade do sistema, como verifica-se na Figura 10 através do comportamento do ganho  $K$ :

Figura 10 – Mapa de Polos e Zeros de um Sistema Instável



Fonte: extraído de (DORF RICHARD C.; BISHOP, 1998)

Como este método é iterativo e matematicamente envolve a solução de um polinômio característico de enésima ordem, é de interesse sua aplicação computacional para otimizar o tempo de desenvolvimento do sistema de controle a ser implementado e calibrado. No software MATLAB r2022b, a função `pzplot` realiza o cálculo e a plotagem do chamado *Mapa de Polos e Zeros*, que indica a posição dos autovalores (ou polos e zeros) no plano real-imaginário.

Como análises adicionais propostas em (DORF RICHARD C.; BISHOP, 1998), também foram investigadas a controlabilidade e observabilidade do sistema. Para isto, foi também utilizado o software MATLAB.

Para que um sistema seja dito controlável, (DORF RICHARD C.; BISHOP, 1998) utiliza como critério o teste de posto da matriz de controlabilidade  $P_c$  dada por:

$$P_c = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] = n \quad (2.38)$$

Admite-se que se o determinante desta matriz for não-nulo, o sistema é controlável. De maneira análoga, o teste de observabilidade busca avaliar a capacidade de estimação de variáveis de estado do sistema referido. Para tanto, avalia-se o determinante da matriz  $Q_o$  de observabilidade:

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ C^{n-1}A \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Se o determinante for não-nulo, o sistema é dito observável.

## 2.7 Regulador Linear Quadrático

Seja um sistema de controle descrito pela Equação 2.14 e que ele seja linear, invariante no tempo e de dimensões finitas. De acordo com (CHEN, 2015), para definir o problema do Regulador Linear Quadrático, a equação de saída do sistema será definida por:

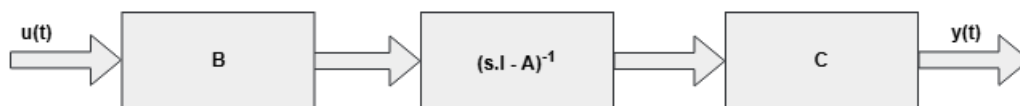
$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad D = 0 \quad (2.40)$$

Onde  $C \in R^{p \times n}$  e  $y(t) \in R^p$ . Como consideração adicional, o sistema em questão é realimentado dada a seguinte lei:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (2.41)$$

O sistema LQR de malha aberta pode ser representado pelo diagrama da Figura 11:

Figura 11 – Sistema LQR de Malha Aberta



Fonte: adaptado de (CHEN, 2015)

Ainda seguindo o mesmo trabalho, admite-se que o LQR busca encontrar uma solução para uma equação, chamada de funcional, que a torne a menor possível. A matriz que soluciona a equação do funcional é chamada de Matriz de Riccati e é semidefinida positiva. Assim, a equação do funcional é:

$$J(x, u) = \int_0^\infty x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) dt \quad (2.42)$$

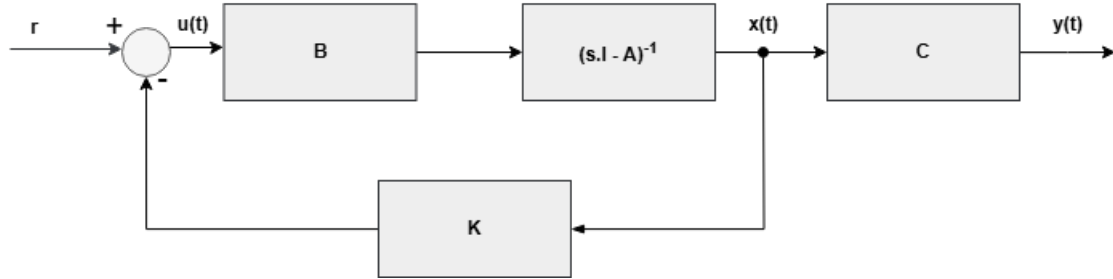
Tal que  $Q = Q^T \geq 0$  e  $R = R^T \geq 0$ . Para minimizá-la, utilizam-se duas equações adicionais, que definem os ganhos  $K$  e a solução  $P$  da equação de Riccati:

$$K = R^{-1}B^T P \quad (2.43)$$

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (2.44)$$

Considerando que o par  $[A,B]$  seja estabilizável e que o par  $[A,Q^{1/2}]$  seja observável, garante-se a unicidade da solução  $P$  da equação de Riccati e que o sistema, agora de malha fechada, seja estável.

Figura 12 – Sistema LQR de Malha Fechada



Fonte: adaptado de (CHEN, 2015)

A função *lqr* do MATLAB calcula a matriz de ganhos de malha fechada  $K$ , que irá compor o sistema realimentado da Figura 12 de acordo com a nova lei de controle, na qual a saída segue sendo representada pela Equação 2.40 e a equação de estados é obtida substituindo a Equação 2.41 na Equação 2.26:

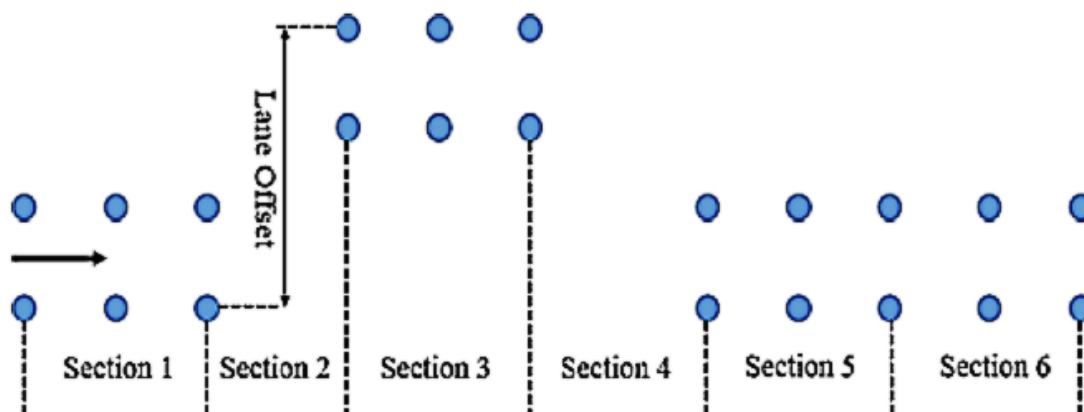
$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (2.45)$$

Para este trabalho, foram utilizados  $Q = C^T C$  e  $R = 1$  para todos os casos de teste. Adicionalmente, serão descritos dois sistemas controlados distintos utilizando o LQR, separados entre LQR de Ganho Fixo em  $V(i)$  e LQR de Ganho Escalonável. O primeiro é definido por um ganho fixo obtido através de uma única iteração do algoritmo do LQR e aplicado para todas as velocidades longitudinais  $v_x$  que compõe as matrizes  $A$  geradas por elas. O segundo é o sistema definido por ganhos calculados para cada velocidade longitudinal que compõe o vetor ' $v_x$ ' e aplicando os ganhos diretamente a cada sistema gerado.

## 2.8 Manobra de Dupla Mudança de Faixa

A validação de sistemas dinâmicos veiculares costuma utilizar manobras padronizadas para avaliar seu desempenho. (BÎNDAC et al., 2022) define a manobra de mudança dupla de faixa (Double-Lane Change, acrônimo DLC) como uma das formas mais comuns para esse tipo de teste e validação, representando uma simulação de uma manobra de emergência para evitar colisões, de modo que o veículo muda de faixa e retorna para a original posteriormente. Segundo (AREFNEZHAD et al., 2018), a manobra é referência no estudo de dinâmica lateral de veículos e pode ser exemplificada pelo diagrama da Figura 13:

Figura 13 – Manobra de Mudança de Faixa Dupla



Fonte: extraído de (AREFNEZHAD et al., 2018)

Nela, os pontos azuis representam os limites de cada faixa, de modo que o veículo mude de trajetória na seção 2 e retorne na seção 4. Matematicamente, o processo envolve a geração de uma referência de ângulo de esterço e a verificação do comportamento das taxas de guinada de regime permanente ao longo do percurso.



### 3 RESULTADOS

#### 3.1 Modelagem no Espaço de Estados

Para o desenvolvimento do modelo no espaço de estados do protótipo, o sistema foi modelado como linear e variante em relação a parâmetros (Linear Parameter-Varying, acrônimo LPV), ou seja, suas matrizes do espaço de estados variam de acordo com um parâmetro estabelecido. Neste caso, o parâmetro adotado foi a velocidade longitudinal do veículo, modelada pelo vetor:

$$V(i) = [1 \ 7 \ 15 \ 25] \text{ m/s} \quad (3.1)$$

As velocidades longitudinais são aplicadas diretamente na Equação 2.27 para gerar espaços de estados dependentes de cada um destes valores. Os valores foram selecionados a partir da faixa esperada de operação do veículo a partir de seus parâmetros mecânicos e da potência a ser gerada pelo conjunto de motores, inversores e baterias. A partir disso, é possível desenvolver uma resposta mais precisa por parte do sistema de controle, que estará preparado para lidar com essas variações. Após o desenvolvimento deste modelo, foi utilizado o software *MATLAB 2022b* da *The Mathworks Inc.* para montar o espaço de estados dado o seguinte conjunto de dados fornecidos pela equipe EESC-USP Tupã acerca de seu protótipo:

Tabela 2 – Parâmetros do Modelo Dinâmico Single Track

Símbolo [un]	Grandeza	Magnitude
m [kg]	Massa	331
L <sub>1</sub> [m]	Distância do eixo dianteiro ao CG	0,999
L <sub>2</sub> [m]	Distância do eixo traseiro ao CG	0,551
L [m]	Entre-eixos	1,55
Wt [m]	Largura do eixo dianteiro	1,24
C <sub>1</sub> [N]	Rigidez em Curvas - Eixo Dianteiro	349,6
C <sub>2</sub> [N]	Rigidez em Curvas - Eixo Traseiro	291,86
I <sub>z</sub> [kg.m <sup>2</sup> ]	Momento de Inércia no eixo Z	51,12

Fonte: Elaboração própria

A partir da definição de 2.40 com  $D = 0$ , o modelo no espaço de estados obtido exigiu a determinação da matriz  $C$ , definida por:

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Em posse desses dados e a partir da Equação 3.3, foi analisado o gradiente de subesterço do veículo, que resultou em:

$$Kv = 0,2544 \quad (3.3)$$

Este resultado indica um veículo subesterçado.

### 3.2 Controlabilidade e Observabilidade

Antes de aplicar o Regulador Linear Quadrático ao sistema, foi necessário avaliá-lo em relação à controlabilidade e observabilidade, para cada um dos componentes do sistema linear variante em relação ao parâmetro  $V$ . Em posse dos espaços de estados desenvolvidos através da iteração dos termos  $V$  e substituição dos demais parâmetros, foi possível fazer as análises propostas na Seção 2.6, resultando na Tabela 3:

Tabela 3 – Tabela de Controlabilidade, Observabilidade e Gradiente de Subesterço

<b>Sistema</b>	<b>Controlabilidade</b>	<b>Observabilidade</b>	<b>Gradiente de subesterço</b>
1m/s	Controlável	Observável	Subesterço
7m/s	Controlável	Observável	Subesterço
15m/s	Controlável	Observável	Subesterço
25m/s	Controlável	Observável	Subesterço

Fonte: Elaboração própria

Utilizando as funções *ctrb* e *obsv* do MATLAB, que reproduzem os testes propostos pelas Equações 2.38 e 2.39, foi obtido que o sistema é controlável e observável para todas as velocidades  $V(i)$ .

### 3.3 Estabilidade

A partir deste momento, as análises compararam três sistemas distintos, que serão denotados por: Sistema de Malha Aberta, Sistema com Controle LQR de Ganho Escalonável e Sistema com Controle LQR de Ganho Fixo. O primeiro, não sofre nenhum tipo de ação de controle, enquanto os dois últimos passam pelo Regulador Linear Quadrático, mas tratam os ganhos calculados pela Equação 2.43 de maneira diferente. Denota-se por Escalonável o sistema de controle que calcula quatro matrizes de ganho  $K$  distintas e aplica cada uma para sua respectiva velocidade discreta contida no vetor  $V(i)$ . Estabelece-se por Ganho Fixo o sistema em que se calculam os ganhos para apenas um dos sistemas gerados por uma velocidade discreta e depois aplica-se este mesmo ganho para todo o vetor de velocidades discretas.

A análise de estabilidade do sistema requer que seja aplicado o Método de Routh-Hurwitz para todos os sistemas supracitados. Com a aplicação da função *lqr*, foi possível obter o espaço de estados realimentado da Equação 2.45 para cada um destes sistemas.

Os respectivos autovalores calculados foram dispostos em uma tabela e a partir dos dados contidos nela, foram gerados os mapas de polos e zeros dos respectivos sistemas. A Tabela 4 que contém todos os autovalores calculados é dada por:

Tabela 4 – Autovalores para sistemas de Malha Aberta, LQR Ganho Fixo e LQR Escalonável

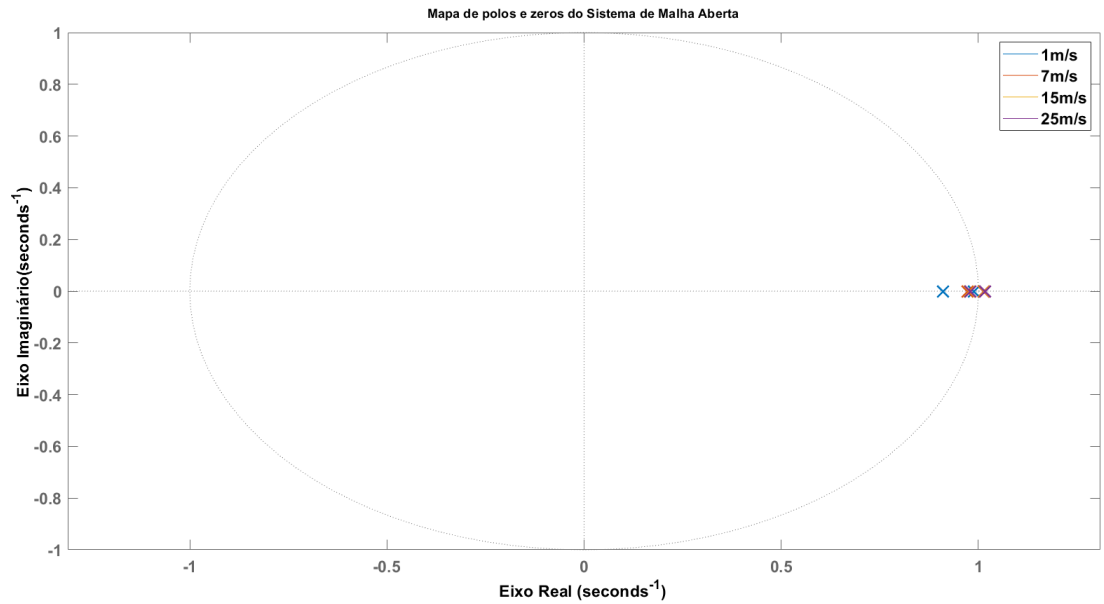
<b>Sistema</b>	<b>Velocidade (m/s)</b>	<b>Autovalor 1</b>	<b>Autovalor 2</b>
<b>Malha Aberta</b>	1	-1,16	-9,34
	7	1,24	-2,74
	15	1,59	-2,29
	25	1,72	-2,14
<b>LQR 1m/s</b>	1	-1,82	-20,31
	7	-0,17	-12,96
	15	-0,02	-12,31
	25	0,04	-12,09
<b>LQR 7m/s</b>	1	-1,99	-25,38
	7	-0,32	-18,05
	15	-0,18	-17,39
	25	-0,13	-17,17
<b>LQR 15m/s</b>	1	-2,05	-25,94
	7	-0,37	-18,62
	15	-0,23	-17,96
	25	-0,17	-17,73
<b>LQR 25m/s</b>	1	-2,08	-26,13
	7	-0,39	-18,82
	15	-0,25	-18,16
	25	-0,20	-17,94
<b>LQR Escalonável</b>	1	-1,82	-20,31
	7	-0,32	-18,05
	15	-0,23	-17,96
	25	-0,20	-17,94

Fonte: Elaboração própria

Todos os autovalores obtidos foram reais. (OGATA; SEVERO, 1998) indica que quando ambos os autovalores calculados para uma determinada velocidade longitudinal são negativos, há estabilidade assintótica, de modo que a resposta não apresente oscilação em torno de um ponto até estabilizar.

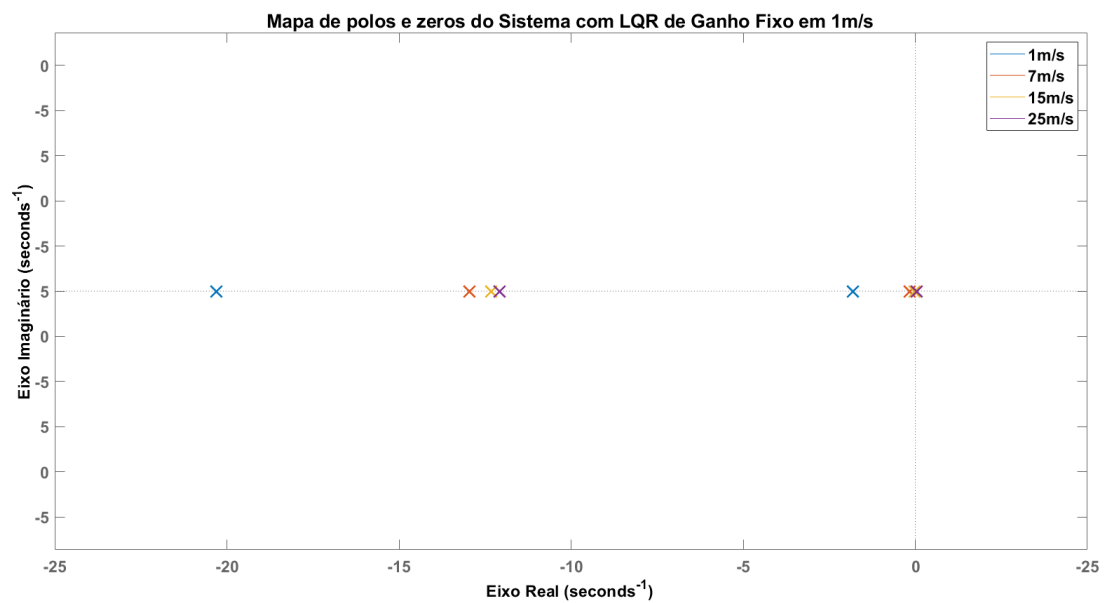
Como forma de tornar os dados da tabela mais visuais, foram produzidos os Mapas de Polos e Zeros para todos os sistemas analisados:

Figura 14 – Mapa de Polos e Zeros do Sistema de Malha Aberta



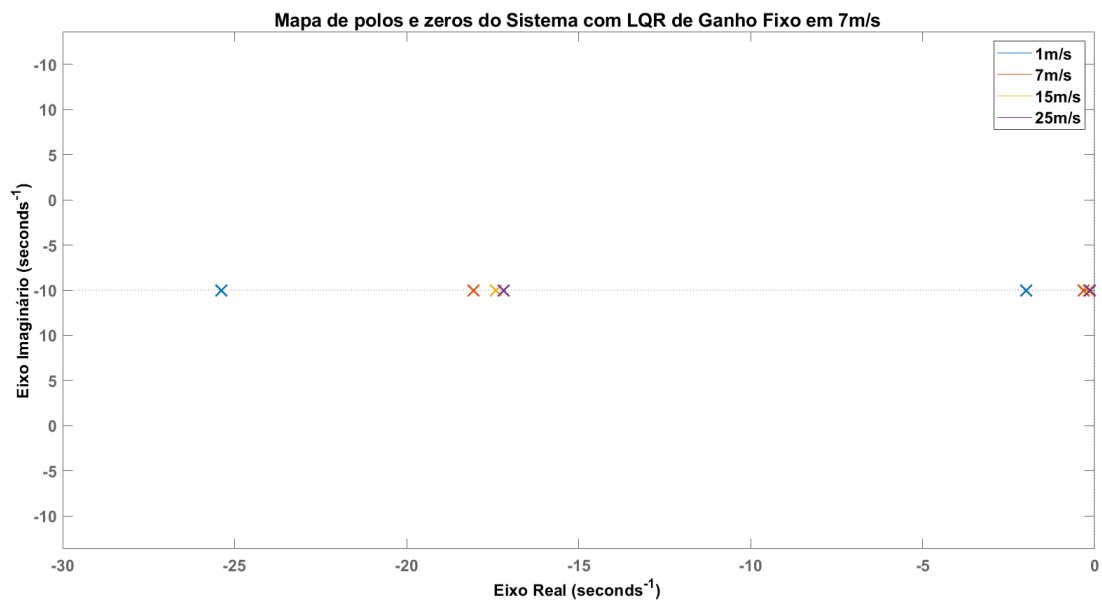
Fonte: Elaboração própria

Figura 15 – Mapa de Polos e Zeros do Sistema com LQR Fixo em 1m/s



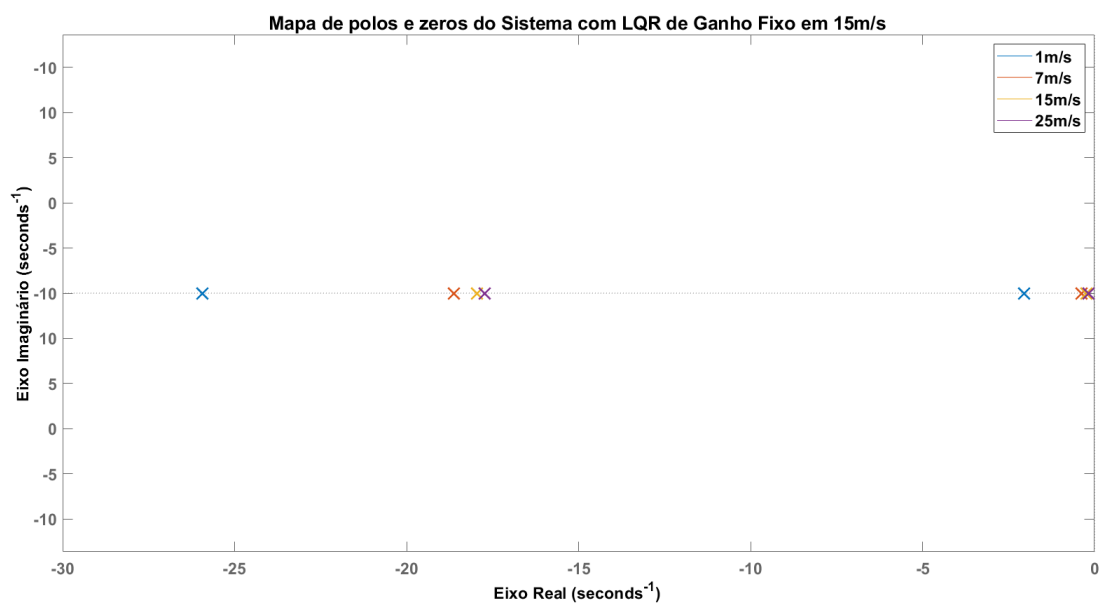
Fonte: Elaboração própria

Figura 16 – Mapa de Polos e Zeros do Sistema com LQR Fixo em 7m/s



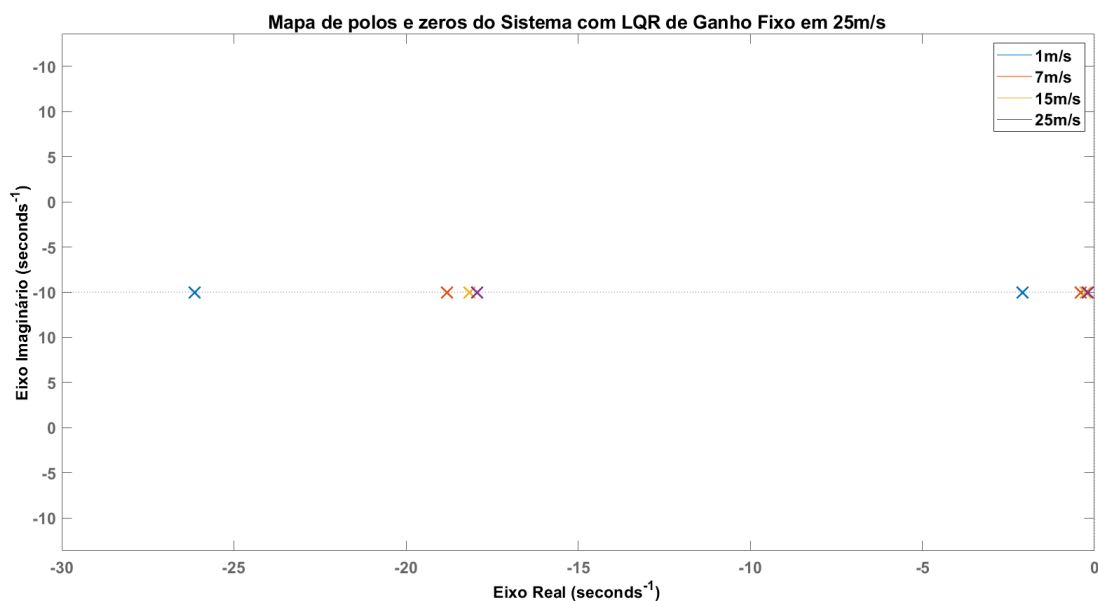
Fonte: Elaboração própria

Figura 17 – Mapa de Polos e Zeros do Sistema com LQR Fixo em 15m/s



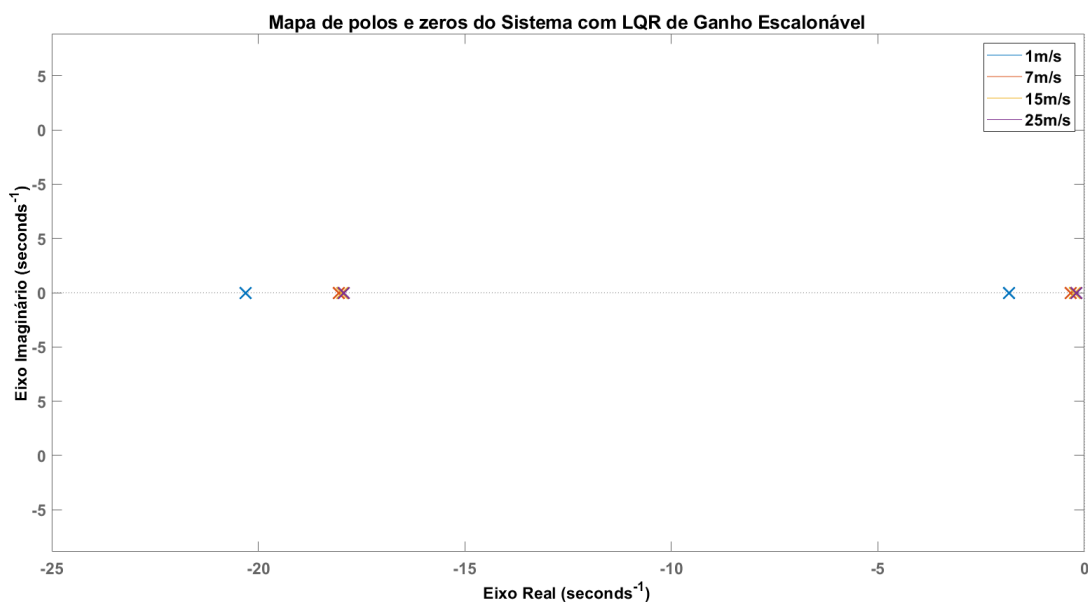
Fonte: Elaboração própria

Figura 18 – Mapa de Polos e Zeros do Sistema com LQR Fixo em 25m/s



Fonte: Elaboração própria

Figura 19 – Mapa de Polos e Zeros do Sistema com LQR Escalonável



Fonte: Elaboração própria

A partir dos dados obtidos na tabela e nos mapas de polos e zeros, é possível verificar que o Sistema de Malha Aberta não consegue estabilizar os estados para nenhuma das velocidades discretas maiores do que 1m/s. Nota-se também que o Sistema com LQR de

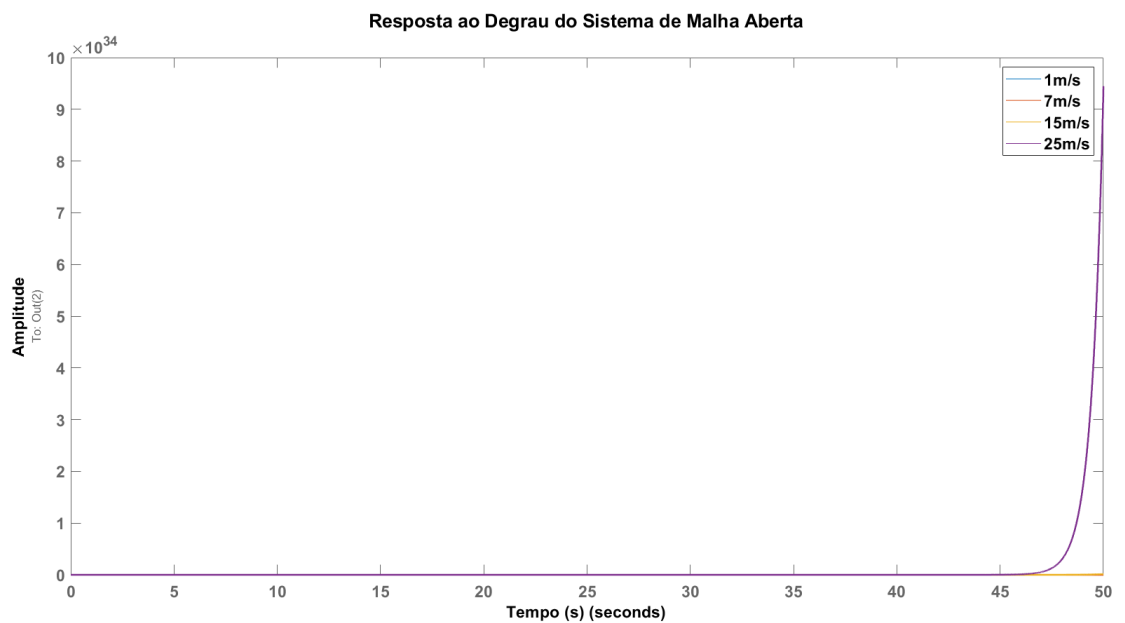
Ganho Fixo calculado para 1m/s também não apresenta estabilidade quando o veículo atinge uma velocidade de 25m/s, enquanto o Escalonável garante estabilidade para todas as velocidades avaliadas. Nos sistemas estabilizados com sucesso, observa-se, então, que após a realimentação de estados proposta pelo LQR, houve a migração de polos do eixo real positivo para o eixo real negativo, atendendo assim ao Critério de Routh-Hurwitz.



### 3.4 Resposta ao Degrau

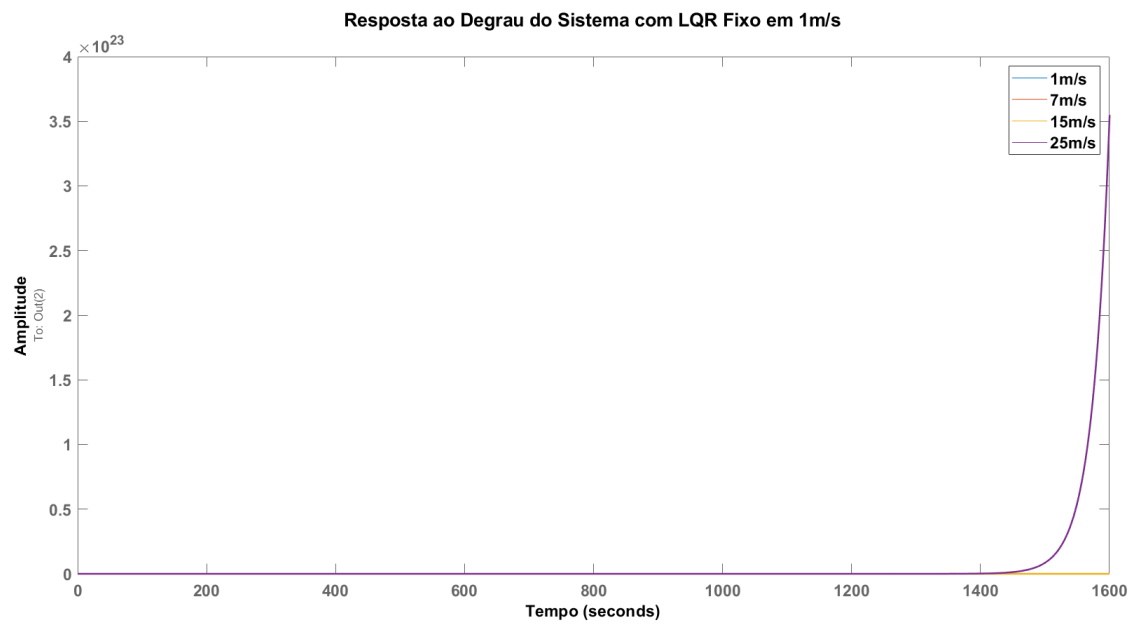
Uma importante parte da análise de sistemas dinâmicos envolve a compreensão da resposta a um degrau do sistema. Para isso, foi utilizada a função *step* do MATLAB e posteriormente, foram extraídos os parâmetros de desempenho de cada um dos sistemas para cada uma das velocidades discretas seleccionadas através da função *stepinfo*. Os resultados estão dispostos na Tabela 5, enquanto a visualização gráfica está nas Figuras a seguir:

Figura 20 – Resposta ao Degrau do Sistema de Malha Aberta



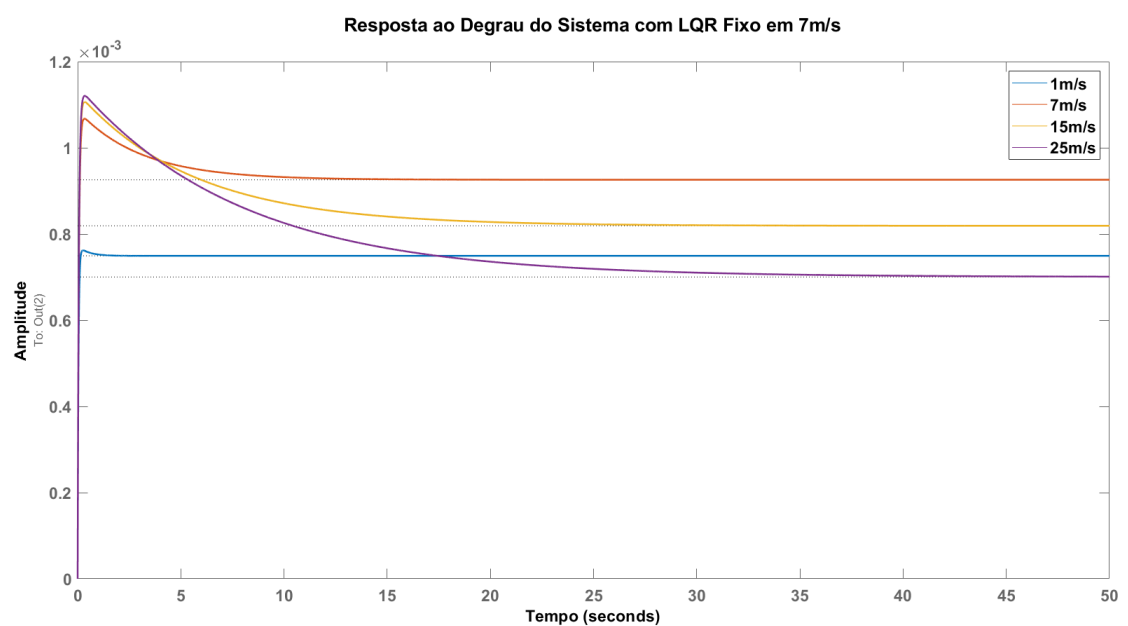
Fonte: Elaboração própria

Figura 21 – Resposta ao Degrau do Sistema com LQR Fixo em 1m/s



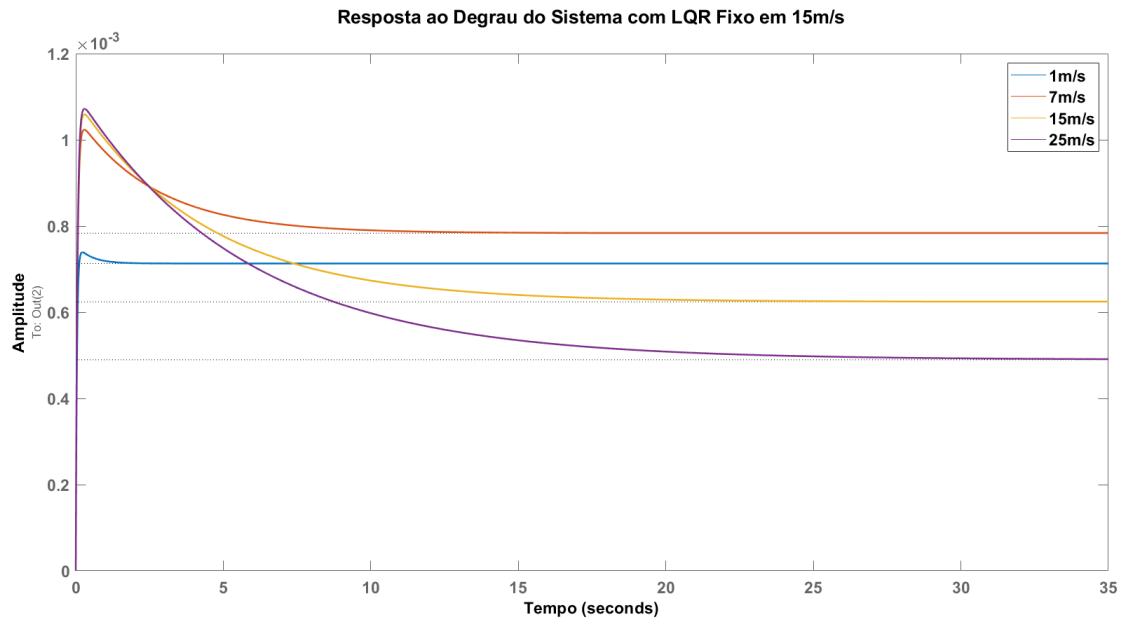
Fonte: Elaboração própria

Figura 22 – Resposta ao Degrau do Sistema com LQR Fixo em 7m/s



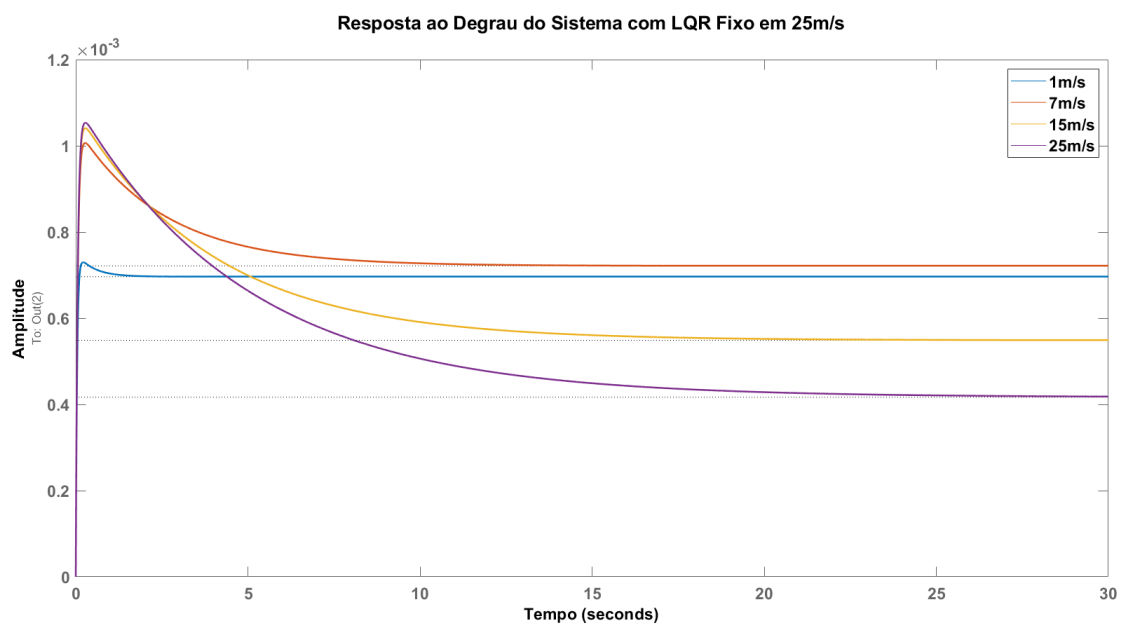
Fonte: Elaboração própria

Figura 23 – Resposta ao Degrau do Sistema com LQR Fixo em 15m/s



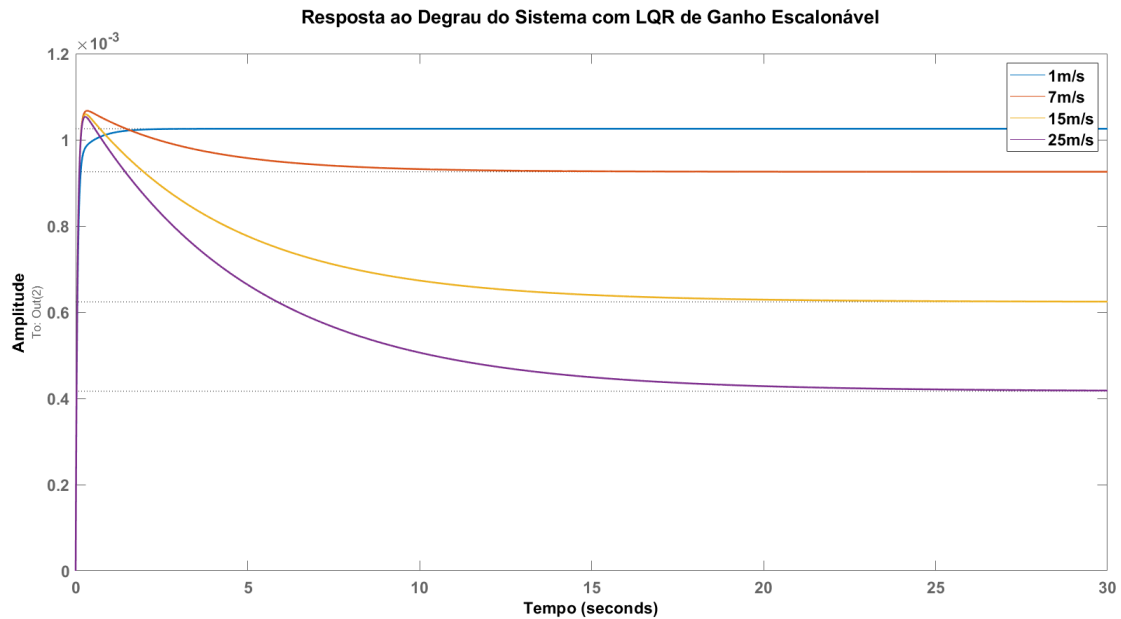
Fonte: Elaboração própria

Figura 24 – Resposta ao Degrau do Sistema com LQR Fixo em 25m/s



Fonte: Elaboração própria

Figura 25 – Resposta ao Degrau do Sistema com LQR de Ganho Escalonável



Fonte: Elaboração própria

Analisando os gráficos, é possível verificar o comportamento previsto pelos Mapas de Polos e Zeros propostos na seção anterior, visto que o Sistema com LQR de Ganho Fixo em 1m/s não conseguiu estabilizar os estados para uma velocidade longitudinal de 25m/s. Em posse desses dados, já é possível inferir que os sistemas de melhor desempenho foram os de Ganho Fixo em 25m/s e o de Ganho Escalonável. No entanto, é necessário analisar os parâmetros de desempenho de cada uma delas para averiguar qual a técnica de controle mais apropriada para o cenário proposto. Como previsto, o LQR de Ganho Fixo em 1m/s diverge para uma velocidade de 25m/s. Há de se observar que este fato representa uma anomalia no modelo, pois considerando que este sistema apresenta controlabilidade e observabilidade, ele não deveria se instabilizar para essa velocidade longitudinal, fenômeno este que pode ser produzido por incertezas na parametrização mecânica do veículo, principalmente relacionadas ao dado de Rigidez em Curvas, obtido empiricamente. Nota-se, também, que o LQR de Ganho Escalonável possui picos consideravelmente menores do que os demais sistemas de controle, apresentando um amortecimento mais suave. A partir dos gráficos de resposta ao degrau gerados pelo MATLAB, foi utilizada a função *stepinfo* para obter parâmetros de desempenho de cada uma das curvas levantadas. Os dados estão disponíveis na Tabela 5:

Tabela 5 – Métricas de Estabilidade obtidas pela Resposta ao Degrau

		Sistema 1	Sistema 2	Sistema 3	Sistema 4
Métrica	V(m/s)	Fixo 7m/s	Fixo 15m/s	Fixo 25m/s	Escalonável
Duração de transiente (s)	1	0,12	0,56	0,67	0,66
Pico (ms)	1	0,76	0,74	0,73	1,03
Tempo de Subida (s)	1	0,08	0,07	0,07	0,14
Sobressinal (%)	1	1,71	3,65	4,81	0
Tempo de acomodação (s)	1	0,12	0,56	0,67	0,66
Tempo de pico (s)	1	0,26	0,22	0,21	0,44
Duração de transiente (s)	7	6,67	7,69	7,81	6,67
Pico (ms)	7	1,07	1,02	1,01	1,07
Tempo de subida (s)	7	0,08	0,06	0,05	0,08
Sobressinal (%)	7	15,31	30,66	39,55	15,31
Tempo de acomodação (s)	7	6,67	7,69	7,81	6,67
Tempo de pico (s)	7	0,34	0,29	0,27	0,34
Duração de transiente (s)	15	16,55	16,10	15,33	16,10
Pico (ms)	15	1,11	1,06	1,04	1,06
Tempo de subida (s)	15	0,06	0,04	0,03	0,04
Sobressinal (%)	15	35,10	69,75	89,73	69,75
Tempo de acomodação (s)	15	16,55	16,10	15,33	16,10
Tempo de pico (s)	15	0,34	0,29	0,28	0,29
Duração de transiente (s)	25	27,38	22,76	19,61	19,61
Pico (ms)	2,5	1,12	1,07	1,05	1,05
Tempo de subida (s)	25	0,04	0,03	0,02	0,02
Sobressinal (%)	25	60,03	118,95	152,86	152,86
Tempo de acomodação (s)	25	27,38	23,75	21,70	21,70
Tempo de pico (s)	25	0,34	0,29	0,28	0,28

Para analisar os dados da Tabela 5, estabelece-se como métrica que quanto menores os valores de Duração de Transiente, Pico, Tempo de subida, Sobressinal, Tempo de acomodação e Tempo de pico, melhor o desempenho do sistema, afinal, deseja-se um sistema responsivo e com baixo custo de atuação. Diante destes parâmetros, é possível afirmar que os sistemas de melhor desempenho são o Sistema com LQR de Ganho Fixo em 25m/s e o Sistema com LQR de Ganho Escalonável. Comparando apenas estes dois sistemas, é possível avaliar que apesar da resposta do Ganho Escalonável ser levemente mais lenta, ele apresenta desempenho superior por ter sobressinais consideravelmente menores aos do Fixo em 25m/s, o que indica que utilizando este sistema de controle, obtém-se resultados similares no tempo, mas menor esforço dos atuadores para manter-se próximo à referência.

### 3.5 Resposta à Condição Inicial

Como análise adicional, decidiu-se verificar o comportamento dos sistemas de acordo com a imposição da seguinte condição inicial ao sistema:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

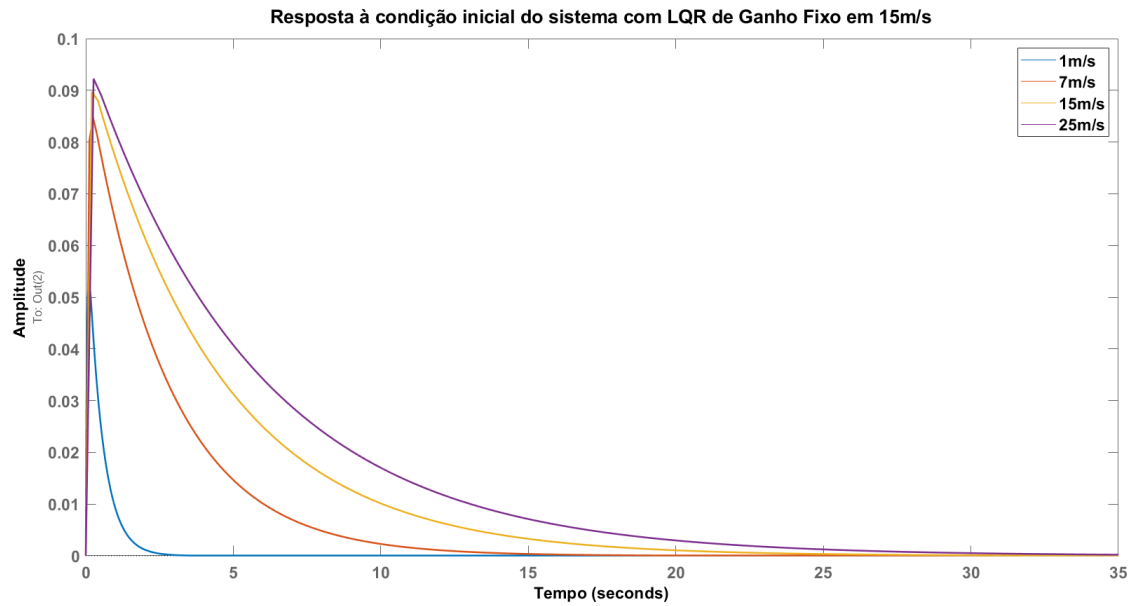
Os gráficos a seguir foram gerados através da função *initialplot* para cada um dos sistemas de interesse:

Figura 26 – Resposta à condição inicial do Sistema com LQR Fixo em 7m/s



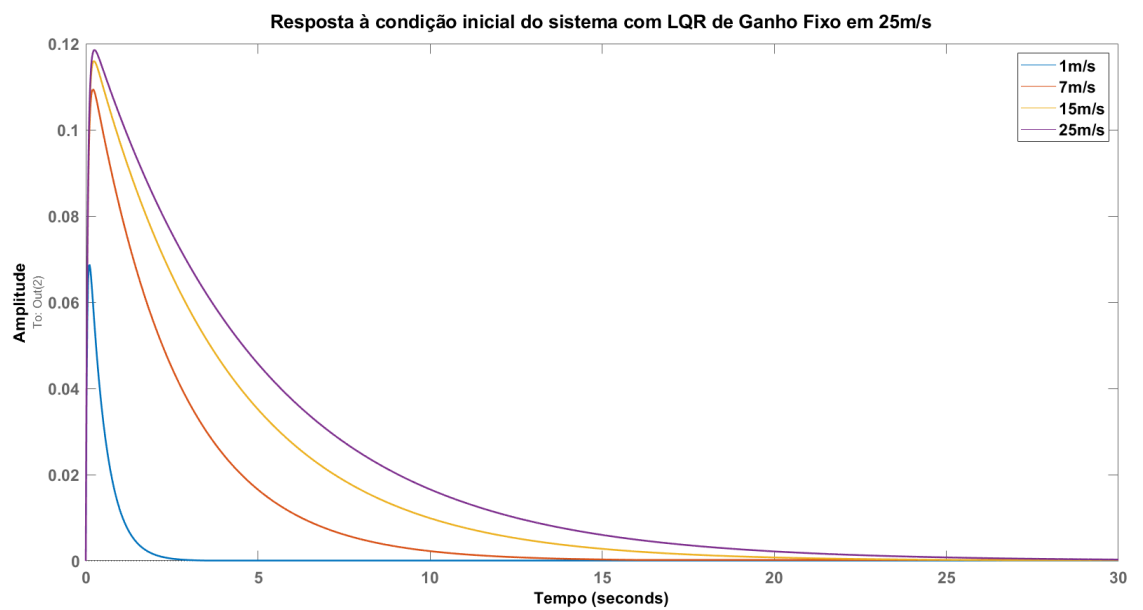
Fonte: Elaboração própria

Figura 27 – Resposta à condição inicial do Sistema com LQR Fixo em 15m/s



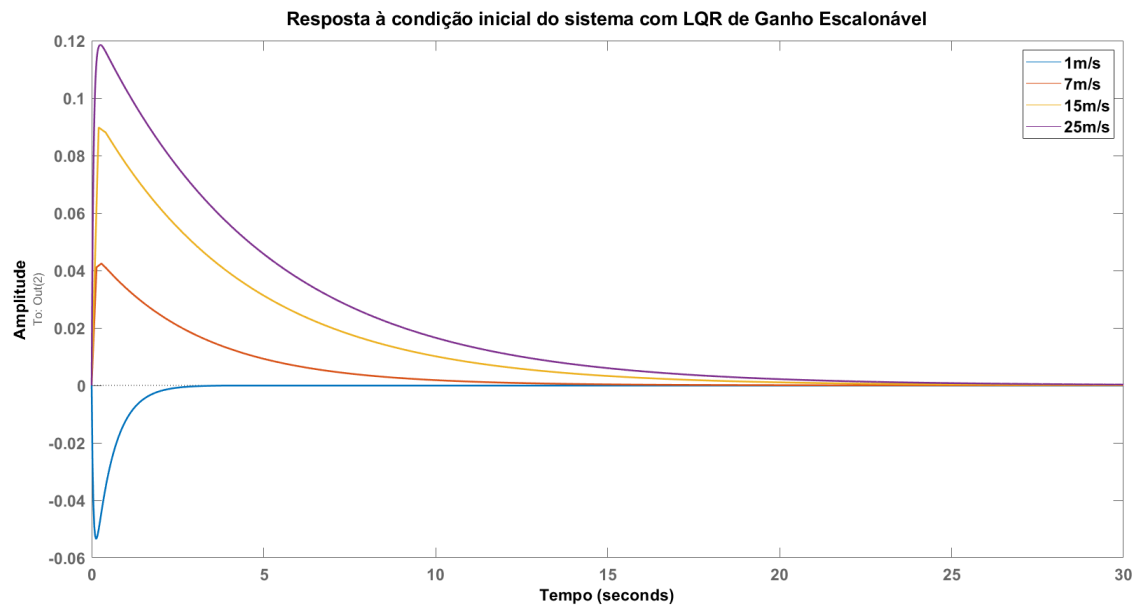
Fonte: Elaboração própria

Figura 28 – Resposta à condição inicial do Sistema com LQR Fixo em 25m/s



Fonte: Elaboração própria

Figura 29 – Resposta à condição inicial do Sistema com LQR de Ganho Escalonável



Fonte: Elaboração própria

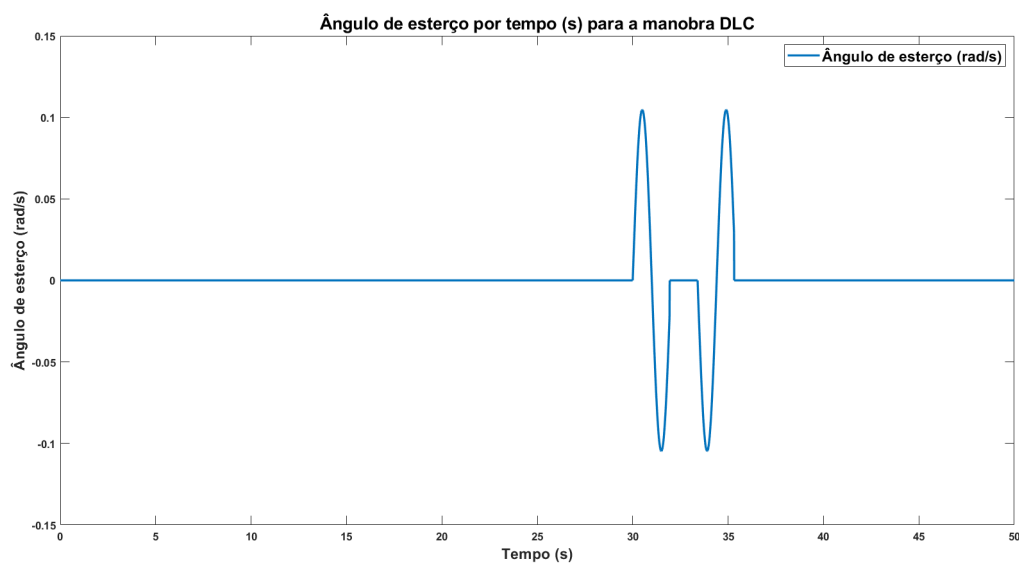
De maneira análoga à resposta ao degrau, observa-se que os sistemas com LQR de Ganho Fixo em 25m/s e Ganho Escalonável possuem os melhores desempenhos.



### 3.6 Manobra de Dupla Mudança de Faixa

Tendo selecionado o Sistema com LQR de Ganho Escalonável como o de melhores parâmetros de desempenho, agora avalia-se seu comportamento durante uma manobra de Dupla Mudança de Faixa. O gráfico que representa o ângulo de esterço ao longo da manobra é dado na Figura 30:

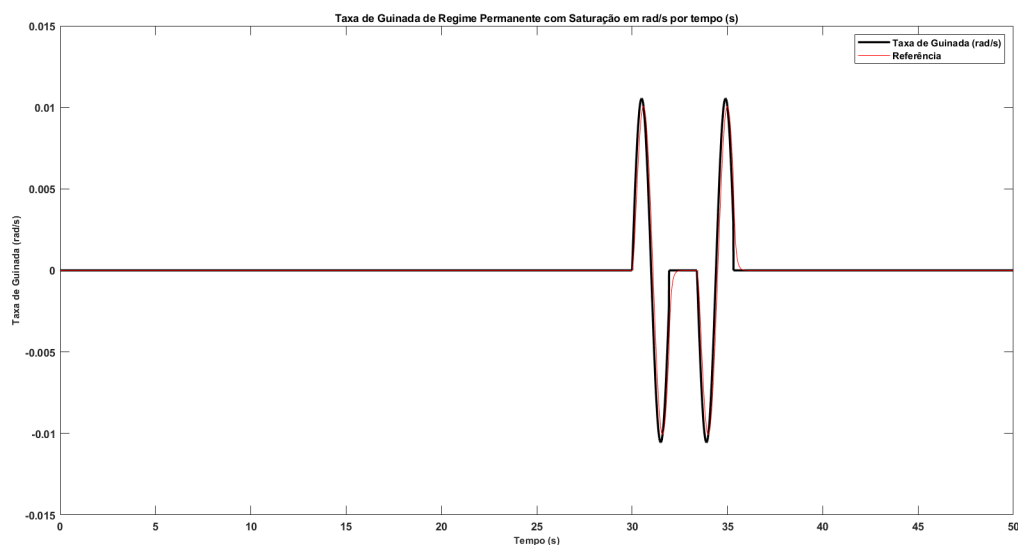
Figura 30 – Ângulo de esterço para a manobra de dupla mudança de faixa



Fonte: Elaboração própria

A partir da geração de um vetor de taxa de guinada de regime permanente  $r_b$  para este sistema e da taxa de guinada de referência  $r_{ref}$ , foi possível comparar ambos na Figura 31:

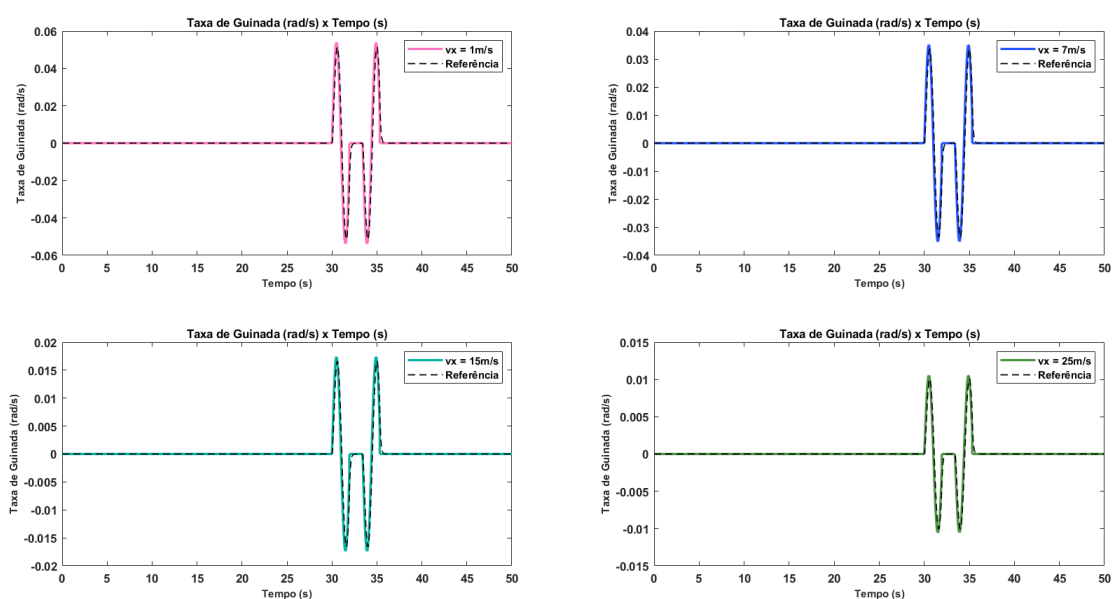
Figura 31 – Taxa de guinada de regime permanente em manobra de dupla mudança de faixa



Fonte: Elaboração própria

Observa-se um acompanhamento consideravelmente preciso da referência. A próxima análise visa avaliar a precisão do seguimento de referência para diferentes velocidades longitudinais, para as quais também foram geradas referências a serem seguidas. Os dados estão dispostos na Figura 32:

Figura 32 – Taxa de guinada em manobra de dupla mudança de faixa



Fonte: Elaboração própria

Observa-se que novamente, o sistema conseguiu acompanhar de maneira precisa a referência, desviando-se levemente apenas nos momentos onde o ângulo de esterço variava mais bruscamente.



## 4 CONCLUSÃO

Neste trabalho, a modelagem e o projeto de um diferencial eletrônico para o veículo de Formula SAE da equipe EESC-USP Tupã da Universidade de São Paulo, Campus São Carlos, foram desenvolvidos.

O objetivo do diferencial eletrônico é controlar a distribuição de torque entre os dois motores do veículo em diversas situações de pistas. O controlador adotado neste projeto utiliza uma técnica de controle baseada em um regulador linear quadrático, usualmente denotado pelo acrônimo *LQR*. Baseado neste método de controle, foram gerados cinco sistemas controlados. Os denotados por *Sistema com LQR Fixo em  $V(m/s)$*  foram obtidos fixando um ganho calculado pelo *LQR* dada uma velocidade longitudinal selecionada previamente e o *Sistema com LQR Adaptativo* foi obtido iterando ganhos para cada velocidade longitudinal proposta. Após o desenvolvimento do controlador, foram feitas análises de parâmetros de controle para avaliar o desempenho deste.

Primeiramente, avaliou-se que o veículo encontra-se em subesterço em curvas. Assim, admite-se que ele possui características favoráveis a pilotos menos experientes.

Antes do projeto do controlador, a observabilidade e a controlabilidade foram avaliadas. Para todos os casos-teste, as matrizes foram observáveis e controláveis, o que tornou-as propícias para serem incorporadas em um sistema controlado pelo *LQR*.

As análises dos autovalores e dos mapas de Polos e Zeros de todos os sistemas indicaram em um primeiro momento que o *Sistema de Malha Aberta* é instável para todas as velocidades longitudinais discretas acima de 1m/s, enquanto além dele, apenas o *Sistema com LQR Fixo em 1m/s* apresentou autovalores reais positivos, denotando instabilidade. Ou seja, todos os outros sistemas com Ganho Fixo e Adaptativo foram bem sucedidos em estabilizar os estados, fato comprovado pela migração de polos, do eixo real positivo para o eixo real negativo nestes casos.

Em um segundo teste, foi avaliada a resposta ao degrau de todos os sistemas. Como esperado, a resposta ao degrau do *Sistema de Malha Aberta* foi uma divergência após um tempo considerável, assim como a resposta ao degrau do *Sistema com LQR Fixo em 1m/s* apresentou instabilidade para velocidades acima de 25m/s. Todos os demais sistemas de controle apresentaram amortecimento não-oscilatório como previsto pelos testes anteriores. Através da resposta ao degrau, foram obtidos parâmetros de desempenho de todos os sistemas. Por meio destes, foi possível avaliar qual dos controladores produziria resultados mais estáveis e com menor custo de atuação e, assim, determinou-se que o *Sistema com LQR Adaptativo* obteve o desempenho mais relevante ao veículo. É válido mencionar que com exceção do *Sistema de Malha Aberta* e do *Sistema com LQR Fixo em 1m/s*, todos os sistemas são funcionais, variando apenas em padrões de desempenho. Além disso, é válido afirmar que o dado de instabilidade do sistema com *LQR* de Ganho Fixo em 1m/s pode ser representado por imprecisões na parametrização mecânica do veículo, que conta

com variáveis estimadas empiricamente, como a Rigidez em Curvas.

Uma vez selecionado o método de controle, buscou-se testá-lo em uma manobra de Dupla Mudança de Faixa, onde foi possível visualizar um seguimento próximo da referência gerada para cada velocidade.

Com a finalização das análises, é possível admitir que os dois melhores resultados obtidos foram no Sistema com LQR de Ganho Fixo em 25m/s e no Sistema com LQR Adaptativo. No entanto, observa-se que entre os dois, o LQR Adaptativo produz melhores resultados pois é mais regular dentro de todas as faixas de velocidades e produz um sobressinal consideravelmente inferior ao do de Ganho Fixo, o que indica menor esforço do atuador para gerar resultados próximos.

Em trabalhos futuros, seria possível melhorar os índices de desempenho de tempo de acomodação e de sobressinal por meio de uma avaliação mais profunda das matrizes Q e R, variando-as enquanto ainda se buscava manter baixo o custo proposto.

Uma vez estabelecidos estes valores, seria possível desenvolver no software Simulink a malha proposta pela Figura 12 e calibrando os ganhos para cada uma das faixas de operação de velocidade longitudinal. Também seria de interesse a implementação do pré-processador para gerar valores de referência para a taxa de guinada e um pós-processador para decidir como a partir dos dados de entrada, distribuir o torque entre os motores para manter a taxa de guinada dentro da referência.

Com o desenvolvimento desta malha de controle, seria possível utilizar o software IPG Automotive CarMaker (MONTAGUE, 2017), para submeter um modelo dinâmico parametrizado do veículo a uma bateria de testes nas pistas utilizadas pela competição de Formula SAE Brasil. Nelas, seria possível analisar em tempo real o comportamento das variáveis de entrada quando submetidas à ação de controle do LQR, o que permitiria melhores resultados na sintonização dos parâmetros Q e R para diferentes situações dinâmicas.

## REFERÊNCIAS

- AREFNEZHAD, S. et al. Modeling of double lane change maneuver of vehicles. *International Journal of Automotive Technology*, Springer, v. 19, p. 271–279, 2018.
- BÎNDAC, I.-M. et al. Theoretical and experimental research on the double lane change maneuver. In: EDP SCIENCES. *MATEC Web of Conferences*. [S.I.], 2022. v. 373.
- BRASIL, S. of A. E. *Formula SAE Brasil*. 2022. <https://saebrasil.org.br/programas-estudantis/formula-sae-brasil/> [Accessed: (21/09/2023)].
- CHEN, C. *On the robustness of the linear quadratic regulator via perturbation analysis of the Riccati equation*. Tese (Doutorado) — Dublin City University, 2015.
- DORF RICHARD C.; BISHOP, R. H. *Sistemas de Controle Modernos, 8ª Edição*. [S.I.]: LTC–Livros Técnicos e Científicos Editora SA, Rio de Janeiro, RJ, 1998.
- INTERNATIONAL, S. of A. E. *Formula SAE Rules 2024*. 2023. Disponível em: <https://www.fsaeonline.com/cdsweb/gen/DownloadDocument.aspx?DocumentID=369d01c0-589d-4ebe-b8d4-b07544f4a52b>.
- LI GANG JIA, J. C. H. Z. D. C. L.; SONG, J. A novel vehicle dynamics stability control algorithm based on the hierarchical strategy with constrain of nonlinear tyre forces. *Vehicle System Dynamics*, Taylor Francis, v. 53, n. 8, p. 1093–1116, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/00423114.2015.1025082>.
- MENDONÇA, M. e. a. Veículos elétricos no brasil: O potencial brasileiro para a transição de modelos de locomoção. *Revista Técnico-Científica do CREA-PR*, MDPI, p. 6–7, 2021.
- MONTAGUE, J. *Design and Implementation of Torque Vectoring in the Bristol Electric Racing Formula Student Vehicle*. [S.I.], 2017.
- NETO, A. C. Dinâmica veicular. *Universidade de São Paulo, São Carlos*, p. 65–115, 2005.
- OGATA, K.; SEVERO, B. *Engenharia de controle moderno, 5ª Edição*. [S.I.]: Prentice Hall do Brasil, 1998.
- OLIVEIRA, M. Buranelli de et al. Factors influencing the intention to use electric cars in brazil. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, v. 155, p. 418–433, 2022. ISSN 0965-8564. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0965856421003037>.
- SAMPAIO, R. C. B. *Sistemas de controle e nova arquitetura para diferencial eletrônico em veículos de passeio convencionais a combustão convertidos em veículos híbridos 4x4*. Tese (Doutorado) — Universidade de Sao Paulo, 2011.
- SANGUESA, J. A. et al. A review on electric vehicles: Technologies and challenges. *Smart Cities*, MDPI, v. 4, n. 1, p. 372–404, 2021.
- SECINARO, S. e. a. Electric vehicles' consumer behaviours: Mapping the field and providing a research agenda. *Journal of Business Research*, 2022.
- STOOP, A. *Design and implementation of torque vectoring for the force racing car*. Tese (Doutorado) — Delft University of Technology, 2014.

TUPã, E.-U. *EESC-USP Tupã - Quem Somos*. 2021. <https://tupa.eesc.usp.br/home/quem-somos/> [Accessed: (21/09/2023)].

VARGAS, J. E. e. a. V. The new neighbor across the street: an outlook for battery electric vehicles adoption in brazil. *World Electric Vehicle Journal*, MDPI, v. 11, n. 3, p. 60, 2020.

WANG, Z. et al. A gain scheduled robust linear quadratic regulator for vehicle direct yaw moment control. *Mechatronics*, Elsevier, v. 51, p. 31–45, 2018.

XUE, Q. et al. A comprehensive review on classification, energy management strategy, and control algorithm for hybrid electric vehicles. *Energies*, MDPI, v. 13, n. 20, p. 5355, 2020.