

Sys 1965341

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

SOFTWARE PARA O CÁLCULO DE TRANFERÊNCIA DE CALOR
CONDUÇÃO BIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE

Elaborado por:
GUILHERME MENIN GAERTNER

Orientadora:
MÍRIAM TAVARES

São Paulo
1999

10,0 (dez)
mm

GUILHERME MENIN GAERTNER

***SOFTWARE* PARA O CÁLCULO DE TRANFERÊNCIA DE CALOR
CONDUÇÃO BIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE**

**Trabalho de formatura apresentado à
Escola Politécnica da Universidade de São
Paulo para a obtenção do título de
Graduação em Engenharia.**

**Orientadora:
Prof. Míriam Tavares**

**Área de Concentração:
Engenharia Mecânica
Energia e Fluidos**

**São Paulo
1999**

Aos meus pais e
minha esposa Adriana.

SUMÁRIO

Este trabalho é uma continuação do projeto de formatura do ex-aluno da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, engenheiro Marcelo Oliveira de Souza, concluído em 1997.

O trabalho de SOUZA (1997) consistiu na elaboração de um programa em Microsoft Excel para solucionar vários casos de condução de calor unidimensional e também para calcular o coeficiente de convecção h em diversas situações de escoamento. A maioria dos casos tratados foram de solução analítica e encontram-se descritos no livro Fundamentos de Transferência de Calor e Massa, INCROPERA & WITT (1992).

O presente trabalho procura estender o programa desenvolvido por Souza (1997) para o caso de condução de calor bidimensional em regime permanente. Para tanto, escolheu-se uma geometria retangular com diversas condições de contorno em cada face, e utilizou-se o método das diferenças finitas descrito em INCROPERA & WITT (1992).

O capítulo 2 descreve a metodologia do programa desde o método das diferenças finitas e as equações utilizadas, até o algoritmo implementado, assim como a lógica do programa. O capítulo 3 apresenta o manual do usuário. O quarto capítulo apresenta dois exemplos de casos solucionados pelo programa. Finalmente, o último capítulo aborda as principais conclusões do trabalho.

ÍNDICE

I	INTRODUÇÃO	1
II	METODOLOGIA DO SOFTWARE	3
	<i>II.1 Método das Diferenças Finitas.....</i>	<i>3</i>
	<i>II.2 A lógica do Software.....</i>	<i>11</i>
III	O MANUAL DO USUÁRIO	13
IV	EXEMPLOS.....	20
	<i>IV.1 Exemplo 1</i>	<i>20</i>
	<i>IV.2 Exemplo 2</i>	<i>27</i>
V	CONCLUSÕES.....	38
	BIBLIOGRAFIA	39

I INTRODUÇÃO

No estudo da transferência de calor em regime permanente, há diversas situações físicas em que o gradiente de temperatura é significativo na direção de uma coordenada. Para tais situações, há soluções analíticas ou gráficas capazes de descrever com precisão o perfil de temperatura resultante. Entretanto, em muitos casos, o tratamento unidimensional gera soluções muito simplificadas. Nestes casos, deve-se partir para um tratamento que leve em conta os efeitos multidimensionais.

No estudo da condução bidimensional de calor em regime permanente, há vários métodos para se obter o perfil de temperatura resultante. Em situações extremamente específicas, pode-se resolver analiticamente a equação da condução de calor. Em outros casos, pode-se optar pelo método da separação das variáveis, ou pelo método gráfico. Porém, a utilização destes métodos é trabalhosa e pouco versátil.

Para os casos mais genéricos, com as mais diversas condições de contorno, a opção mais adequada é o método numérico das diferenças finitas, cuja utilização tornou-se bastante eficaz em computadores digitais.

O programa desenvolvido neste trabalho utiliza-se do método das diferenças finitas para resolver o perfil de temperatura em uma placa retangular. O usuário do programa pode optar pelas mais variadas condições de contorno em cada face, desde um perfil de temperatura descrito por uma equação qualquer, até faces com convecção de calor. O usuário também pode escolher entre diferentes materiais, além de poder simular placas com geração ou absorção de calor.

O programa gera inicialmente uma primeira solução que utiliza a hipótese da condutividade térmica k ser constante em todo o material, e posteriormente, permite que o usuário refine as soluções, de tal modo que cada solução anterior sirva como uma melhor aproximação para se determinar o k em cada ponto do material.

O usuário do programa recebe como solução de cada caso uma matriz numérica e gráficos com o perfil de temperatura encontrado.

O software desenvolvido neste trabalho fornece ferramentas para que estudantes de transferência de calor possam compreender com mais clareza os fenômenos envolvidos, e para engenheiros que necessitem solucionar problemas simples de transferência de calor.

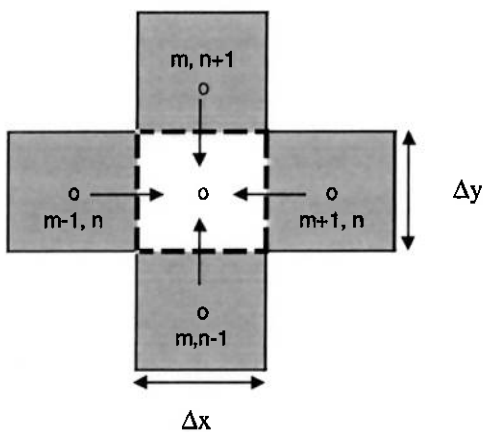
II METODOLOGIA DO SOFTWARE

Este capítulo descreve a metodologia do software desenvolvido, incluindo o método das diferenças finitas, as equações utilizadas, o algoritmo implementado, e a lógica do programa.

II.1 Método das Diferenças Finitas

A primeira etapa do método das diferenças finitas é discretizar o elemento analisado, ou seja, dividi-lo em vários pontos nodais. O passo seguinte é a aplicação de um balanço de energia em um volume de controle em torno de cada ponto nodal. Utilizando-se as condições de contorno para os nós na extremidade do elemento, pode-se resolver o sistema linear resultante e então determinar a temperatura em cada nó.

No balanço de energia para um nó interno, temos:



$$\dot{E}_{af} + \dot{E}_g = 0 \quad (2.1)$$

Figura II.1: Condução para um nodo interno proveniente dos nodos vizinhos.
Adaptado de INCROPERA & WITT (1992).

Onde,

$\dot{E}_{af}$ é a taxa de afluência de energia dirigida para dentro do nodo

$\dot{E}_g$ é a taxa de geração de energia dentro do nodo

No problema analisado, a equação (2.1) resume-se em:

$$\sum_{i=1}^4 q_{(i) \rightarrow (m,n)} + \dot{q}(\Delta x * \Delta y * 1) = 0 \quad (2.2)$$

Utilizando a lei de Fourier para a taxa de condução entre os nodos temos:

$$q_{(m-1,n) \rightarrow (m,n)} = k(\Delta y * 1) \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad (2.3)$$

$$q_{(m+1,n) \rightarrow (m,n)} = k(\Delta y * 1) \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad (2.4)$$

$$q_{(m,n+1) \rightarrow (m,n)} = k(\Delta x * 1) \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y} \quad (2.5)$$

$$q_{(m,n-1) \rightarrow (m,n)} = k(\Delta x * 1) \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y} \quad (2.6)$$

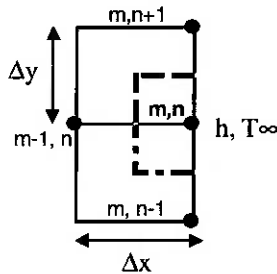
Utilizando as equações (2.3), (2.4), (2.5) e (2.6) em (2.2) e resolvendo, temos:

$$\Delta y^2 k T_{m+1,n} + \Delta y^2 k T_{m-1,n} + \Delta x^2 k T_{m,n+1} + \Delta x^2 k T_{m,n-1} +$$

$$- 2k(\Delta x^2 + \Delta y^2) T_{m,n} = -\dot{q} \Delta x^2 \Delta y^2 \quad (2.7)$$

Nos nodos situados nas extremidades do elemento, temos as condições de contorno. Caso haja convecção como condição de contorno, teremos que rescrever o balanço de energia.

Para um nodo em superfície plana com convecção temos:



$$\dot{E}_{af} + \dot{E}_g = 0 \quad (2.1)$$

Figura II.2: Condução para um nodo em superfície plana com convecção.
Adaptado de INCROPERA & WITT (1992).

Desenvolvendo a equação (2.1), temos:

$$q_{(m-1,n) \rightarrow (m,n)} = k(\Delta y * 1) \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad (2.8)$$

$$q_{(convecção) \rightarrow (m,n)} = h(\Delta y * 1)(T_{\infty} - T_{m,n}) \quad (2.9)$$

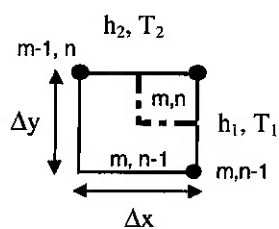
$$q_{(m,n+1) \rightarrow (m,n)} = k\left(\frac{\Delta x}{2} * 1\right) \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y} \quad (2.10)$$

$$q_{(m,n-1) \rightarrow (m,n)} = k\left(\frac{\Delta x}{2} * 1\right) \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y} \quad (2.11)$$

Utilizando as equações (2.8), (2.9), (2.10) e (2.11) em (2.1) e resolvendo, temos:

$$\begin{aligned} & 2\Delta y^2 k T_{m-1,n} + \Delta x^2 k T_{m,n+1} + \Delta x^2 k T_{m,n-1} + \\ & - 2\left[k(\Delta x^2 + \Delta y^2) + h\Delta x \Delta y^2\right] T_{m,n} = \\ & = -\dot{q} \Delta x^2 \Delta y^2 - 2h\Delta x \Delta y^2 T_{\infty} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Para um nodo em um canto saliente com convecção temos:



$$\dot{E}_{of} + \dot{E}_g = 0 \quad (2.1)$$

Figura II.3: Condução para um nodo em um canto saliente com convecção.
Adaptado de INCROPERA & WITT (1992).

Desenvolvendo a equação (2.1):

$$q_{(m-1,n) \rightarrow (m,n)} = k \left(\frac{\Delta y}{2} * 1 \right) \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad (2.13)$$

$$q_{(convecção1) \rightarrow (m,n)} = h_1 \left(\frac{\Delta y}{2} * 1 \right) (T_1 - T_{m,n}) \quad (2.14)$$

$$q_{(convecção2) \rightarrow (m,n)} = h_2 \left(\frac{\Delta x}{2} * 1 \right) (T_2 - T_{m,n}) \quad (2.15)$$

$$q_{(m,n-1) \rightarrow (m,n)} = k \left(\frac{\Delta x}{2} * 1 \right) \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y} \quad (2.16)$$

Utilizando as equações (2.13), (2.14), (2.15) e (2.16) em (2.1) e resolvendo, temos:

$$\begin{aligned} & \Delta y^2 k T_{m-1,n} + \Delta x^2 k T_{m,n-1} + \\ & -1 \left[k(\Delta x^2 + \Delta y^2) + \Delta x \Delta y (\Delta y h_1 + \Delta x h_2) \right] T_{m,n} = \\ & = \frac{-\dot{q}}{2} \Delta x^2 \Delta y^2 - \Delta x \Delta y (\Delta y h_1 T_1 + \Delta x h_2 T_2) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Todas as equações acima tiveram como hipótese uma condutividade térmica k constante. Quando se leva em consideração um k variando com a temperatura, o balanço de energia para um nodo interno fica:

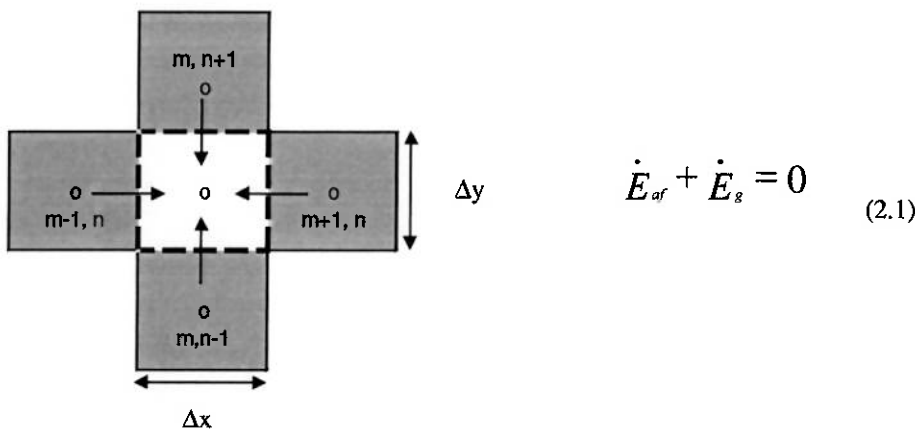


Figura II.1: Condução para um nodo interno proveniente dos nodos vizinhos.
Adaptado de INCROPERA & WITT (1992).

No problema analisado, a equação (2.1) resume-se em:

$$\sum_{i=1}^4 q_{(i) \rightarrow (m,n)} + \dot{q}(\Delta x * \Delta y * 1) = 0 \quad (2.2)$$

Utilizando a lei de Fourier para a taxa de condução entre os nodos temos:

$$q_{(m-1,n) \rightarrow (m,n)} = \frac{2 k_{m-1,n} k_{m,n}}{k_{m-1,n} + k_{m,n}} (\Delta y * 1) \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad (2.18)$$

$$q_{(m+1,n) \rightarrow (m,n)} = \frac{2 k_{m+1,n} k_{m,n}}{k_{m+1,n} + k_{m,n}} (\Delta y * 1) \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad (2.19)$$

$$q_{(m,n+1) \rightarrow (m,n)} = \frac{2 k_{m,n+1} k_{m,n}}{k_{m,n+1} + k_{m,n}} (\Delta x * 1) \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y} \quad (2.20)$$

$$q_{(m,n-1) \rightarrow (m,n)} = \frac{2 k_{m,n-1} k_{m,n}}{k_{m,n-1} + k_{m,n}} (\Delta x * 1) \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y} \quad (2.21)$$

Utilizando as equações (2.18), (2.19), (2.20) e (2.21) em (2.2) e resolvendo, temos:

$$\begin{aligned}
 & \Delta y^2 \left(\frac{2 k_{m+1,n} k_{m,n}}{k_{m+1,n} + k_{m,n}} \right) T_{m+1,n} + \Delta y^2 \left(\frac{2 k_{m-1,n} k_{m,n}}{k_{m-1,n} + k_{m,n}} \right) T_{m-1,n} + \\
 & + \Delta x^2 \left(\frac{2 k_{m,n+1} k_{m,n}}{k_{m,n+1} + k_{m,n}} \right) T_{m,n+1} + \Delta x^2 \left(\frac{2 k_{m,n-1} k_{m,n}}{k_{m,n-1} + k_{m,n}} \right) T_{m,n-1} + \\
 & - 2 \left[\Delta x^2 \left(\frac{k_{m,n+1} k_{m,n}}{k_{m,n+1} + k_{m,n}} + \frac{k_{m,n-1} k_{m,n}}{k_{m,n-1} + k_{m,n}} \right) + \right. \\
 & \left. + \Delta y^2 \left(\frac{k_{m+1,n} k_{m,n}}{k_{m+1,n} + k_{m,n}} + \frac{k_{m-1,n} k_{m,n}}{k_{m-1,n} + k_{m,n}} \right) \right] T_{m,n} = -\dot{q} \Delta x^2 \Delta y^2
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

A equação (2.22) também pode ser utilizada para um elemento com mais de um material, desde que não haja resistência de contato.

II.2 A lógica do Software

O software desenvolvido tem a finalidade de calcular o perfil de temperatura em uma placa retangular, permitindo ao usuário definir:

- 1) as dimensões da placa (comprimento H e largura L);
- 2) o número de divisões em H e L ;
- 3) as condições de contorno (convecção ou perfil de temperatura conhecido);
- 4) a quantidade de absorção ou geração de calor;
- 5) a composição material da placa (máximo de dois materiais);
- 6) a primeira temperatura para estimativa inicial da condutividade térmica k .

Definidas as variáveis acima, o programa começa a escrever o balanço de energia para cada nodo utilizando as equações (2.12), (2.17) e (2.22), partindo do nodo inferior para o superior esquerdo, voltando sempre para o próximo nodo inferior, conforme ilustra a figura a seguir.

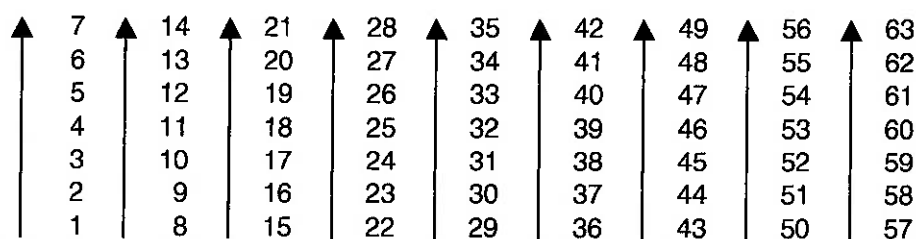


Figura II.4: Exemplo de malha para seis divisões em L e oito divisões em H
Elaborado pelo autor.

O conjunto das equações de cada nodo gera um sistema linear, onde a matriz coluna de incógnitas é a temperatura em cada nodo. Com o sistema linear resolvido, chega-se na solução inicial para o perfil de temperatura, ilustrado a partir de um gráfico bidimensional ou tridimensional e uma matriz.

Como o *Microsoft Excel* não resolve sistemas compostos por um número elevado de equações, foi necessário buscar uma função mais poderosa para solucionar estes tipos de sistemas. O problema foi então exposto no *site* de discussão da *Microsoft*, onde encontrou-se a função para resolver os sistemas.

O programa desenvolvido por SOUZA(1997) possui uma função que, a partir da temperatura e do material definidos, devolve o k correspondente. O sistema adotado neste trabalho e descrito acima utilizou a temperatura inicial definida pelo usuário para encontrar a condutividade térmica k em cada nodo.

A partir do primeiro perfil de temperatura encontrado, obtêm-se uma melhor estimativa para a condutividade térmica k em cada nodo. Escrevendo-se novamente as equações em cada nodo e resolvendo o sistema, chega-se em um novo perfil de temperatura. Para refinar a solução, pode-se repetir tal procedimento quantas vezes for necessário.

III O MANUAL DO USUÁRIO

O programa descrito neste trabalho foi desenvolvido em *Microsoft Excel* e encontra-se no arquivo **Transcal.xls** que contém todo o *software* desenvolvido por SOUZA(1997) e o programa para calcular o perfil de temperatura em uma placa retangular com condução bidimensional em regime permanente. O arquivo auxiliar **Morefunc.xll** contém rotinas para inversão e multiplicação de matrizes utilizadas na resolução do sistema linear gerado pelas equações do balanço de energia em cada nodo.

A figura a seguir mostra a tela inicial do software, encontrada no arquivo **Transcal.xls**.

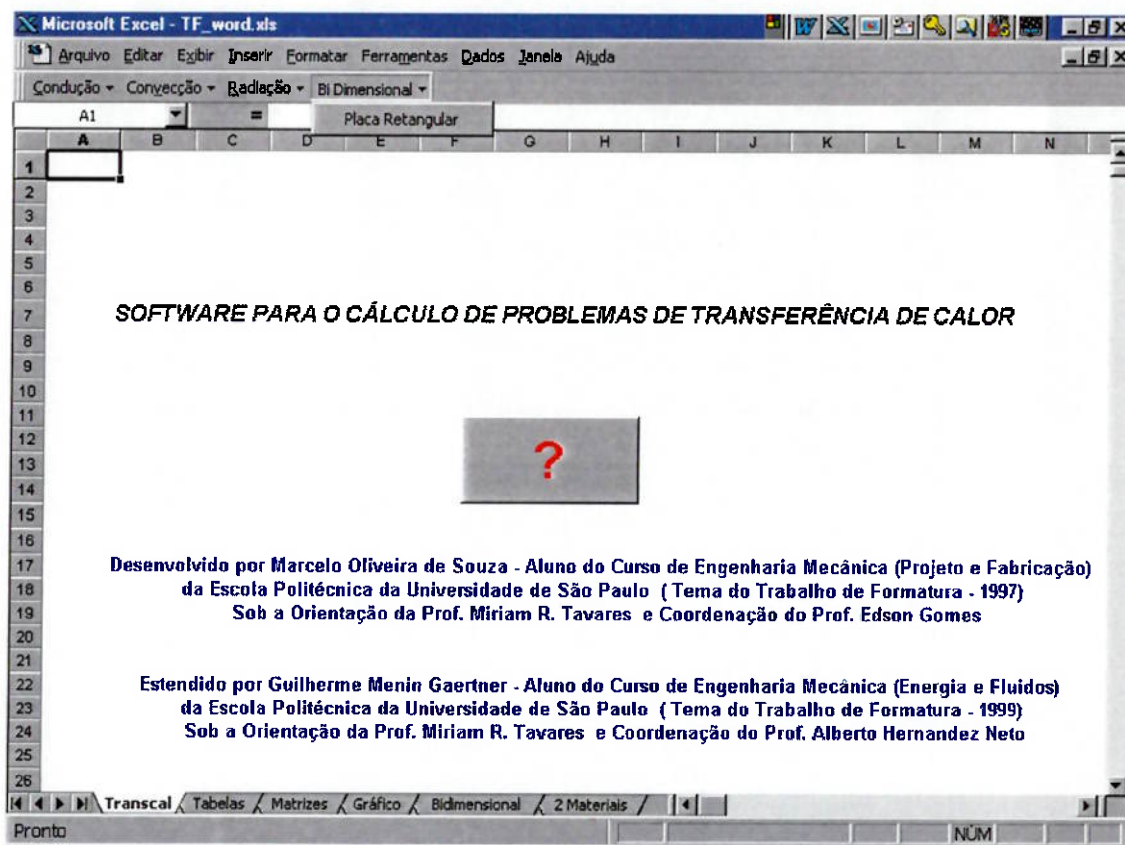


Figura III.1: Tela inicial do software **Transcal.xls**
Elaborado pelo autor.

A opção de menu **Bi Dimensional > Placa Retangular** leva o usuário a tela que acessa o sistema desenvolvido neste trabalho.

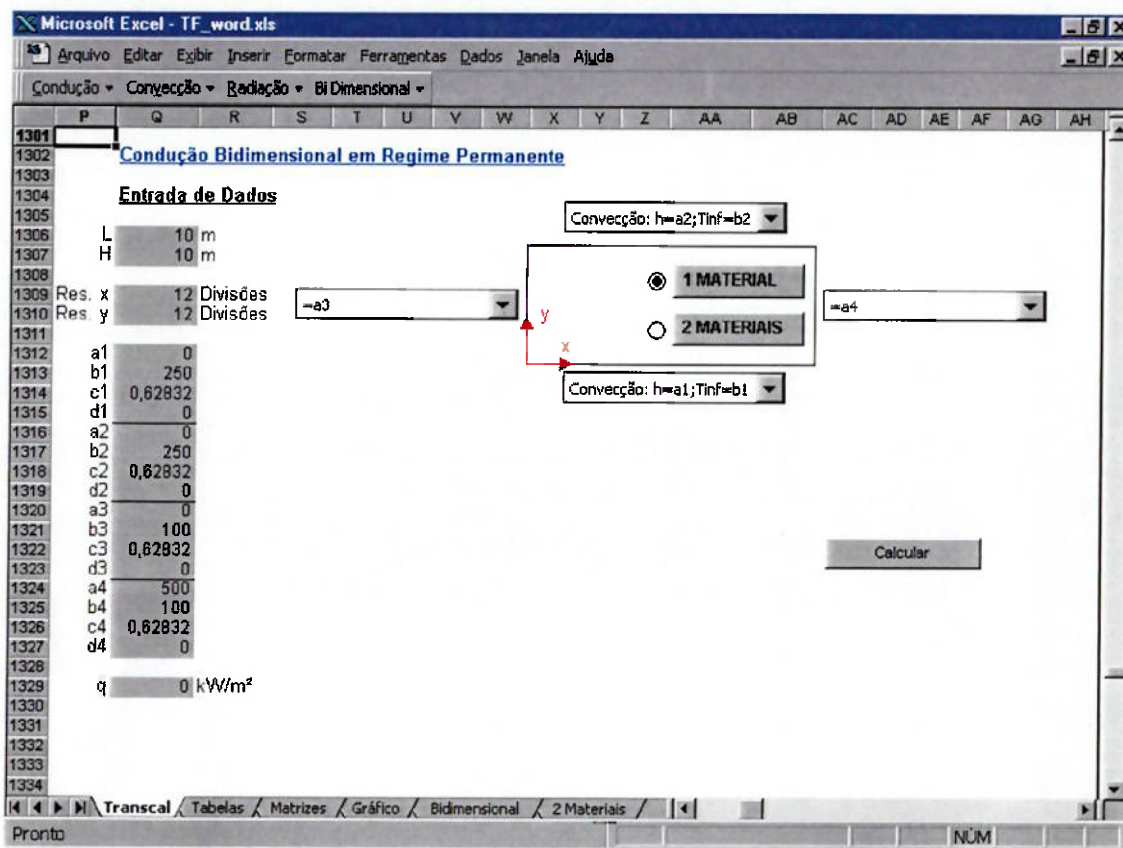


Figura III.2: Tela que acessa o sistema que calcula o perfil de temperatura em uma placa retangular com condução bidimensional em regime permanente
Elaborado pelo autor.

Para definir a dimensão da placa, o usuário deve entrar com os valores em metros para L e H , devendo L ser sempre maior ou igual a H . O número de divisões em L e H deve ser inserido em $Res.x$ e $Res.y$, respectivamente. Como o programa não aceita um número de nodos maior que 256, o produto $(Res.x+1)(Res.y+1)$, que é o número de nodos, deve ser menor que 256.

A geração ou absorção de calor deve ser inserida em q em W/m^2 . A geração de calor deve ter sinal positivo e a absorção negativo.

Para entrar com as condições de contorno, o usuário dispõe de barras de opções, conforme ilustra a figura a seguir.

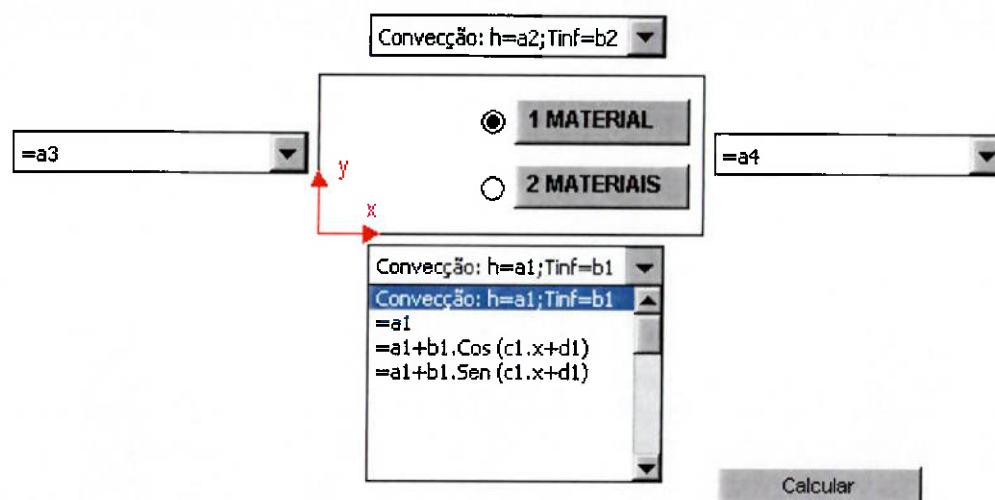


Figura III.3: Opções para as condições de contorno
Elaborado pelo autor.

As barras de opções fornecem as possíveis escolhas de condições de contorno, tanto convecção como perfis de temperatura definidos por funções matemáticas. Os parâmetros para as condições de contorno devem ser inseridos de **a1** a **d4**, conforme a figura a seguir. Os parâmetros devem ser expressos de acordo com o Sistema Internacional de Unidades (SI).

1311		
1312	a1	0
1313	b1	250
1314	c1	0,62832
1315	d1	0
1316	a2	0
1317	b2	250
1318	c2	0,62832
1319	d2	0
1320	a3	0
1321	b3	100
1322	c3	0,62832
1323	d3	0
1324	a4	500
1325	b4	100
1326	c4	0,62832
1327	d4	0

Figura III.4: Parâmetros para as funções das condições de contorno
Elaborado pelo autor.

Há quatro condições de contorno pré definidas nas barras de opções. Porém, o usuário pode incluir novas condições de contorno. Para tanto, deve-se ir para a pasta de trabalho denominada **Bidimensional**, como mostra a figura a seguir. As **colunas A, B, C e D** correspondem às informações contidas nas quatro barras de opções da Figura III.3. Deve-se escrever uma nova condição de contorno a partir da **linha 7**, formatada como texto, já que será o texto que aparecerá na barra de opções. A mesma função deverá ser escrita, desta vez em forma matemática, a partir da **linha 50**, devendo-se pular sempre cinco linhas após cada função(ver figura).

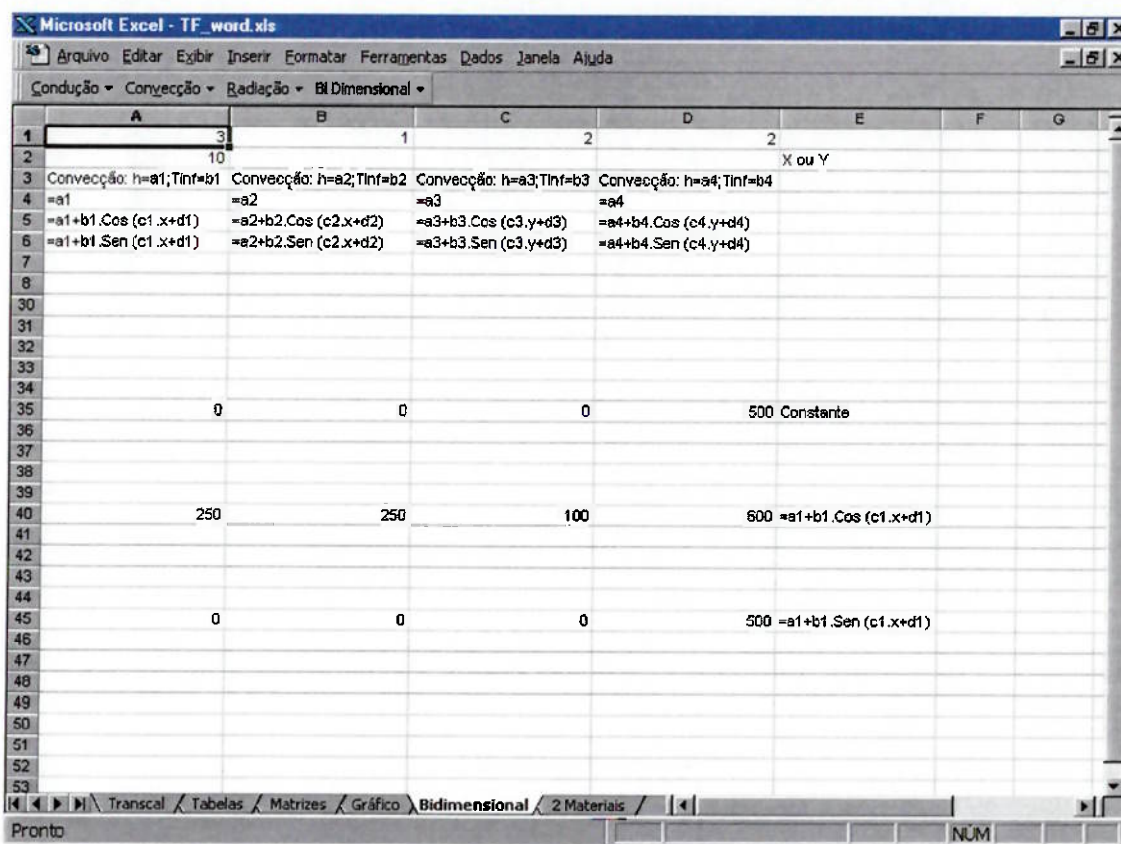


Figura III.5: Pasta de trabalho **Bidimensional** na qual o usuário pode inserir novas condições de contorno.
Elaborado pelo autor.

O usuário também pode escolher entre dois tipos de material, como se observa na Figura III.3. Para optar por um material, deve-se primeiro escolher o botão correspondente e depois pressionar a barra de opção **1 MATERIAL**. Esta barra leva ao seguinte menu (Figura III.6a):

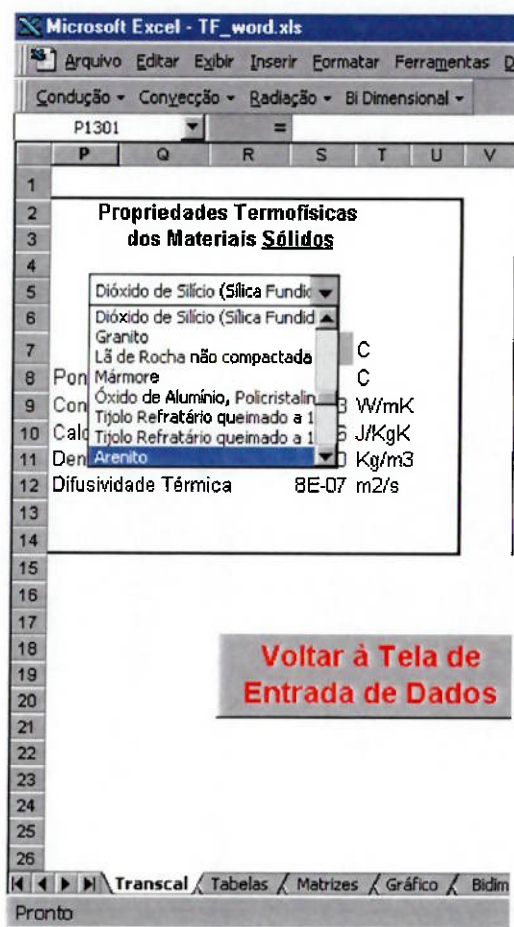


Figura III.6a: Menu para a escolha de um material
Elaborado pelo autor.

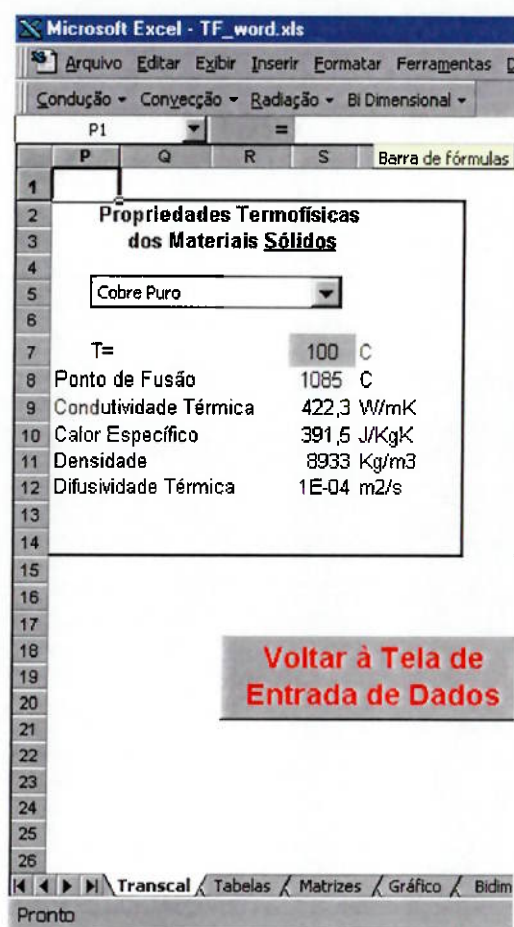


Figura III.6b: Menu para a escolha de um material – Escolha da temperatura inicial
Elaborado pelo autor.

Após a escolha do material, o usuário deve entrar com a temperatura inicial para o k na célula S7, como se observa na Figura III.6b.

A base de dados para o k encontra-se na pasta de trabalho Tabelas. Caso seja necessário, o usuário pode inserir novos dados, a fim de aperfeiçoar o resultado.

Material	100	200	400	600	800	1000	1200	1500	2000
Aço Carbono AISI 1010			58,7	48,8	39,2	31,3			
Aço Carbono não Ligado			58,7	48	39,2	30			
Aço Inox AISI 302			17,3	20	22,6	25,4			
Aço Inox AISI 304	9,2	12,6	16,6	19,8	22,6	25,4	28	31,7	
Aço Inox AISI 316			15,2	18,3	21,3	24,2			
Alumínio Liga 2024	65	163	186	186					
Alumínio Puro	302	237	240	231	219				
Berílio	990	301	161	126	106	90,8	78,7		
Bismuto	16,5	9,69	7,04						
Bronze Comercial		42	52	59					
Cobre Puro	401	482	413	393	379	366	352	339	
Cromo	159	111	90,9	80,7	71,3	65,4	61,9	57,2	49,4
Ferro Puro	134	94	69,5	54,7	43,3	32,8	28,3	24,1	
Inconel X-750	8,7	10,3	13,5	17	20,5	24	27,6	33	
Latão	75	95	137	149					
Nichrome			14	16	21				
Níquel Puro	164	107	80,2	65,6	67,6	71,8	76,2	82,6	
Ouro	327	323	311	298	284	270	255		
Platina Pura	77,5	72,6	71,8	73,2	75,6	76,7	82,6	89,5	99,4
Prata	444	430	425	412	396	379	361		
Silício	884	264	98,9	61,9	42,2	31,2	25,7	22,7	
Titânio	30,5	24,5	20,4	19,4	19,7	20,7	22	24,5	
Tório	59,8	54,6	54,5	55,8	56,9	56,9	58,7		
Tungstênio	209	186	159	137	125	118	113	107	100
Zinco	117	118	111	103					

Figura III.7: Pasta de trabalho **Tabelas** contendo a base de dados da condutividade térmica k . Elaborado pelo autor.

Depois de definir o material e a temperatura inicial, deve-se voltar à tela anterior acionando a opção **Voltar à Tela de Entrada de Dados** (ver Figuras III.6a. e III.6b.).

Caso o usuário opte por dois materiais, deve-se escolher o botão correspondente e depois pressionar a barra de opção **2 MATERIAL** (Figura III.3.). Esta barra leva à pasta de trabalho **2 Materiais**, conforme ilustra a figura a seguir.

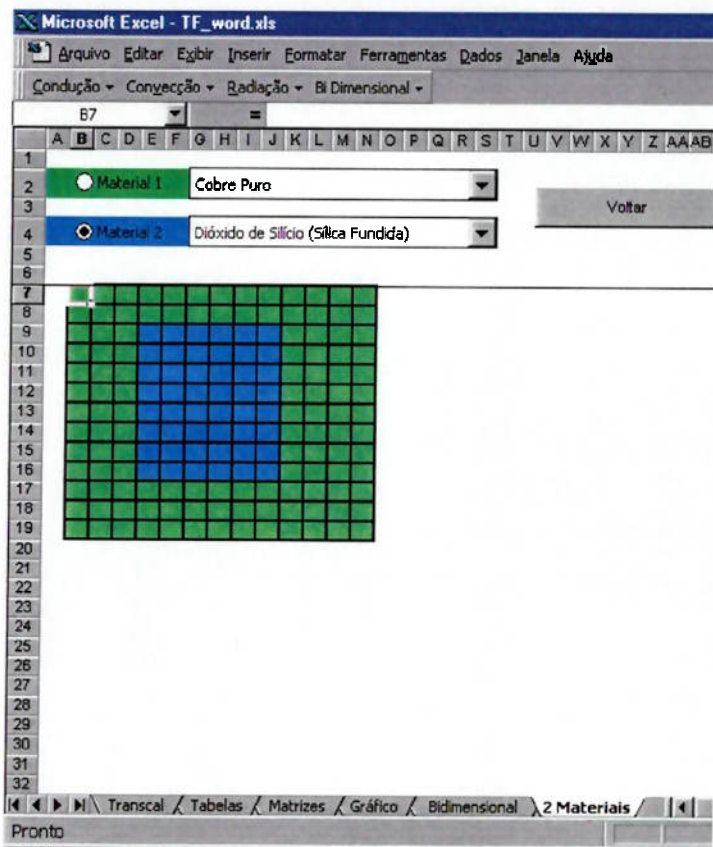


Figura III.8: Pasta de trabalho **2 Materiais**
Elaborado pelo autor.

Para se determinar o primeiro material o usuário deve apertar o botão **Material 1** e escolhê-lo na barra de opções à sua direita. Deve-se delimitar com o *mouse* a região na qual o material escolhido será utilizado. Para se determinar o segundo material, repete-se o processo anterior apertando o botão **Material 2**. Deve-se escolher a opção **Voltar** para se retornar à tela anterior.

Após a escolha de todas as variáveis, o usuário obtém o primeiro perfil de temperaturas escolhendo a barra **Calcular** (ver Figura III.2.).

IV EXEMPLOS

Este capítulo apresenta dois exemplos de casos resolvidos pelo programa desenvolvido neste trabalho, mostrando o funcionamento do *software* criado.

IV.1 Exemplo 1

No primeiro exemplo, procura-se calcular o perfil de temperatura em uma placa retangular a partir de temperaturas conhecidas nas extremidades da placa. Em três de suas arestas fixou-se a temperatura de 100° C. Na última aresta, tem-se um perfil onde a temperatura é uma função do *cos* da abscissa *x* (*cos x*). Incluiu-se também uma geração de calor de 1000 W/m². O material escolhido foi o cobre puro e a temperatura inicial para o cálculo do *k* foi de 100° C. A figura seguinte mostra as características do primeiro exemplo.

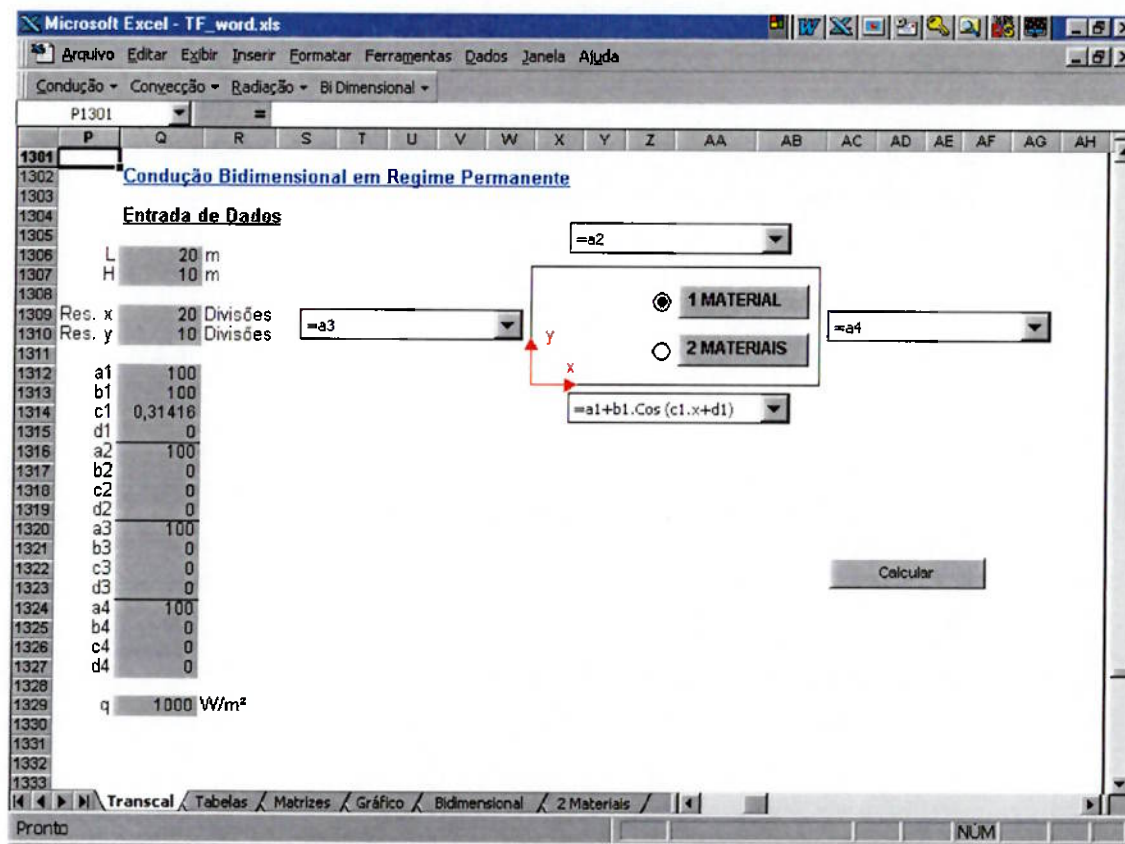


Figura IV.1: Tela com as características do exemplo 1
Elaborado pelo autor.

Escolhendo-se a barra **Calcular**, o programa gera a seguinte matriz:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
516																						
517		Gráfico																				
518																						
519																						
520	10	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
521	9	100	103	105	106	107	107	107	107	106	106	106	106	106	107	107	107	107	106	105	103	100
522	8	100	105	109	111	112	112	112	111	110	110	110	110	110	111	112	112	112	111	109	105	100
523	7	100	107	111	114	115	115	114	113	112	111	111	111	112	113	114	115	115	114	111	107	100
524	6	100	108	113	116	117	116	115	113	111	110	109	110	111	113	115	116	117	116	113	108	100
525	5	100	109	115	118	118	116	113	110	107	105	104	105	107	110	113	116	118	118	115	109	100
526	4	100	111	118	120	119	115	110	104	99	96	95	96	99	104	110	115	119	120	118	111	100
527	3	100	115	123	124	120	113	104	95	88	83	81	83	88	95	104	113	120	124	123	115	100
528	2	100	123	132	131	122	110	96	82	72	65	62	65	72	82	96	110	122	131	132	123	100
529	1	100	143	150	142	126	106	84	65	49	39	36	39	49	65	84	106	126	142	150	143	100
530	0	200	195	181	159	131	100	69	41	19	5	0	5	19	41	69	100	131	159	181	195	200
531	Y/X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
532																						

Figura IV.2: Matriz do primeiro perfil de temperatura resultante
Elaborado pelo autor.

O programa também apresenta os resultados na forma gráfica na pasta de trabalho **Gráfico**, que pode ser acessada através da barra **Gráfico** (Figura IV.2).

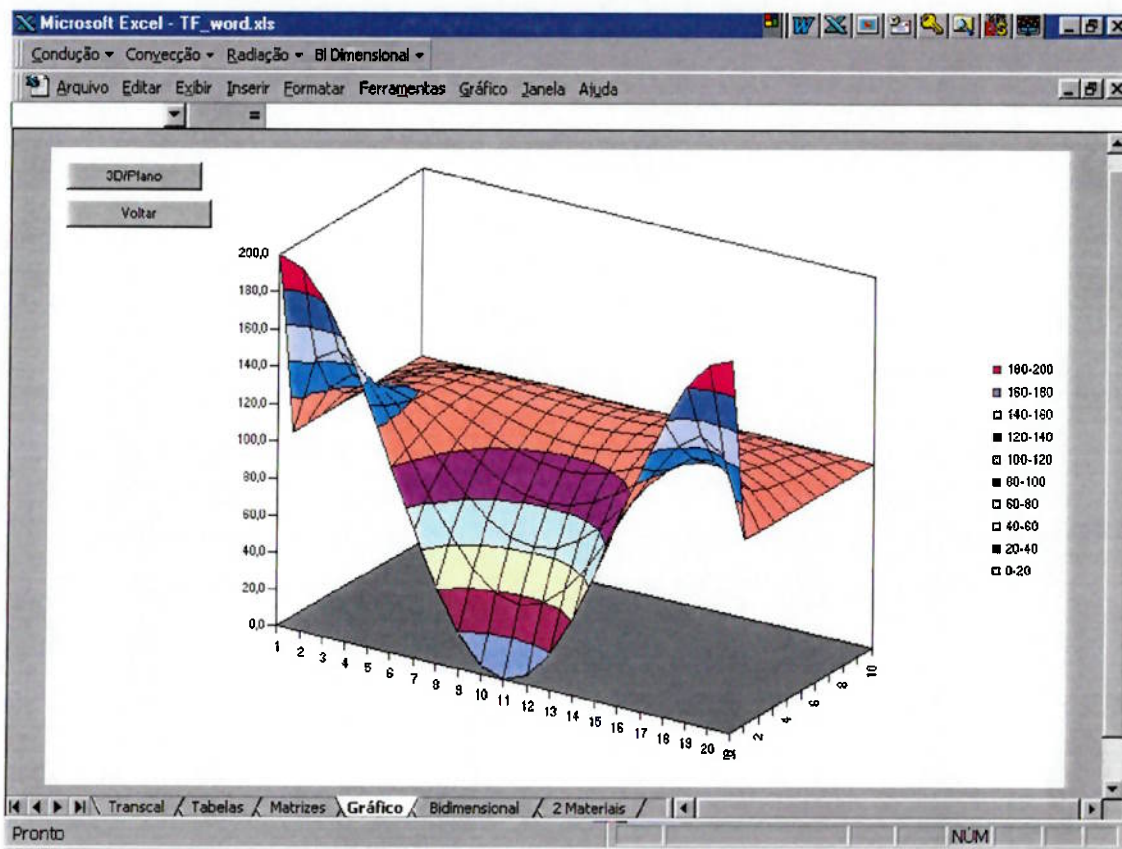


Figura IV.3: Resultado gráfico do primeiro perfil de temperatura resultante
Elaborado pelo autor.

Selecionando o gráfico através de seus vértices com o *mouse*, pode-se observá-lo por diferentes ângulos.

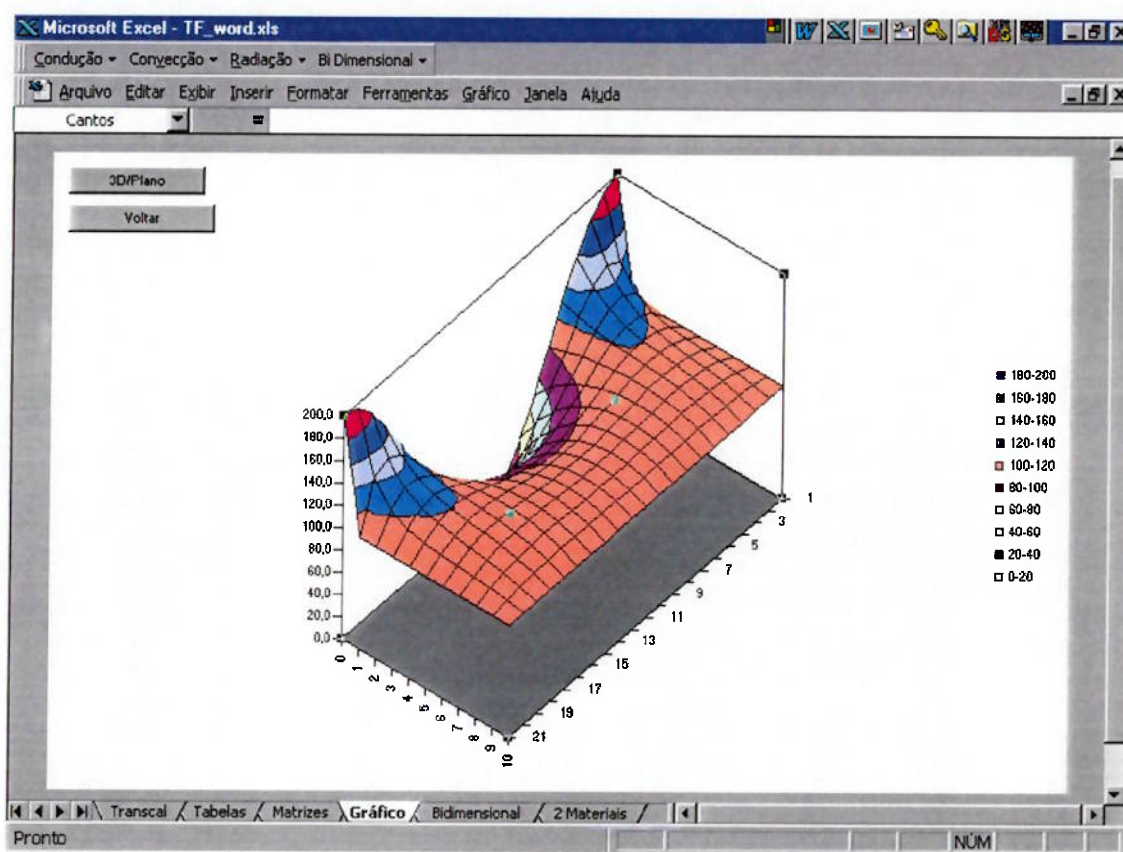


Figura IV.4 : Resultado gráfico do primeiro perfil de temperatura resultante visto sob outro ângulo
Elaborado pelo autor.

Através da barra **3D/Plano**, obtém-se uma vista superior do perfil de temperatura:

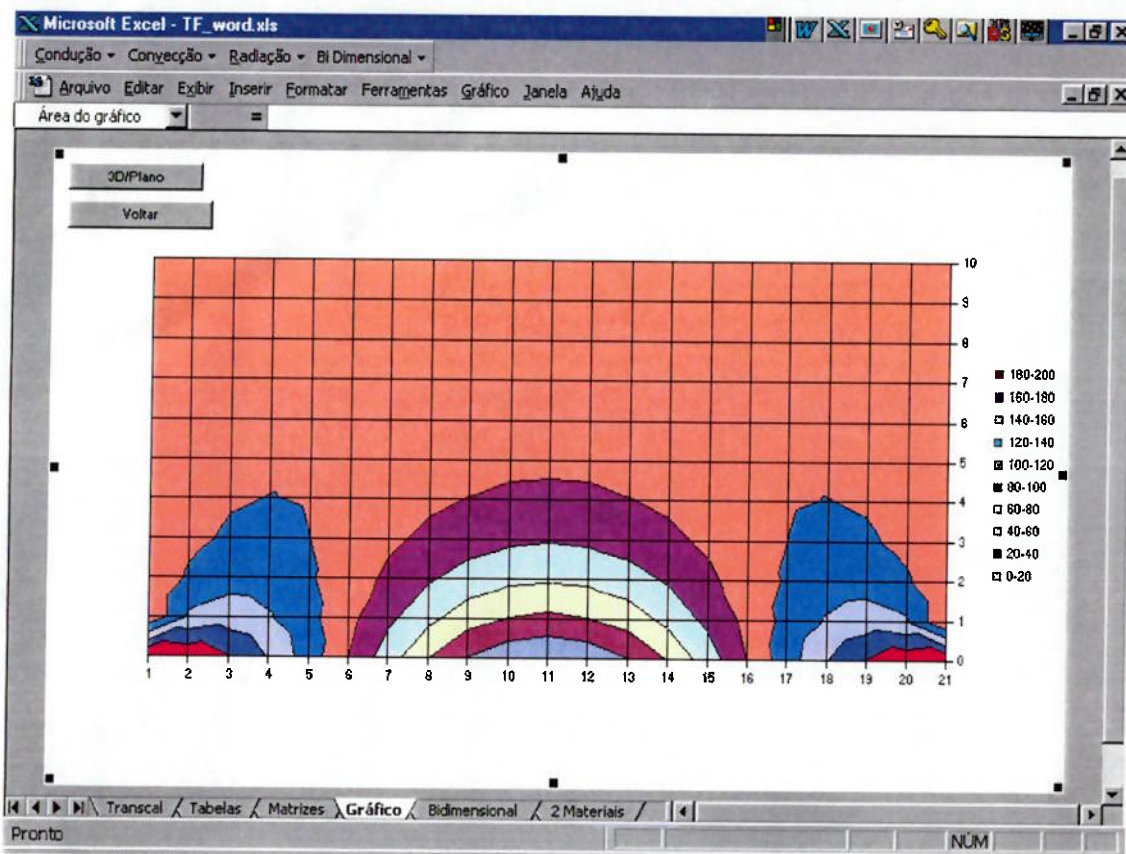


Figura IV.5 : Vista superior do primeiro perfil de temperatura resultante
Elaborado pelo autor.

A barra **Voltar** retorna o usuário para a pasta de trabalho **Matrizes**. O usuário pode também observar valores obtidos na fase intermediária de cálculo, logo no início da pasta de trabalho **Matrizes**. Da célula **A1** à célula **IV256**, está a matriz dos coeficientes da temperatura em cada nodo (figura a seguir).

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet titled 'TF_word.xls'. The menu bar includes 'Arquivo', 'Editar', 'Exibir', 'Inserir', 'Formatar', 'Ferramentas', 'Dados', 'Janela', and 'Ajuda'. The toolbar shows 'Condução', 'Convecção', 'Radiação', and 'Bi Dimensional'. The spreadsheet displays a matrix of coefficients for temperature in each node. The columns are labeled A through V, and the rows are numbered 1 to 34. The matrix is mostly composed of zeros, with some non-zero values appearing in columns A, C, D, and E, particularly in rows 13 through 30. The values are mostly 0, with some non-zero values appearing in columns A, C, D, and E, particularly in rows 13 through 30.

Figura IV.6: Matriz dos coeficientes de temperatura em cada nodo
Elaborado pelo autor.

A matriz coluna dos termos independentes aparece na **coluna A**, entre as **linhas 260 e 515**. O perfil de temperatura resultante também aparece na **coluna C** entre as mesmas linhas, sendo o mesmo da Figura IV.2. A **coluna D** mostra o número correspondente do material escolhido em cada nodo. Finalmente, a **coluna E** apresenta o coeficiente de condutividade k para cada nodo.

Microsoft Excel - TF_word.xls

Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar

Condução - Convecção - Radiação - Bi

A259

	A	B	C	D	E	F
259						
260	200		200	11	422	
261	100		100	11	422	
262	100		100	11	422	
263	100		100	11	422	
264	100		100	11	422	
265	100		100	11	422	
266	100		100	11	422	
267	100		100	11	422	
268	100		100	11	422	
269	100		100	11	422	
270	100		100	11	422	
271	195		195	11	422	
272	-1000		143	11	422	
273	-1000		123	11	422	
274	-1000		115	11	422	
275	-1000		111	11	422	
276	-1000		108	11	422	
277	-1000		108	11	422	
278	-1000		107	11	422	
279	-1000		105	11	422	
280	-1000		103	11	422	
281	100		100	11	422	
282	181		181	11	422	
283	-1000		150	11	422	
284	-1000		132	11	422	
285	-1000		123	11	422	
286	-1000		118	11	422	
287	-1000		115	11	422	
288	-1000		113	11	422	
289	-1000		111	11	422	
290	-1000		109	11	422	
291	-1000		105	11	422	
292	100		100	11	422	
293	159		159	11	422	

Transcal Tabelas Matrizes

Pronto

Figura IV.7: Pasta de Trabalho **Matrizes** (linhas 260 a 515)
Elaborado pelo autor.

Janela Ajuda

	E	F	G	H	I	J	K
a temperatura				Índice= 11		K1= 482	
				T= 373		K2= 413	
				K= 422,315		T1= 200	
				Cp= 391,465		T2= 400	
k (W/mK)	100	200	400	600	800	1000	1200
3			58,7	48,8	39,2	31,3	
7			56,7	48	39,2	30	
1			17,3	20	22,8	25,4	
5	9,2	12,6	16,6	19,8	22,6	25,4	28
3			15,2	16,3	21,3	24,2	
3	65	163	186	186			
1	302	237	240	231	219		
2	990	301	161	126	105	90,8	78,7
3	16,5	9,69	7,04				
4		42	52	59			
7	401	482	413	393	379	366	352
1	159	111	90,9	80,7	71,3	65,4	61,9
1	134	94	89,5	54,7	43,3	32,8	28,3
1	8,7	10,3	13,5	17	20,5	24	27,6
3	75	95	137	149			
4			14	16	21		
3	164	107	80,2	65,6	67,6	71,8	76,2
7	327	323	311	298	284	270	255
1	77,5	72,6	71,8	73,2	75,6	78,7	82,6
4	444	430	425	412	398	379	361
2	884	264	98,9	61,9	42,2	31,2	25,7

2 Materiais

NUM

Figura IV.8: Pasta de Trabalho **Tabelas** – destaque para **célula I 1** (índice do material)
Elaborado pelo autor.

O usuário pode refinar a solução encontrada utilizando o primeiro perfil de temperatura obtido para determinar os novos coeficientes de temperatura k em cada nodo apertando a barra **Refinar** (Figura IV.2.).

Microsoft Excel - TF_word.xls

Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Ferramentas Dados Janela Ajuda

Condução - Convecção - Radiação - Bi Dimensional

A516

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
516																						
517																						
518																						
519																						
520	10	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
521	9	100	103	105	108	107	107	107	107	108	108	108	108	108	107	107	107	107	108	105	103	100
522	8	100	105	109	111	112	112	111	111	110	110	110	110	110	111	111	112	112	111	109	105	100
523	7	100	107	111	114	115	115	114	113	112	111	110	111	112	113	114	115	115	114	111	107	100
524	6	100	108	113	116	117	116	114	112	110	109	108	109	110	112	114	116	117	116	113	108	100
525	5	100	109	115	118	118	116	113	109	106	104	103	104	106	109	113	116	118	118	115	109	100
526	4	100	111	118	120	119	114	109	103	98	95	94	95	98	103	109	114	119	120	118	111	100
527	3	100	115	123	124	120	112	103	94	87	82	80	82	87	94	103	112	120	124	123	115	100
528	2	100	123	132	130	122	109	95	81	70	63	61	63	70	81	95	109	122	130	132	123	100
529	1	100	142	150	142	125	105	84	64	48	38	35	38	48	64	84	105	125	142	150	142	100
530	0	200	195	181	159	131	100	69	41	19	5	0	5	19	41	69	100	131	159	181	195	200
531	Y/X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
532																						

Gráfico Voltar Refinar

Figura IV.9: Matriz obtida para o novo perfil de temperatura (a partir da barra **Refinar**)
Elaborado pelo autor.

A partir destes resultados, novos gráficos foram gerados e podem ser visualizados através da barra **Gráfico** da pasta de trabalho **Matrizes** (ver figura anterior).

IV.2 Exemplo 2

O segundo exemplo utiliza uma placa retangular constituída por dois materiais, cobre puro e silício, em uma situação hipotética onde a diferença de temperatura entre as extremidades da placa é muito elevada. É importante ressaltar que há grande diferença de condutividade térmica k entre os dois materiais e que suas condutividades variam consideravelmente de acordo com a temperatura (ver figura a seguir).

Material	100	200	400	600	800	1000	1200	1500	2000
Aço Carbono AISI 1010			58,7	48,8	39,2	31,3			
Aço Carbono não Ligado			56,7	48	39,2	30			
Aço Inox AISI 302			17,3	20	22,8	25,4			
Aço Inox AISI 304	9,2	12,6	16,6	19,8	22,6	25,4	28	31,7	
Aço Inox AISI 316			15,2	18,3	21,3	24,2			
Alumínio Liga 2024	65	163	186	186					
Alumínio Puro	302	237	240	231	218				
Berílio	990	301	181	126	106	90,8	78,7		
Bismuto	16,5	9,69	7,04						
Bronze Comercial		42	52	59					
Cobre Puro	401	482	413	393	379	366	352	339	
Cromo	159	111	90,9	80,7	71,3	65,4	61,9	57,2	49,4
Ferro Puro	134	94	69,5	54,7	43,3	32,8	26,3	32,1	
Inconel X-750	8,7	10,3	13,5	17	20,5	24	27,6	33	
Latão	75	95	137	149					
Nichrome			14	18	21				
Níquel Puro	164	107	80,2	65,6	67,6	71,8	76,2	82,6	
Ouro	327	323	311	298	284	270	255		
Platina Pura	77,5	72,6	71,8	73,2	75,6	78,7	82,6	89,5	99,4
Prata	444	430	425	412	396	379	361		
Silício	884	264	99,9	61,9	42,2	31,2	25,7	22,7	
Titânio	30,5	24,5	20,4	19,4	19,7	20,7	22	24,5	
Tório	59,8	54,6	54,5	55,8	56,9	56,9	58,7		
Tungstênio	208	186	159	137	125	118	113	107	100
Zinco	117	118	111	103					

Figura IV.10: Pasta de Trabalho **Tabelas** – destaque para a condutividade térmica do cobre puro e silício

Elaborado pelo autor.

Este exemplo procura calcular o perfil de temperatura da placa retangular, a partir das seguintes variáveis:

- 1) dimensões: 20m de comprimento por 10m de altura;
- 2) divisões: 20 no comprimento e 10 na altura;
- 3) condições de contorno: uma extremidade com $T=0^{\circ}\text{C}$ e a extremidade oposta com $T=1000^{\circ}\text{C}$. As outras extremidades estão isoladas com h de convecção igual a zero;
- 4) materiais: parte da placa constituída por cobre puro e a parte restante por silício;
- 5) temperatura inicial para o cálculo das condutividades: 500°C .

As figuras a seguir ilustram estas características.

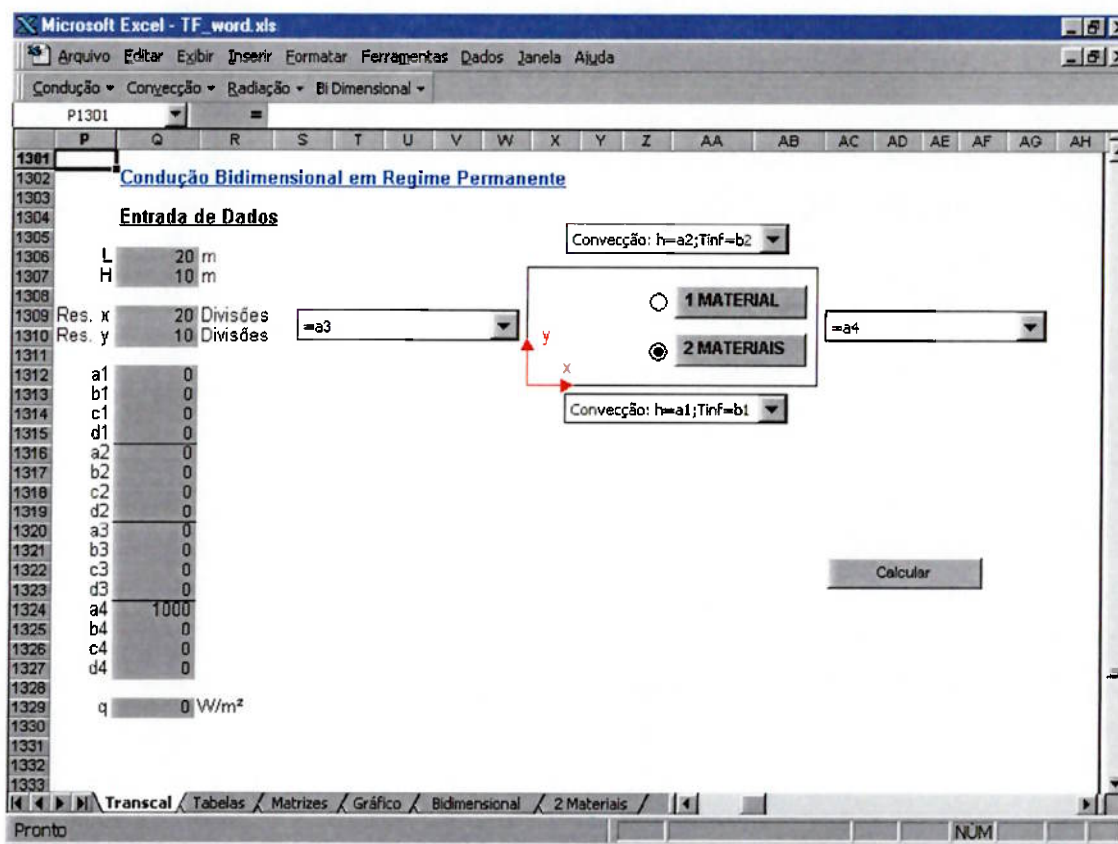


Figura IV.11: Tela com as características do exemplo 2
Elaborado pelo autor.

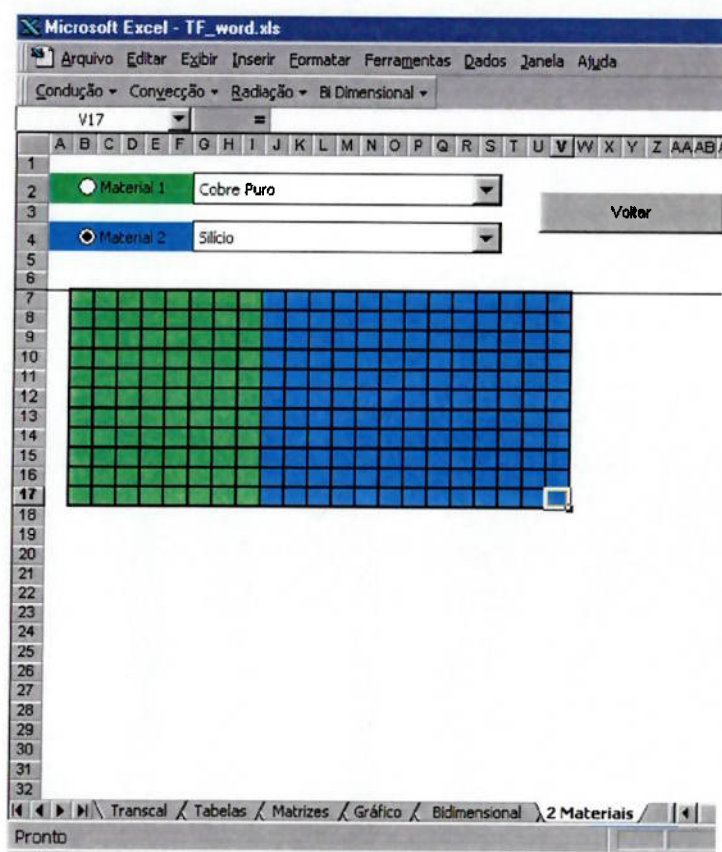


Figura IV.12: Constituição de materiais da placa retangular
Elaborado pelo autor.

Depois de definidas as variáveis descritas acima, o usuário deve apertar a barra **Calcular** para que o programa comece a rodar. Logo após a escolha da opção **Calcular**, o programa pede que se informe a temperatura inicial para a estimativa das condutividades, conforme ilustra a figura a seguir.

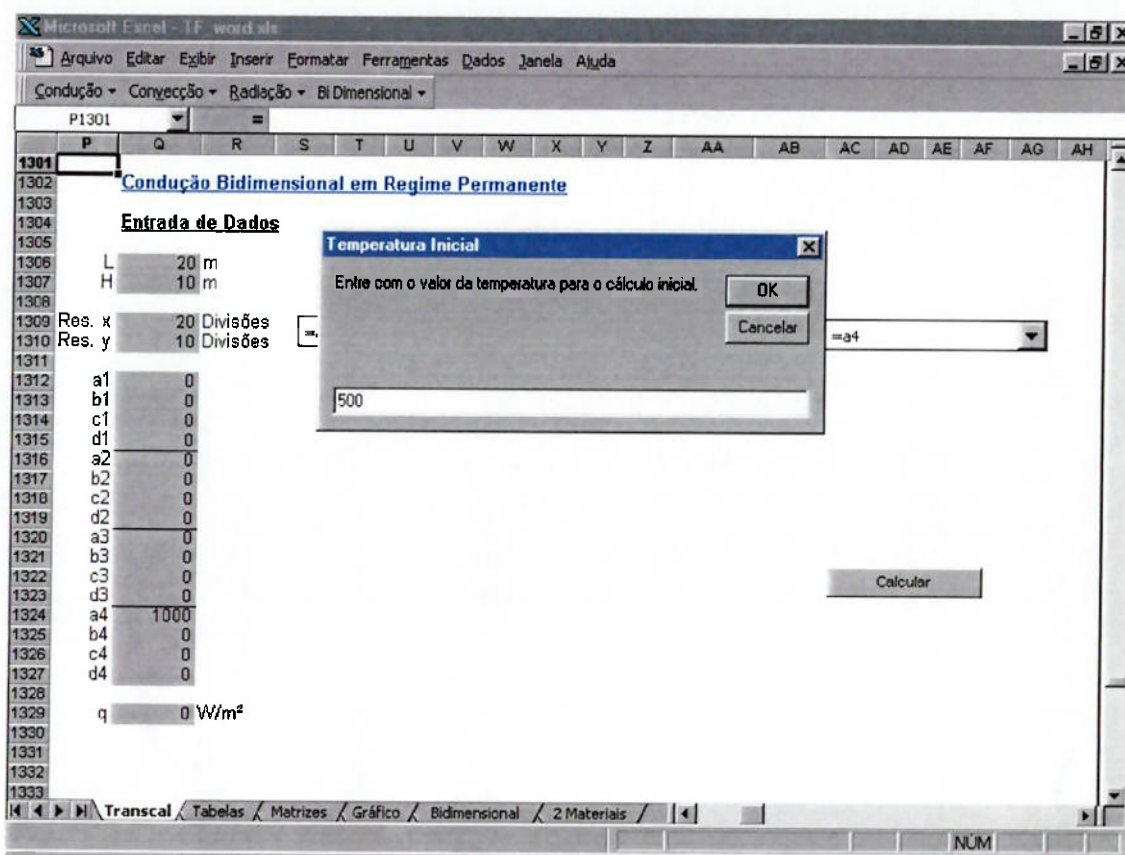


Figura IV.13: Barra para o usuário inserir a temperatura inicial
Elaborado pelo autor.

A matriz e o gráfico apresentados nas figuras a seguir mostram o perfil de temperaturas inicial.

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet titled 'TF_word.xls'. The active sheet is 'Bidimensional'. The matrix of initial temperature values is displayed in the range A516:V532. The matrix is a 10x20 grid of numbers ranging from 0 to 1000. The columns are labeled A through V, and the rows are numbered 516 through 532. The matrix shows a linear gradient from left to right and top to bottom.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
516																						
517																						
518																						
519																						
520	10	0	8	17	25	33	41	47	48	230	237	269	353	422	493	565	637	710	782	855	927	1000
521	9	0	8	17	25	34	42	50	59	139	214	282	351	422	493	565	637	710	782	855	927	1000
522	8	0	9	17	26	34	43	52	61	117	199	274	347	420	492	565	637	710	782	855	927	1000
523	7	0	9	17	26	34	43	52	62	110	192	269	344	418	491	564	637	709	782	855	927	1000
524	6	0	9	17	26	35	44	53	62	108	188	266	342	417	490	564	638	709	782	855	927	1000
525	5	0	9	17	26	35	44	53	62	108	187	265	341	416	490	563	636	709	782	855	927	1000
526	4	0	9	17	26	35	44	53	62	108	188	266	342	417	490	564	638	709	782	855	927	1000
527	3	0	9	17	26	34	43	52	62	110	192	269	344	418	491	564	637	709	782	855	927	1000
528	2	0	9	17	26	34	43	52	61	117	199	274	347	420	492	565	637	710	782	855	927	1000
529	1	0	8	17	25	34	42	50	59	139	214	282	351	422	493	565	637	710	782	855	927	1000
530	0	0	8	17	25	33	41	47	48	230	237	269	353	422	493	565	637	710	782	855	927	1000
531	V.X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
532																						

Figura IV.14: Matriz com o perfil de temperatura inicial
Elaborado pelo autor.

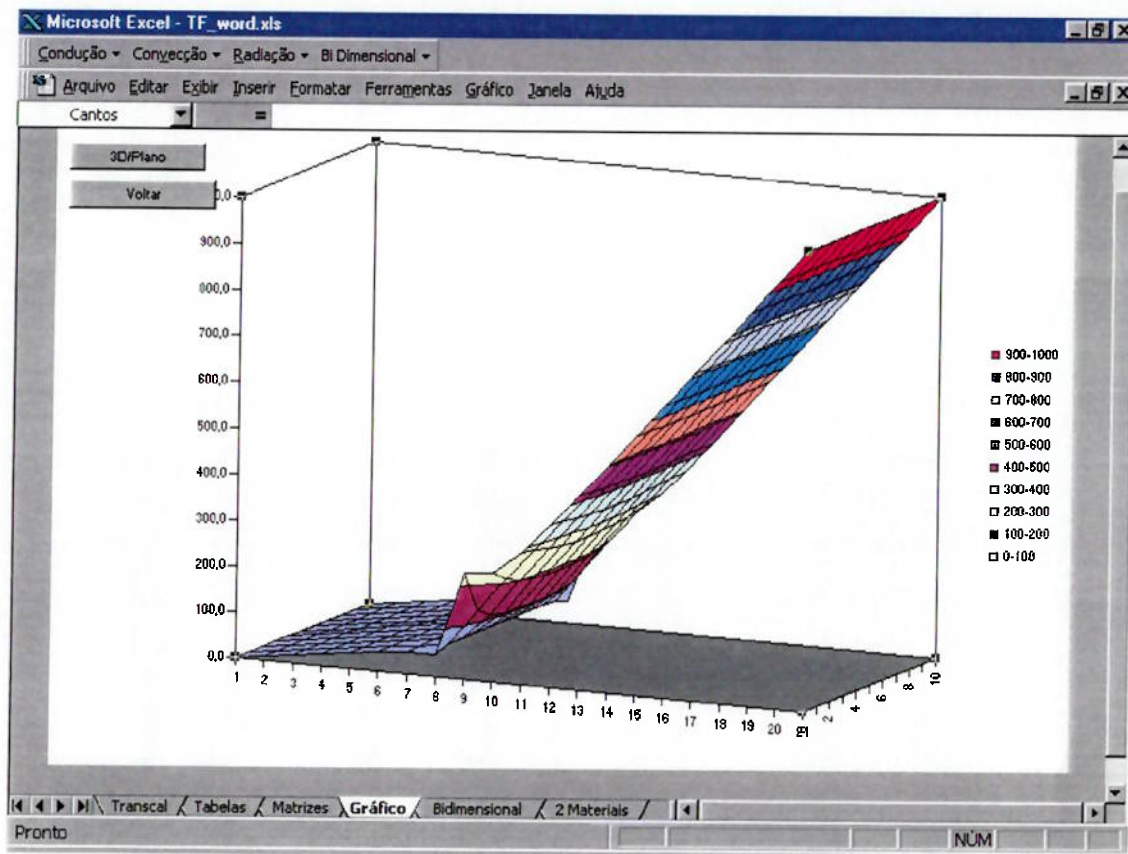


Figura IV.14: Gráfico com o perfil de temperatura inicial
Elaborado pelo autor.

Na **célula C348**, nota-se a mudança de material na placa. Como se pode observar, o cobre puro, que é representado pelo número 11, é substituído pelo silício, representado pelo número 22. Observa-se também que a condutividade térmica é constante para cada material.

	A	B	C	D	E
330	0		53	11	381
331	0		53	11	381
332	0		53	11	381
333	0		52	11	381
334	0		52	11	381
335	0		50	11	381
336	0		47	11	381
337	0		48	11	381
338	0		59	11	381
339	0		61	11	381
340	0		62	11	381
341	0		62	11	381
342	0		62	11	381
343	0		62	11	381
344	0		62	11	381
345	0		61	11	381
346	0		59	11	381
347	0		48	11	381
348	0		230	21	45
349	0		139	21	45
350	0		117	21	45
351	0		110	21	45
352	0		108	21	45
353	0		108	21	45
354	0		106	21	45
355	0		110	21	45
356	0		117	21	45
357	0		139	21	45
358	0		230	21	45
359	0		237	21	45
360	0		214	21	45
361	0		199	21	45
362	0		192	21	45
363	0		188	21	45
364	0		187	21	45

Figura IV.14: Pasta de Trabalho **Matrizes** (linhas 260 a 515)
Elaborado pelo autor.

Em função do alto gradiente do perfil de temperatura inicial, deve-se refinar a solução encontrada através da barra **Refinar** (Figura IV.4). Chega-se então solução apresentada na figura a seguir. Como se pode notar, o programa também informa ao usuário a máxima diferença percentual de temperatura (em Kelvin) entre o perfil de temperatura gerado e o anterior.

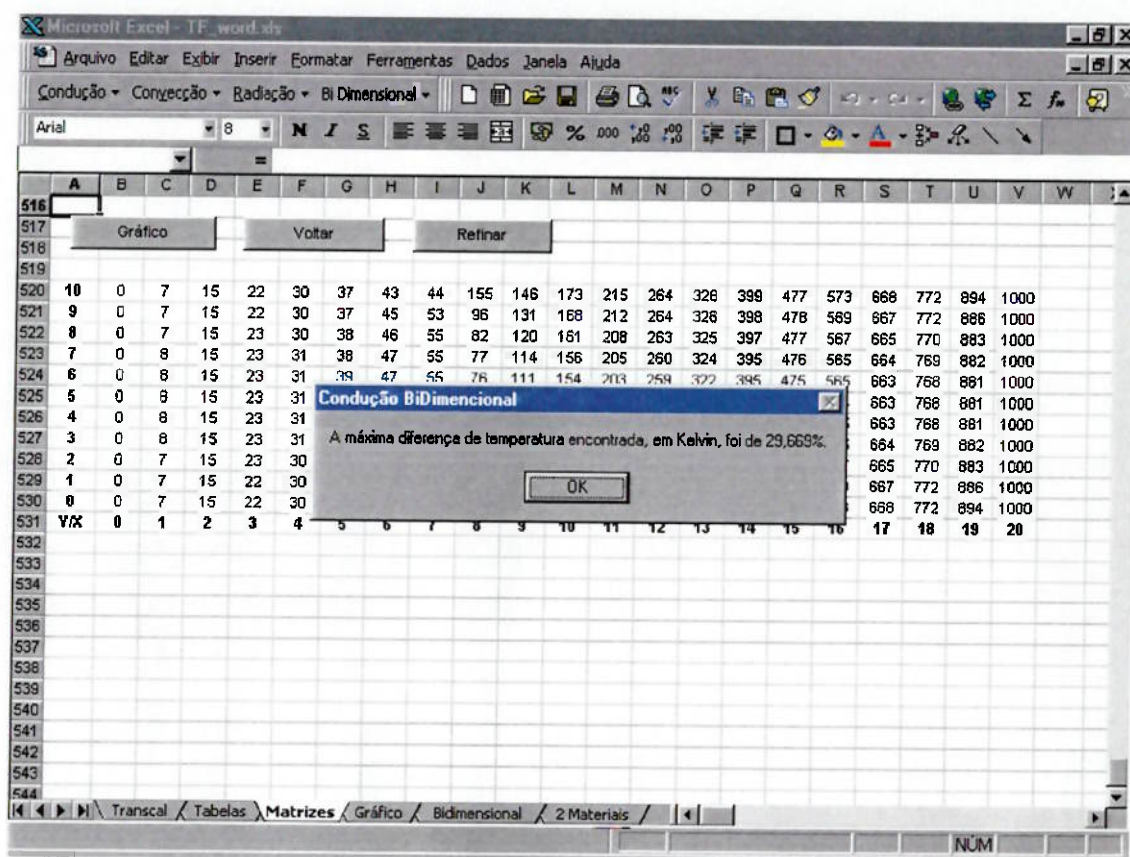


Figura IV.15: Matriz com o **segundo** perfil de temperatura
Elaborado pelo autor.

A alteração nos valores da condutividade pode ser observada comparando-se as **colunas E** da Figura IV.14. e a mesma coluna da figura seguinte. O novo perfil de temperatura obtido encontra-se na **coluna C**, e o perfil antigo na **coluna G**. A **coluna E** apresenta a diferença percentual (em Kelvin) entre estas duas temperaturas, em um mesmo nodo.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
332	0		47	11	439		53	1,9%	
333	0		47	11	439		52	1,8%	
334	0		46	11	439		52	1,7%	
335	0		45	11	440		50	1,6%	
336	0		43	11	441		47	1,5%	
337	0		44	11	440		48	1,2%	
338	0		53	11	437		59	1,7%	
339	0		55	11	436		61	1,8%	
340	0		55	11	435		62	2,1%	
341	0		55	11	435		62	2,1%	
342	0		55	11	435		62	2,2%	
343	0		55	11	435		62	2,1%	
344	0		55	11	435		62	2,1%	
345	0		55	11	436		61	1,9%	
346	0		53	11	437		59	1,7%	
347	0		44	11	440		48	1,2%	
348	0		155	21	80		230	17,7%	
349	0		96	21	97		139	11,7%	
350	0		62	21	108		117	9,8%	
351	0		77	21	113		110	9,4%	
352	0		76	21	115		108	9,3%	
353	0		75	21	115		108	9,3%	
354	0		76	21	115		108	9,3%	
355	0		77	21	113		110	9,4%	
356	0		82	21	108		117	9,8%	
357	0		96	21	97		139	11,7%	
358	0		155	21	80		230	17,7%	
359	0		146	21	79		237	21,7%	
360	0		131	21	83		214	20,7%	
361	0		120	21	86		199	20,2%	
362	0		114	21	87		192	20,1%	
363	0		111	21	88		188	20,0%	
364	0		111	21	88		187	20,0%	
365	0		111	21	88		188	20,0%	
366	0		114	21	87		192	20,1%	
367	0		120	21	86		199	20,2%	
368	0		131	21	83		214	20,7%	

Figura IV.16: Pasta de Trabalho **Matrizes** (linhas 260 a 515) referente ao **segundo** perfil de temperatura Elaborado pelo autor.

Adotando-se o procedimento **Refinar** novamente, obtém-se o seguinte perfil:

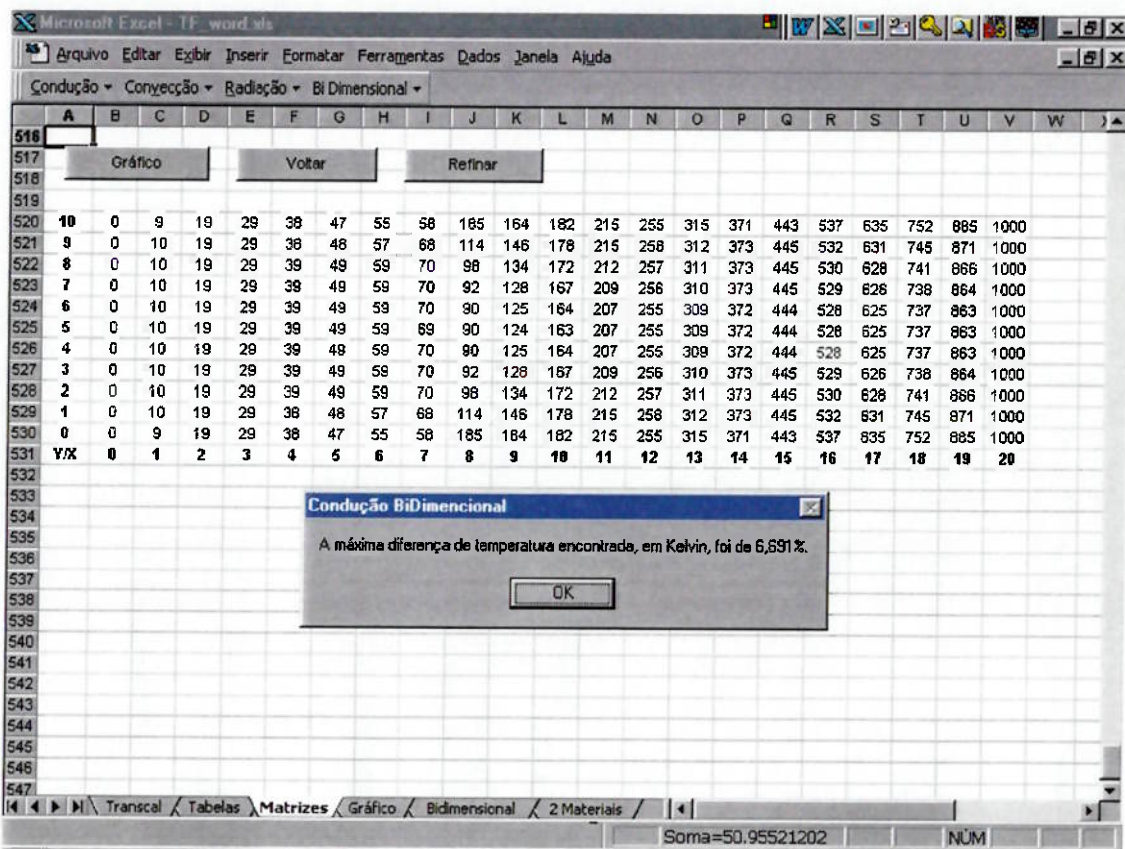


Figura IV.17: Matriz com o **terceiro** perfil de temperatura
Elaborado pelo autor.

Finalmente, refinando a solução mais uma vez, obtém-se o quarto e último perfil de temperatura. Como se pode notar, a diferença percentual entre as soluções encontradas no último refinamento caiu significativamente, o que mostra que as soluções praticamente convergiram para um perfil definitivo.

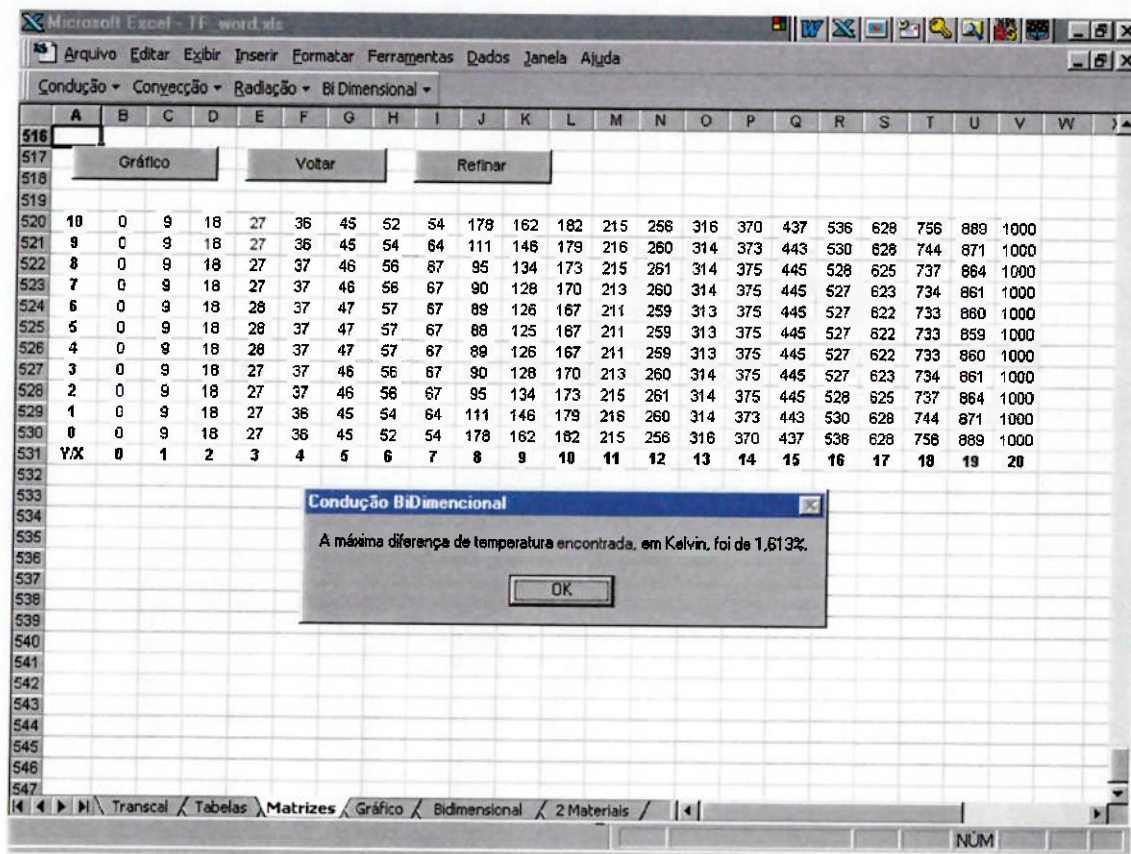


Figura IV.17: Matriz com o **quarto** perfil de temperatura
Elaborado pelo autor.

O gráfico a seguir ilustra o perfil de temperatura final, obtido no último refinamento.

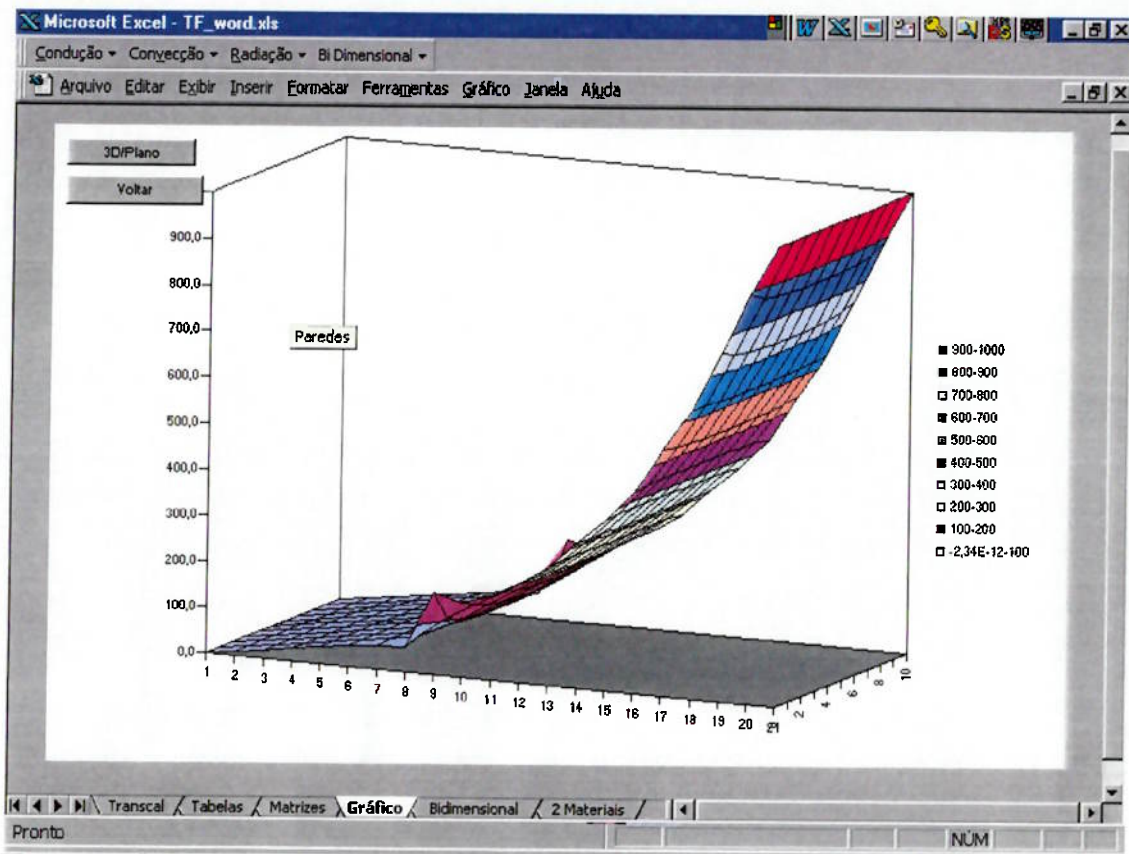


Figura IV.18: Gráfico com o **quarto** perfil de temperatura
Elaborado pelo autor.

V CONCLUSÕES

Conforme foi dito anteriormente, este trabalho teve o objetivo de estender o programa desenvolvido por Souza (1997) para o caso de condução de calor bidimensional em regime permanente.

O programa mostrou-se bastante eficiente para calcular perfis de temperatura em placas retangulares de diferentes:

- 1) dimensões (comprimento e largura);
- 2) números de divisões no comprimento e na largura;
- 3) valores de geração ou absorção de calor;
- 4) condições de contorno (convecção ou funções que definam a temperatura em qualquer extremidade).

O maior mérito do trabalho desenvolvido foi enfocar situações particulares, onde a condutividade térmica varia com a temperatura em cada nodo. A partir deste tratamento, pôde-se incluir situações em que a placa retangular pode ser constituída por dois materiais distintos.

O software desenvolvido fornece ferramentas para que estudantes de transferência de calor possam compreender com mais clareza os fenômenos envolvidos, e para engenheiros que necessitem solucionar problemas simples de transferência de calor.

BIBLIOGRAFIA

1. SOUZA, M. O. **Software para o cálculo de problemas de transferência de calor**. São Paulo, Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo/Departamento de Engenharia Mecânica, 1997.
2. INCROPERA, P. F.; WITT, D. P. **Fundamentos de transferência de calor e de massa**. Trad. de Horacio Macedo. Rio de Janeiro, LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1992.