

**ESTUDO DE ESTABILIDADE DO
SISTEMA DE CONTROLE DE TENSÃO
POR COMUTAÇÃO DE “TAP” DE
TRANSFORMADOR**

AMÓS ARAGÃO FRANCO DA COSTA

**ESTUDO DE ESTABILIDADE DO
SISTEMA DE CONTROLE DE TENSÃO
POR COMUTAÇÃO DE “TAP” DE
TRANSFORMADOR**

Trabalho de Conclusão de Curso

Escola de Engenharia de São Carlos

Universidade de São Paulo

Curso de Engenharia Elétrica ênfase em Eletrônica

ORIENTADOR: Prof. Dr. Luis Fernando Costa Alberto

São Carlos
2010

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

C837e Costa, Amós Aragão Franco da
Estudo de estabilidade do sistema de controle de
tensão por comutação de tap de transformador / Amós
Aragão Franco da Costa ; orientador: Luis Fernando Costa
Alberto. -- São Carlos, 2010.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em
Engenharia Elétrica com ênfase em Eletrônica) -- Escola
de Engenharia de São Carlos da Universidade de São
Paulo, 2010.

1. Transformadores e retores. 2. Eletrônica de
potência. 3. Matlab. I. Título.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a meus pais, Alonso Franco da Costa e Eunice Aragão da Costa, os quais, com tanto carinho e amor, dedicaram-se para que, hoje, eu me tornasse um engenheiro elétrico e a meus irmãos André Filipe, Ana Letícia, Alexandra e Adriana, pois sempre acreditaram e apoiaram os meus sonhos.

AGRADECIMENTO

Agradeço o tempo e a paciência do professor Dr. Luis Fernando Costa Alberto que tornou possível a realização deste trabalho. Suas sugestões de melhoria foram de suma importância para maior clareza e objetividade do trabalho.

Ao amigo Rodson Vinícius Masikiv Heringer pela dedicação e paciência.

Agradeço também a todos os meus amigos da graduação, em especial Rodolfo Maciel, Débora Aumiller, Matheus Souza, Felipe Gomes, Larissa Zeid, Alex Watanabe, Felipe Abdala, Gabriel Ferrarezi, Bruno Bosquê, Rodrigo Morales.

Em especial também agradeço a minha namorada Cinthya Fernandes Higashi pelo carinho e paciência.

Sumário

Introdução	17
1 - Controle de Tensão via Chaveamento de Taps de Transformadores.....	19
1.1 - Modelagem da Rede	20
1.2 - Resposta da Carga	23
2 - Modelo Completo do Sistema	24
2.1 - Transformador com comutação de “tap”	25
3 - Oscilações Sustentadas.....	30
4 - Colapsos de Tensão	36
5 - Técnica corrente de bloqueio de tap	53
Conclusão	55
Bibliografia	56
Apêndice	59
Tipos de estabilidade.....	59
Forma Canônica de Jordan	60
Integração Numérica	72
Método Trapezoidal Implícito	72

Lista de Figuras

Figura 1 - Esquemático de um sistema com transformador com tap variável.....	19
Figura 2 - Transformador com tap Variável.....	19
Figura 3 – Modelagem do Sistema	20
Figura 4 - Reflexo do secundário no primário do transformador.....	21
Figura 5 – Resposta da potência.	23
Figura 6 - Algoritmo de funcionamento do tap do transformador.....	25
Figura 7 - Verificação do valor da tensão.....	32
Figura 8 - Verifica se a tensão está abaixo ou acima do permitido.....	30
Figura 9 - Tempo de espera antes de atuar o “tap”	31
Figura 10 - Decremento do “tap”	32
Figura 11 - Intervalo de tensão pré-estabelecido	51
Figura 12 - Novo intervalo de tensão	51
Figura 13 – Nó Estável	62
Figura 14 – Nó Instável.....	63
Figura 15 - Sela	64
Figura 16 – Nó Estável	63
Figura 17 – Coordenadas Polares	67
Figura 18 – Foco Instável.....	69
Figura 19 – Foco Estável	70
Figura 20 - Centro.....	71
Figura 21 - Método trapezoidal implícito	72

Lista de Gráficos

Gráfico 1 - Sistema Estável.	30
Gráfico 2 - Oscilações devido ao acionamento do tap do transformador.	31
Gráfico 3 - Tempo de espera.	34
Gráfico 4 - Decremento do “tap”.	35
Gráfico 5 - Oscilação do sistema.	36
Gráfico 6 - Sistema Instável, mesmo com o chaveamento do tap do transformador.	37
Gráfico 7 - Decremento do “tap” – Sistema instável.	37
Gráfico 8 - Região de estabilidade.	38
Gráfico 9 - Queda da tensão “tap”.	39
Gráfico 10 - Incremento do “tap”.	39
Gráfico 11 - Sistema instável.	40
Gráfico 12 - Diagrama de Fase dos Pontos de Equilíbrio.	42
Gráfico 13 - Diagrama de Fase para uma grande perturbação na carga.	44
Gráfico 14 - Diagrama de Fase dos Pontos de Equilíbrio Instável e Estável.	45
Gráfico 15 - Diagrama de Fase para $n = 1,5$	46
Gráfico 16 - Inexistência de Pontos de Equilíbrio.	47
Gráfico 17 - Dinâmica da Carga.	48
Gráfico 18 - Ponto assintoticamente estável.	49
Gráfico 19 - Deslocamento dos pontos de equilíbrio.	50
Gráfico 20 - Incremento da tensão.	50
Gráfico 21 - Dinâmica do Sistema no momento do chaveamento do tap.	51
Gráfico 22 - Gráfico no tempo.	53

Resumo

O problema de controle de tensão por chaveamento de “tap” de transformadores em sistemas elétricos de potência é estudado neste trabalho. Verifica-se que tanto problemas de oscilações sustentadas como problemas de colapso de tensão podem surgir como consequência da interação entre cargas dinâmicas e sistema de controle de chaveamento de tap dos transformadores.

Verifica-se neste trabalho, estudando a região de estabilidade de sistemas de controle de tensão por chaveamento de taps, que as técnicas existentes para detectar instabilidade e bloquear a comutação do tap não são efetivas para evitar colapsos de tensão. Mostra-se que o estudo da região de estabilidade fornece informações corretas que permitem evitar colapsos de tensão. Estudos mais aprofundados são necessários para viabilizar a aplicação dos resultados deste trabalho na operação em tempo real.

Abstract

The problem of voltage control by switching "tap" of transformers in electric power systems is studied in this work. It appears that both problems as sustained oscillations of voltage and collapse problems can arise as a consequence of the interaction between dynamic loads and control system of the tap switching transformers.

It appears in this work by studying the stability region of control systems for switching voltage taps, that the existing techniques to detect and block the instability of the tap switching is not effective to prevent voltage collapse. It is shown that the study of the stability region provides accurate information for avoiding voltage collapse. Further studies are needed to enable the application of the results of this work in real time operation.

Introdução

Chaveamentos aparecem com muita frequência em engenharia. Alguns exemplos são sistemas de acionamento de motores [1], motores de passo [2], controles de tensão via chaveamento de “taps” de transformadores em sistemas de potência [3], robôs [4], dentre outros. Os chaveamentos podem ser inerentes ao sistema ou introduzidos intencionalmente para efeito de controle como é o caso de termostatos em problemas de controle de temperatura do tipo liga-desliga.

O sistema chaveado que será estudado nesse trabalho é o sistema de controle de tensão em sistemas elétricos de potência via chaveamento de “taps” de transformadores [5].

A estabilidade do sistema de controle de tensão dos transformadores via chaveamento de “taps” é fundamental para garantir a qualidade no fornecimento de energia elétrica. Tantos os equipamentos de concessionárias como os dos consumidores são projetados para operar dentro de um determinado limite de tensão, caso contrário, se esses equipamentos ficarem operando por um tempo prolongado fora do limite adequado de tensão, seu correto funcionamento pode ser comprometido diminuindo, assim, seu tempo de vida útil.

O problema de estabilização via chaveamento consiste em projetar a lógica de chaveamento para que o sistema final possua um conjunto atrativo (usualmente um ponto de equilíbrio) assintoticamente estável (vide apêndice). Surpreendentemente, existem exemplos de sistemas chaveados onde todos os subsistemas são instáveis e um chaveamento adequado entre eles produz órbitas limitadas convergentes que se aproximam de um conjunto atrativo compacto quando o tempo tende ao infinito, ver exemplo 3 em [6]. Portanto, a questão neste caso é identificar a classe de subsistemas instáveis que podem ser estabilizados por intermédio de um chaveamento adequado.

Para sistemas lineares invariantes no tempo, mostrou-se em [7] que a existência de uma combinação convexa estável das matrizes de dois subsistemas (possivelmente instáveis) garante a existência de um chaveamento que estabiliza quadraticamente o sistema chaveado. Uma generalização deste resultado para mais do que dois subsistemas foi apresentada em [8].

Em síntese, quando um transformador estiver numa dinâmica instável, então há a possibilidade de, apenas com o chaveamento do “tap”, fazer o sistema ficar estável. O contrário

também é válido, um sistema estável pode se tornar instável com o chaveamento do “tap” – fato que será analisado no decorrer deste trabalho.

1 - Controle de Tensão via Chaveamento de Taps de Transformadores

Sistemas de controle de tensão via chaveamento de taps de transformadores são largamente utilizados em sistemas elétricos de potência. Entretanto, é fundamental conhecer a região de operação estável deste sistema, para, por exemplo, evitar oscilações e possíveis colapsos de tensão.

Na *figura 1* uma representação esquemática do sistema chaveado estudado é apresentada:

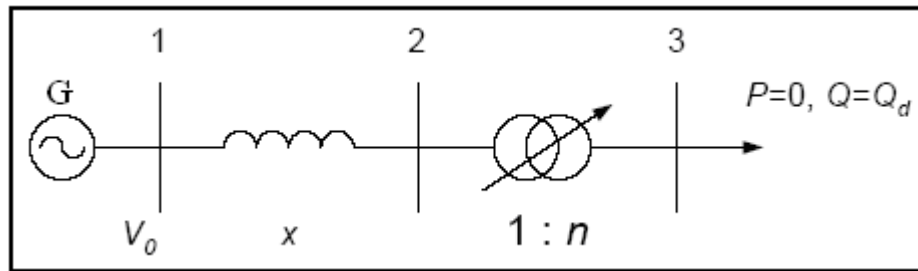


Figura 1 - Esquemático de um sistema com transformador com tap variável

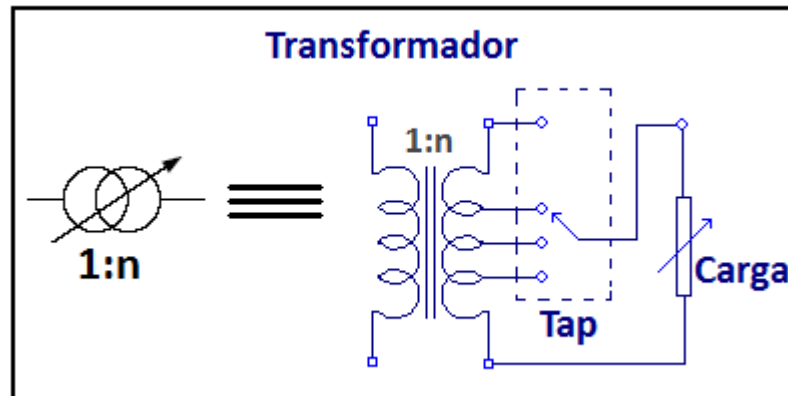


Figura 2 - Transformador com tap Variável

Este sistema é constituído por um gerador conectado a uma carga por intermédio de uma linha de transmissão [5]. O módulo da tensão do gerador é indicado por V_0 , x é a indutância da linha de transmissão e $1:n$ a relação de transformação entre o primário e o secundário do transformador. A relação de transformação é variável, uma vez que o “tap” do

transformador pode ser chaveado. A potência reativa da carga Q_d será modelada como uma carga dinâmica, ou seja, seu valor varia ao longo do tempo.

1.1 - Modelagem da Rede

As equações que descrevem o comportamento dinâmico do sistema em estudo, incluindo o comportamento da carga dinâmica e a lei de controle do “Tap” do transformador, são equações diferenciais ordinárias chaveadas, veja o desenvolvimento a seguir:

A figura 3 mostra o equivalente monofásico do sistema trifásico equilibrado em estudo:

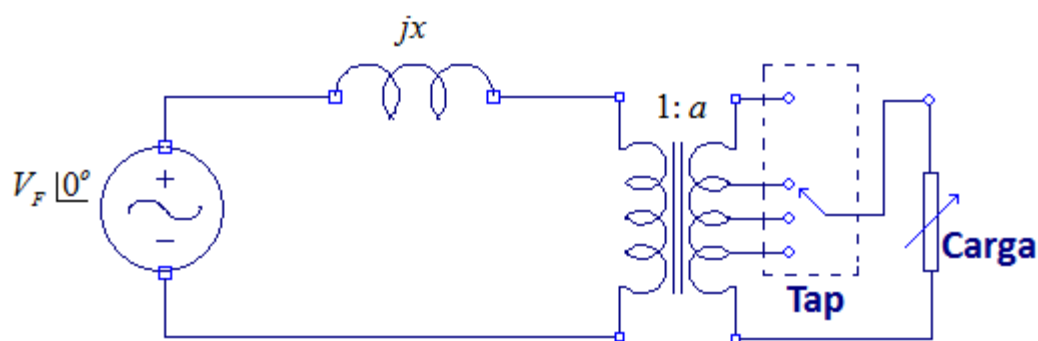


Figura 3 – Modelagem do Sistema

A carga será considerada puramente reativa por simplicidade.

Refletindo a impedância da linha e a fonte conectadas ao primário para o lado da carga (secundário do transformador), tem-se (figura 4):

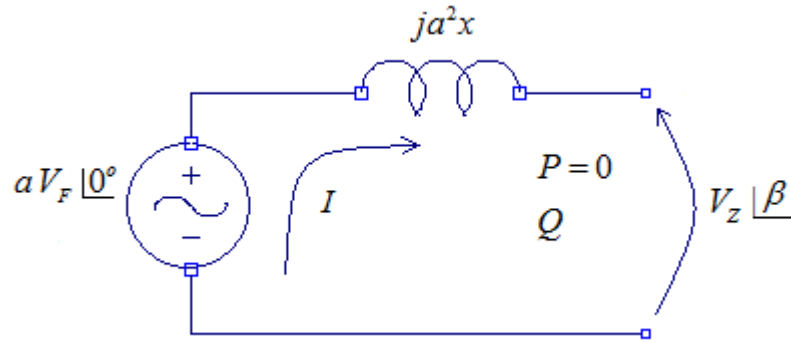
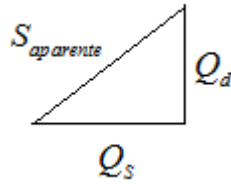


Figura 4 - Reflexo do secundário no primário do transformador

Se $S = Q_s + jQ_d$ representa a potência complexa da carga tem-se a seguinte equação de balanço de potência:



$$S = V_Z \angle \beta \cdot I^* = \frac{V_Z \angle \beta \cdot (aV_F - V_Z \angle -\beta)}{-ja^2x} =$$

$$\frac{aV_Z V_F \angle \beta - V_Z^2}{a^2x \angle -90^\circ} =$$

$$-\frac{V_Z^2 \angle 90^\circ}{a^2x} + \frac{V_Z V_F \angle \beta + 90^\circ}{ax}$$

$$S = Q_s + jQ_d =$$

Separando a equação complexa em parte real e imaginária obtém-se:

$$\frac{V_Z V_F}{ax} \cos(\beta + 90^\circ) + j \left[-\frac{V_Z^2}{a^2 x} + \frac{V_Z V_F}{ax} \text{sen}(\beta + 90^\circ) \right]$$

$$Q_s = \frac{V_Z V_F}{ax} \cos(\beta + 90^\circ)$$

$$Q_d = \left[-\frac{V_Z^2}{a^2 x} + \frac{V_Z V_F}{ax} \text{sen}(\beta + 90^\circ) \right]$$

Utilizando as seguintes identidades trigonométricas:

$$\cos(\beta + 90^\circ) = \cos(\beta) \cos(90^\circ) - \text{sen}(\beta) \text{sen}(90^\circ)$$

$$\text{sen}(\beta + 90^\circ) = \text{sen}(\beta) \cos(90^\circ) + \text{sen}(90^\circ) \cos(\beta)$$

$$\cos(90^\circ) = 0$$

$$\text{sen}(90^\circ) = 1$$

$$\cos(\beta + 90^\circ) = -\text{sen}(\beta)$$

$$\text{sen}(\beta + 90^\circ) = \cos(\beta)$$

É o fato de que a carga é puramente reativa, obtêm-se as seguintes equações para as

potências ativa e reativa.

$$Q_s = -\frac{V_Z V_F}{ax} \text{sen}(\beta) = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$Q_d = -\frac{V_Z^2}{a^2 x} + \frac{V_Z V_F}{ax} \cos(\beta) = \frac{V_Z}{ax} \left[-\frac{V_Z}{a} + V_F \cos(\beta) \right]$$

Ou ainda,

$$Q_d = \frac{V_Z}{ax} \left[\frac{-V_Z + aV_F}{a} \right]$$

Chamando-se a variável “a” = “n”, $V_Z = V$ e $V_F = V_O$, tem-se:

$$Q_d = \frac{V(nV_O - V)}{n^2 x}$$

1.2 - Resposta da Carga

O comportamento do sistema no momento em que há a transição do “tap” é mostrado a seguir.

Considerando V a tensão no secundário do transformador e Q a potência na carga, tem-se que no momento que há, por exemplo, um decremento do “tap” isso causa instantaneamente uma queda na tensão, figura 5, isso, por sua vez, resulta num degrau na potência (ΔQ_0) [14].

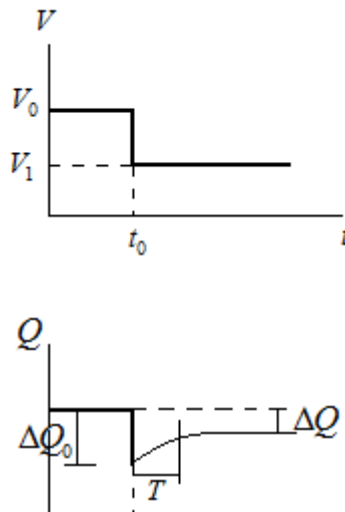


Figura 5 – Resposta da potência.

Nota-se que a potência leva um tempo T até se estabilizar e isso pode ser uma das causas da instabilidade do sistema.

Transformadores com a funcionalidade de comutação de tap em carga são largamente utilizados para o controle de tensão em sistemas elétricos de potência. Este mesmo princípio é empregado em estabilizadores de tensão utilizados no controle da tensão de cargas sensíveis como, por exemplo, computadores.

2 - Modelo Completo do Sistema

Portanto, combinando a equação algébrica da rede com as equações da carga dinâmica obtém-se o modelo algébrico diferencial que modela o sistema da figura 1.1:

$$\frac{dx_q}{dt} = \frac{1}{T_q} (Q_S - Q_d) \quad (1)$$

$$Q_d = x_q + Q_S V^2 \quad (2)$$

$$Q_d = \frac{V(nV_O - V)}{n^2 x} \quad (3)$$

Sendo (1) e (2) as equações dinâmicas da carga e (3) a equação da rede. Onde V é a tensão na carga, X_q a variável de estado, n a relação de espiras do primário com relação ao secundário do transformador, Q_d a potência reativa, Q_S a potência ativa e T_q é uma constante de tempo da carga.

Este tipo de carga possui característica de potência constante de longo prazo, ou seja, Q_d , a potência que realmente está sendo consumida num dado instante t , tende para Q_s quando t tende para infinito. No curto prazo, o termo $Q_s V^2$ é que manda. Neste caso, temos uma carga de impedância constante de curto prazo já que a potência depende do quadrado da tensão.

O sistema de chaveamento de “tap” de transformador traz complicações quando o mesmo não consegue estabilizar a tensão. Para prever e evitar essas instabilidades é necessário resolver as equações diferenciais algébricas (EDA) não lineares mostradas acima e determinar a região de estabilidade do sistema.

2.1 - Transformador com comutação de “tap”

A lógica de controle do “tap” desses transformadores está descrita no diagrama que segue:

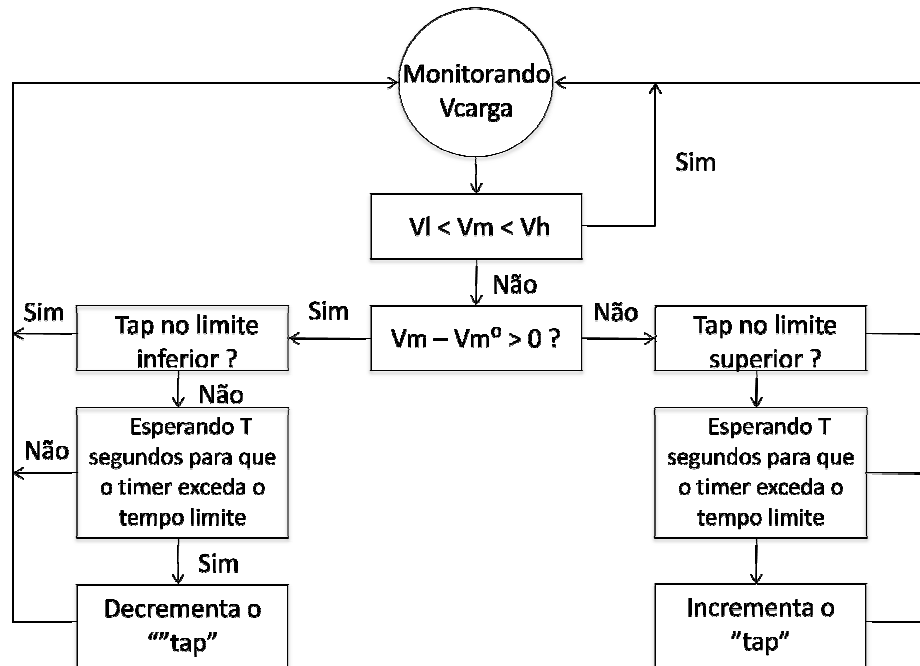


Figura 6 - Algoritmo de funcionamento do tap do transformador

Esse algoritmo monitora a tensão na carga (V_M) – a qual está conectada no secundário do transformador. Se essa tensão cai para um valor abaixo do permitido – valor que é pré-estabelecido – e nele permanece por um intervalo de tempo determinado (T), então o “tap” (n) será incrementado em uma posição, aumentando, assim, a relação de espiras entre o primário e o secundário do transformador, elevando a tensão na carga. Em seguida, uma nova verificação é realizada para averiguar se a tensão está dentro do limite pré-estabelecido [V_L V_H]. Em caso negativo, o “tap” será novamente incrementado e esse ciclo se repetirá até que V_M fique dentro do intervalo pré-estabelecido [V_L V_H] ou o “tap” atinja seu fim de curso, ver [5] e [15].

Se a tensão ficar acima do limite pré-estabelecido [V_L V_H], então o mesmo procedimento irá ocorrer, entretanto o “tap” será decrementado, diminuindo assim a relação de espiras entre o primário e o secundário do transformador, o que acarreta na diminuição da tensão na carga. Posteriormente realiza-se uma nova verificação de tensão na carga e, caso essa ainda esteja acima do limite pré-estabelecido, o sistema decrementará novamente o “tap” repetindo o procedimento até que V_M fique dentro do intervalo pré-estabelecido [V_L V_H] .

Observam-se situações em que, para determinados valores de carga, o sistema apresenta instabilidade mesmo com o recurso de controle de chaveamento do tap. Nesses casos, o controle do chaveamento não é eficiente, uma vez que não consegue fazer o sistema convergir para o intervalo pré-estabelecido ($V_L < V_M < V_H$).

Atualmente não há nenhuma teoria desenvolvida que seja eficaz para detectar e evitar essas instabilidades de tensão. Segundo o artigo [11] uma maneira eficaz de se fazer isso é bloquear o “tap” assim que se observar que o incremento do mesmo fez a tensão diminuir, ou o decremento fez a tensão aumentar, ou seja, quando isso acontece então a atuação do “tap” tem um efeito contrário ao esperado, dessa forma, ao invés da atuação do “tap” estabilizar o sistema, ela faz com que o mesmo se torne instável mais rapidamente do que se o “tap” não estivesse atuando, portanto, o ideal seria bloquear o “tap”. Mostrar-se-á, entretanto, que essa metodologia não é eficaz e que a instabilidade pode ter se apresentado muito antes dos fatos acima serem verificados, em outras palavras, há a possibilidade de, por exemplo, o incremento do “tap” gerar um incremento na tensão e isso ser o início da instabilidade do sistema, como será visto neste trabalho.

Seria, portanto, de extremo interesse, na área de análise de sistemas elétricos de potência, estudar o comportamento do sistema naquelas condições para que seja possível

desenvolver uma teoria para se prever a instabilidade de forma a poder evitá-la ou minimizá-la com maior eficiência.

Para tanto, resolveu-se, no Matlab, o conjunto de equações (1, 2 e 3) que descrevem o sistema (figura 1) de controle de tensão via chaveamento de taps de transformadores. Com isso foi possível monitorar o comportamento da tensão na carga ao longo do tempo, possibilitando, portanto, estimar para quais valores de carga o sistema é estável. Em outras palavras, foi possível achar para quais valores de carga o sistema, após um número finito de chaveamentos do “tap”, estabiliza a tensão V_M dentro do intervalo pré-estabelecido $[V_L V_H]$.

Para resolver o sistema de equações (1), (2) e (3), utilizou-se o método de integração trapezoidal implícito juntamente com o método de Newton. Veja o desenvolvimento a seguir:

$$\frac{dx_q}{dt} = \frac{1}{T_q} (Q_S - Q_d) \quad (1)$$

$$Q_d = x_q + Q_S V^2 \quad (2)$$

$$Q_d = \frac{V(nV_O - V)}{n^2 x} \quad (3)$$

Substituindo a equação (3) na equação (2), obtêm-se:

$$\frac{dx_q}{dt} = \frac{1}{T_q} (Q_S - Q_d)$$

$$x_q + Q_S V^2 = \frac{V(nV_O - V)}{n^2 x}$$

Logo:

$$\begin{cases} \dot{x}_q = \frac{1}{T_q} [Q_S(1 - V^2) - x_q] \\ xn^2 x_q + n^2 Q_S V^2 = nV V_O + V^2 \end{cases}$$

Ou equivalentemente:

$$\begin{cases} T_q \dot{x}_q = Q_S(1-V^2) - x_q \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} xn^2x_q + n^2Q_SV^2 - nVV_O - V^2 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Segundo o método trapezoidal implícito (vide apêndice) tem-se a seguinte discretização da equação diferencial:

$$X_{qm+1} = X_{qm} + \frac{p}{2} (F(X_{qm}) + F(X_{qm+1}))$$

Onde as funções $F(X_{qm})$ e $F(X_{qm+1})$ são dadas por:

$$F(X_{qm}) = \dot{x}_{qm} = \frac{Q_S(1-V^2) - x_{qm}}{T_q}$$

$$F(X_{qm+1}) = \dot{x}_{qm+1} = \frac{Q_S(1-V^2) - x_{qm+1}}{T_q}$$

Sendo “ P ” o passo da integração numérica.

O que resulta no seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} -X_{qm+1} + X_{qm} + \frac{p}{2} \left(\frac{Q_S(1-V^2) - X_{qm}}{T_q} + \frac{Q_S(1-V^2) - X_{qm+1}}{T_q} \right) = 0 \\ n_{m+1}^2 x X_{qm+1} + n_{m+1}^2 Q_S V^2 - n_{m+1} V V_O - V = 0 \end{cases}$$

ou de forma compacta:

$$G = (X_{qm+1}, n_{m+1}) = 0$$

Aplicando-se o método de Newton para resolver a equação acima obtém-se:

$$Z_{i+1} = Z_i - DG(X_{qm+1}, n_{m+1})^{-1} \cdot G(X_{qm+1}, n_{m+1})$$

$$G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$$

Sendo $G_1 = X_{qm+1}$, $G_2 = n_{m+1}$ e DG é jacobiana a matriz gradiente dada por:

$$DG(X_{qm+1}, n_{m+1}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial X_{qm+1}} & \frac{\partial G_1}{\partial n_{m+1}} \\ \frac{\partial G_2}{\partial X_{qm+1}} & \frac{\partial G_2}{\partial n_{m+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - \frac{p}{2} \frac{1}{T_q} & 0 \\ n_{m+1}^2 x & 2n_{m+1} x X_{qm+1} + 2n_{m+1} Q_S V^2 - V V_o \end{bmatrix}$$

Portanto, tem-se que a sistema anterior pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} X_{qm+1} \\ n_{m+1} \end{pmatrix}_{i+1} = \begin{pmatrix} X_{qm+1} \\ n_{m+1} \end{pmatrix}_i - DG(X_{qm+1}, n_{m+1})^{-1} \begin{pmatrix} X_{qm+1} \\ n_{m+1} \end{pmatrix}_i$$

Implementando-se esse método no Matlab, juntamente com um programa - cuja lógica de funcionamento é mostrada na *figura 6* - que monitora a tensão na carga, é possível, dada uma condição inicial, visualizar a trajetória da solução do sistema. Com isso consegue-se

estimar a região ou os valores para os quais o sistema é estável, além de verificar o que acontece com a solução e os pontos de equilíbrio do sistema quando ocorre o chaveamento do “tap”.

Inicialmente simulações foram realizadas, no MATLAB, para analisar de forma sucinta o que acontece com o valor da tensão para diferentes condições iniciais para, com isso, entender melhor a dinâmica do sistema. Veja a seguir os resultados obtidos:

3 - Oscilações Sustentadas

Considerando as condições iniciais: Tensão inicial na carga $V_1 = 1,005$, posição do “tap” $n = 1,2$ e os parâmetros: $T_q = 0,001$ e um aumento de 10% na potência reativa Q_d depois de 10 segundos de simulação, sendo os limites de tensão permitidos $V_L = 0,95V$ e $V_H = 1,05V$, obteve-se o gráfico 1.

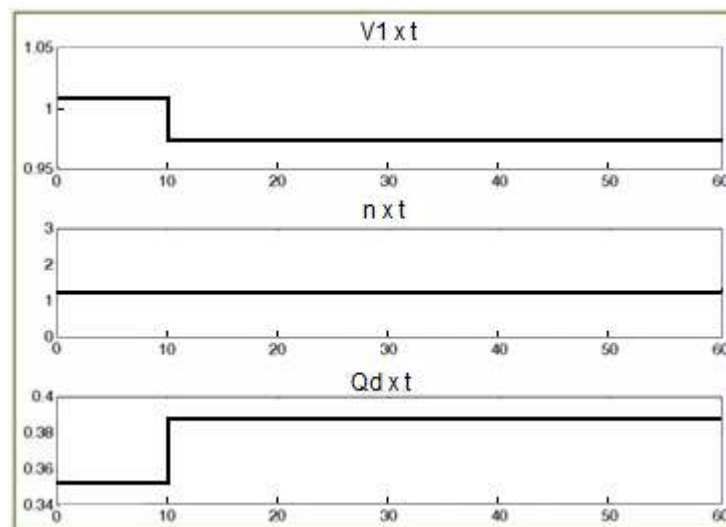


Gráfico 1 - Sistema Estável.

Observa-se que para as condições iniciais citadas anteriormente, a tensão do sistema fica dentro do intervalo pré-estipulado $[V_L V_H]$, sem a necessidade da atuação do tap. Depois de 10 segundos de simulação houve um aumento na potência reativa, gerando uma queda na tensão $V1$, o que já era esperado dada a equação (3). Entretanto, essa queda na tensão não foi suficiente para ela sair dos limites pré-estabelecidos $[V_L V_H]$, logo, mesmo sem a atuação do tap, o sistema permaneceu estável. Nota-se, portanto, que para as condições iniciais e perturbações citadas acima, o sistema é estável.

Realizou-se outra simulação utilizando as seguintes condições iniciais: tensão na carga $V1 = 2$, posição do “tap” $n = 1,2$, $T_q = 10$ e um aumento de 10% na potência reativa Q_d depois de 10 segundos de simulação, sendo os limites de tensão permitidos $V_L = 0,9V$ e

$V_H = 1,1V$, obteve-se, com isso, o gráfico 2.

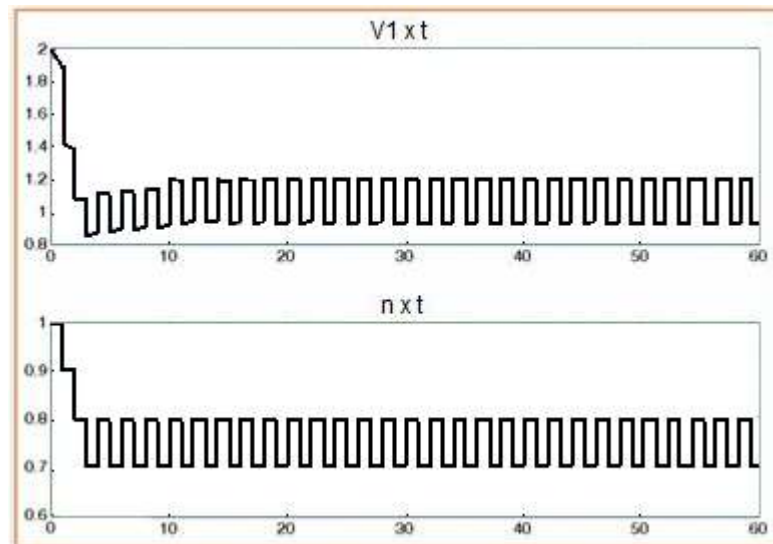


Gráfico 2 - Oscilações devido ao acionamento do tap do transformador.

Nota-se que, para as condições iniciais e perturbações citadas acima, o sistema continua estável devido à atuação do tap, porém oscilações são observadas.

Inicialmente a tensão apresentava-se acima do intervalo pré-determinado $[0.9 - 1.1] V_1 = 2$. O algoritmo de controle do “tap” então detectou que a tensão estava fora dos limites pré-determinados, figura 7.

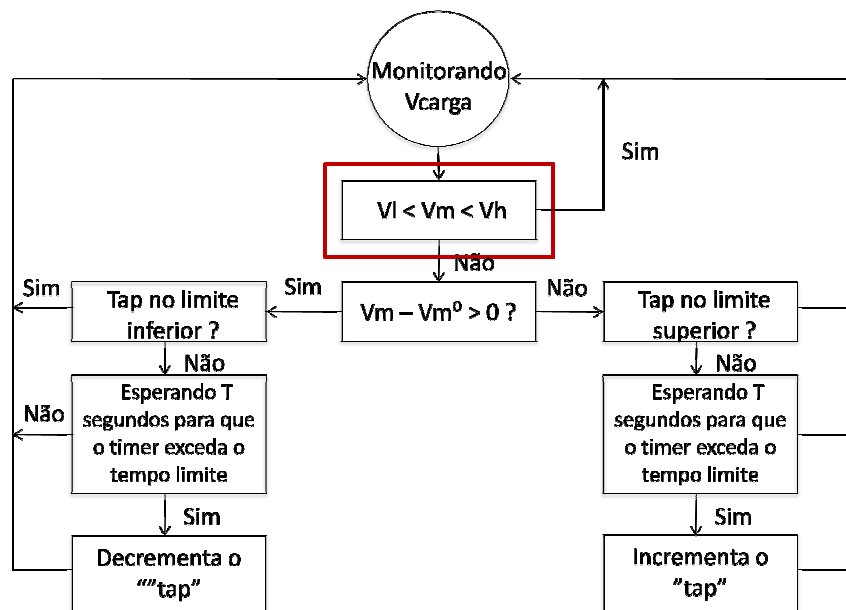


Figura 7 - Verificação do valor da tensão.

Posteriormente realizou-se uma segunda análise para identificar se a tensão estava abaixo ou acima do permitido como mostrado na figura 8.

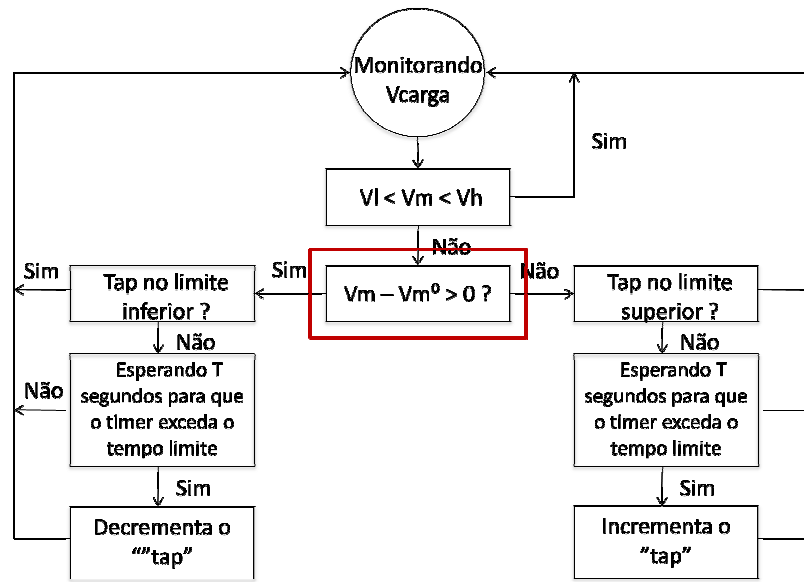


Figura 8 - Verifica se a tensão está abaixo ou acima do permitido

Com isso, observou-se que a tensão estava acima do permitido ($V_H = 1,1V$), no entanto o algoritmo, antes de decrementar o tap, verifica se o mesmo já não está no fim de curso e caso não esteja, espera, então, um tempo determinado T para verificar se a tensão não irá voltar ao normal, figura 9

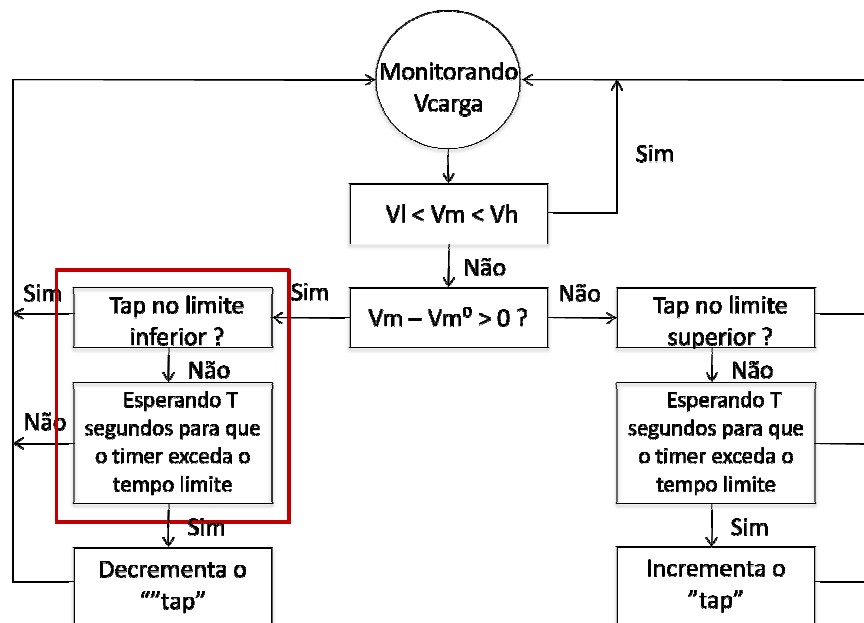


Figura 9 - Tempo de espera antes de atuar o “tap”

O tempo T de espera que o algoritmo de controle do “tap” aguarda para verificar se a tensão retornará ao intervalo permitido está representado no Gráfico 3

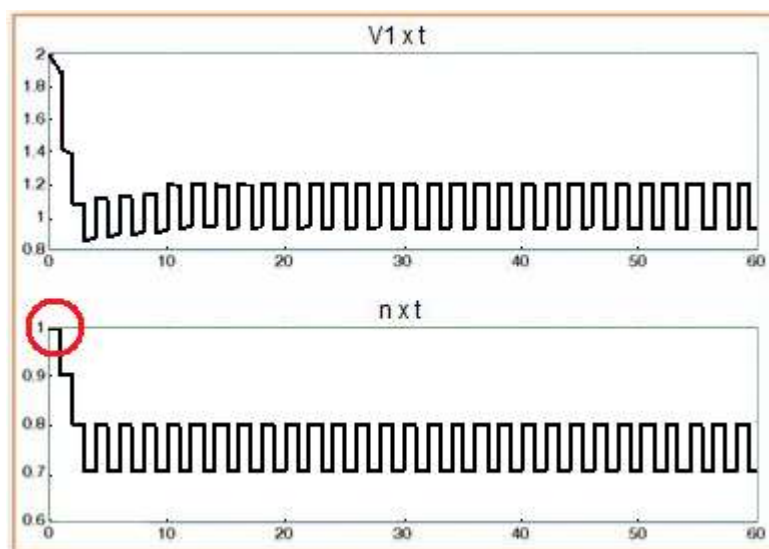


Gráfico 3 - Tempo de espera.

Como a tensão, após o tempo T, não voltou para o limite preestabelecido, o algoritmo de funcionamento do “tap” decrementou o mesmo, figura 10, como reflexo a tensão na carga diminui, Gráfico 4.

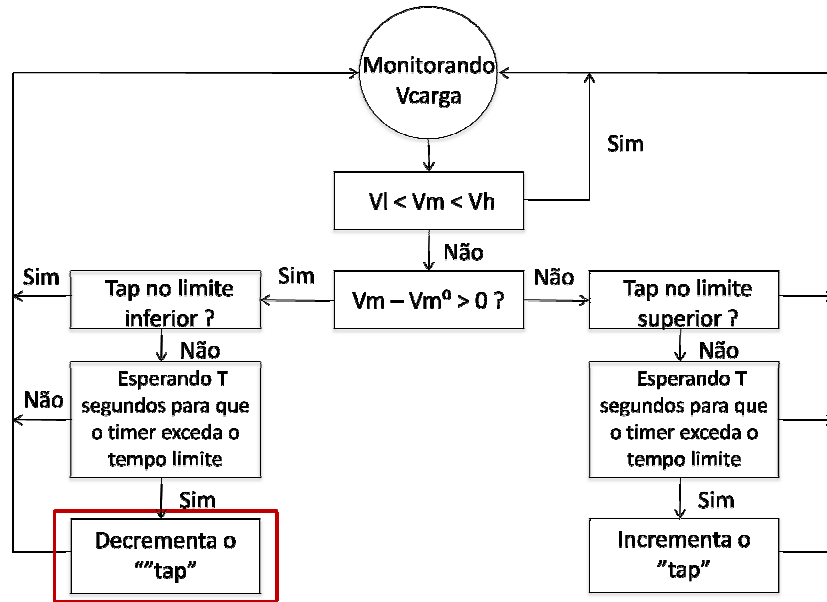


Figura 10 - Decremento do “tap”

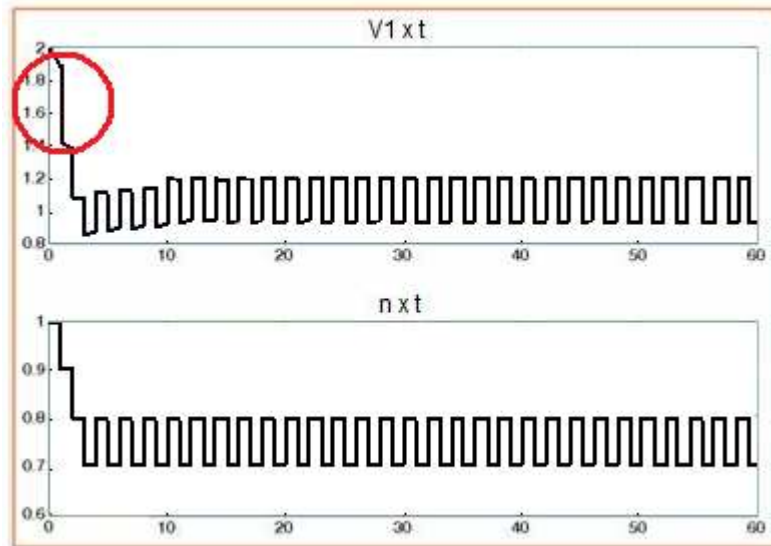


Gráfico 4 - Decremento do “tap”.

Nota-se que esse é um sistema que oscila constantemente e, dependendo do tipo de carga, essas oscilações podem danificá-la. Veja que essas oscilações se devem ao fato do passo de incremento do “tap” ser muito grande pois, como pode-se ver no gráfico 5 quando a tensão está abaixo do limite pré-estabelecido e o “tap”, por tal motivo, é incrementado, o mesmo gera um aumento na tensão, entretanto, o incremento é tal que a tensão ultrapassa o limite máximo.

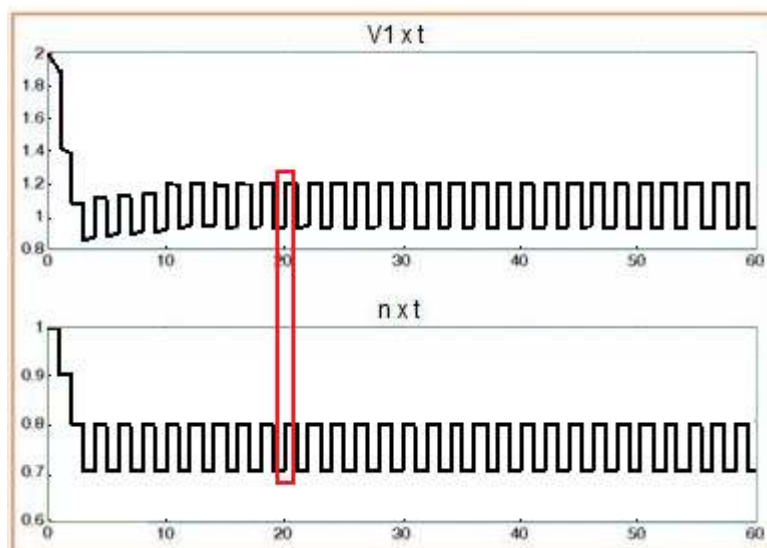


Gráfico 5 - Oscilação do sistema.

Para diminuir as oscilações, portanto, deve-se diminuir o passo de incremento do “tap”.

4 - Colapsos de Tensão

O resultado da simulação com condições iniciais $V1 = 1,5$, $n = 1,4$, $Tp = 0,01$, sendo que Qs continua sendo incrementado em 10% depois de 10 segundos de simulação, está representado no Gráfico 6.

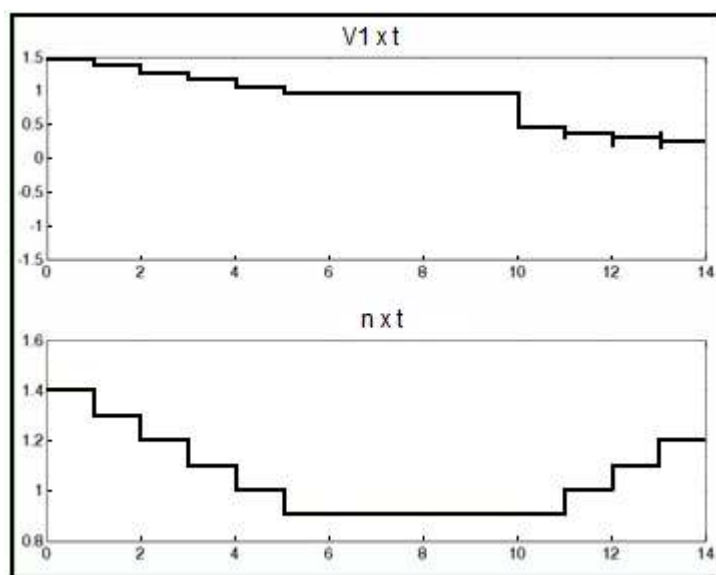


Gráfico 6 - Sistema Instável, mesmo com o chaveamento do tap do transformador.

Inicialmente a tensão estava fora do limite pré-estabelecido e, passado o tempo T de espera do algoritmo de controle do “tap”, o mesmo foi decrementado, o que gerou um decremento na tensão inicial, Gráfico 7

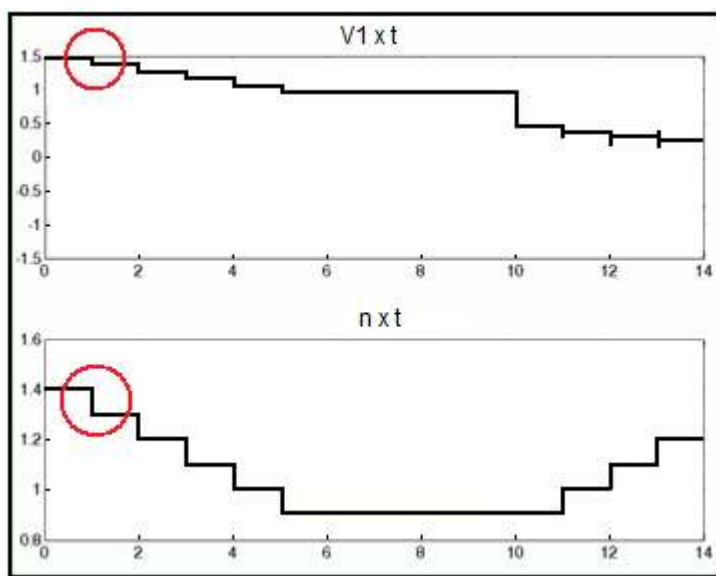


Gráfico 7 - Decremento do “tap” – Sistema instável.

O mesmo procedimento aconteceu até a tensão atingir o intervalo pré-estabelecido, Gráfico 8.

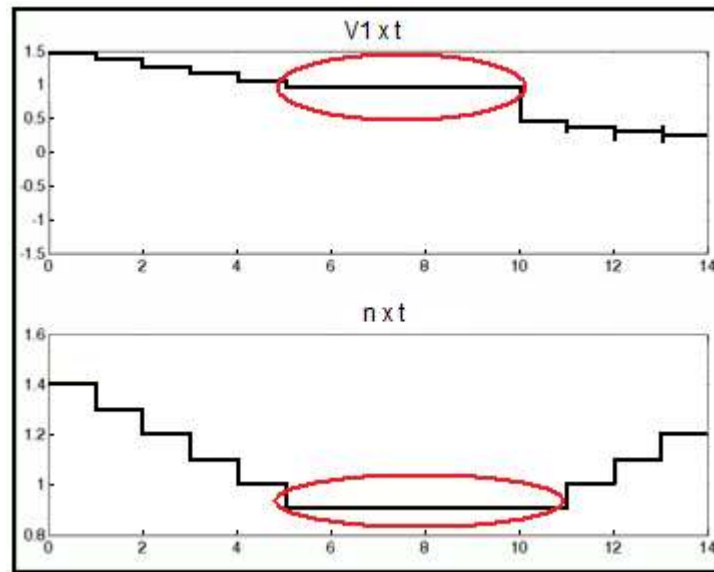


Gráfico 8 - Região de estabilidade.

Contudo, com o incremento de 10% em Q_s a tensão na carga reduziu-se abruptamente - Gráfico 9 - permanecendo abaixo do valor permitido, o que, após o intervalo T , ocasionou o incremento do “tap” - Gráfico 10 - na tentativa de aumentar o valor da tensão. No entanto, observou-se que o incremento no “tap” ocasionou uma queda ainda maior da tensão – Gráfico 11 -, o que caracteriza, portanto, um sistema instável.

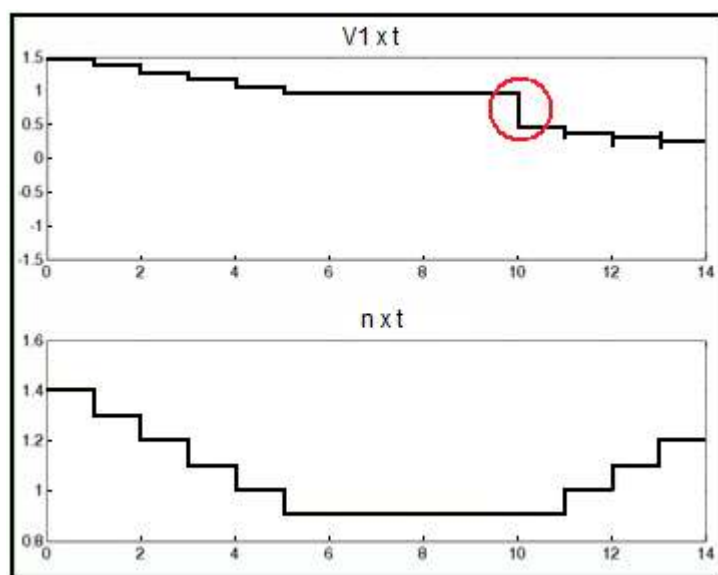


Gráfico 9 - Queda da tensão “tap”.

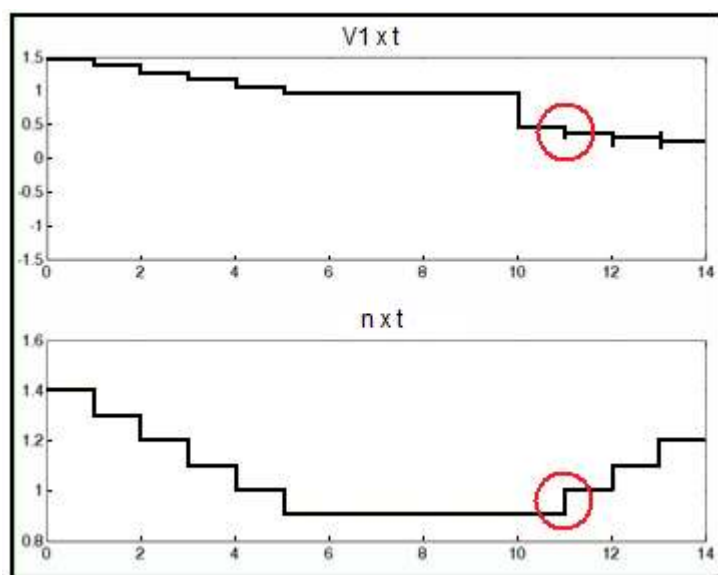


Gráfico 10 - Incremento do “tap”.

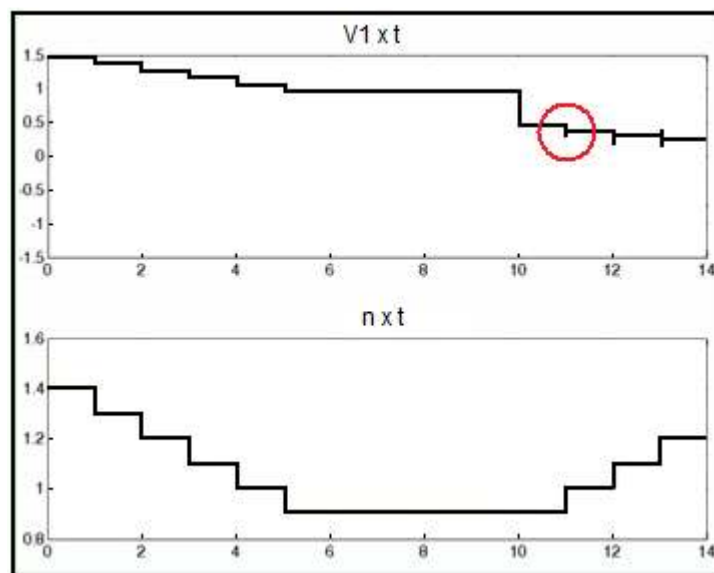


Gráfico 11 - Sistema instável.

A inversão do efeito do tap na tensão tem sido utilizada como um indicador de instabilidade, ver [11]. Quando esta inversão é detectada, o tap é bloqueado para evitar decrementos ainda maiores de tensão. Veremos a seguir que este procedimento não é adequado para detectar instabilidade e evitar colapsos de tensão.

A seguir será feito um estudo mais detalhado do comportamento do sistema quando é feita a alteração no “tap” do transformador.

Em sistemas de controle de tensão via chaveamento de taps de transformadores, há várias condições nas quais o sistema entra em um colapso de tensão, como foi observado anteriormente. Há um grande interesse na área de sistemas elétricos de potência em se estudar o comportamento do sistema nessas condições para que seja possível desenvolver metodologias para se prever a instabilidade, de forma a poder evitá-la.

A seguir, será analisado um sistema de controle de tensão via chaveamento de taps de transformadores. O mesmo sistema foi apresentado anteriormente, entretanto fez-se uma análise mais profunda dos mecanismos de instabilidade do sistema enquanto que anteriormente estudou-se principalmente a ocorrência de oscilações.

A seguir será mostrado o que acontece com a solução do sistema de equações algébrico-diferenciais através da análise de um subconjunto do espaço de estados do sistema.

Igualando-se a equação (4) do sistema de equações algébrico-diferencial a zero (veja o desenvolvimento a seguir) e resolvendo-a no Matlab, gerou-se a linha preta tracejada do Gráfico 1.12.

$$\frac{1}{T_q} [Q_s(1-V^2) - x_q] = 0$$

$$Q_s(1-V^2) - x_q = 0$$

$$V^2 = 1 - \frac{x_q}{Q_s}$$

Fazendo-se o mesmo para a equação (5) (veja o desenvolvimento a seguir) do sistema de equações algébrico-diferencial obteve-se, como resposta, a linha tracejada azul do Gráfico 1.12.

$$xn^2x_q + n^2Q_sV^2 - nVV_0 - V^2 = 0 \quad (5)$$

Portanto, tem-se:

$$V^2(1 + Q_sn^2x) - nV_0V + x_qn^2x = 0$$

$$V = \frac{nV_0 \pm \sqrt{n^2V_0^2 - 4x_qn^2x(1 + Q_sn^2x)}}{2(1 + Q_sn^2x)}$$

Têm-se, portanto, que a intersecção das duas curvas preta e azul é justamente a solução de equilíbrio do sistema de equações algébrico-diferencial – representados no Gráfico 12 por duas bolinhas – sendo esses o ponto de equilíbrio do sistema, os quais podem ser estáveis ou instáveis.

Em particular, tem-se que ambos os pontos de equilíbrio representados na Gráfico 12 são nós estáveis (vide apêndice).

É interessante observar que a análise por diagrama de fase dos pontos de equilíbrio (Gráfico 12) permite verificar o comportamento do sistema ou o que acontece com os pontos de equilíbrio do sistema a medida que o mesmo sofre chaveamentos. Esta análise motrar-se-a muito mais eficiente na prevenção de instabilidades.

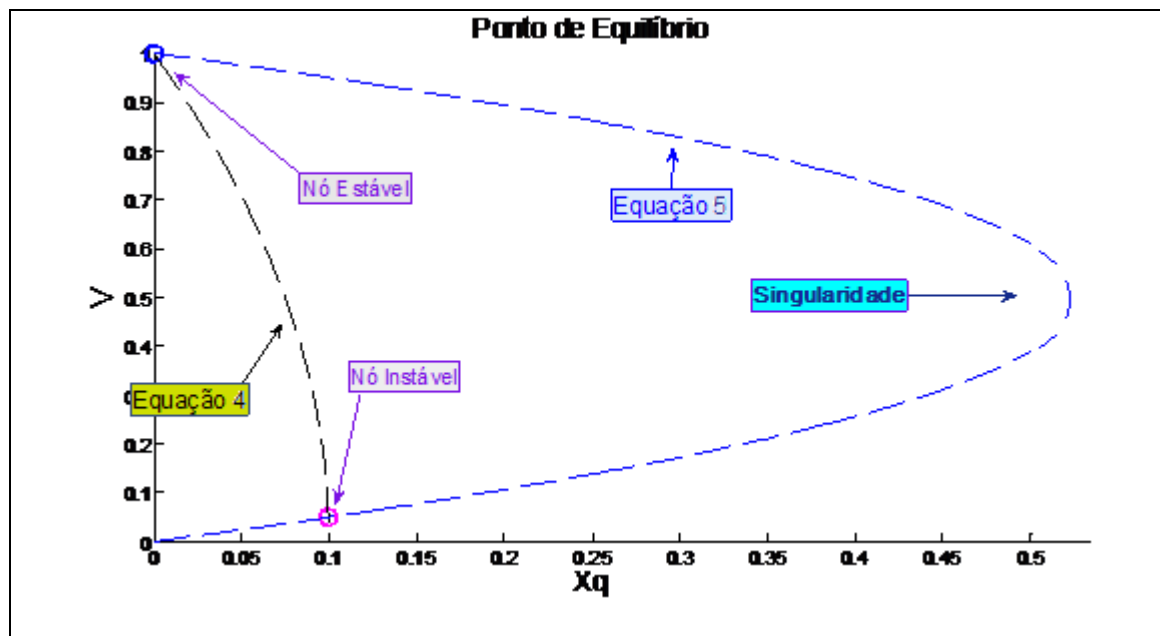


Gráfico 12 - Diagrama de Fase dos Pontos de Equilíbrio.

É importante salientar que o “nariz” da parábola é um ponto de singularidade da equação algébrica, ou seja, a derivada parcial de g com relação à V é nula no nariz da curva.

A figura anterior foi construída com os seguintes parâmetros:

$$V_0 = 1.05;$$

$$x = 0.5;$$

$$T_p = 3;$$

$$n = 1;$$

$$V = 1;$$

$$V_L = 0.95;$$

$$V_H = 1.05;$$

$$X_q = 0;$$

$$Q_s = \frac{V(nV_0 - V)}{n^2 x}$$

Será analisado agora o que acontece com o diagrama de fase quando há o chaveamento do sistema, para entender, assim, porque um sistema que é estável se torna, com o chaveamento, instável e como, a partir de um sistema instável, podemos conseguir um sistema estável.

Resolveu-se o sistema de equações (4 e 5) da mesma forma que anteriormente, entretanto, introduziu-se uma perturbação no sistema após um dado tempo de simulação. Essa perturbação – grande incremento na potência da carga Q_s – tem por objetivo desestabilizar o sistema, fazendo com que a tensão saia do intervalo preestabelecido $[0,95 \text{ } 1,05]$ por um tempo maior que o tempo de espera do algoritmo de incremento do “tap”. Em síntese, causar-se-á uma perturbação no sistema de forma que o “tap” precise atuar para evitar um colapso de tensão.

Será analisado, com isso, o que acontece com o diagrama de fase do sistema, quais serão as alterações nas parábolas que descrevem as equações 4 e 5 e, portanto, o que acontece com os pontos de equilíbrio.

O Gráfico 13 mostra o que acontece com os pontos de equilíbrio quando a carga Q_s sofre uma grande perturbação que, no caso, será um incremento de 5,4 vezes o valor do Q_s inicial.

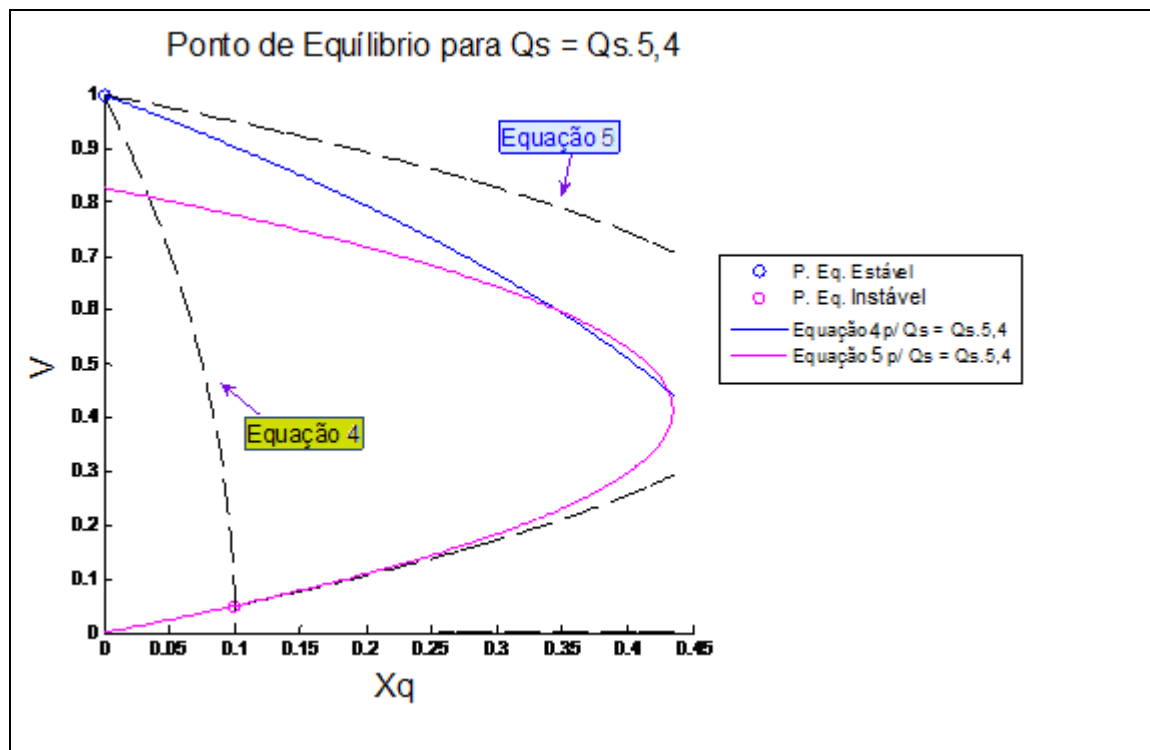


Gráfico 13 - Diagrama de Fase para uma grande perturbação na carga.

As curvas tracejadas em preto são referentes as equações (4) e (5) sem o incremento no valor da potência da carga, enquanto que as curvas em azul e rosa são referentes as equações (4) e (5) com o incremento de 5,4 vezes na potência da carga.

Como esperado, o incremento na potência reativa da carga gerou deslocamentos nas parábolas que descrevem o comportamento das equações (4) e (5), esse deslocamento, por sua vez, causou um deslocamento dos pontos de equilíbrio – ambos os pontos estão na parte superior da parábola rosa, antes um estava na parte superior e o outro na parte inferior.

Nesse caso, tem-se que um dos pontos de equilíbrio é instável e o outro é estável (Gráfico 14)

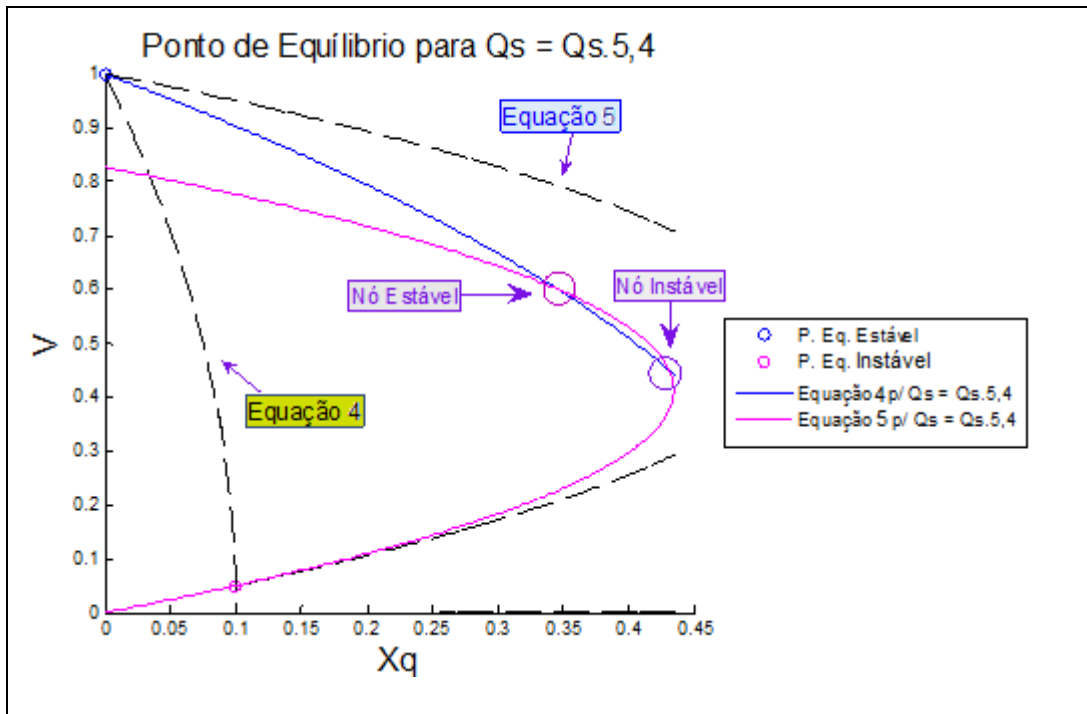


Gráfico 14 - Diagrama de Fase dos Pontos de Equilíbrio Instável e Estável.

É interessante observar que os pontos de equilíbrio – intersecção da curva em azul com a rosa – se aproximam um do outro quando a carga aumenta, logo, há um certo valor de potência na qual os dois equilíbrios coalescem e, a partir deste ponto, o sistema não terá pontos de equilíbrios devido à bifurcação do tipo sela-nó (vide apêndice).

No Gráfico 15 analisa-se o comportamento das equações do sistema chaveado quando o “tap” é chaveado.

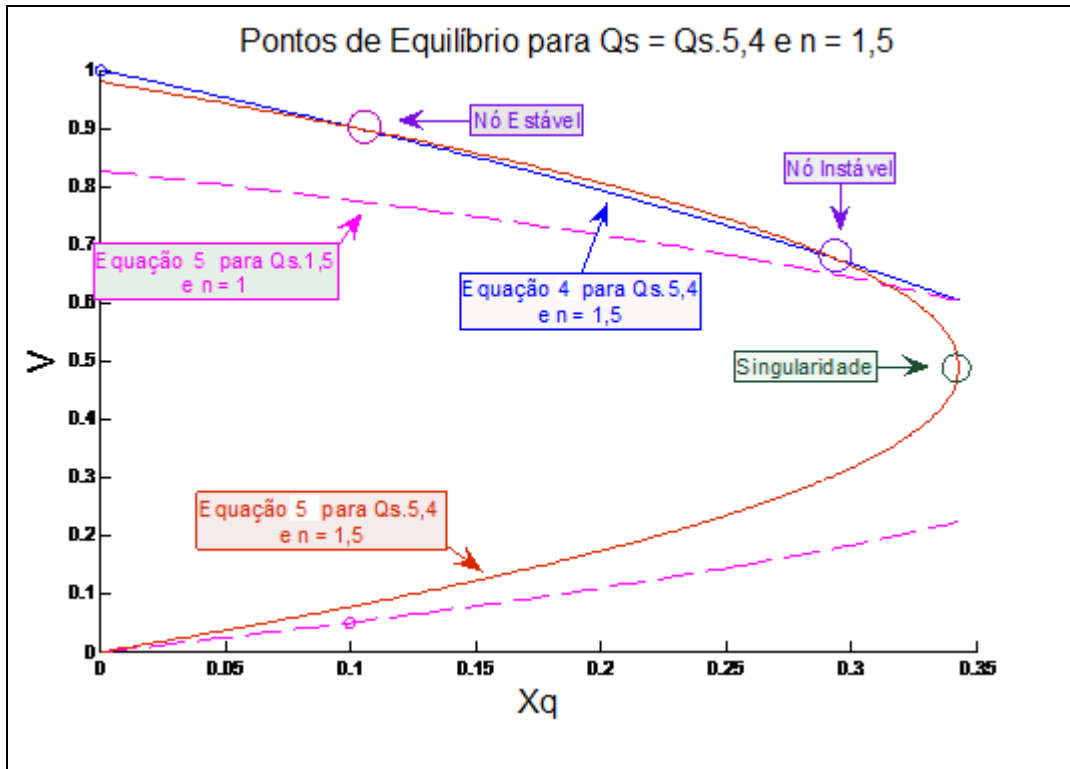


Gráfico 15 - Diagrama de Fase para $n = 1,5$.

Simulou-se o sistema novamente com a potência valendo 5,4 vezes a potência inicial e, ademais, o “tap”, que antes estava na posição 1, agora está na posição 1,5. Isso tem um impacto direto na equação (5) dado que ela depende de n .

$$V^2(1 + Q_s n^2 x) - n V_0 V + x_q n^2 x = 0 \quad (5)$$

Por outro lado, a equação (4) não é afetada com a mudança do “tap”, visto que a mesma não depende de tal variável.

$$\frac{1}{T_q} [Q_s (1 - V^2) - x_q] = 0 \quad (4)$$

Como resultado, tem-se que a curva em azul – que representa a equação (4) – não se altera com o “tap” e a curva em vermelho – que representa a equação (5) – sofre um deslocamento de forma a se “afastar” da curva azul (Gráfico 15), logo, se o “tap” for incrementado mais algumas vezes, então não haverá mais intersecção entre a curva em vermelho e a azul, ou seja, não vai mais haver pontos de equilíbrio, o que novamente caracteriza uma bifurcação do tipo sela-nó, o que na prática significa um colapso de tensão.

O Gráfico 16 mostra o valor de n a partir do qual não existem mais pontos de equilíbrio.

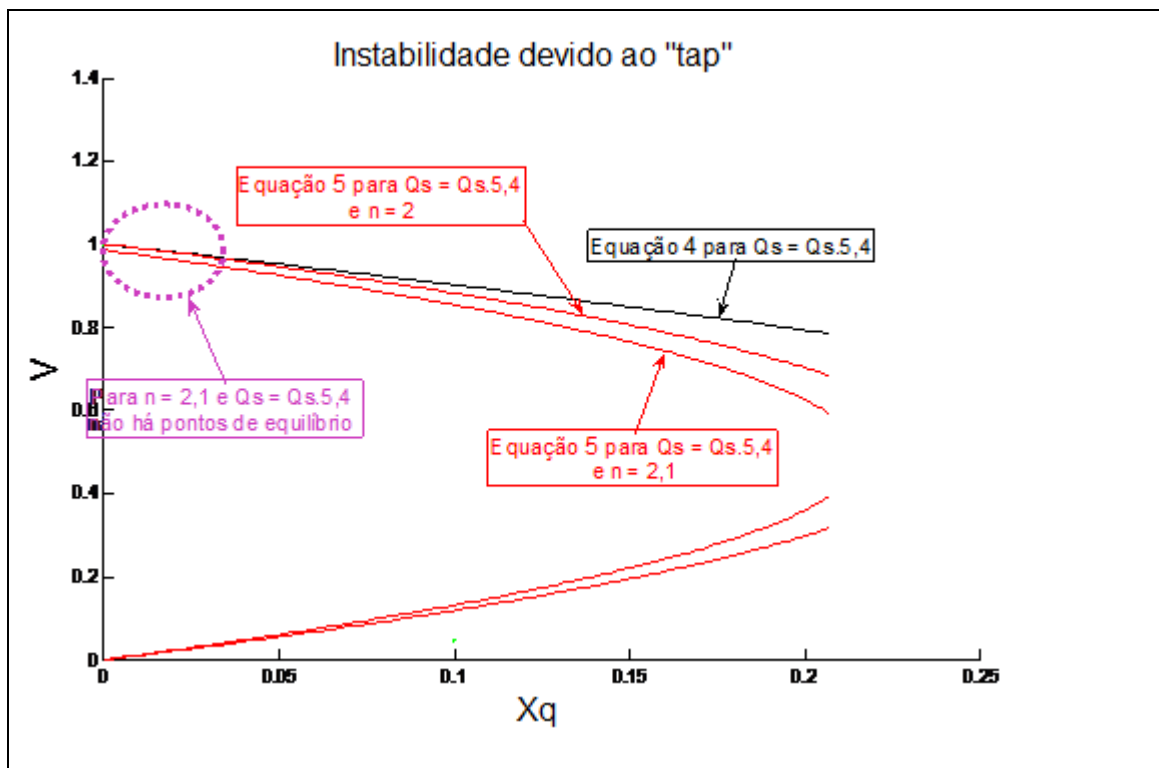


Gráfico 16 - Inexistência de Pontos de Equilíbrio.

Para $n = 2,1$ não há mais intersecção entre as curvas preta e vermelha, não existindo, portanto, ponto de equilíbrio. Nota-se que se isso fosse um sistema real, então uma possível solução, nesse caso, seria desativar o “tap” antes que ele desse mais um incremento fazendo com que não houvesse mais intersecção entre as curvas, como sugerido no artigo [11]. Será visto mais adiante que esse tipo de solução pode não funcionar corretamente.

A seguir é analisado o comportamento dinâmico dos pontos de equilíbrio do sistema quando há um chaveamento do “tap” e um incremento da potência Q_s da carga.

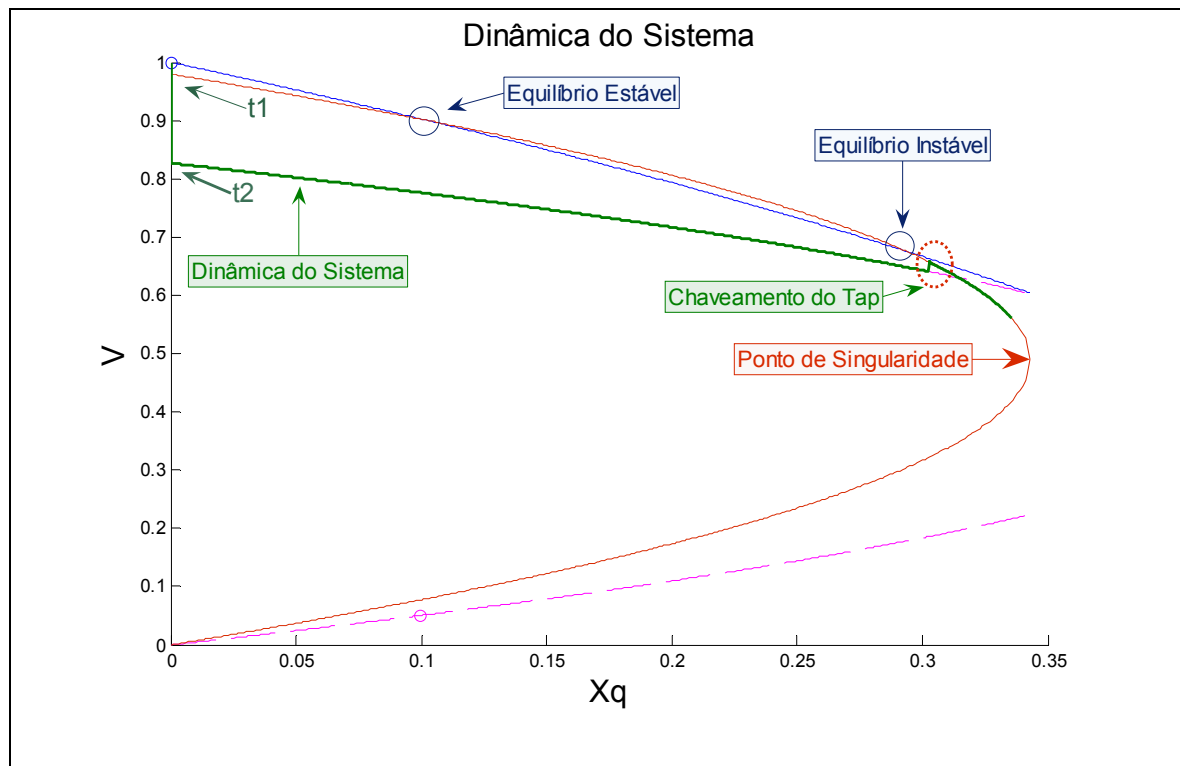


Gráfico 17 - Dinâmica da Carga.

No instante t_1 , $Q_s = 0,1 \text{ pu}$ - Gráfico 17 - o sistema está operando em um ponto de equilíbrio estável. Em seguida ocorre uma variação brusca da carga, a qual passa a ter o valor $Q_s = 0,54 \text{ pu}$. Isso faz com que o ponto de operação salte quase que instantaneamente do ponto indicado por t_1 para o ponto indicado por t_2 . Observe no Gráfico 17 que no instante t_2 o sistema não está em equilíbrio, mas a dinâmica do sistema é estável pois a trajetória do mesmo está caminhando para um ponto de equilíbrio assintoticamente estável (interseção das curvas azul e rosa – Gráfico 18)

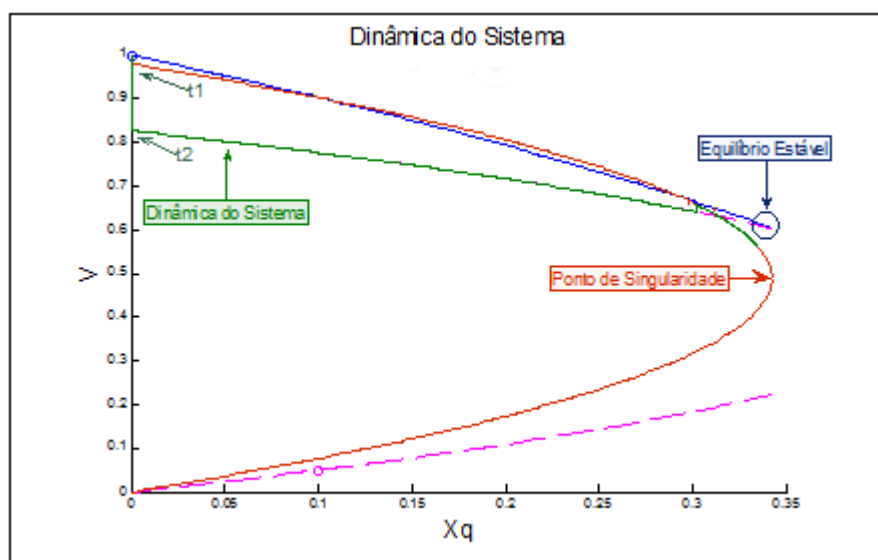


Gráfico 18 - Ponto assintoticamente estável.

Entretanto, a tensão está abaixo do limite pré-estabelecido de $0,95 \text{ pu}$, o que faz com que o “tap”, passado o tempo T de espera do algoritmo, atue na tentativa de fazer a tensão ficar dentro dos limites aceitáveis. O incremento no “tap” provoca um deslocamento nos pontos de equilíbrio e, ao mesmo tempo, um aumento na tensão – Gráfico 19 e Gráfico 20 respectivamente.

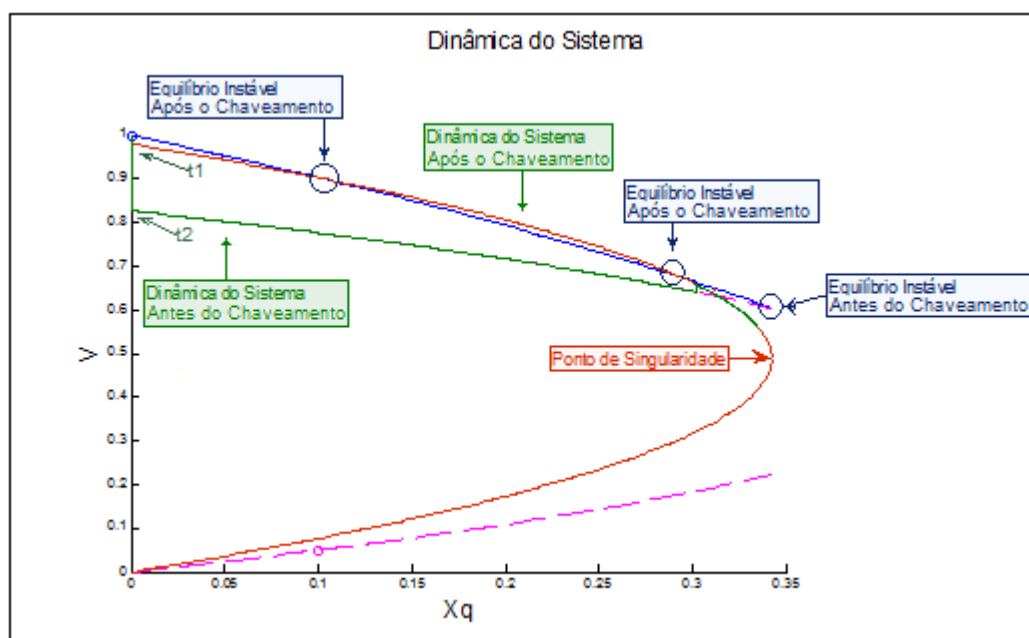


Gráfico 19 - Deslocamento dos pontos de equilíbrio.

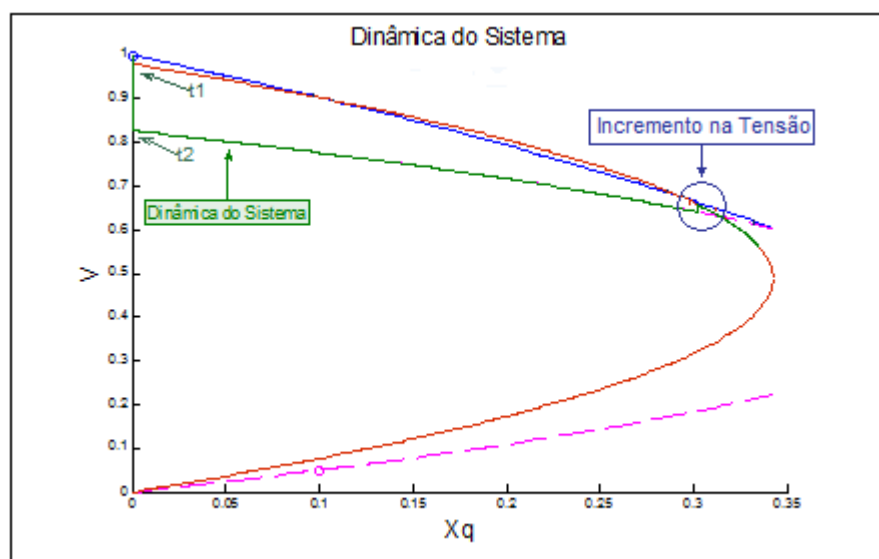


Gráfico 20 - Incremento da tensão.

O Gráfico 21 mostra claramente que o sistema entra, quando ocorre o chaveamento do tap, numa dinâmica instável dado que a trajetória está fora da região de estabilidade do novo

ponto de equilíbrio estável (primeira interseção das curvas azul e vermelho, Gráfico 21), gerando um colapso de tensão.

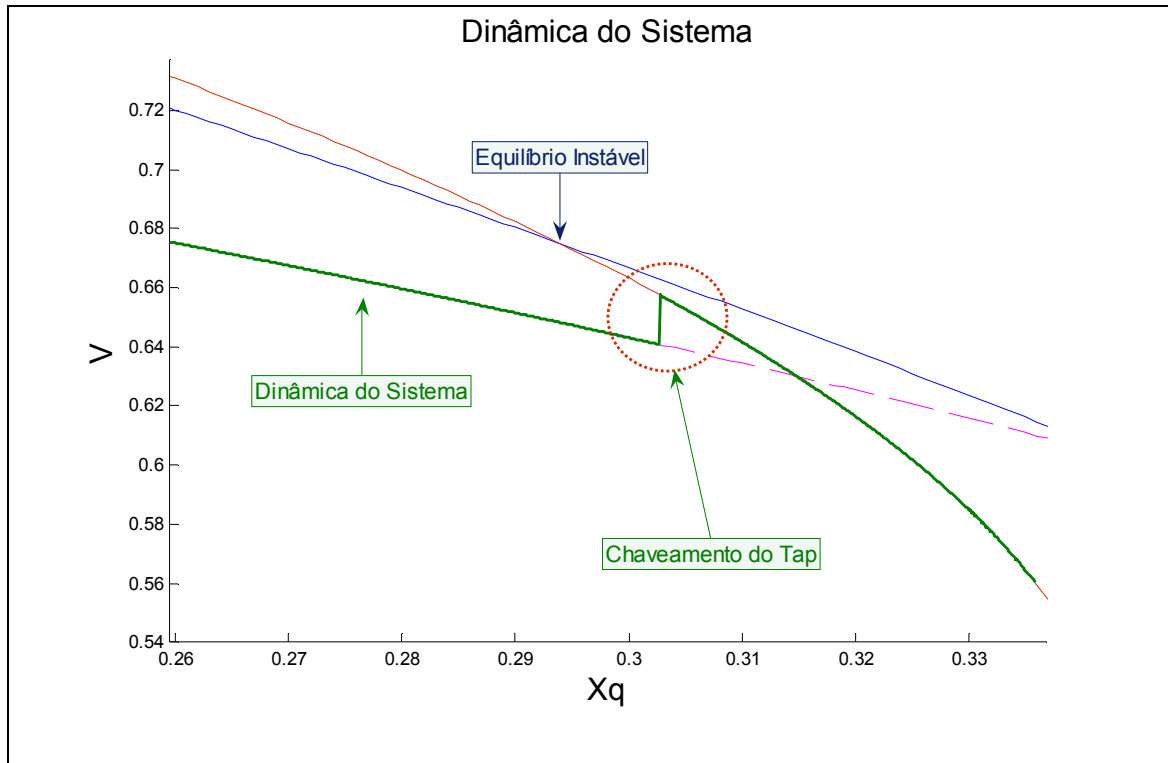


Gráfico 21 - Dinâmica do Sistema no momento do chaveamento do tap.

Na literatura de sistema elétrico de potência, é muito comum observar o comportamento da tensão no instante do chaveamento para identificar se o sistema é estável ou instável. Mais precisamente, se o incremento no “tap” provocar um aumento na tensão então, considera-se o sistema estável ao passo que se o incremento do tap provocar um decréscimo na tensão o sistema é instável. No exemplo anterior, verifica-se que esta prática pode levar os engenheiros a conclusões erradas, pois o incremento do tap provocou um acréscimo momentâneo na tensão, mas a condição inicial pós chaveamento está fora da região de estabilidade do sistema dinâmico, ocasionando um colapso de tensão.

A metodologia sugerida em [9], a qual propõe a análise de sensibilidade para verificar a estabilidade do sistema, também falha. A maneira como isso é feito está explicitado a seguir:

Os sistemas elétricos de potência podem ser modelados por um conjunto de equações algébrico diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{x}_q = f(x_q, v) \\ 0 = g(x_q, v) \end{cases}$$

As quais podem ser linearizadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_q = \frac{\partial f(x_q, v)}{\partial x_q} \Delta x_q + \frac{\partial f(x_q, v)}{\partial v} \Delta v \\ 0 = \frac{\partial g(x_q, v)}{\partial x_q} \Delta x_q + \frac{\partial g(x_q, v)}{\partial v} \Delta v \end{cases}$$

Dado que $\frac{\partial g(x_q, v)}{\partial v}$ é invertível, segue que:

$$\begin{aligned} \Delta v &= - \left(\frac{\partial g(x_q, v)}{\partial v} \right)^{-1} \frac{\partial g(x_q, v)}{\partial x_q} \Delta x_q \\ \dot{x}_q &= \left(\frac{\partial f(x_q, v)}{\partial x_q} - \frac{\partial f(x_q, v)}{\partial v} \left(\frac{\partial g(x_q, v)}{\partial v} \right)^{-1} \frac{\partial g(x_q, v)}{\partial x_q} \right) \Delta x_q \\ \dot{x}_q &= G \Delta x_q \end{aligned}$$

Os autores de [9] sugerem que quando o auto-valor da matriz G cruza o zero e se torna positivo, caracteriza-se instabilidade do sistema. Entretanto, o cálculo do autovalor ao longo da dinâmica, conforme sugere [10] não reflete a estabilidade do sistema chaveado.

O Gráfico 22 mostra o comportamento, no tempo, do sistema chaveado. O último gráfico mostra claramente que o auto-valor da matriz G se torna positivo no momento que o “tap” é incrementado, caracterizando instabilidade. Entretanto, deve-se analisar a dinâmica do sistema em relação a região de estabilidade pois o tap deve ser chaveado com maior antecedência ou não chaveado para evitar a ocorrência do colapso de tensão.

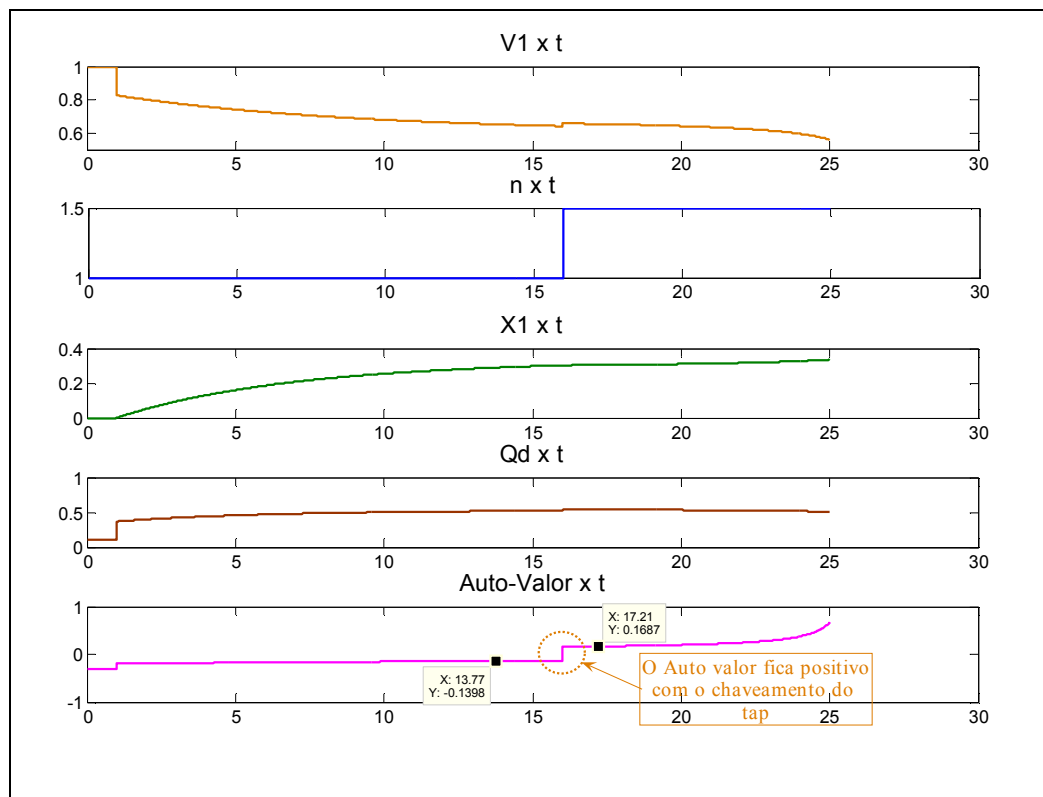


Gráfico 22 - Gráfico no tempo.

5 - Técnica corrente de bloqueio de tap

Atualmente não há nenhuma teoria precisa que atue sobre o “tap” do transformador de forma a evitar a instabilidade, mas há sim, algumas técnicas que vem sendo usadas para tentar minimizar ou retardar a instabilidade, ver [11].

Quando a tensão cai abaixo do limite pré-estabelecido, por exemplo, então o “tap” deve ser incrementado, o que supostamente causaria um aumento na tensão. Entretanto, em alguns casos, o que acontece é o contrário, o aumento do “tap” faz com que a tensão caia mais rapidamente.

Nesses casos o que pode ser feito é um deslocamento dos limites pré-estabelecidos, em outras palavras, se a tensão estiver abaixo do intervalo pré-estabelecido – figura 11 – e o incremento do “tap” fez com que a tensão caísse ainda mais, então o limite pré-estabelecido sofre um deslocamento de, por exemplo 10% - figura 12, , evitando que o tap continue a ser incrementado.

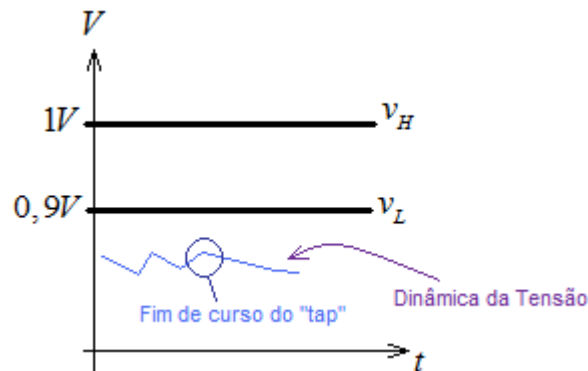


Figura 11 - Intervalo de tensão pré-estabelecido

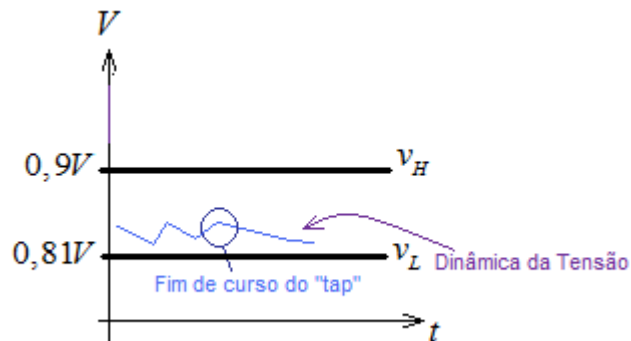


Figura 12 - Novo intervalo de tensão

Desse forma, a tensão ficará dentro do novo intervalo pré-estabelecido, não sendo necessário, portanto, a atuação do “tap”, evitando assim que a tensão caia mais rapidamente.

Conclusão

Atualmente o problema de instabilidade dos transformadores de potência com comutação de “tap” em carga é que a técnica usada para identificar se o sistema é estável, não consegue identificar com precisão o momento no qual o sistema se torna instável.

Este trabalho mostrou, portanto, que a maneira mais adequada para identificar o momento exato no qual o sistema se torna instável é através da análise do diagrama de fase do sistema e do conceito de região de estabilidade. Com a informação da região de estabilidade é possível bloquear o “tap” a tempo de evitar instabilidade.

Maiores esforços de pesquisa são necessários para que a informação da região de estabilidade possa ser utilizada durante a operação em tempo real. Deve-se lembrar que o modelo de carga tem papel fundamental nesta dinâmica e na prática este modelo não é conhecido com exatidão.

Bibliografia

[1] Cursino Brandão Jacobina, Luiz Antônio de Souza Ribeiro, José Bione de Melo Filho, Fabiano Salvadori, Antonio Marcus Nogueira Lima, 2001. Sistema de acionamento com motor de indução orientado indiretamente pelo campo com adaptação MRAC da velocidade, IEEE. Print ISSN 0103-1759

[2] W. D. Chen, K. L. Yung, and K. W. Cheng. A Learning Scheme for Low-Speed Precision Tracking Control of Hybrid Stepping Motors. 2006. vol. 11. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, vol. 11, NO. 3, June 2006

[3] Imhof, K.; Oesch, F.; Nordanlycke, I.. Modelling of tap-changer transformers in an energy management system 1996. Power Systems, IEEE Transactions on vol. 11.

[4] Siqueira, A. A. G. and Terra, M. H. " Nonlinear H-infinity Control Applied to Biped Robots ". IEEE Conference on Control Applications (CCA), from October 4 to October 6, 2006, in Munich, Germany.

[5] V. Donde, I. A. Hiskens. "Analysis of Limit Cycle Stability in a Tap-Changing Transformer". IEEE.

[6] M. A. Wicks, P. Peleties, and R. A. DeCarlo, "Switched controller design for the quadratic stabilization of a pair of unstable linear systems," *Eur. J. Control*, vol. 4, pp. 140-147, 1998

[7] S. Pettersson and B. Lennartson, "Stabilization of hybrid systems using a min-projection strategy," in *Proc. Amer. Control Conf.*, 2001, pp. 223-228.

[8] Daniel Shevitz, Brad Paden. Lyapunov Stability Theory of Nonsmooth Systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 39, no. 9 September 1994.

- [9] Mevludin Glavic e Thierry Van Cutsem, "Detecting with PMUs the onset of voltage instability caused by a large disturbance". IEEE, 2008.
- [10] Georgi V. Smirnov, "Introduction to the theory of differential inclusions", American Mathematical Society.
- [11] Costas D. Vournas, Fellow and Nikos G. Sakellaridis, "Problems and solutions for local identification of voltage instability and emergency control". IEEE 2008.
- [12] Hassan K. Khalil, "Nonlinear Systems", 2nd edition, Prentice Hall, 1996.
- [13] Filipov A. F., "Differential equations with discontinuous right-hand side, "*Amer. Math. Soc. Translations*, vol. 42, no2, pp191-231, 1964.
- [14] David J. Hill, "Nonlinear dynamic load models with recovery for voltage stability studies", vol 8. IEEE 1993.
- [15] Mats Larsson, Dragana H. Popovic, David J. Hill, "Limit cycles in power systems due to OLTC deadbands and load – voltage dynamics". *Electric power systems research* 47, 1998.
- [16] RUGGIERO, M.A.G. et al. "Cálculo numérico: Aspectos teóricos e computacionais". São Paulo: Makron Books, 1996.
- [17] Ian A. Hiskens, "Stability of limit cycles in hybrid systems". IEEE 2001.
- [18] T. Van Cutsem, C. D. Vournas, "Voltage stability analysis in transient and mid-term time scales". IEEE vol. 11, 1996.

[19] Anthony N. Michel, "Recent trends in the stability analysis of hybrid dynamical systems". IEEE, vol. 45, 1999.

Apêndice

Tipos de estabilidade

É de grande interesse encontrar os pontos de equilíbrio de sistemas não-lineares dinâmicos, entretanto, tão importante quanto achar os pontos de equilíbrio é determinar a respeito da estabilidade dos mesmos, ver [12] e [13].

Definição:

Seja o seguinte sistema autônomo¹

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) \\ x(t_O) &= x_O\end{aligned}\quad (1)$$

Um ponto \hat{x} é um ponto de equilíbrio do sistema (1) se $\dot{x} = f(\hat{x}) = 0$.

Por sua vez, dado um sistema não-autônomo²:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x) \\ x(t_O) &= x_O\end{aligned}\quad (2)$$

Temos que \hat{x} é um ponto de equilíbrio do sistema acima se $f(t, \hat{x}) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

¹ Sistema autônomo é um sistema cujo campo vetorial $f(x)$ não depende, explicitamente, da variável tempo,.

² Sistema não-autônomo é um sistema que depende da variável tempo, $f(t, x)$.

Forma Canônica de Jordan

Segue um estudo sobre os diferentes tipos de estabilidade.

Considere o sistema linear abaixo:

$$\dot{x} = Ax$$

Onde A é uma matriz de dimensão $n \times n$.

Com uma mudança de variável elas podem ser reduzidas a formas canônicas e classificadas em números pequenos de casos. Seja M uma matriz quadrada de posto completo.

$$Z = Mx$$

$$\dot{Z} = M\dot{x}$$

$$\dot{Z} = MAx = MAM^{-1}Z$$

$$MAM^{-1} = \Lambda$$

$$\dot{Z} = \Lambda Z$$

Quando as colunas de M são os autovetores da matriz A temos que Λ assume 3 formas diferentes, para o caso de dimensão 2:

$$\text{i. } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{ii. } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{iii. } \Lambda = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

A seguir será estudado o que acontece com o retrato de fase de cada um dos casos acima e será verificado a estabilidade dos pontos de equilíbrio.

Caso (i)

$$\dot{Z} = \Lambda Z$$

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

Se as condições iniciais são:

$$Z_1(0) = Z_{10}$$

$$Z_2(0) = Z_{20}$$

Então a solução do sistema é dada por:

$$\boxed{\begin{aligned} Z_1(t) &= Z_{10} e^{\lambda_1 t} \\ Z_2(t) &= Z_{20} e^{\lambda_2 t} \end{aligned}}$$

Supondo-se que $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, então se tem três possibilidades, vejamo-as:

Para $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, tem-se o retrato de fase da *figura 13*:

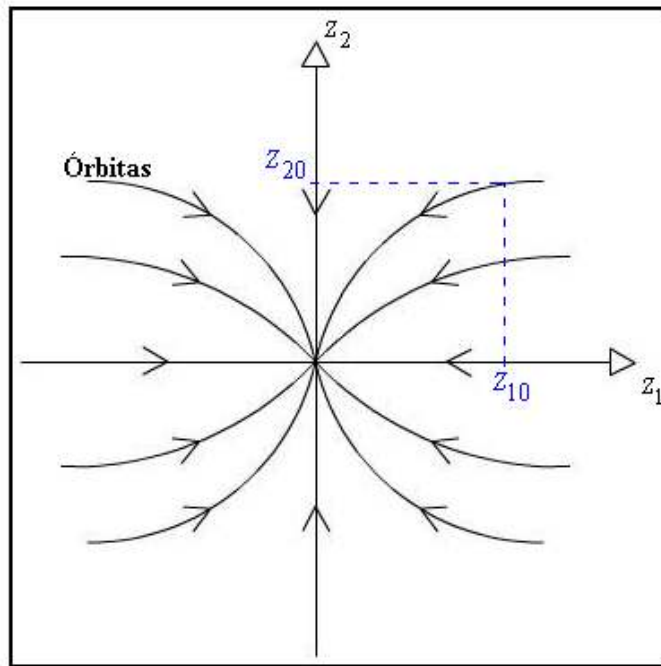


Figura 13 – Nó Estável

Neste caso o equilíbrio do sistema é estável, o que já era esperado, uma vez que $Z_1(t)$ e $Z_2(t)$ tendem para zero quando $t \rightarrow \infty$, ou seja, dado uma condição inicial, por exemplo, Z_{10} e Z_{20} , temos que quando $t \rightarrow \infty$ a solução do sistema converge para a origem (figura 13). Esse tipo de equilíbrio é chamado de **Nó Estável**.

A figura 14 apresenta o retrato de fase do sistema quando $\lambda_1, \lambda_2 > 0$:

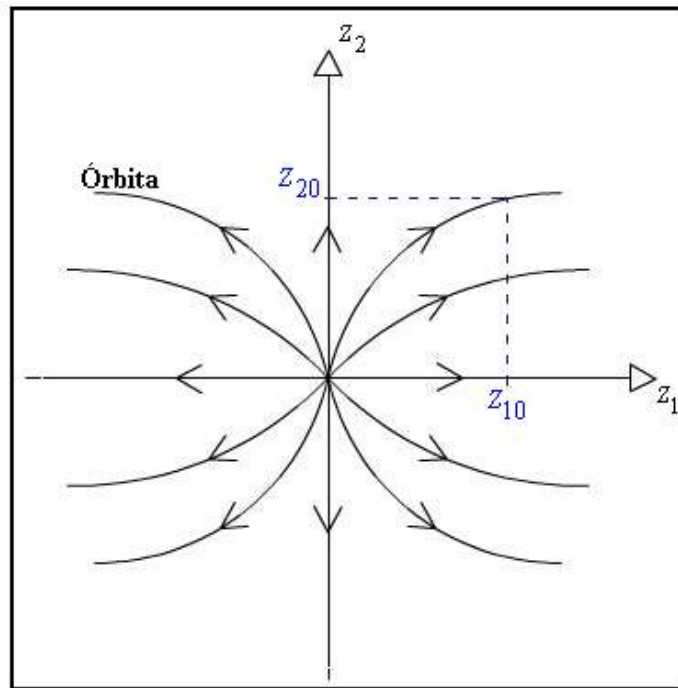


Figura 14 – Nó Instável

Veja que agora quando $t \rightarrow \infty$, $Z_1(t)$ e $Z_2(t) \rightarrow \infty$, logo, o sistema é instável, ou seja, dado uma condição inicial, z_{10} e z_{20} , a solução do sistema vai para infinito, conforme mostra a figura acima. Este tipo de equilíbrio é denominado **Nó Instável**.

A seguir apresenta-se o retrato de fase do sistema quando $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$:

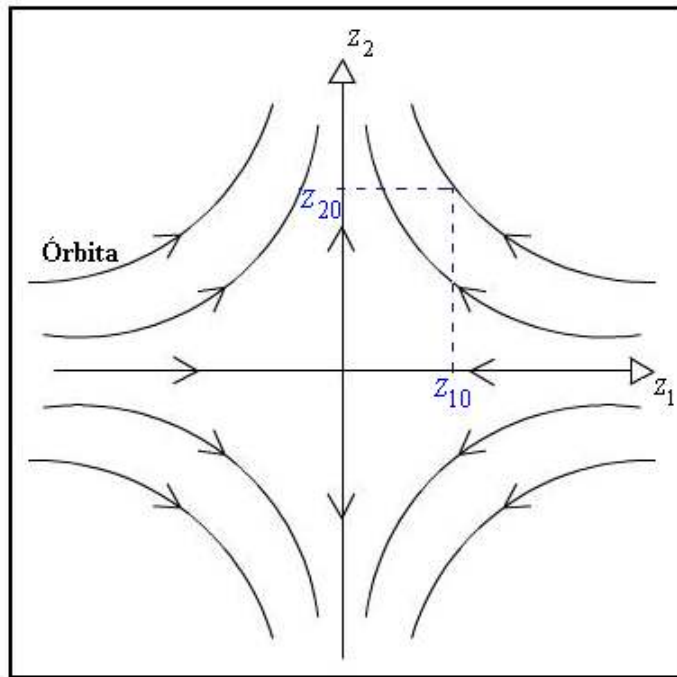


Figura 15 - Sela

Note, na *figura 15*, que o sistema possui um subespaço $\{(Z_1, Z_2) : Z_{20} = 0\}$, cujas soluções do sistema convergem para a origem, entretanto, qualquer perturbação faz com que a solução não convirja para a origem, logo, este subespaço é instável.

Para $Z_{20} = 0$, tem-se:

$$Z_1(t) = Z_{10} e^{\lambda_1 t}$$

$$Z_2(t) = 0 e^{\lambda_2 t} = 0$$

Como $\lambda_1 < 0$, tem-se que $Z_1(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Para qualquer condição inicial diferente da discutida anteriormente, o sistema se torna instável, ou seja, a solução se afasta do ponto de equilíbrio. Esse tipo de equilíbrio é chamado de **Sela**.

Para $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$, o sistema terá o mesmo retrato de fase mostrado na *figura 15*, entretanto todas as setas serão invertidas.

Caso (ii)

$$\dot{Z} = \Lambda Z$$

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

Sendo que as condições iniciais são:

$$Z_1(0) = Z_{10}$$

$$Z_2(0) = Z_{20}$$

Portanto a solução do sistema é:

$$\begin{aligned} Z_1(t) &= Z_{10}e^{\lambda t} + Z_{20}e^{\lambda t} \\ Z_2(t) &= Z_{20}e^{\lambda t} \end{aligned}$$

A seguir será analisado o que acontece com estabilidade do sistema quando $\lambda < 0$ e quando $\lambda > 0$.

No primeiro caso fica claro que o sistema é estável, pois como $\lambda < 0$ tem-se que $Z_1(t)$ e $Z_2(t) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$. Veja, a seguir, o retrato de fase:

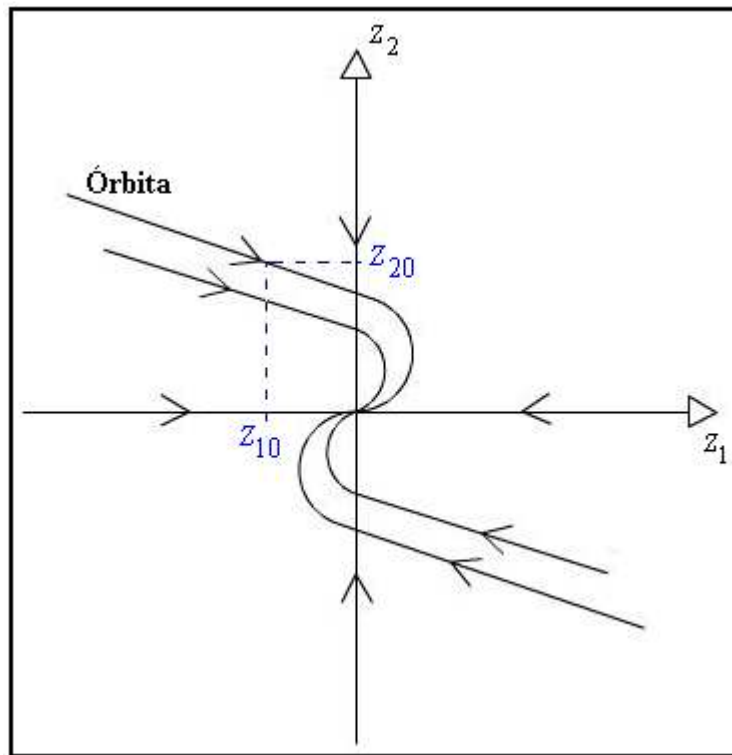


Figura 16 – Nó Estável

Este tipo de equilíbrio também recebe o nome de **Nó Estável**.

Para $\lambda > 0$, entretanto, o sistema se torna instável, ou seja, $Z_1(t)$ e $Z_2(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Logo, o retrato de fase será igual ao anterior, só que com todas as setas invertidas, sendo chamado, portanto, de **Nó Instável**.

Caso (iii)

$$\dot{Z} = \Lambda Z$$

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

Fazendo-se uma mudança de variável para facilitar o cálculo da solução do sistema acima tem-se que:

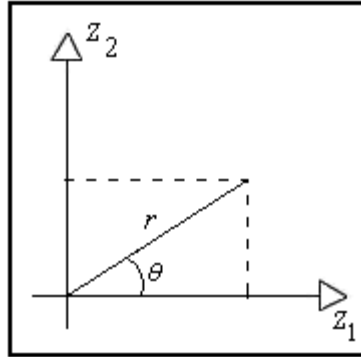


Figura 17 – Coordenadas Polares

$$Z_1 = r \cos \theta$$

$$Z_2 = r \sin \theta$$

Portanto:

$$\dot{Z}_1 = \frac{\delta Z_1}{\delta r} \dot{r} + \frac{\delta Z_1}{\delta \theta} \dot{\theta}$$

$$\dot{Z}_2 = \frac{\delta Z_2}{\delta r} \dot{r} + \frac{\delta Z_2}{\delta \theta} \dot{\theta}$$

$$\dot{Z}_1 = \dot{r} \cos \theta - \dot{\theta} r \sin \theta$$

$$\dot{Z}_2 = \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta}$$

$$\dot{r} \cos \theta - \dot{\theta} r \sin \theta = \alpha r \cos \theta - \beta r \sin \theta$$

$$\dot{r} \sin \theta + \dot{\theta} r \cos \theta = \beta r \cos \theta + \alpha r \sin \theta$$

$$\dot{r} = \alpha r + \frac{\dot{\theta} r \sin \theta - \beta r \sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\dot{\theta} r \sin^2 \theta - \beta r \sin^2 \theta + \dot{\theta} r \cos^2 \theta = \beta r \cos^2 \theta$$

O sistema na nova variável é dado por:

$$\dot{r} = \alpha r$$

$$\dot{\theta} = \beta \quad (4)$$

Em que β é a velocidade angular.

Logo, a solução do sistema é dada por:

$$\begin{aligned} r(t) &= r_0 e^{\alpha t} \\ \theta(t) &= \theta_0 + \beta t \end{aligned}$$

Veja que o ângulo $\theta(t)$ cresce linearmente com o tempo, o que gera uma rotação no plano de fase, enquanto que o raio $r(t)$, cresce ou decresce, dependendo do valor de α .

A seguir será visto o que acontece com o diagrama de fase para os diferentes valores de α .

Caso (i) $\alpha > 0$

Se $\alpha > 0$, então se tem que $r(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$, portanto, o sistema é instável. Este tipo de equilíbrio é chamado de **Foco instável**. Veja o diagrama de fase na *figura 18*.

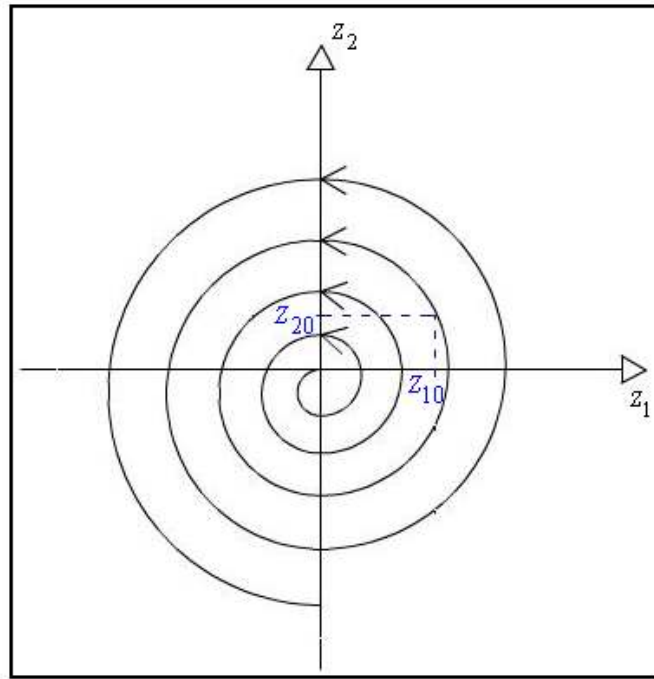


Figura 18 – Foco Instável

Caso (ii) $\alpha < 0$

Se $\alpha < 0$, então $r(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Portanto o sistema é estável. Este tipo de equilíbrio tem por nome **Foco Estável**. Veja o diagrama de fase na *figura 19*.

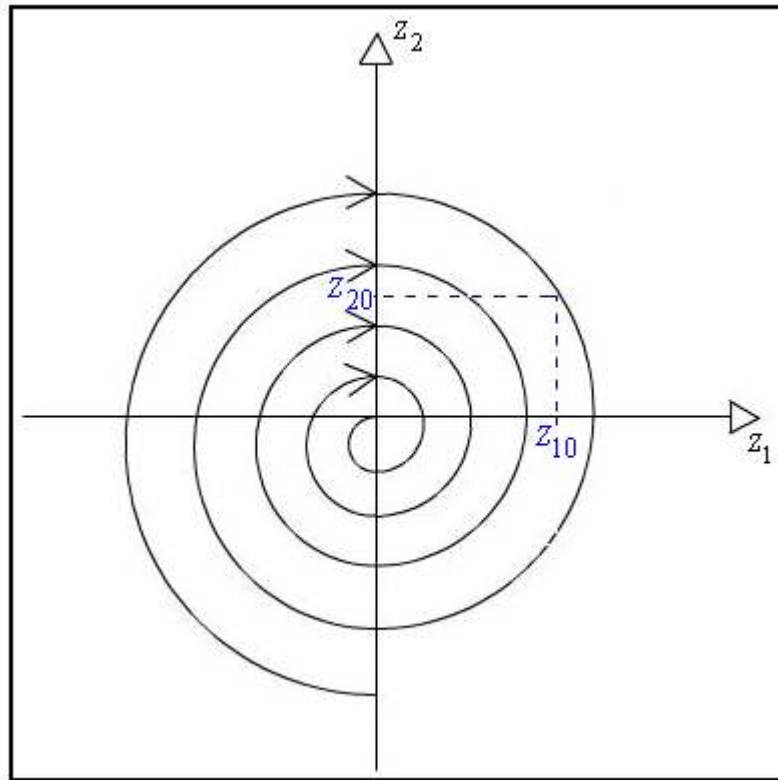


Figura 19 – Foco Estável

Caso (iii) $\alpha = 0$

Se $\alpha = 0$, então $r(t) = r_0$ para $\forall t \in \mathbb{R}$. Portanto o sistema é estável. Este tipo de equilíbrio recebe o nome de **Centro**. Veja o diagrama de fase na *figura 20*.

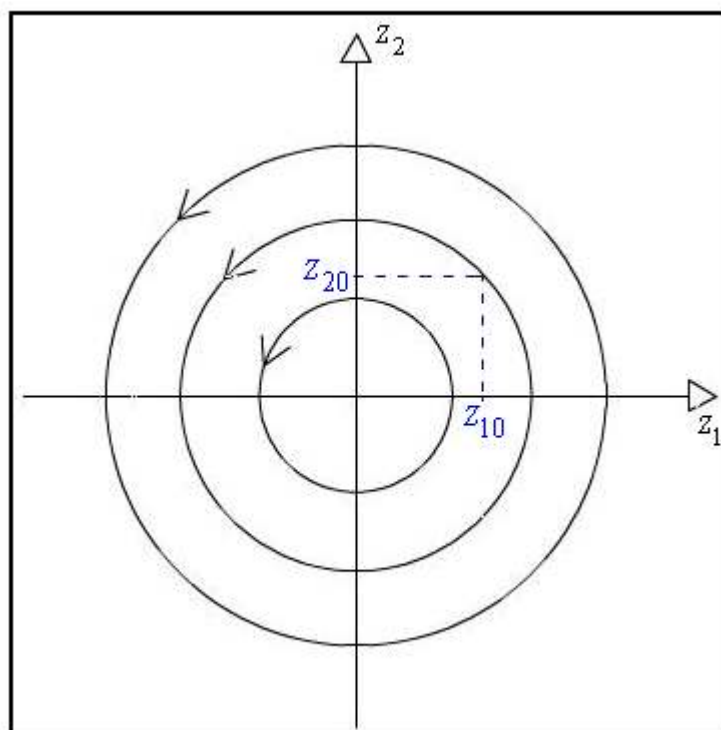


Figura 20 - Centro

Integração Numérica

Método Trapezoidal Implícito

O processo de integração tem como objetivo definir o valor integral dentro de um intervalo definido [16], o que corresponde a área sob a curva que define a função $f(x)$ no intervalo x_n a x_{n+1} - figura 21.

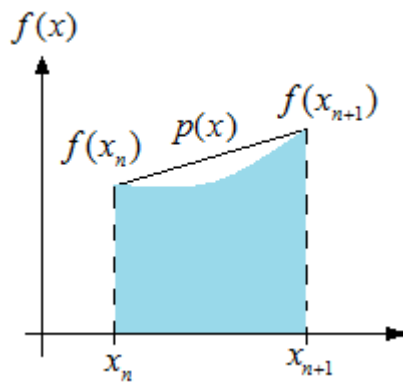


Figura 21 - Método trapezoidal implícito

No caso do método trapezoidal considera-se uma interpolação linear, representando-se a função $f(x)$ através de um polinômio $p(x)$. Portanto a área sob a reta definida pelo polinômio caracteriza o valor da integral e como essa área é da forma de trapézio - figura 21 - tem-se:

$$I = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dx = \frac{\Delta x}{2} [f(x_{n+1}) + f(x_n)] \quad (1)$$

Onde o valor Δx corresponde ao intervalo compreendido entre x_n e x_{n+1} . A solução de equações diferenciais se caracteriza por uma família de curvas, porém deve existir uma solução única para o sistema em análise definida em termos das condições iniciais do sistema.

Considerando-se a equação (2):

$$\frac{dY}{dx} = f(x, Y(x)) \quad (2)$$

Integrando a equação no intervalo x_n a x_{n+1} obtém-se

$$Y(x_{n+1}) = Y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, Y(x)) dx \quad (3)$$

Aplicando-se a regra de integração trapezoidal definida na equação (1) tem-se:

$$Y(x_{n+1}) = Y(x_n) + \frac{\Delta x}{2} [f(x_n, Y(x_n)) + f(x_{n+1}, Y(x_{n+1}))] \quad (4)$$

Adotando-se:

$$Y_{n+1} = Y(x_{n+1})$$

$$Y_n = Y(x_n)$$

Substituindo esse valor na equação (4) obtém-se:

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{\Delta x}{2} [f(x_n, Y(x_n)) + f(x_{n+1}, Y_{n+1})] \quad (5)$$

A equação (5) caracteriza o método trapezoidal implícito.