

Raphael Luiz Vicente Fortulan

# **Análise de Segurança Dinâmica em Sistemas Elétricos de Potência via Classificadores BCU**

Brasil

2016



Raphael Luiz Vicente Fortulan

# **Análise de Segurança Dinâmica em Sistemas Elétricos de Potência via Classificadores BCU**

Tese de Conclusão de Curso apresentada à  
Escola de Engenharia de São Carlos da Uni-  
versidade de São Paulo como um dos requisi-  
tos para a conclusão do curso de Engenharia  
Elétrica ênfase em Eletrônica

Universidade de São Paulo-USP

Escola de Engenharia de São Carlos-EESC

Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação

Orientador: Professor Doutor Luís Fernando Costa Alberto

Brasil

2016

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,  
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS  
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

F745a Fortulan, Raphael Luiz Vicente  
Análise de Segurança Dinâmica em Sistemas Elétricos  
de Potência via Classificadores BCU / Raphael Luiz  
Vicente Fortulan; orientador Luís Fernando Costa  
Alberto. São Carlos, 2016.

Monografia (Graduação em Engenharia Elétrica com  
ênfase em Eletrônica) -- Escola de Engenharia de São  
Carlos da Universidade de São Paulo, 2016.

1. Análise de segurança dinâmica. 2. BCU. 3.  
Estabilidade transitória. 4. Métodos diretos. 5. PEBS.  
6. Sistemas elétricos de potência. I. Título.

# FOLHA DE APROVAÇÃO

Nome: Raphael Luiz Vicente Fortulan

Título: "Análise de Estabilidade Transitória em Sistemas Elétricos de Potência via Métodos Diretos"

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado  
em 15/06/2016,

com NOTA 9,5 (nove, cinco), pela Comissão Julgadora:

*Prof. Associado Luís Fernando Costa Alberto - (Orientador - SEL/EESC/USP)*

*Prof. Dr. Elmer Pablo Tito Cari - (SEL/EESC/USP)*

*Mestre Yuri Cândido da Silva Ribeiro - (Doutorando - SEL/EESC/USP)*

Coordenador da CoC-Engenharia Elétrica - EESC/USP:  
Prof. Dr. José Carlos de Melo Vieira Júnior

*Dedico este trabalho ao meu avô Antonio Fortulan (in memoriam),  
que sempre acreditou em mim.*

# Agradecimentos

A conclusão deste trabalho seria impossível sem a colaboração de algumas pessoas e instituições que, de diversas formas, deram sua contribuição em diferentes etapas. Em especial,

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela concessão da bolsa de estudos;

Aos funcionários e professores Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação da Escola de Engenharia de São Carlos;

Aos meus colegas e companheiros do curso;

Ao professor Evandro Luís Linhari Rodrigues pelos conselhos e apoio durante todo o curso;

Ao Edson Aparecido Rozas Theodoro, pela oportunidade e confiança de me permitir continuar seu trabalho

Ao meu professor orientador Luís Fernando Costa Alberto, pelos ensinamentos, apoio e confiança.

Finalmente, à minha família, pelo incentivo e companheirismo imprescindíveis ao longo deste trabalho.





*Our greatest weakness lies in giving up.  
The most certain way to succeed is  
always to try just one more time.  
(Thomas A. Edison)*



# Resumo

Este trabalho tem por objetivo a avaliação de segurança, no contexto de estabilidade transitória, de três Sistemas Elétricos de Potência, o Sistema IEEE Nova Inglaterra de 39 barras, o Sistema Sul Brasileiro Reduzido de 33 barras e o Sistema Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro Reduzido de 107 barras, através de uma técnica de filtragem, com base em métodos diretos (PEBS e BCU), adequada para análises em tempo real. A ferramenta utilizada para a filtragem de contingências, detecta a ocorrência de ilhamento no cenário pós-distúrbio e emprega filtros baseados em métodos diretos para eliminar rapidamente, nos primeiros estágios de filtragem, de uma lista de contingências plausíveis, àquelas que são garantidamente estáveis e levar para simulação no domínio do tempo apenas as incertas. Subsequentemente, compara-se o desempenho dos filtros com a metodologia clássica de simulação no domínio do tempo e verificam-se os esforços computacionais envolvidos. Para a execução das análises, uma versão modificada do programa desenvolvido originalmente por [Theodoro \(2010\)](#) foi utilizada. Nele, realizaram-se alterações, em especial nos métodos numéricos e nos parâmetros dos filtros, e otimizações, de forma a garantir melhores resultados e desempenho.

**Palavras-chave:** Análise de segurança dinâmica, BCU, Estabilidade transitória, Métodos diretos, PEBS, Sistemas elétricos de potência.



# Abstract

This work has the main objective of studying dynamic security of three Electrical Power Systems, the IEEE New England 39 bus System, a Reduced South Brazilian 33 bus System and a Reduced South Southeast and "Mato-Grosso" Brazilian 107 bus System, in the context of transitory stability analysis, using a filtering technique based on direct methods: PEBS and BCU. The analysis verifies the existence of islanding in post-disturbance scenario. After filtering, the possible unstable cases are simulated on time-domain determining whether the system is stable or not. Finally this method is compared with the classic time domain simulation in terms of results and computational efforts. To perform the analysis, a modified version of the software developed by [Theodoro \(2010\)](#) was used. The modifications were made, particularly in numerical methods and filter parameters, to guarantee a better computational performance and results.

**Keywords:** Dynamic security analysis, BCU, Transient stability, Direct Methods, PEBS, Electrical Power Systems.



# Lista de figuras

Figura 1 – Estabilidade em 2D . . . . .	29
Figura 2 – Instabilidade em 2D . . . . .	30
Figura 3 – Estabilidade Assintótica em 2D . . . . .	30
Figura 4 – Estabilidade Exponencial em 1D . . . . .	31
Figura 5 – Linha de Transmissão . . . . .	34
Figura 6 – Máquina Síncrona . . . . .	36
Figura 7 – Descrição esquemática das potências e torques em uma máquina síncrona	36
Figura 8 – Máquina Síncrona Simplificada . . . . .	37
Figura 9 – Modelo Elétrico equivalente da Máquina Síncrona . . . . .	39
Figura 10 – Diferença de Representação entre o problema de Fluxo de Potência e de Estabilidade . . . . .	41
Figura 11 – Máquina Conectada a um barramento infinito . . . . .	42
Figura 12 – Critério das Áreas Iguais . . . . .	45
Figura 13 – Ângulo dos geradores vs Tempo (Caso Estável) . . . . .	47
Figura 14 – Ângulo dos geradores vs Tempo (Caso Instável) . . . . .	47
Figura 15 – Bolinha de gude em uma rampa . . . . .	48
Figura 16 – Energia Potencial vs Ângulo . . . . .	50
Figura 17 – Método BCU . . . . .	51
Figura 18 – <i>Shadowing Method</i> . . . . .	53
Figura 19 – Fluxograma do Funcionamento dos Filtros . . . . .	58
Figura 20 – Abordagem para a resolução de um sistema não linear para o cálculo do a.s.e.p. pós-falta . . . . .	61
Figura 21 – Abordagem para a resolução de um sistema não linear para o cálculo do c.u.e.p. . . . .	61
Figura 22 – Abordagem para a resolução de um sistema linear nos filtros classifica- dores BCU . . . . .	62
Figura 23 – Processo de seleção do método para a resolução de um sistema de equações diferenciais nos filtros classificadores BCU . . . . .	63
Figura 24 – Diagrama Unifilar do Sistema Elétrico de Potência Nova Inglaterra . .	66
Figura 25 – Processo de Classificação-IEEE Nova Inglaterra . . . . .	69
Figura 26 – Diagrama Unifilar do Sistema Elétrico de Potência Sistema Sul Brasileiro Reduzido(ALVES, 2007) . . . . .	72
Figura 27 – Processo de Classificação - Sistema Sul Brasileiro Reduzido . . . . .	76
Figura 28 – Diagrama Unifilar do Sistema Elétrico de Potência Sistema Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro Reduzido(ALVES, 2007) . . . . .	78

Figura 29 – Processo de Classificação - Sistema Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro	
Reduzido . . . . .	84
Figura 30 – Solução com o Método de Runge-Kutta . . . . .	111
Figura 31 – Solução com o Método de Adams-Bashfort-Moulton . . . . .	111
Figura 32 – Comparação entre passos de integração-Método Explícito para $\lambda = -2$	116
Figura 33 – Comparação entre passos de integração-Método Implícito para $\lambda = -2$	117



# Lista de tabelas

Tabela 1 – Valores dos Limites dos Filtros . . . . .	58
Tabela 2 – Fluxo de Carga para o Sistema IEEE Nova Inglaterra . . . . .	66
Tabela 3 – Resultado dos Classificadores Indicadores de Ilhamento - IEEE Nova Inglaterra . . . . .	68
Tabela 4 – Resultado dos Classificadores Indicadores de Casos Estáveis - IEEE Nova Inglaterra . . . . .	68
Tabela 5 – Resultado dos Classificadores Indicadores de Casos Incertos - IEEE Nova Inglaterra . . . . .	68
Tabela 6 – Resultado dos Classificadores - IEEE Nova Inglaterra . . . . .	68
Tabela 7 – Comparação do Esforço Computacional de cada Metodologia . . . . .	71
Tabela 8 – Fluxo de Carga para o Sistema Sul Brasileiro Reduzido . . . . .	73
Tabela 9 – Resultado dos Classificadores Indicadores de Ilhamento - Sistema Sul Brasileiro Reduzido . . . . .	74
Tabela 10 – Resultado dos Classificadores Indicadores de Casos Estáveis - Sistema Sul Brasileiro Reduzido . . . . .	74
Tabela 11 – Resultado dos Classificadores Indicadores de Casos Incertos - Sistema Sul Brasileiro Reduzido . . . . .	74
Tabela 12 – Resultado dos Classificadores - Sistema Sul Brasileiro Reduzido . . . . .	75
Tabela 13 – Comparação do Esforço Computacional de cada Metodologia . . . . .	76
Tabela 14 – Fluxo de Carga para o SEP Sistema Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro Reduzido . . . . .	78
Tabela 15 – Resultado dos Classificadores Indicadores de Ilhamento - Sistema Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro Reduzido . . . . .	82
Tabela 16 – Resultado dos Classificadores Indicadores de Casos Estáveis - Sistema Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro Reduzido . . . . .	82
Tabela 17 – Resultado dos Classificadores Indicadores de Casos Incertos - Sistema Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro Reduzido . . . . .	82
Tabela 18 – Resultado dos Classificadores - Sistema Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro Reduzido . . . . .	83
Tabela 19 – Comparação do Esforço Computacional de cada Metodologia . . . . .	85
Tabela 20 – Comparação de Desempenho - Sistema IEEE Nova Inglaterra . . . . .	85
Tabela 21 – Comparação de Exatidão - Sistema IEEE Nova Inglaterra . . . . .	86
Tabela 22 – Comparação de Desempenho - Sistema Sul Brasileiro Reduzido . . . . .	86
Tabela 23 – Comparação de Exatidão - Sistema Sul Brasileiro Reduzido . . . . .	86
Tabela 24 – Comparação de Desempenho - Sistema Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro Reduzido . . . . .	87

Tabela 25 – Comparação de Exatidão - Sistema Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro	
Reduzido . . . . .	87
Tabela 26 – Resultado da Aplicação do Método de Newton-Raphson e Método de	
Broyden . . . . .	105

# Lista de algoritmos

Algoritmo 1.	Método de Gauss-Seidel . . . . .	98
Algoritmo 2.	Método de Gauss-Seidel-Melhorado . . . . .	99
Algoritmo 3.	Método dos Mínimos Quadrados . . . . .	101
Algoritmo 4.	Método de Newton-Raphson . . . . .	103
Algoritmo 5.	Método de Broyden . . . . .	104
Algoritmo 6.	Método de Runge-Kutta de Ordem 4 . . . . .	108
Algoritmo 7.	Método de Adams-Bashfort-Moulton de Ordem 4 . . . . .	110



# Lista de abreviaturas e siglas

BCU	do inglês <i>Boundary Controlling Unstable Equilibrium Point Method</i>
PEBS	do inglês <i>Potential Energy Boundary Surface Method</i>
COA	do inglês <i>Center of Angle</i>
FEM	força eletromotriz
IEEE	Instituto de Engenheiros Eletricistas e Eletrônicos
a.s.e.p.	do inglês <i>assintotic stable equilibrium point</i>
u.e.p.	do inglês <i>unstable equilibrium point</i>
c.u.e.p.	do inglês <i>controlling unstable equilibrium point</i>
m.g.p.	do inglês <i>minimum gradient point</i>
EPE	Empresa de Pesquisa Energética
ONS	Operador Nacional do Sistema Elétrico
p.u.	por unidade
f	Referente ao período em falta
pf	Referente ao período pós-falta
prf	Referente ao período pré-falta
$t_{ab}$	Tempo de Abertura
$t_{cr}$	Tempo Crítico de Abertura
SEP	Sistema Elétrico de Potência



# Lista de símbolos

$M^T$	matriz transposta de $M$
$z^*$	complexo conjugado de $z$
$ v $	valor absoluto do escalar $v$
$\ \vec{v}\ $	norma do vetor $\vec{v}$
$\ M\ _F$	norma de Frobenius da matriz $M$
$\alpha$	aceleração angular
$\sigma$	ângulo de defasagem inicial
$\mathbb{R}^n$	espaço euclidiano n-dimensional
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\partial A(x_e)$	fronteira da região de estabilidade de $A(x_e)$
$\delta_i$	desvio angular do rotor da máquina $i$ referenciado à referência síncrona
$\theta_i$	desvio angular do rotor da máquina $i$ referenciado ao COA
$\omega$	desvio da velocidade angular em relação à referência síncrona
$\omega_s$	velocidade síncrona
$\hat{\omega}$	desvio da velocidade angular em relação ao COA
$\Omega$	região do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$
$\phi(x_0, t)$	solução do sistema dinâmico iniciando em $x_0$ , para todo tempo $t$
$\tau_e$	torque elétrico
$\tau_m$	torque mecânico
$\epsilon$	tolerância do método numérico
$A(x_e)$	região de estabilidade de $x_e$
$B_{ij}$	susceptância da linha $i - j$
$D_i$	coeficiente de amortecimento do gerador síncrono $i$

$E_i$	força eletromotriz complexa no barramento $i$
$E_{g_i}$	força eletromotriz complexa do gerador síncrono $i$
$G_{ij}$	condutância da linha $i - j$
$H$	constante de tempo do gerador síncrono
$h$	passo de integração numérica
$I_{ij}$	corrente elétrica complexa entre $i - j$
$J$	momento de inércia
$M$	constante de inércia do gerador síncrono
$M_T$	constante de inércia total dos geradores no sistema
$N$	número de iterações
$\mathcal{O}$	grande-O
$P_e$	potência elétrica
$P_{COA}$	potência do COA
$P_k$	potência ativa injetada no barramento $k$
$P_m$	potência mecânica
$Q_k$	potência reativa injetada no barramento $k$
$R(\theta)$	conjunto dos pontos formados do a.s.e.p. até o ponto $\theta$
$S$	potência complexa
$t$	tempo
$V(\cdot)$	função de Lyapunov
$V_k(\cdot)$	componente cinética de $V$
$V_p(\cdot)$	componente potencial de $V$
$X'_d$	reatância transitória de eixo direto
$Y_{bus}$	matriz de admitância nodal
$Y_{ij}$	elemento $i - j$ da matriz $Y_{bus}$
$y_{ij}$	admitância entre os barramentos $i - j$
$\mathbf{Y}_{red}$	matriz $Y_{bus}$ reduzida



# Sumário

	<b>Introdução</b>	<b>27</b>
<b>1</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>29</b>
<b>1.1</b>	<b>Estabilidade de Sistemas Autônomos</b>	<b>29</b>
1.1.1	Definições	29
1.1.2	Teorema de Estabilidade de Lyapunov	31
1.1.3	Região de Estabilidade	32
1.1.4	Caracterização da Região de Estabilidade	32
<b>1.2</b>	<b>Modelagem de Sistemas Elétricos de Potência</b>	<b>34</b>
1.2.1	Fluxo de Carga - Análise Estática	34
1.2.2	Equação de <i>Swing</i>	36
1.2.2.1	Modelo Elétrico da Máquina	39
<b>1.3</b>	<b>Formulação para Estudos de Estabilidade Transitória</b>	<b>39</b>
1.3.1	Função Energia para Sistemas Elétricos de Potência	42
1.3.2	Sistemas Multimáquinas	43
<b>1.4</b>	<b>Critério das Áreas Iguais</b>	<b>44</b>
1.4.1	Princípios	44
1.4.2	Análise Qualitativa dos Resultados	45
<b>2</b>	<b>ANÁLISE DE SEGURANÇA EM SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA</b>	<b>47</b>
<b>2.1</b>	<b>Método Clássico</b>	<b>47</b>
<b>2.2</b>	<b>Métodos Diretos</b>	<b>48</b>
2.2.1	Exemplo Motivador	48
2.2.2	Algoritmo Conceitual para Métodos Diretos em Sistema Elétricos de Potência	48
2.2.3	Metodologia PEBS	49
2.2.4	Método do Ponto de Equilíbrio de Controle	50
2.2.4.1	Shadowing Method	52
<b>2.3</b>	<b>Metodologia Híbrida dos Classificadores baseados no método BCU</b>	<b>53</b>
2.3.1	Filtro Preliminar 1	53
2.3.2	Filtro Preliminar 2	54
2.3.3	Filtro BCU 1	54
2.3.4	Filtro BCU 2	55
2.3.5	Filtro BCU 3	55
2.3.6	Filtro BCU 4	56
2.3.7	Filtro BCU 5	56

2.3.8	Filtro BCU 6 . . . . .	56
2.3.9	Filtro BCU 7 . . . . .	57
2.3.10	Filtro BCU 8 . . . . .	57
2.3.11	Simulação no domínio do tempo . . . . .	58
2.3.12	Valores dos Limites dos Filtros . . . . .	58
<b>2.4</b>	<b>Métodos Numéricos aplicados aos filtros classificadores BCU . . . . .</b>	<b>59</b>
2.4.1	Solução de Sistemas não Lineares nos filtros classificadores BCU . . . . .	60
2.4.2	Solução de Sistemas Lineares nos filtros classificadores BCU . . . . .	62
2.4.3	Solução de Sistemas de Equações Diferenciais nos filtros classificadores BCU . . . . .	63
<b>3</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>65</b>
<b>3.1</b>	<b>IEEE Nova Inglaterra de 39 barras . . . . .</b>	<b>66</b>
<b>3.2</b>	<b>Sistema Sul Brasileiro Reduzido de 33 barras . . . . .</b>	<b>72</b>
<b>3.3</b>	<b>Sistema Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro Reduzido de 107 barras . . . . .</b>	<b>78</b>
<b>3.4</b>	<b>Comparação de Desempenho e Exatidão . . . . .</b>	<b>85</b>
3.4.1	Comparação para o Sistema IEEE Nova Inglaterra de 39 barras . . . . .	85
3.4.2	Comparação para o Sistema Sul Brasileiro Reduzido de 33 barras . . . . .	86
3.4.3	Comparação para o Sistema Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro Reduzido de 107 barras . . . . .	86
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>89</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>91</b>
	<b>APÊNDICES . . . . .</b>	<b>95</b>
	<b>APÊNDICE A – MÉTODOS NUMÉRICOS . . . . .</b>	<b>97</b>
<b>A.1</b>	<b>Soluções de Sistemas de Equações Lineares . . . . .</b>	<b>97</b>
A.1.1	Método de Gauss-Seidel . . . . .	97
A.1.2	Método de Gauss-Seidel melhorado . . . . .	98
A.1.3	Método dos Mínimos Quadrados . . . . .	99
A.1.4	Exemplo de solução de um Sistema de Equações Lineares . . . . .	101
<b>A.2</b>	<b>Soluções de Sistemas não Lineares . . . . .</b>	<b>101</b>
A.2.1	Método de Newton-Raphson . . . . .	102
A.2.2	Método de Broyden . . . . .	103
A.2.3	Exemplo de solução de Sistema não Linear . . . . .	104
<b>A.3</b>	<b>Soluções de Sistemas de Equações Diferenciais . . . . .</b>	<b>106</b>
A.3.1	Método de Runge-Kutta . . . . .	106
A.3.2	Método de Adams-Bashforth-Moulton . . . . .	108

A.3.3	Exemplo de solução de Sistema Dinâmico . . . . .	111
<b>APÊNDICE B – PROVA DO TEOREMA DE ESTABILIDADE DE</b>		
	<b>LYAPUNOV . . . . .</b>	<b>113</b>
<b>APÊNDICE C – ESTABILIDADE DE MÉTODOS IMPLÍCITOS . .</b>		
		<b>115</b>



# Introdução

Neste trabalho estuda-se o problema de análise de segurança dinâmica, no contexto de estabilidade transitória, em Sistemas Elétricos de Potência via Métodos Diretos.

Análises de segurança são essenciais para garantir a operação segura de Sistemas Elétricos de Potência (SEP's). Um SEP é considerado seguro quando suporta, sem violações de limites e perda de estabilidade, a ocorrência de uma lista de contingências plausíveis pré definidas pelo operador do sistema.

Todavia, as incertezas de operação do sistema exigem que análises de segurança sejam realizadas em tempo real. O desenvolvimento de ferramentas computacionais de análise de segurança e, em particular, ferramentas de análise de segurança dinâmica, que sejam adequadas à aplicação em tempo real é desafiador. Neste trabalho, foca-se no problema de análise de segurança no contexto de estabilidade transitória.

A metodologia clássica para a análise de estabilidade transitória é fundamentada na integração numérica do conjunto de equações diferenciais que modelam o SEP. Mas com o aumento da complexidade e tamanho dos sistemas, a integração numérica das equações requer grande esforço computacional e é inadequada para a aplicação em tempo real. Métodos Diretos, baseados na teoria de funções energia para a análise de estabilidade, são computacionalmente mais rápidos e promissores para a análise de segurança dinâmica.

Verificou-se que a aplicação de métodos diretos levavam a resultados conservadores ([CHANG; WU; VARAIYA, 1994](#)). Esse fato levou os engenheiros a recorrerem a uma metodologia híbrida que alia a confiabilidade e exatidão da metodologia clássica com a rapidez dos métodos diretos. Nela, filtros baseados em métodos diretos classificam as contingências como sendo estáveis ou incertas. As classificadas como incertas são submetidas à análise pela metodologia clássica. A escolha dos filtros é realizada de maneira que aqueles mais simples, e que por consequência exigem menor esforço computacional, sejam os primeiros a realizarem a classificação. Apenas os casos indicados como problemáticos, contingência incertas, são simulados no domínio do tempo. Dessa forma, a complexidade da análise é reduzida, mas é garantida a robustez do resultado.

Neste trabalho os sistemas IEEE Nova Inglaterra de 39 barras ([ATHAY; PODMORE; VIRMANI, 1979](#)), Sul Brasileiro Reduzido de 33 barras ([ALVES, 2007](#)) e Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro Reduzido de 107 barras ([ALVES, 2007](#)) são analisados utilizando-se em paralelo a metodologia clássica e a metodologia dos classificadores. Posteriormente comparam-se os resultados obtidos em cada metodologia. Para a execução das análises, realizaram-se mudanças nos métodos numéricos, nos parâmetros dos filtros classificadores e otimizações gerais no programa originalmente desenvolvido por [Theodoro \(2010\)](#), de forma a reduzir o esforço computacional e alcançar melhores resultados.

Este trabalho está organizado como se segue:

No capítulo 1, os principais conceitos matemáticos de estabilidade utilizados neste trabalho são revisados, além disso é apresentado, brevemente, a modelagem de Sistemas Elétricos de Potência para estudos de estabilidade transitória e introduzido o primeiro método direto para a análise de estabilidade transitória.

No capítulo 2, apresenta-se a formulação de Análise de Segurança sob a visão da metodologia clássica e dos métodos diretos.

No capítulo 3, apresentam-se os resultados da aplicação dos classificadores nos sistemas IEEE Nova Inglaterra de 39 barras (ATHAY; PODMORE; VIRMANI, 1979), Sul Brasileiro Reduzido de 33 barras (ALVES, 2007) e Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro Reduzido de 107 barras (ALVES, 2007) e uma discussão é realizada sobre a eficiência da metodologia sobre cada sistema. Posteriormente, são comparados o desempenho e exatidão da versão modificada do programa com versão original.

No capítulo 4, conclui-se sobre os resultados apresentados.

No Apêndice A, investiga-se os métodos numéricos utilizados neste trabalho. Para isso, são apresentadas suas demonstrações, suas qualidades, deficiências e seus algoritmos.

Finalmente, nos Apêndices B e C, para o leitor interessado, são apresentadas demonstrações de alguns resultados apresentados no decorrer do trabalho.

# 1 Revisão Bibliográfica

## 1.1 Estabilidade de Sistemas Autônomos

Antes de estudar as características de um sistema de potência, é necessário realizar uma rápida introdução aos sistemas dinâmicos.

### 1.1.1 Definições

Considere o sistema autônomo descrito por

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.1)$$

no qual  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é Lipschitziana<sup>1</sup>. Seja  $x_e \in \mathbb{R}^n$  um ponto de equilíbrio de (1.1). Dessa forma  $f(x_e) = 0$ .

**Definição 1.** O ponto de equilíbrio  $x_e$  de (1.1) é estável se, para cada  $\epsilon > 0$ , existe um  $\delta = \delta(\epsilon)$  tal que  $\|x(t_0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \epsilon$ , para todo  $t \geq t_0$ .

A Figura 1 ilustra o conceito de estabilidade em duas dimensões.

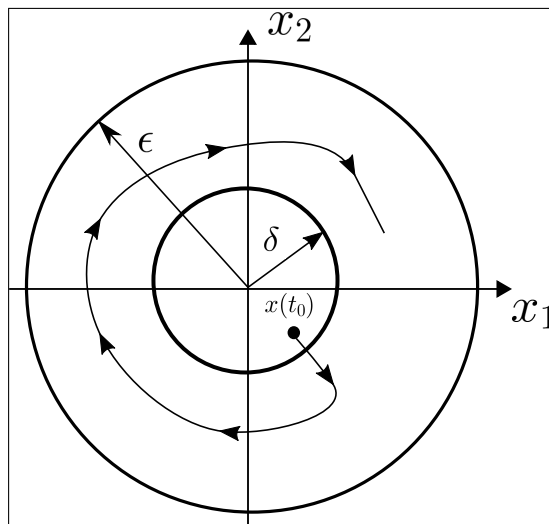


Figura 1 – Estabilidade em 2D

**Definição 2.** O ponto de equilíbrio  $x_e$  de (1.1) é instável se não é estável.

A Figura 2 apresenta o conceito de instabilidade em duas dimensões.

<sup>1</sup> Uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é Lipschitziana em  $x \in \mathbb{R}^n$  se há uma constante  $C$ , tal que  $\|f(y) - f(x)\| \leq C\|y - x\|, \forall y \in \mathbb{R}^n$  seja suficientemente próximo de  $x$  (ROWLAND; WEISSTEIN, 2016).

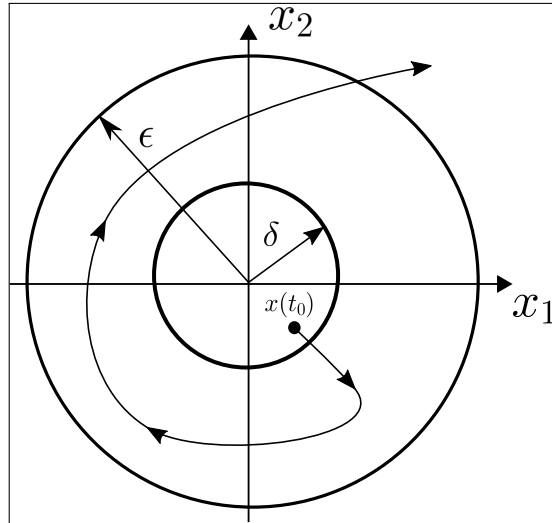


Figura 2 – Instabilidade em 2D

**Definição 3.** O ponto de equilíbrio  $x_e$  de (1.1) é assintoticamente estável se é estável e  $\delta$  pode ser escolhido de forma que  $\|x(t_0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_e\| = 0$ .

Na Figura 3, ilustra-se o conceito de estabilidade assintótica em duas dimensões.

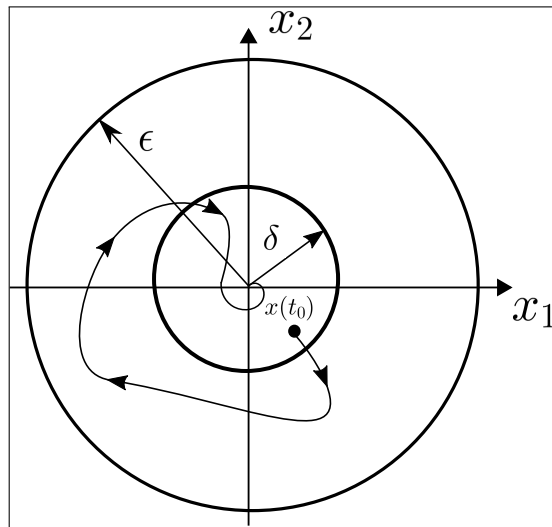


Figura 3 – Estabilidade Assintótica em 2D

**Definição 4.** O ponto de equilíbrio  $x_e$  pode ser exponencialmente estável se existem  $\delta > 0$ ,  $\epsilon > 0$  e  $\alpha > 0$  de forma que  $\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leq \epsilon \|x(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)}$ , para todo  $t \geq t_0$ .

Na Figura 4, apresenta-se o conceito de estabilidade exponencial em uma dimensão.



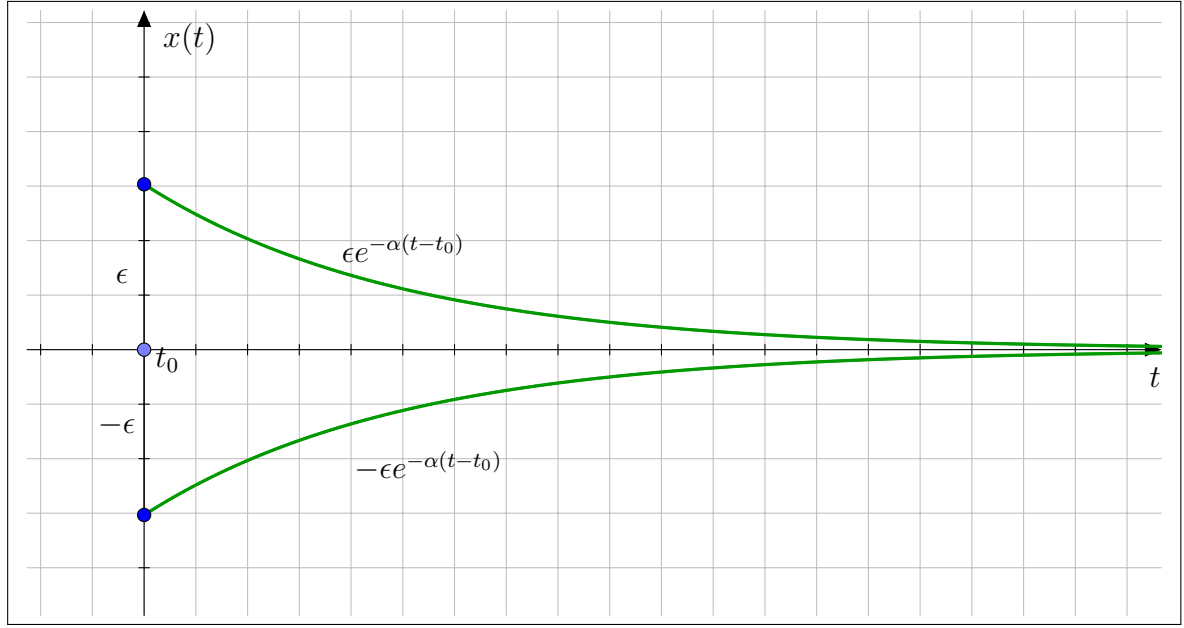


Figura 4 – Estabilidade Exponencial em 1D

**Definição 5.** Seja  $\phi(t, x)$  a solução de (1.1) que se inicia no estado  $x$  em  $t = t_0$ .

Supondo que  $x_0$  é um ponto de equilíbrio hiperbólico<sup>2</sup> de (1.1), então a variedade estável de  $x_0$  é o conjunto

$$W^s(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = x_0\}. \quad (1.2)$$

**Definição 6.** Seja  $\phi(t, x)$  a solução de (1.1) que se inicia no estado  $x$  em  $t = t_0$ .

Supondo que  $x_0$  é um ponto de equilíbrio hiperbólico de (1.1), então a variedade instável de  $x_0$  é o conjunto

$$W^u(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x) = x_0\}. \quad (1.3)$$

### 1.1.2 Teorema de Estabilidade de Lyapunov

Os métodos diretos tem como base a fundamentação teórica criada por [Lyapunov \(1892\)](#).

**Teorema 1.** Seja  $x_e = 0$  um ponto de equilíbrio de (1.1) e  $D \in \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto contendo  $x_e = 0$ . Seja  $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável, de forma que:

$$V(0) = 0 \text{ e } V(x) > 0, \text{ em } D - \{0\} \quad (1.4)$$

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) \quad (1.5)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ em } D \quad (1.6)$$

<sup>2</sup> Um ponto de equilíbrio é dito hiperbólico se a matriz Jacobiana, avaliada naquele ponto, não possui autovalores no eixo imaginário ([KHALIL; GRIZZLE, 2002](#)).

Então,  $x_e = 0$  é estável. Ainda mais, se

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ em } D - \{0\} \quad (1.7)$$

Então,  $x_e = 0$  é assintoticamente estável.

A demonstração do Teorema 1 está apresentada no Apêndice B.

### 1.1.3 Região de Estabilidade

Supõe-se que  $x_e$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (1.1), então existe uma região  $A(x_e)$  contendo  $x_e$  de tal forma que toda a trajetória iniciada nessa região converge para o ponto de equilíbrio estável  $x_e$  a medida que o tempo tende para infinito. A região  $A(x_e)$  é denotada como a região de estabilidade de  $x_e$ .

Formalmente,  $A(x_e)$  é definida como se segue:

**Definição 7.** *Seja  $\phi(t, x)$  a solução de (1.1) que se inicia no estado  $x$  em  $t = 0$ . A região de estabilidade de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável  $x_e$  é o conjunto de estados  $x_0$  tais que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x_0) = x_e$ . Compactamente:*

$$A(x_e) := \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x_0) = x_e\} \quad (1.8)$$

A fronteira da região de estabilidade  $A(x_e)$  é denotada por  $\partial A(x_e)$ .

### 1.1.4 Caracterização da Região de Estabilidade

Definida a região de estabilidade, é de interesse, agora, sua caracterização. Com esse intuito, é necessário a definição de função energia para o sistema:

**Definição 8.** *A função  $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função energia para (1.1) se satisfaz as seguintes condições (CHIANG; WU; VARAIYA, 1994):*

1.  $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ ;
2. O conjunto  $\{t \in \mathbb{R} : \dot{V}(x(t)) = 0\}$  tem medida nula em  $\mathbb{R}$ , para toda trajetória não trivial  $x(t)$ ;
3. Se  $V(x(t))$  é limitada para  $t > t_0$ , então  $x(t)$  é limitada para  $t > t_0$ .

O seguinte teorema (CHIANG; WU; VARAIYA, 1994), descreve o comportamento das trajetórias do sistema na fronteira da região de estabilidade.

**Teorema 2.** *Se existe uma função energia para o sistema (1.1), então toda trajetória na fronteira da região de estabilidade, converge para um dos pontos de equilíbrio na fronteira quando o tempo tende ao infinito.*

O Teorema 2 indica que toda trajetória na fronteira da região de estabilidade apresenta apenas um tipo de comportamento: converge para um ponto de equilíbrio quando o tempo tende para o infinito. Logo não existem comportamentos oscilantes, nem trajetórias caóticas ou ilimitadas. Esse teorema também oferece uma maneira de caracterizar a fronteira da região de estabilidade. Na verdade, pelo Teorema 2, pode-se dizer que fronteira da região de estabilidade é, de fato, formada por pontos de equilíbrio instáveis,  $x_i$ , e pontos cuja trajetória converge para  $x_i$  quando o tempo tende para o infinito. Formalmente, é o mesmo que dizer que a fronteira da região de estabilidade é formada pela união da variedades estáveis dos pontos  $x_i$ .

**Corolário 1.** *Se existe uma função energia para o sistema (1.1), então a fronteira da região de estabilidade  $\partial A(x_e)$  está contida no conjunto formado pela união da variedades estáveis dos pontos de equilíbrio instáveis em  $\partial A(x_e)$ , ou seja,*

$$\partial A(x_e) \subseteq \bigcup_{x_i \in \partial A(x_e)} W^s(x_i) \quad (1.9)$$

## 1.2 Modelagem de Sistemas Elétricos de Potência

### 1.2.1 Fluxo de Carga - Análise Estática

Nesta seção serão apresentados, ainda que brevemente, os principais conceitos da modelagem estática de SEP. As equações que serão desenvolvidas apresentam extrema importância no estudo dinâmico executado neste trabalho.

Considere uma linha de transmissão sem perdas como:

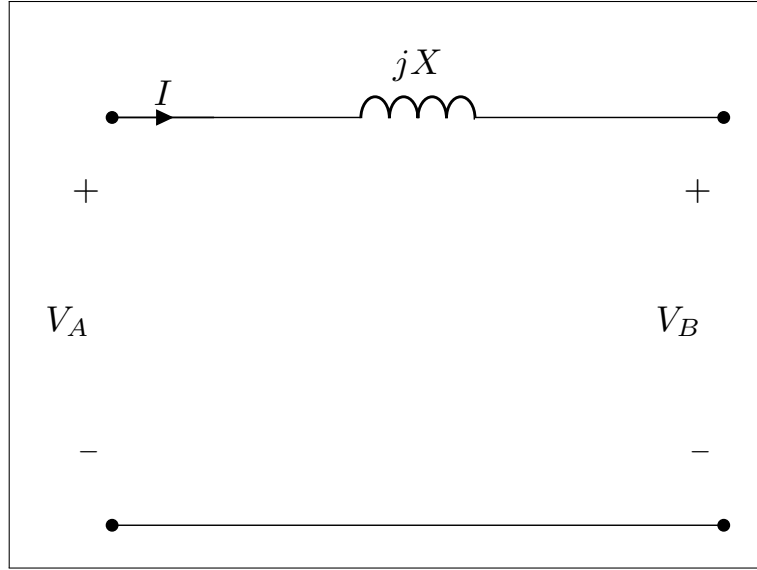


Figura 5 – Linha de Transmissão

A potência complexa  $S[\text{VA}]$  é em geral dada por:

$$S = P + jQ = VI^*[\text{VA}] \quad (1.10)$$

Em que  $I^*$  é o complexo conjugado da corrente  $I$ . Então a potência injetada em  $V_A$  (Figura 5) é:

$$S_A = P_A + jQ_A = V_A I^*[\text{VA}] \quad (1.11)$$

A corrente  $I$  é descrita pelas seguintes relações:

$$I = \frac{V_A - V_B}{jX} \quad (1.12)$$

$$I^* = \frac{V_A^* - V_B^*}{-jX} \quad (1.13)$$

Substituindo (1.13) em (1.11), chega-se em:

$$S_A = \frac{V_A(V_A^* - V_B^*)}{-jX} \quad (1.14)$$

Assumindo que  $V_B = |V_B| \angle 0$  e  $V_A = |V_A| \angle \delta$ , então:

$$V_B = V_B^* \text{ e } V_A = V_A e^{j\delta} \quad (1.15)$$

Aplicando as relações encontradas (1.15) em (1.14), obtêm-se:

$$S_A = \frac{|V_A|^2 - |V_A||V_B|e^{j\delta}}{-jX} \quad (1.16)$$

Utilizando-se da relação de Euler<sup>3</sup> em (1.16), encontra-se:

$$S_A = \frac{|V_A||V_B|}{X} \sin \delta + j \frac{|V_A|^2 - |V_A||V_B| \cos \delta}{X} \quad (1.17)$$

Finalmente:

$$P_A = \frac{|V_A||V_B| \sin \delta}{X} [\text{W}] \quad (1.18)$$

$$Q_A = \frac{|V_A|^2 - |V_A||V_B| \cos \delta}{X} [\text{VAR}] \quad (1.19)$$

Utilizando o mesmo procedimento para o lado B:

$$P_B = \frac{|V_A||V_B| \sin \delta}{X} [\text{W}] \quad (1.20)$$

$$Q_B = \frac{|V_A||V_B| \cos \delta - |V_B|^2}{X} [\text{VAR}] \quad (1.21)$$

Generalizando para um sistema de N Barras:

$$I_k = \sum_{n=1}^N Y_{kn} V_n \quad (1.22)$$

$$S_k^* = P_k - jQ_k \quad (1.23)$$

$$V_n = |V_n| \angle \delta_n \text{ e } Y_{kn} = |Y_{kn}| \angle \phi_{kn} \quad (1.24)$$

Em que  $V_n$  é a tensão no barramento n e  $Y_{kn}$  é a admitância do elemento k-n da matriz de admitância o sistema. Substituindo (1.24) em (1.23) e (1.22), chega-se em:

$$P_k - jQ_k = \sum_{n=1}^N |V_k V_n Y_{kn}| \angle \phi_{kn} + \delta_n - \delta_k \quad (1.25)$$

Dessa forma:

$$P_k = \sum_{n=1}^N |V_k V_n Y_{kn}| \cos(\phi_{kn} + \delta_n - \delta_k) \quad (1.26)$$

$$Q_k = \sum_{n=1}^N |V_k V_n Y_{kn}| \sin(\phi_{kn} + \delta_n - \delta_k) \quad (1.27)$$

As equações (1.26) e (1.27) desenvolvidas acima, apresentam, assim o comportamento estático de um Sistema Elétrico de Potência. Esse equacionamento é de grande valia para o estudo de transitório dos SEP's, pois é delas que se retira a informação das condições iniciais do sistema dinâmico.

---

<sup>3</sup>  $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$

### 1.2.2 Equação de *Swing*

Nesta seção será derivada a equação de *swing*, que é a relação matemática descrevendo como o rotor de uma máquina síncrona se moverá (*swing*) quando há um desbalanço entre a potência mecânica injetada na máquina e a potência elétrica extraída dela. Inicialmente, considera-se uma máquina síncrona como a apresentada na Figura 6.

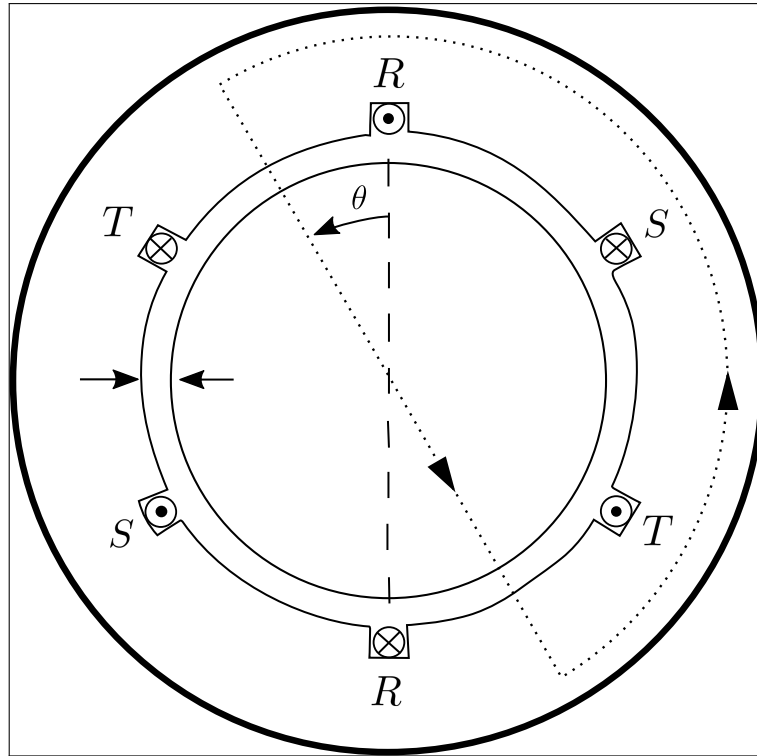


Figura 6 – Máquina Síncrona

Esquematicamente os diferentes torques e potências de uma máquina podem ser ilustrados como na Figura 7.

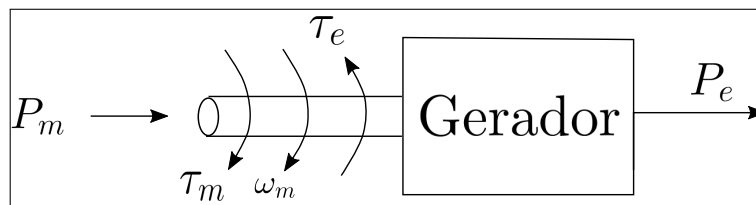


Figura 7 – Descrição esquemática das potências e torques em uma máquina síncrona

Para efeito dessa análise, considera-se que a máquina da Figura 7 possa ser representada como ilustrado na Figura 8.

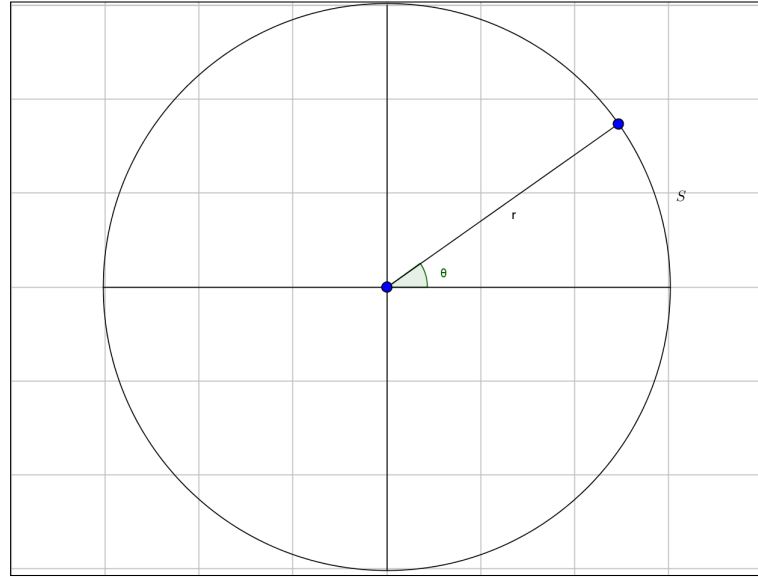


Figura 8 – Máquina Síncrona Simplificada

Aplicando as Leis de Newton do movimento rotacional<sup>4</sup> (SERWAY; JEWETT, 2013) no Gerador (Figura 8), encontram-se as seguintes equações:

$$\theta = \frac{S}{r} \text{ [rad]} \quad (1.28)$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \text{ [rad/s]} \quad (1.29)$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \text{ [rad/s}^2\text{]} \quad (1.30)$$

O torque devido a uma força tangencial a uma distância  $r$  do eixo de rotação é descrito como:

$$\tau = \int r dF \text{ [N.m]} \quad (1.31)$$

A força  $dF$ , por sua vez, pode ser descrita como a força tangencial para uma partícula de massa  $dm$ . Assim o torque infinitesimal  $d\tau$  será a força tangencial multiplicada pela distância  $r$  e o torque total  $\tau$  será a soma de todas as componentes infinitesimais  $d\tau$ . Dessa forma:

$$dF = adm = \alpha r dm \text{ [N]} \quad (1.32)$$

$$d\tau = r dF = r^2 \alpha dm \text{ [N.m]} \quad (1.33)$$

<sup>4</sup> 1) Na ausência da aplicação de um torque líquido resultante, a velocidade angular se mantém constante; 2)  $\tau = J\alpha$  e 3) Para cada torque aplicado, há um torque de reação com mesma magnitude e sentido contrário.

$$\tau = \int d\tau = \alpha \int r^2 dm \text{ [N.m]} \quad (1.34)$$

O momento de inércia da máquina é descrito como se segue:

$$J = \frac{\tau}{\alpha} \text{ [kg.m}^2\text{]} \Rightarrow J\alpha = \tau \Rightarrow J \frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau \quad (1.35)$$

Como apresentado pela equação (1.34),  $\tau$  representa o torque total aplicado sobre o rotor. Se dividido  $\tau$  em duas componentes uma elétrica  $\tau_e$  e uma mecânica  $\tau_m$ , obtêm-se:

$$\tau = \tau_m \pm \tau_e \quad (1.36)$$

Por ser um Gerador,  $\tau_e$  retarda o movimento, enquanto  $\tau_m$  acelera-o. Pode-se, assim, reescrever a equação (1.36):

$$\tau = \tau_m - \tau_e \quad (1.37)$$

Analisando-se as equações (1.28) e (1.34) é verificado que  $\theta$  é medido em relação a um referencial estacionário e, portanto, cresce continuamente mesmo em regime permanente. Corrige-se isso com a definição de um ângulo mecânico  $\delta$  referenciado a um eixo girante.

$$\theta = t\omega_s + \sigma + \delta \quad (1.38)$$

Em que  $\omega_s$  é velocidade síncrona de rotação e  $\sigma$  é o ângulo mecânico inicial do sistema. Derivando-se a equação (1.38) em relação ao tempo duas vezes, obtêm-se:

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} - \omega_s \quad (1.39)$$

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (1.40)$$

É possível reescrever a expressão obtida em (1.39) com o auxílio de (1.29), da forma como se segue:

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} - \omega_s = \omega - \omega_s \quad (1.41)$$

Pode-se concluir, então, que a velocidade angular do rotor será igual à síncrona apenas quando  $\frac{d\delta}{dt}$  for igual à zero. Logo a derivada de  $\delta$  em relação ao tempo é o erro na velocidade.

Reescrevendo a equação (1.35) em termos de  $\delta, \tau_e$  e  $\tau_m$ , encontra-se:

$$J \frac{d^2\delta}{dt^2} = \tau_m - \tau_e \quad (1.42)$$

Ou em termos de potência:

$$\omega \left( J \frac{d^2\delta}{dt^2} \right) = P_m - P_e \quad (1.43)$$



Em que  $P_e[W]$  e  $P_m[W]$  são as potências elétrica e mecânica que agem sob o rotor, respectivamente.

Dividindo a equação (1.43) pela base  $S$  da máquina e rearranjando, o resultado é:

$$\frac{2}{\omega} \frac{(\frac{1}{2}\omega^2 J)}{S} \frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{P_m - P_e}{S} \rightarrow \frac{2H}{\omega} \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_m^{p.u.} - P_e^{p.u.} \quad (1.44)$$

Em que  $H [s]$  é definida como a constante de inércia por unidade.

A equação (1.44) é a equação de *swing*. É possível reescrevê-la em termos do momento angular, como apresentado a seguir (omite-se a notação de p.u.):

$$\frac{2H}{\omega} \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_m - P_e \rightarrow \frac{2(\frac{1}{2}M\omega)}{\omega} \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_m - P_e \rightarrow M \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_m - P_e \quad (1.45)$$

É importante observar que foram feitas duas simplificações na análise realizada:

1. Em (1.45) foi assumido que  $M$  é constante, o que estritamente, na verdade, é uma aproximação;
2. O termo de amortecimento proporcional à  $\frac{d\delta}{dt}$  foi desconsiderado.

#### 1.2.2.1 Modelo Elétrico da Máquina

Para a completude e clareza nas análises dos próximos capítulos, na Figura 9 mostra-se o modelo elétrico equivalente da máquina síncrona, onde  $E_g$  é a tensão do gerador e  $X'_d$  é a reatância transitória da máquina.

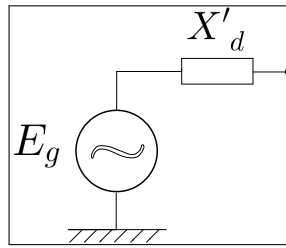


Figura 9 – Modelo Elétrico equivalente da Máquina Síncrona

## 1.3 Formulação para Estudos de Estabilidade Transitória

Nesta seção será apresentada a formulação, baseada no equacionamento desenvolvido na seção 1.2, utilizada no estudo de estabilidade transitória de SEP.

Algumas suposições são adotadas a fim de simplificar a análise. São elas:

- Rede:

- Supõe-se que o sistema de transmissão do SEP esteja em regime permanente senoidal.
- Carga:
  - Admite-se que as cargas conectadas no sistema são impedâncias constantes, calculadas a partir do regime permanente pré-falta.
- Gerador síncrono:
  - Representa-se a máquina por uma fonte de tensão de magnitude constante em série com uma reatância (Reatância transitória de eixo direto);
  - O ângulo de fase da tensão coincide com o ângulo elétrico do rotor em relação à referência síncrona girante;
  - As potências mecânicas se mantêm constantes durante o período da análise.

No problema de estabilidade transitória é necessário estudar o sistema em 3 momentos: pré-falta (*prf*), em falta (*f*) e pós-falta (*pf*). Denota-se por tempo de abertura,  $t_{ab}$ , o tempo necessário para atuação do sistema de proteção. Dessa forma o problema se torna o seguinte:

$$M\ddot{\delta}_m + D\dot{\delta}_m = P_m - P_e \begin{cases} P_e = P_e^{prf} & \text{se } t \leq 0 \\ P_e = P_e^f & \text{se } 0 \leq t \leq t_{ab} \\ P_e = P_e^{pf} & \text{se } t_{ab} \leq t \end{cases} \quad (1.46)$$

Essa mudança ocorre devido a uma variação na topologia do SEP durante o período em falta e pós-falta. É preciso esclarecer que as contingências estudadas nesse trabalho são curto-circuitos trifásicos permanentes e francos à terra. Além disso o sistema de proteção do SEP atua de forma a isolar o defeito.

Assim, seja um SEP formado por  $N$  barras. Então a 1ª Lei de Kirchhoff para o sistema é escrita como se segue:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_{bus} \mathbf{V} \quad (1.47)$$

em que

$$Y_{bus} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \cdots & Y_{NN} \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

Compactamente as admitâncias são calculadas segundo o equacionamento descrito em (1.49) (NASAR, 1990).

$$Y_{ij} = \begin{cases} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N y_{ik} & \text{se } i = j \\ -y_{ij} & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (1.49)$$

no qual  $Y_{ij}$  é o elemento  $i - j$  da matriz de admitância e  $y_{ij}$  é admitância entre os barramentos  $i - j$ . Pelas suposições adotadas na formulação, todas as cargas são admitâncias passivas. Essa representação não é suficiente para o estudo de estabilidade, é necessário aumentar a rede com a inserção de um novo barramento interno entre o gerador e o barramento real. A Figura 10 abaixo ilustra essa situação.

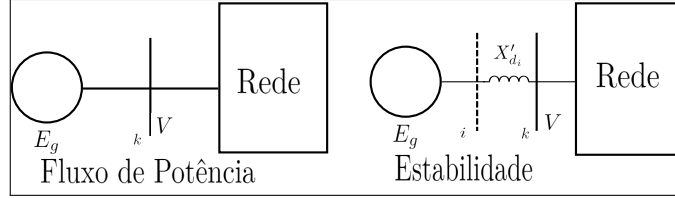


Figura 10 – Diferença de Representação entre o problema de Fluxo de Potência e de Estabilidade

Assim é preciso aumentar em 1 a dimensão da matriz  $Y_{bus}$  para cada gerador conectado ao sistema. Então para cada barramento interno  $i$  conectado à um barramento  $k$ , modifica-se a matriz  $Y_{bus}$  da seguinte forma:

- Adiciona-se uma nova coluna e linha para o barramento  $i$  com  $Y_{ii} = \frac{-j}{X'_{di}}$  e elementos não diagonais iguais a zero exceto  $Y_{ik} = Y_{ki} = \frac{j}{X'_{di}}$ ;
- Adiciona-se  $\frac{j}{X'_{di}}$  em  $Y_{kk}$ :  $Y_{kk} = Y_{kk} + \frac{j}{X'_{di}}$ .

O último passo é, então, adicionar as admitâncias das cargas na matriz  $Y_{bus}$ . Para isso utiliza-se a suposição de que as cargas possuem impedâncias constantes na análise:

$$Y_{L_k} = \frac{P_{L_k} + jQ_{L_k}}{|V_{L_k}|^2}, k = 1, \dots, N \quad (1.50)$$

Finalmente, adicionam-se as admitâncias calculadas em (1.50) nos elementos  $Y_{kk}$  e a matriz resultante é a matriz estendida para o SEP.

Então a injeção de correntes ocorrem apenas nos  $n_g$  nós internos de geração. Em todos outros nós a corrente é nula. Portanto, é possível, particionar o vetor de corrente em:

$$I = \begin{bmatrix} I_{n_g} \\ - \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

Em que  $I_{n_g}$  representa o vetor de corrente corresponde aos  $n_g$  nós internos de geração. Reescrevendo a equação (1.47) são obtidos os seguintes resultados:

$$\begin{bmatrix} I_{n_g} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{E} \\ \mathbf{F} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{n_g} \\ V_{ext} \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

$$\mathbf{Y}_{red} = \mathbf{D} - \mathbf{E}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{F} \quad (1.53)$$

$$I_{ng} = \mathbf{Y}_{red}E_{ng} \quad (1.54)$$

Em que  $E_{ng}, V_{ext}$  e  $\mathbf{Y}_{red}$ , representam, respectivamente, o vetor das forças eletromotrizes dos geradores, o vetor de tensões das barras externas e a matriz de admitância reduzida. Deve-se notar que em (1.53) todas as barras foram eliminadas, exceto as  $n_g$  barras de geração.

As tensões internas de cada máquina são dadas por:

$$\begin{aligned} E_g &= V + I(jX'_d) = V + \left( \frac{P - jQ}{V^*} jX'_d \right) = V + \frac{QX'_d}{V^*} + \frac{jPX'_d}{V^*} \\ &= \sqrt{\left( V + \frac{QX'_d}{V^*} \right)^2 + \left( \frac{PX'_d}{V^*} \right)^2} \angle \arctan \left( \frac{PX'_d}{|V|^2 + QX'_d} \right) \end{aligned} \quad (1.55)$$

Onde  $V$  é a tensão do barramento em que a máquina está conectada.

A potência elétrica dos geradores é calculada por:

$$P_k = \sum_{j=1}^{n_g} |E_k E_j Y_{kj}| \cos(\theta_{kj} + \delta_j - \delta_k) \quad (1.56)$$

Onde  $E_k$  é a força eletromotriz do gerador  $k$ ,  $E_j$  é a força eletromotriz do gerador  $j$  e  $Y_{kj}$  é a admitância  $k - j$  da matriz de admitância reduzida (1.54) para o sistema.

Obtida a expressão para  $P_k$  é possível prosseguir com a resolução de (1.46) para as diversas máquinas do SEP. Ressalta-se que para as diferentes etapas da análise a matriz  $\mathbf{Y}_{red}$  é modificada, pela ocorrência e correção da falta.

### 1.3.1 Função Energia para Sistemas Elétricos de Potência

Considera-se, uma máquina síncrona conectada à um barramento infinito, como ilustrado na Figura 11.

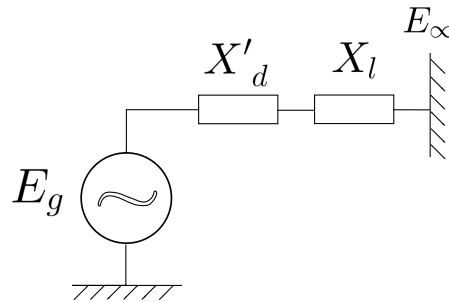


Figura 11 – Máquina Conectada a um barramento infinito

Tal sistema pode ser modelado pelo conjunto de equações diferenciais (1.45):

$$\dot{\delta} = \omega \quad (1.57)$$

$$\dot{\omega} = P_m - \frac{|E_g||E_\infty|}{X'_d + X_l} \sin(\delta - \delta_\infty) \quad (1.58)$$

A função energia para (1.58) (ALBERTO; BRETAS, 2000) será dada pela expressão a seguir:

$$V(\delta, \omega) = \frac{1}{2}M\omega^2 - P_m(\delta - \delta_e) - \frac{|E_g||E_\infty|}{X'_d + X_l}(\cos(\delta) - \cos(\delta_e)) \quad (1.59)$$

A função energia (1.59) pode ser dividida em duas componentes, uma potencial e uma cinética:

$$V_p(\delta, \omega) = \frac{1}{2}M\omega^2 \quad (1.60)$$

$$V_K(\delta, \omega) = -P_m(\delta - \delta_e) - \frac{|E_g||E_\infty|}{X'_d + X_l}(\cos(\delta) - \cos(\delta_e)) \quad (1.61)$$

Em que  $V_p(\cdot)$  é a energia potencial do SEP e  $V_K(\cdot)$  é a energia cinética.

### 1.3.2 Sistemas Multimáquinas

Neste trabalho o sistema multi-máquinas é referenciado ao centro de ângulo das máquinas (COA - do inglês *center of angle*) como se segue:

$$M_T = \sum_{i=1}^{n_g} M_i \quad (1.62a)$$

$$\theta = \delta_i - \delta_0, \quad \delta_0 = \frac{1}{M_T} \sum_{i=1}^{n_g} M_i \delta_i \quad (1.62b)$$

$$\hat{\omega} = \omega - \omega_0, \quad \omega_0 = \frac{1}{M_T} \sum_{i=1}^{n_g} M_i \omega_i \quad (1.62c)$$

Uma função energia numérica para o sistema obtida de (ALBERTO; BRETAS, 2000) é:

$$V(\theta, \hat{\omega}) = V_K(\theta, \hat{\omega}) + V_p(\theta, \hat{\omega}) = \sum_{i=1}^{n_g} \frac{M_i \hat{\omega}_i^2}{2} + \left[ \sum_{i=1}^{n_g-1} \sum_{j=1+i}^{n_g} |E_i||E_j|B_{ij}[\cos(\theta_i - \theta_j) - \cos(\theta_i^s - \theta_j^e)] + \sum_{i=1}^{n_g-1} \sum_{j=1+i}^{n_g} |E_i||E_j|G_{ij} \left| \frac{\theta_i + \theta_j - \theta_i^e - \theta_j^e}{\theta_i + \theta_j - \theta_i^e + \theta_j^e} \right| [\sin(\theta_i - \theta_j) - \sin(\theta_i^e - \theta_j^e)] \right] \quad (1.63)$$

Em que  $B_{ij}$  é a parte imaginária de  $Y_{ij}$ ,  $G_{ij}$  é a parte real de  $Y_{ij}$ ,  $V_p(\cdot)$  é a energia potencial do SEP e  $V_K(\cdot)$  é a energia cinética.

## 1.4 Critério das Áreas Iguais

O critério das áreas iguais (SKILLING; YAMAKAWA, 1940) é o primeiro método que surgiu para resolver o problema de análise de estabilidade transitória via métodos diretos. Como será visto, a análise de estabilidade transitória é realizada, sem a solução explícita das equações diferenciais do SEP.

### 1.4.1 Princípios

Considere uma máquina conectada em um barramento infinito. A equação do swing da máquina é descrita pela equação (1.45). Multiplicando ambos os lados de (1.45) por  $\frac{d\delta}{dt}$  resulta em

$$\frac{d\delta}{dt} M \frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{d\delta}{dt} (P_m - P_e) = \frac{d\delta}{dt} (P_a), \quad (1.64)$$

onde  $P_a$  é a diferença entre a potência mecânica e a potência elétrica.

Logo

$$\frac{M}{2} \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{d\delta}{dt} \right)^2 \right] = P_a \frac{d\delta}{dt}. \quad (1.65)$$

Multiplicando ambos os lados de (1.65) por  $dt$ , obtêm-se

$$\frac{M}{2} d \left[ \left( \frac{d\delta}{dt} \right)^2 \right] = P_a d\delta. \quad (1.66)$$

Integrando a equação entre o equilíbrio pré-falta  $\delta_{prf}$  até um ângulo  $\delta$  qualquer, encontra-se a seguinte expressão:

$$\frac{M}{2} \left( \frac{d\delta}{dt} \right)^2 = \int_{\delta_{prf}}^{\delta} P_a d\delta \quad (1.67)$$

Todavia, pela equação 1.40, a expressão acima pode ser reescrita como se segue:

$$\frac{M}{2} (\omega - \omega_s)^2 = \int_{\delta_{prf}}^{\delta} P_a d\delta \quad (1.68)$$

Logo

$$\omega - \omega_s = \sqrt{\frac{2}{M} \int_{\delta_0}^{\delta} P_a d\delta} \quad (1.69)$$

Na equação acima,  $(\omega - \omega_s)$  é a velocidade relativa da máquina em relação ao barramento infinito. Se o sistema é estável para o primeiro *swing*, então essa velocidade tem que retornar a zero. Logo a condição de estabilidade para o sistema é que exista um ângulo  $\delta_m$  de forma que

$$\int_{\delta_{prf}}^{\delta_m} P_a d\delta = 0. \quad (1.70)$$

Reformula-se a equação (1.70), de forma que durante o período em falta o rotor é acelerado até  $\delta = \delta_c$  e no período pós-falta é desacelerado quando  $\delta_c \leq \delta \leq \delta_m$ . Logo

$$A_a = \int_{\delta_{prf}}^{\delta_c} (P_m - P_e^f) d\delta \quad (1.71)$$

$$A_d = \int_{\delta_c}^{\delta_m} (P_e^{pf} - P_m) d\delta \quad (1.72)$$

Os índices  $(\cdot)_a$  e  $(\cdot)_d$  denotam a área acelerante e desacelerante, respectivamente. O ângulo  $\delta_c$  é escolhido de forma conveniente como o ângulo quando a falta é corrigida. O critério de estabilidade pode ser formulado então como se segue: O sistema é estável se existe um ângulo  $\delta_m$  de forma que as áreas  $A_a$  e  $A_d$  sejam iguais, isto é,  $A_a = A_d$ . A Figura 12 ilustra os conceitos apresentados acima.

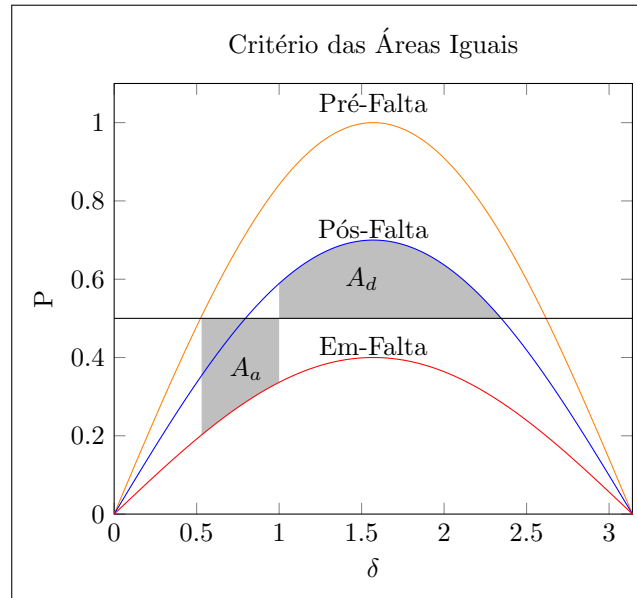


Figura 12 – Critério das Áreas Iguais

### 1.4.2 Análise Qualitativa dos Resultados

Obtido o critério das áreas iguais, é de interesse realizar uma análise qualitativa dos resultados. Para isso considera-se a situação ilustrada na Figura 11.

A potência elétrica pode ser escrita, segundo (1.56), como se segue:

$$P_e = \frac{E_g E_\infty}{X'_d + X_l} \sin(\delta) \quad (1.73)$$

Logo, a potência elétrica máxima é

$$P_{e_{max}} = \frac{E_g E_\infty}{X'_d + X_l}. \quad (1.74)$$

A potência mecânica será igual é dada como se segue:

$$P_{m_i} = P_{e_{max}} \sin(\delta_{prf}) \quad (1.75)$$

Reescrevendo a equação (1.45) em termos de  $P_{e_{max}}$  e  $P_{m_i}$ , encontra-se a seguinte expressão:

$$M \frac{d^2 \delta}{dt^2} = P_{m_i} - P_{e_{max}} \sin(\delta) \quad (1.76)$$

Os pontos de equilíbrio de (1.76) serão, então, dados por:

$$0 = P_{m_i} - P_{e_{max}} \sin(\delta) \rightarrow P_{m_i} = P_{e_{max}} \sin(\delta) \rightarrow \delta = \arcsin\left(\frac{P_{m_i}}{P_{e_{max}}}\right) \quad (1.77)$$

Como durante a análise do SEP, devido a mudanças na topologia da rede, a  $P_{e_{max}}$  varia, é de interesse encontrar os pontos de equilíbrio para as três condições possíveis entre  $P_{m_i}$  e  $P_{e_{max}}$ , ou seja,  $P_{m_i} < P_{e_{max}}$ ,  $P_{m_i} = P_{e_{max}}$  ou  $P_{m_i} > P_{e_{max}}$ . Dessa forma, para as três condições as seguintes conclusões podem ser feitas:

1. Se  $P_{m_i} < P_{e_{max}}$ , há dois pontos de equilíbrio:  $\delta_e$  e  $\pi - \delta_e$  para  $0 \leq \delta_e \leq \pi$ ;
2. Se  $P_{m_i} = P_{e_{max}}$ , há um ponto de equilíbrio:  $\delta_e = \frac{\pi}{2}$  para  $0 \leq \delta_e \leq \pi$ ;
3. Se  $P_{m_i} > P_{e_{max}}$ , não há nenhum ponto de equilíbrio.

Dessa forma, se visualizada a definição de  $\delta_m$ , verifica-se que neste ponto o sistema não desacelera nem acelera, ou seja,  $\frac{d\delta}{dt} = 0$ . Então,  $\delta_m$  é, de fato, um ponto de equilíbrio do sistema pós-falta.



## 2 Análise de Segurança em Sistemas Elétricos de Potência

### 2.1 Método Clássico

O método clássico para a análise de segurança em SEP's é a resolução explícita do conjunto de equações que modelam o sistema, apresentado na seção 1.3, e determinar se após a correção da falta, o sistema alcança uma condição estacionária estável.

As respostas encontradas para a análise via o método clássico são ilustradas nas Figuras 13 e 14

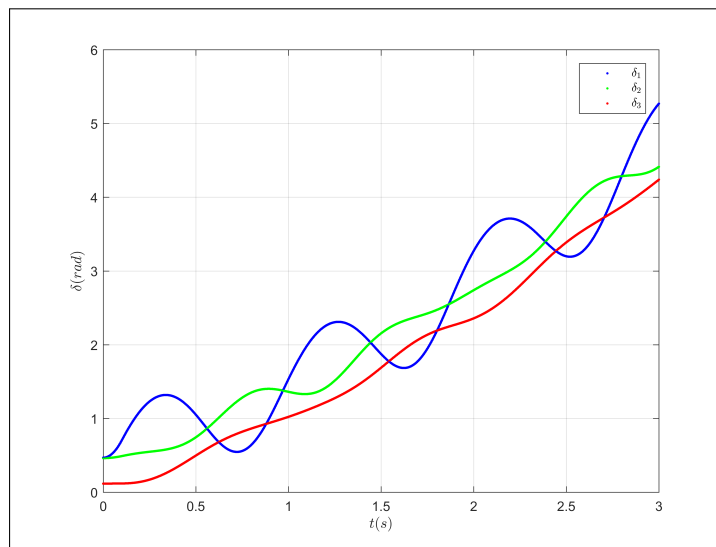


Figura 13 – Ângulo dos geradores vs Tempo (Caso Estável)

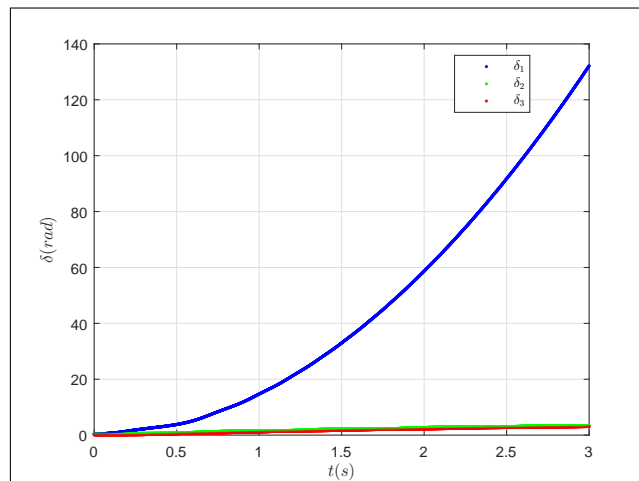


Figura 14 – Ângulo dos geradores vs Tempo (Caso Instável)

Maiores detalhes podem ser encontrados em [Kundur, Balu e Lauby \(1994\)](#).

## 2.2 Métodos Diretos

### 2.2.1 Exemplo Motivador

O exemplo apresentado a seguir, mostra a motivação dos métodos diretos e compara-os com a método clássico da simulação das equações diferenciais. A Figura 15 ilustra a ideia básica por trás do uso dos métodos diretos. Uma bolinha de gude, inicialmente no fundo da rampa, recebe um impulso no sentido de subir a rampa. Dependendo da magnitude do impulso, a bolinha ou irá passar por cima da rampa, o que nesse caso se traduz como instabilidade, ou a bolinha subirá apenas uma parte da rampa e ficará oscilando, ou seja, será estável. Dadas as condições do problema (massa, magnitude do impulso, etc.), para se determinar o resultado do distúrbio na posição de repouso, dois métodos podem ser utilizados:

1. Conhecidas as condições iniciais, resolve-se no domínio do tempo as equações que regem a dinâmica da bolinha e observa-se a posição da bolinha para se determinar quão alto a bolinha alcançou. Esse método é análogo ao método clássico comentado na seção anterior.
2. Calcula-se a energia injetada na bolinha pelo impulso, e compara-se ela com a energia necessária para subir a rampa. Neste método, não há a necessidade de se observar a posição da bolinha enquanto ela sobe a rampa. Métodos com essa característica são conhecidos como métodos diretos.

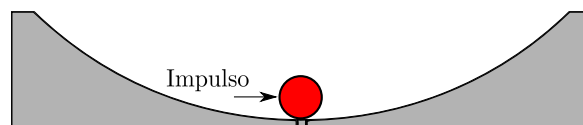


Figura 15 – Bolinha de gude em uma rampa

### 2.2.2 Algoritmo Conceitual para Métodos Diretos em Sistema Elétricos de Potência

Uma contingência é dita transitoriamente estável, se após a eliminação do defeito, o sistema alcança uma condição estacionária aceitável, ou seja, um ponto de equilíbrio assintoticamente estável no período pós-falta ([CHIANG; WU; VARAIYA, 1994](#)). Essencialmente, a análise de segurança, no contexto de estabilidade transitória, determina se durante o período em falta, a trajetória do sistema permanece dentro da região de

estabilidade do ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Todavia, a caracterização precisa da fronteira da região de estabilidade,  $\partial A(x_e)$ , é computacionalmente inviável. Ao invés disso, aproxima-se a fronteira da região de estabilidade como *uma* curva de nível de uma função energia  $V(x)$  para o Sistema Elétrico de Potência. Dessa forma, o problema de determinar toda a fronteira da região de estabilidade  $\partial A(x_e)$  do ponto de equilíbrio assintoticamente estável pós-falta, é transformado no problema de determinar uma energia crítica para o sistema, denotada por  $V_{crit}$ , cuja curva de nível aproxima a parte relevante da região de estabilidade,  $A(x_e)$ .

Dessa forma, supondo que  $V(x)$  seja a função energia para o sistema pós-falta e  $x^f(t)$  seja a trajetória do sistema em falta, o procedimento para análise de estabilidade transitória via métodos diretos, pode ser descrito pelo seguinte algoritmo:

### Algoritmo Conceitual para análise de estabilidade transitória via métodos diretos

1. Determine  $V_{crit}$ ;
2. Calcule o valor da função energia  $V(\cdot)$  no tempo de correção da falta,  $t_{ab}$ ;

$$V_f = V(x^f(t_{ab})) \quad (2.1)$$

3. Se  $V_f < V_{crit}$ , então o sistema pós-falta é estável. Senão, ele é instável.

Verifica-se que o elemento chave para a aplicação dos passos do algoritmo conceitual é encontrar o valor de  $V_{crit}$ . Diversos métodos, existem, para encontrar  $V_{crit}$ . Entre eles, os métodos BCU e PEBS.

#### 2.2.3 Metodologia PEBS

O método PEBS, do inglês *Potential Energy Boundary Surface*, foi proposto por Kakimoto, Ohsawa e Hayashi (1978) e estendido por Athay, Podmore e Virmani (1979).

A fronteira formada com os pontos extremos de energia potencial é conhecida como PEBS, ela pode ser vista como a fronteira da bacia energética ao redor do ponto de equilíbrio assintoticamente estável localizado na parte inferior da bacia. A Figura 16 apresenta o gráfico da energia potencial em relação ao ângulo  $\delta$  para uma máquina conectada em um barramento infinito.

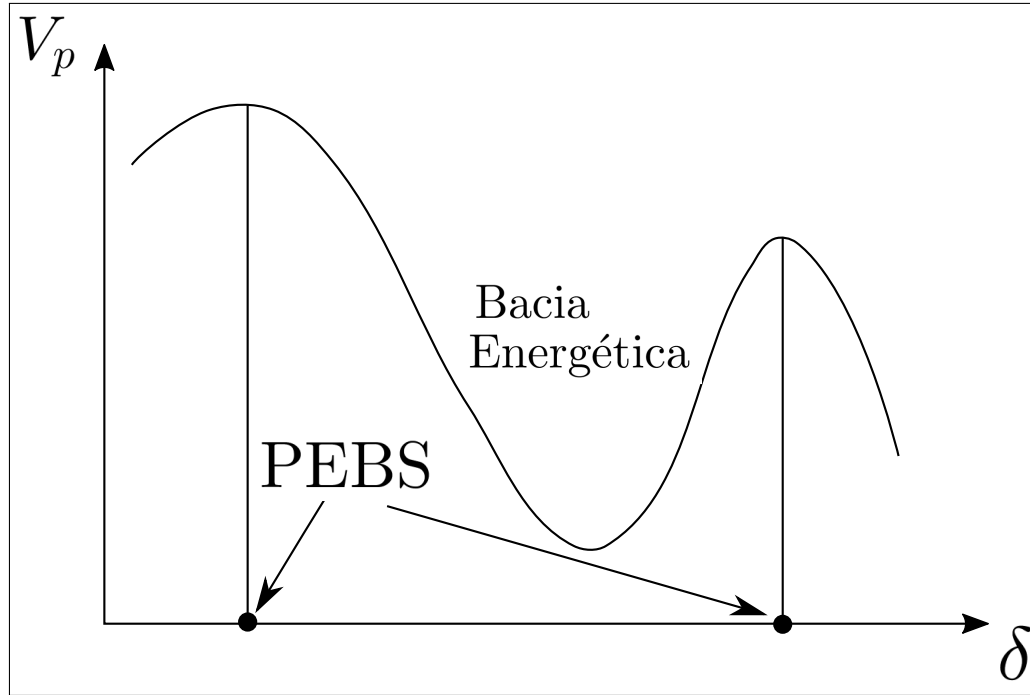


Figura 16 – Energia Potencial vs. Ângulo

O ponto no qual o sistema em falta cruza o PEBS é conhecido na literatura (ATHAY; PODMORE; VIRMANI, 1979) como *exit point*.

O método PEBS pode ser resumido nos seguintes passos como apresentado em (CHIANG; WU; VARAIYA, 1988):

1. Determina-se o ponto onde a trajetória do sistema em falta cruza o PEBS, encontrando o primeiro máximo de energia potencial ao longo desta trajetória. Seja  $\delta^*$  este ponto;
2. Assume-se que  $V_{crit} = V_p(\delta^*)$ ;
3. Se  $V(x^f(t_{ab})) < V_{crit}$  então o sistema pós-falta é estável. Senão ele é instável.

O método PEBS é simples e rápido, entretanto pode fornecer resultados não conservadores de estabilidade.

Ao leitor interessado, em Chiang, Wu e Varaiya (1988), encontra-se a formulação matemática rigorosa do método PEBS.

## 2.2.4 Método do Ponto de Equilíbrio de Controle

O método do ponto de equilíbrio de controle, surgiu na literatura propondo o uso de um ponto de equilíbrio instável de controle, c.u.e.p., localizado na fronteira de estabilidade do ponto de equilíbrio assintoticamente estável pós-falta ( $\partial A(x_s)$ ), o qual é energeticamente mais próximo do ponto no qual a solução abandona a região de estabilidade (CHIANG;

WU; VARAIYA, 1994). Este método, diferentemente do PEBS, sempre fornece resultados conservadores.

O método BCU é um método para o cálculo do ponto de equilíbrio instável de controle. Para encontrar o ponto de equilíbrio de controle, o método BCU utiliza da relação entre o sistema original (1.46) e o sistema gradiente reduzido, apresentada a seguir:

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \omega \\ M\dot{\omega} = -\frac{\partial V_p(\delta)}{\partial \delta} - D\omega = P_m - P_e - D\omega \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema Original} \quad (2.2)$$

$$\dot{\delta} = -\frac{\partial V_p(\delta)}{\partial \delta} = P_m - P_e = f(\delta) \Rightarrow \text{Sistema Gradiente Reduzido} \quad (2.3)$$

Os passos dos método BCU são como se segue (CHIANG; WU; VARAIYA, 1994):

1. A partir da trajetória do sistema em falta, determina-se a trajetória projetado do sistema gradiente reduzido, de forma a detectar o *exit point* ( $\delta^*$ ), no qual a trajetória projetada cruza a  $\partial A(x_e)$  do sistema gradiente reduzido;
2. Utiliza-se o ponto  $\delta^*$  como condição inicial e integra-se o sistema pós-falta reduzido até ser encontrado o primeiro mínimo local de  $\sum_{i=1}^{n_g} \|f_i(\delta)\|$ . Seja este ponto  $\delta_{mgp}$ , denotado como m.g.p., do inglês *minimum gradient point*;
3. Resolve-se  $\sum_{i=1}^{n_g} \|f_i(\delta)\| = 0$  com a solução inicial sendo  $\delta_{mgp}$ . Seja a solução o ponto  $\delta_{cuep}$ ;
4. Assume-se que o c.u.e.p. do sistema em falta seja  $x_{c.u.e.p.} = (\delta_{cuep}, 0)$ ;
5. Assinala-se que  $V_{crit} = V_p(x_{c.u.e.p.})$ ;
6. Se  $V(x^f(t_{ab})) < V_{crit}$  então o sistema pós-falta é estável. Senão ele é instável.

A Figura 17 ilustra o método do ponto de equilíbrio de controle.

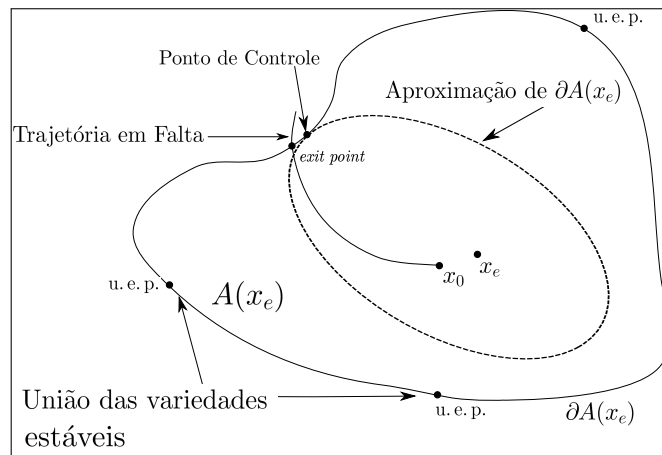


Figura 17 – Método BCU

Maiores resultados podem ser encontrados em Chiang, Wu e Varaiya (1994).

### 2.2.4.1 Shadowing Method

O *Shadowing Method* proposto por Treinen, Vittal e Kliemann (1996) para solucionar problemas na aplicação do Método BCU. Essencialmente é um método recursivo para corrigir a trajetória dos sistema gradiente reduzido (2.3), durante a busca do ponto de equilíbrio instável de controle. Nazareno (2003) apresenta o processo do *Shadowing Method* da seguinte forma: Utiliza-se o fluxo do gradiente na vizinhança da variedade estável do ponto de equilíbrio instável de controle, por um tempo pequeno, para se aproximar do ponto de equilíbrio instável de controle. O resultado obtido é corrigido para um ponto mais próximo da variedade estável e o procedimento é repetido. No final encontra-se uma aproximação para o ponto de equilíbrio instável de controle.

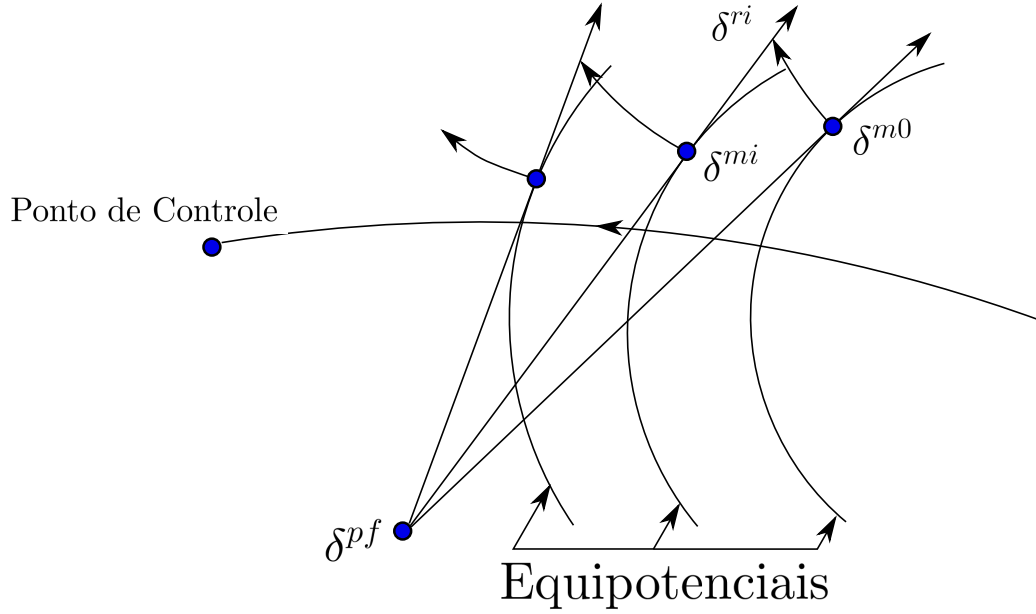
O *Shadowing Method* segue os passos abaixo (NAZARENO, 2003):

1. Define-se  $i \in [1, 2, \dots, N]$ , em que  $N$  é o número de iterações necessárias para se encontrar o ponto de equilíbrio instável de controle;
2. Seja  $\delta^{ri} = \phi_{gs}(\delta^{m(i-1)}, t_i)$ , com  $t_i$  relativamente pequeno;
3. Forma-se um conjunto  $ray R(\delta^{ri}) = \{\delta : \delta = (\delta^{ri} - \delta^{pf})\alpha + \delta^{pf}, \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \alpha \leq 0\}$ ;
4. Determina-se o ponto  $\delta_{mi} \in R(\delta^{ri})$  que satisfaz  $-\frac{dV_p}{d\alpha} = \frac{\partial V_p}{\partial \delta} \frac{d\theta}{d\alpha} = -\frac{\partial V_p}{\partial \delta}(\delta^{mi}) \cdot (\delta^{mi} - \delta^{pf}) = 0$  ou, equivalentemente,  $-\dot{\delta}(\delta^{mi}) \cdot (\delta^{mi} - \delta^{pf}) = 0$ , no qual  $\dot{\delta}$  é o sistema gradiente reduzido (2.3).

onde:

- $\phi_{gs}(\delta^{m(i-1)}, t_i)$  é a solução do sistema gradiente reduzido (2.3), com condição inicial  $\delta^{m(i-1)}$ , ou seja, integra-se numericamente o sistema gradiente reduzido (2.3) por um tempo  $t_i$ , pequeno, e no final se obtém  $\delta^{ri}$ .
- A ultima etapa é, de fato, determinar o ponto no qual  $V_p$  possua um máximo local no conjunto  $R(\delta)$ . Isso pode ser realizado com a utilização do Método de Newton-Raphson com  $\delta^{ri}$  como chute inicial.

O processo é continuado até que um mínimo de  $\sum_{i=1}^{n_g} \|f_i(\delta)\|$  seja encontrado ou se  $i > N$ . A Figura 18 ilustra o método.

Figura 18 – *Shadowing Method*

## 2.3 Metodologia Híbrida dos Classificadores baseados no método BCU

A metodologia utilizada neste trabalho para a análise e filtragem de contingências é uma metodologia híbrida que explora a exatidão da metodologia clássica com a velocidade dos métodos diretos. Classificadores baseados no método BCU e muito parecidos com aqueles propostos em [Chiang et al. \(1998\)](#) foram utilizados de maneira a eliminar rapidamente, nos primeiros estágios de filtragem, de uma lista de contingências aquelas que são estáveis e levar para a simulação no domínio do tempo apenas as contingências incertas. Os 10 filtros classificadores estão listados a seguir:

### 2.3.1 Filtro Preliminar 1

Este filtro é responsável pela detecção de ilhamentos no SEP. Os casos detectados por este filtro são considerados críticos e retirados da simulação.

O funcionamento deste filtro é como se segue ([THEODORO; BENEDITO; ALBERTO, 2010](#))

1. Constrói-se a matriz incidência barra-ramo, conforme a definição a seguir:

**Definição 9.** A matriz incidência barra-ramo, denotada por  $H_{br}$ , associada ao SEP é dada por:

$$h_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o ramo } j \text{ é incidente à barra } i \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad (2.4)$$

onde  $i=1,\dots,n$  e  $j=1,\dots,k$ , sendo  $n$  e  $k$  o número de barras e ramos que compõe o SEP, respectivamente, e  $h_{ij}$  o elemento  $i - j$  da matriz  $H_{br}$ .

2. Obtêm-se a forma escalonada reduzida,  $H_{br}^F$  de  $H_{br}$  sobre o corpo de modulo-2<sup>1</sup>;
3. Percorrem-se as linhas da matriz  $H_{br}^F$  de modo a determinar as que possuem um único elemento não nulo;
4. As colunas onde estão os elementos não nulos anteriores indicam os ramos cuja eliminação causa ilhamento no SEP.

Ao leitor interessado a descrição detalhada do filtro está presente em [Theodoro, Benedito e Alberto \(2010\)](#) e [London, Alberto e Bretas \(2007\)](#).

### 2.3.2 Filtro Preliminar 2

O segundo filtro é baseado na seguinte suposição: Dado um ponto de equilíbrio assintoticamente estável pré-falta para o SEP, então, se existir o ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema pós-falta, os pontos estarão próximos.

Assim, utilizando-se do a.s.e.p. pré-falta como chute inicial, aplica-se o Método de Broyden ([A.21](#)) em conjunto com o Método de Newton-Raphson ([A.14](#)) no sistema pós-falta ([1.46](#)). Caso uma solução for encontrada, então, a contingência prossegue no processo, caso contrário, a contingência é retirada do processo e classificação e simulada no domínio do tempo.

### 2.3.3 Filtro BCU 1

O filtro BCU 1 complementa o resultado apresentado pelo filtro anterior. Para isso são necessárias as seguintes hipóteses:

1. Existe um ponto de equilíbrio assintoticamente estável no sistema pós-falta;
2. O a.s.e.p. pós-falta está suficientemente próximo do a.s.e.p. pré-falta, de forma um método numérico consiga o identificar;
3. O a.s.e.p. pré-falta esta dentro da região de estabilidade do a.s.e.p. pós-falta.

Neste filtro dois parâmetros são utilizados:

- $\delta_{diferença}$ : Maior distância angular entre os ângulos do a.s.e.p. pós-falta;
- $D_{a.s.e.p.}$ : Distância angular entre os a.s.e.p. pré e pós-falta.

<sup>1</sup> Álgebra Booleana ([BOOLE, 1854](#))



Caso, na contingência analisada, esses parâmetros forem maiores que um limite pré-selecionado<sup>2</sup>, classifica-se a contingência como incerta.

### 2.3.4 Filtro BCU 2

O segundo filtro detecta casos estáveis durante a execução do primeiro passo do Método BCU. Para isso são utilizados dois parâmetros:

- $T_{exit}$ : Tempo da simulação do sistema em falta;
- $V_{exit}$ : Diferença de energia entre o a.s.e.p. pré-falta e do *exit point*.

O primeiro parâmetro é uma tentativa de estimar o tamanho da região de estabilidade. O segundo parâmetro indica a possibilidade da existência de instabilidade durante os *swings* subsequentes ao primeiro, uma vez que se a energia potencial armazenada durante o período em falta for muito grande, há possibilidade de instabilidade no *swings* subsequentes.

Dessa forma as faltas que apresentarem um  $T_{exit}$  maior do que o limite pré-selecionado e um  $V_{exit}$  menor do que um limite pré-selecionado são classificados como estáveis, não necessitando a realização dos passos seguintes.

### 2.3.5 Filtro BCU 3

Theodoro (2010) propõe esse filtro com a tentativa de distinguir a ocorrência de um *swing* estável durante o período em falta, o que causaria a detecção errada do cruzamento do PEBS no primeiro passo do Método BCU.

Este filtro utiliza apenas um parâmetro de classificação:

- $V_{p1}$ : Diferença de energia entre o máximo de  $Vp(\delta)$ , após o primeiro ciclo do *Shadowing Method* e o *exit point*.

Caso a diferença seja maior que um limite pré-estabelecido e o intervalo de tempo para a detecção do PEBS é maior que o tempo de abertura para a contingência, então o caso é classificado como estável.

Caso um máximo de energia tenha sido detectado em um intervalo menor do que o tempo de abertura, então prossegue-se com a simulação do SEP até o instante de correção. Se entre os instantes não houve um segundo máximo, então classifica-se a contingência como estável, senão define-se uma nova estimativa para o *exit point* e aplica-se novamente o *Shadowing Method*.

<sup>2</sup> Os valores dos limites serão apresentados no final da apresentação de todos os filtros

### 2.3.6 Filtro BCU 4

Este filtro identifica erros durante a execução do segundo passo do algoritmo BCU. Com esse objetivo, define-se o seguinte parâmetro para a classificação:

- $V_{p2}$ : Diferença de energia entre o *exit point* e o a.s.e.p. pré-falta.

Este parâmetro visa detectar se o *exit point* possui uma energia muito maior do que a do a.s.e.p. pré-falta. Em inúmeros casos, se ocorrida tal situação o m.g.p., encontra-se distante do c.u.e.p. do sistema gradiente reduzido (2.3).

Dessa forma, casos que apresentam um valor de  $V_{p2}$  maior que o limite pré-estabelecido são classificados como incertos, por apresentarem possível erro na detecção do m.g.p., sendo simulados no domínio do tempo.

### 2.3.7 Filtro BCU 5

O quinto filtro é, ainda, baseado no segundo passo do Método BCU. Assim, detecta erros na busca pelo m.g.p. durante a execução do *Shadowing Method*.

O filtro divide-se em 3 etapas:

1. A cada ciclo do *Shadowing Method*, o filtro verifica se o máximo de energia potencial sobre o conjunto  $R(\delta_i)$  foi identificado para um  $\alpha \in (0, \alpha_{max})$ , em que  $\alpha_{max}$  é o limite pré-selecionado para a distância a ser percorrida sobre o conjunto  $R(\delta_i)$  durante a busca pelo PEBS;
2. Verifica-se se uma aproximação do c.u.e.p. foi obtida durante  $N_{shadow}$  iterações, em que  $N_{shadow}$  é o limite de ciclos, pré-selecionado, para a execução do *Shadowing Method*;
3. Finalmente, verifica-se se o valor absoluto da diferença de energia entre o m.g.p.e o *exit point* é maior que um limite pré-definido. Denota-se esse limite pré-definido como  $\beta_{dif}$ .

Se durante as 3 etapas algum dos limites não for respeitado, classifica-se a contingência como incerta e envia-se o caso para ser simulado no domínio do tempo.

### 2.3.8 Filtro BCU 6

O sexto filtro visa evitar o cálculo do c.u.e.p. para o sistema gradiente reduzido (2.3) nos casos estáveis. Este filtro atua no terceiro passo do Método BCU.

Este classificador utiliza 3 parâmetros para realizar a classificação das contingências:

- $V_{p3}$ : Diferença de energia potencial entre o m.g.p. e o ponto de eliminação da falta;

- $F_{max}$ : Valor da norma  $\|f_i(\delta)\|$ ;
- $V_{norm}$ : Margem de energia normalizada. Ela é definida como a diferença de energia potencial entre o m.g.p. e o ponto de eliminação da falta, dividido pela energia cinética obtida pelo sistema durante o período de falta.

O primeiro e o segundo parâmetro visam identificar se o m.g.p. está suficientemente próximo ao c.u.e.p. do sistema gradiente reduzido (2.3), de modo que a energia do m.g.p. pode ser considerada uma aproximação da energia do segundo. Dessa forma evita-se a necessidade do cálculo do c.u.e.p., para isso é verificado se  $\|f(\delta_i)\|$  é menor do que o valor  $F_{max}$  pré-selecionado e se a diferença de energia potencial entre o m.g.p. e o ponto de eliminação da falta é menor do que um segundo valor pré-indicado.

O terceiro índice determina uma margem de energia máxima para casos onde o sistema pós-falta se apresenta estável. Dessa forma se a diferença de energia entre o m.g.p., quando que este pode ser considerado como uma aproximação para o c.u.e.p., e o ponto de eliminação da falta é maior do que a energia cinética adquirida pelo SEP durante o período em falta, multiplicada por um parâmetro pré-selecionado, então a contingência é classificada como estável.

### 2.3.9 Filtro BCU 7

O antepenúltimo filtro identifica falhas durante o cálculo do c.u.e.p. do sistema gradiente reduzido (2.3) na execução do terceiro passo do Método BCU. Dois parâmetros são utilizados para a verificação de erros:

- $N_{c.u.e.p.}$ : Número de iterações do método numérico para a obtenção do c.u.e.p. do sistema gradiente reduzido (2.3);
- $D_{c.u.e.p.}$ : Distância angular entre o m.g.p. e o c.u.e.p. calculado.

Desta maneira este filtro detecta os casos nos quais o método numérico divergiu.

As contingências apresentadas como problemáticas pelo filtro são classificadas como incertas e simuladas no domínio do tempo.

### 2.3.10 Filtro BCU 8

O penúltimo filtro é o último passo do Método BCU. Assim verifica-se se a energia total do SEP no instante da eliminação da falta é menor do que a energia do c.u.e.p., caso isso ocorra a contingência é classificada como estável. Caso contrário classifica-se como incerta, devido ao caráter conservador do Método BCU (CHIANG; WU; VARAIYA, 1994).

### 2.3.11 Simulação no domínio do tempo

No domínio do tempo, são simulados todos os casos identificados como incertos pelos classificadores Preliminar 1, BCU 1, BCU 4, BCU 5, BCU 7 e BCU 8.

Assim, a Figura abaixo apresenta, em resumo, o funcionamento dos filtros.

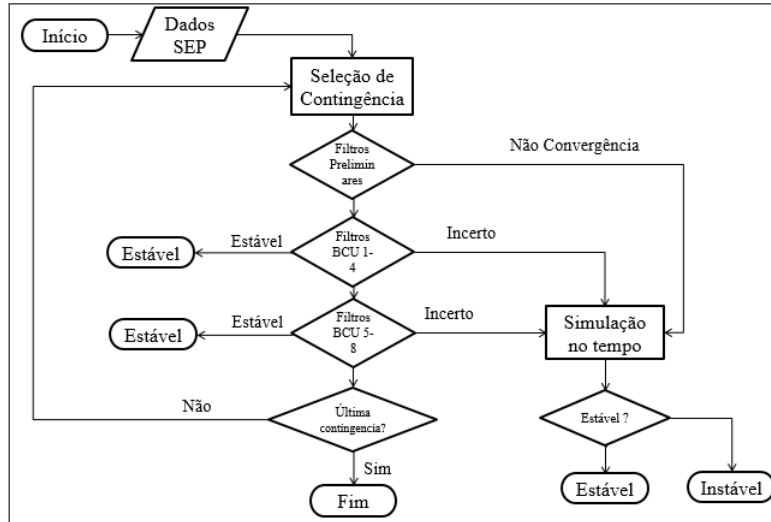


Figura 19 – Fluxograma do Funcionamento dos Filtros

### 2.3.12 Valores dos Limites dos Filtros

Os valores dos limites apresentados na Tabela 1, a seguir, foram retirados de (THEODORO, 2010) e modificados pelo autor.

Tabela 1 – Valores dos Limites dos Filtros

Limite	Valor
$\delta_{dif}$	$105^\circ$
$D_{a.s.e.p.}$	$45^\circ$
$T_{exit}$	1s
$V_{p1}$	0,5
$\alpha_{max}$	3
$N_{shadow}$	160
$\beta_{dif}$	0,02
$V_{p2}$	80
$V_{p3}$	80
$V_{exit}$	40
$V_{norm}$	1,1
$F_{max}$	0,1
$N_{c.u.e.p.}$	305
$D_{c.u.e.p.}$	$5^\circ$

As mudanças nos valores dos limites pelo autor são apresentadas e justificadas a seguir:

1.  $\delta_{dif} = 90^\circ \rightarrow 105^\circ$ : Após inúmeros testes, verificou-se que o valor proposto por [Theodoro \(2010\)](#) era muito restritivo, fazendo com que o Filtro BCU 1 identificasse problemas no cálculo do a.s.e.p. pós-falta, quando na verdade não havia nenhum. Assim, contingências estáveis, que poderiam ser detectadas pelos filtros posteriores, já eram enviadas para a simulação no domínio do tempo nas primeiras etapas de filtragem, aumentando o esforço computacional necessário para a execução da metodologia. O valor utilizado neste trabalho foi obtido empiricamente após inúmeras simulações;
2.  $D_{a.s.e.p.} = 30^\circ \rightarrow 45^\circ$ : Novamente, após a realização de vários testes, observou-se que o valor proposto por [Theodoro \(2010\)](#) era muito restritivo, fazendo com que contingências estáveis fossem detectadas como incertas pelo Filtro BCU 1, prejudicando o processo de filtragem e aumentando o esforço computacional necessário para a execução da metodologia. O valor utilizado neste trabalho foi obtido empiricamente após várias simulações;
3.  $N_{c.u.e.p.} = 30 \rightarrow 305$ : O valor desse limite foi modificado devido a alterações nos métodos numéricos utilizados na metodologia híbrida dos classificadores baseados no método BCU. As alterações realizadas neste trabalho serão apresentadas com maiores detalhes na próxima seção.

É necessário ressaltar que o limite  $\beta_{dif}$  não existia originalmente e foi introduzido neste trabalho. Sua criação foi necessária, pois o Filtro BCU 5 inicialmente, ao invés de calcular o valor absoluto da diferença de energia entre o m.g.p. e o *exit point*, apenas verificava, se a energia no m.g.p. era menor que no *exit point*. Essa mudança foi realizada, pois constatou-se a existência de contingências nas quais a diferença da energia entre o m.g.p. e *exit point* estava próxima da precisão da máquina<sup>3</sup> gerando assim, erros na verificação inicialmente utilizada. O limite criado é, então, um patamar mínimo para a diferença. O seu valor também foi obtido empiricamente, após inúmeras simulações.

É preciso observar que os valores dos outros limites foram mantidos pois, após a realizações de vários testes e simulações, constatou-se que eles eram adequados.

## 2.4 Métodos Numéricos aplicados aos filtros classificadores BCU

Durante a execução deste trabalho, foi observado a existência de erros na identificação de casos estáveis e incertos pelos classificadores, associados há problemas numéricos. Como consequência, o número de casos a serem simulados no domínio do tempo aumentava e o tempo total de execução do programa também.

A causa para a existência de erros era devido ao fato dos classificadores empregarem

<sup>3</sup> Precisão da máquina é menor número representável no computador.

métodos numéricos mais usuais, como o Newton-Raphson (A.14), Gauss-Seidel (A.3) e Runge-Kutta (A.35). Para contornar esse problema, foram adotadas, neste trabalho, metodologias mais robustas. Adotou-se, também, a otimização de rotinas mais utilizadas nos classificadores.

### 2.4.1 Solução de Sistemas não Lineares nos filtros classificadores BCU

Durante a execução do processo de classificação é necessária a solução de um sistema de equações não linear em dois principais momentos, no cálculo do a.s.e.p. pós-falta e no cálculo do c.u.e.p..

No primeiro momento, a seguinte abordagem é utilizada:

1. Utilizando-se o a.s.e.p. pré-falta como solução inicial, resolve-se o sistema pós-falta via o Método de Broyden (A.21), com número máximo de  $N_{Broyden}$  iterações;
2. Se o Método de Broyden (A.21) for convergente, a solução encontrada é utilizada no Método de Newton-Raphson (A.14), com número máximo de  $N_{Newton}$  iterações, como solução inicial. Se o Método de Broyden (A.21) for divergente, então a solução encontrada é desconsiderada e utiliza-se o a.s.e.p. pré-falta como solução inicial do Método de Newton-Raphson (A.14), com número máximo de  $N_{Newton}$  iterações;
3. Se o Método de Newton-Raphson (A.14) for convergente, admite-se a solução como sendo o a.s.e.p. pós-falta. Se o Método de Newton-Raphson (A.14) for divergente, o processo é iniciado novamente com o uso do *flat-start*<sup>4</sup> ao invés do a.s.e.p. pré-falta;
4. Se o Método de Newton-Raphson (A.14) for convergente, admite-se a solução como sendo o a.s.e.p. pós-falta. Senão, indica-se a não existência de um a.s.e.p. pós-falta.

Essa abordagem é mais vantajosa e robusta que a abordagem convencional. Nela, aproveita-se o fato de que algumas soluções iniciais são convergentes para o Método de Broyden (A.21) e divergentes para o Método de Newton-Raphson (A.14). É utilizada nessa abordagem, também, a vantagem da velocidade do Método de Broyden (A.21), pois se ele for convergente, a solução encontrada fornece uma boa aproximação para o Método de Newton-Raphson (A.14), caso for divergente, pouco esforço computacional foi expendido em sua execução. Finalmente, durante a execução deste trabalho, foi verificado, que para algumas contingências estáveis, a utilização do a.s.e.p. pré-falta como solução inicial causava divergência nos métodos numéricos, já a utilização do *flat-start* como solução inicial apresentava bons resultados. Dessa forma, nessa abordagem, foi introduzido, como verificação adicional, o teste do *flat-start* como solução inicial. A Figura 20 ilustra essa abordagem.

No segundo momento, uma abordagem similar à anterior é utilizada. Seus passos são descritos como se segue:

<sup>4</sup> Flat-start é o nome dado para a solução inicial que considera  $|V| = 1$  e  $\theta = 0$  para todas as barras.

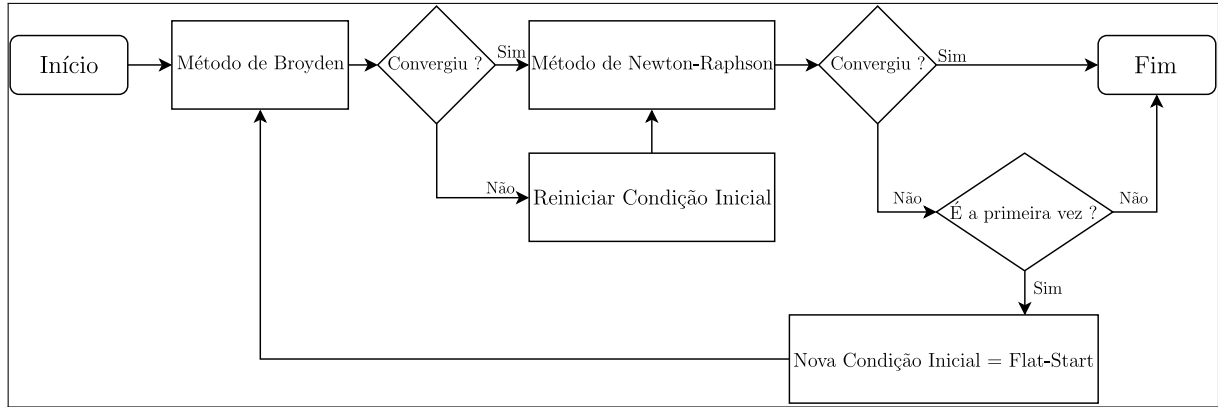


Figura 20 – Abordagem para a resolução de um sistema não linear para o cálculo do a.s.e.p. pós-falta

1. Utilizando-se o m.g.p. como solução inicial, resolve-se o sistema pós-falta via o Método de Broyden (A.21), com número máximo de  $N_{Broyden}$  iterações;
2. Se o Método de Broyden (A.21) for convergente, a solução encontrada é utilizada no Método de Newton-Raphson (A.14), com número máximo de  $N_{Newton}$  iterações, como solução inicial. Se o Método de Broyden (A.21) for divergente, então a solução encontrada é desconsiderada e utiliza-se o m.g.p como solução inicial do Método de Newton-Raphson (A.14), com número máximo de  $N_{Newton}$  iterações;
3. Se o Método de Newton-Raphson (A.14) for convergente, admite-se a solução como sendo o a.s.e.p. pós-falta. Se o Método de Newton-Raphson (A.14) for divergente, indica-se a existência de erros no cálculo do c.u.e.p..

A Figura 21 ilustra essa abordagem.

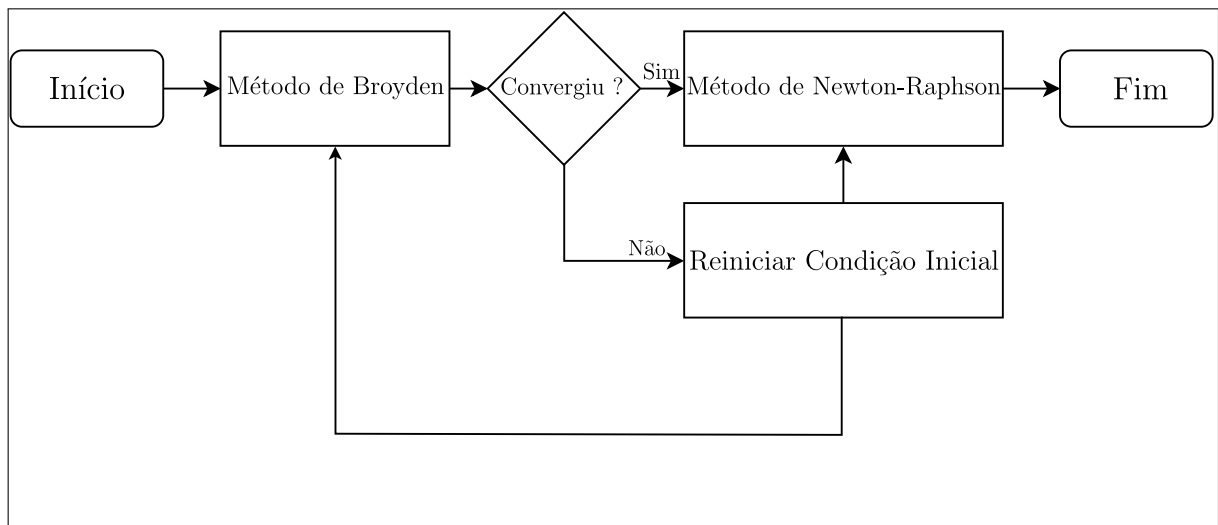


Figura 21 – Abordagem para a resolução de um sistema não linear para o cálculo do c.u.e.p.

Pelos mesmos motivos da abordagem anterior, essa abordagem é mais vantajosa e robusta que a convencional.

Neste trabalho, adotou-se  $N_{Newton} = 300$  e  $N_{Broyden} = 5$ .

### 2.4.2 Solução de Sistemas Lineares nos filtros classificadores BCU

O principal momento em que se é necessário resolver sistemas lineares é na etapa na qual se encontra o vetor de correção durante a solução de sistemas não lineares.

A metodologia usual da solução utilizando o método de Gauss-Seidel (A.3) se prova, em muitos casos, efetiva. Todavia, se o sistema linear for mal-condicionado, o método usual falhará. Dessa forma, neste trabalho, foi adotada uma metodologia mais robusta para o cálculo da solução. Seus passos estão descritos a seguir:

1. Resolve-se o sistema linear via o método de Gauss-Seidel (A.3). Se o método for convergente, a resposta encontrada é adotada como a solução do sistema linear. Senão a resposta obtida é desconsiderada;
2. Resolve-se o sistema linear via o método de Gauss-Seidel melhorado (A.7). Se o método for convergente, a resposta encontrada é adotada como a solução do sistema linear. Senão a resposta obtida é desconsiderada;
3. Resolve-se o sistema linear via o método dos Mínimos-Quadrados (A.10f). A resposta encontrada é adotada como a solução do sistema linear.

Essa abordagem garante que sempre uma solução é encontrada para o sistema linear. Além disso, no intuito de se minimizar o custo computacional, os métodos foram encadeados de maneira que o primeiro é o que requer menos esforço computacional e o último é o que mais requer. Dessa forma para um sistema bem-condicionado, gasta-se menos esforço possível. A Figura 22 ilustra essa abordagem.

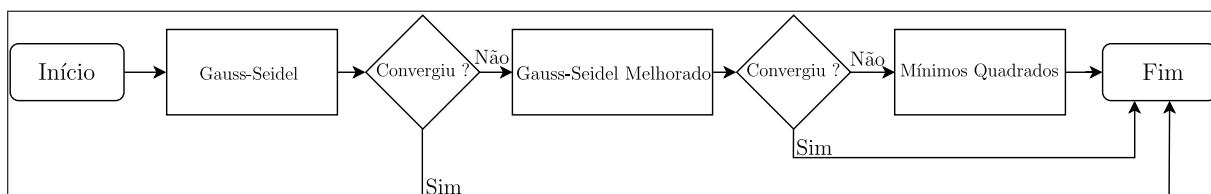


Figura 22 – Abordagem para a resolução de um sistema linear nos filtros classificadores BCU



### 2.4.3 Solução de Sistemas de Equações Diferenciais nos filtros classificadores BCU

A solução de sistemas de equações diferenciais é utilizada em quase todo o processo de classificação. Neste trabalho, dois métodos foram utilizados para a solução, o método de Runge-Kutta (A.35) e o método de Adams-Bashfort-Moulton (A.43). A escolha de qual método fica a encargo do usuário. A Figura 23 ilustra o processo de seleção.

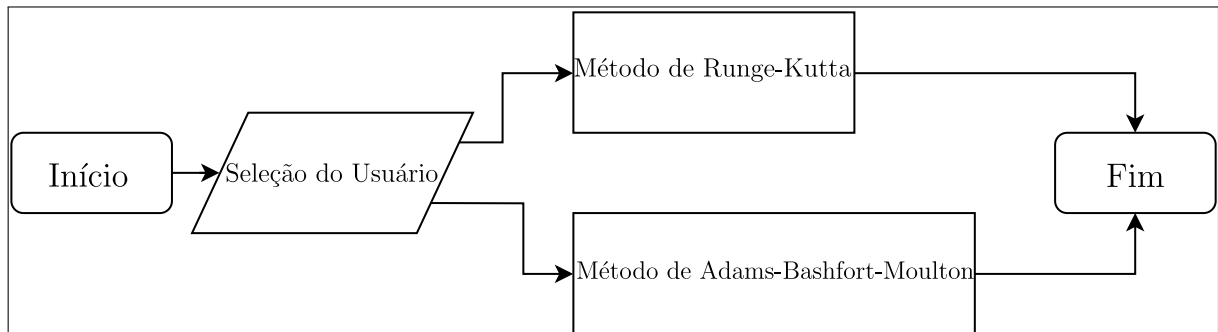


Figura 23 – Processo de seleção do método para a resolução de um sistema de equações diferenciais nos filtros classificadores BCU



### 3 Resultados

Neste trabalho são simulados e avaliados três Sistemas Elétricos de Potência:

- Sistema IEEE Nova Inglaterra de 39 barras ([ATHAY; PODMORE; VIRMANI, 1979](#));
- Sistema Sul Brasileiro Reduzido de 33 barras ([ALVES, 2007](#));
- Sistema Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro Reduzido de 107 barras ([ALVES, 2007](#)).

O primeiro SEP, proposto inicialmente por [Athay, Podmore e Virmani \(1979\)](#), representa o sistema elétrico de potência reduzido da região da Nova Inglaterra nos Estados Unidos na década de 60<sup>1</sup>. Ele foi escolhido por apresentar um número intermediário de contingências a serem analisadas, de maneira que se possa obter dados quantitativos e qualitativos da aplicação dos classificadores. Em segundo lugar, esse SEP é largamente utilizado na literatura para o teste de novas metodologias, dessa forma sua utilização possibilita uma fácil comparação entre os resultados apresentados neste trabalho com o de outros.

O segundo SEP, proposto por [Alves \(2007\)](#), representa o Sistema Elétrico de Potência Sul Brasileiro reduzido. Ele foi escolhido por apresentar a topologia da rede brasileira e ter dados mais recentes que o SEP anterior. Dessa forma é possível verificar se a metodologia híbrida dos classificadores é adequada no contexto nacional.

O último SEP, também retirado de [Alves \(2007\)](#), representa o sistema elétrico potência reduzido das regiões Sul e Sudeste brasileiras. Ele foi escolhido por apresentar as características da topologia nacional e por ser maior que os SEP's anteriores-segundo a [EPE \(2015\)](#)-<sup>2</sup> é formado pelas regiões que representam cerca de 60% do consumo nacional de energia elétrica.

Cada SEP será avaliado com o auxílio dos classificadores e em conjunto será realizada a simulação no domínio do tempo. De posse desses dados, comparam-se os resultados obtidos e verifica-se a velocidade e precisão da metodologia utilizada perante a metodologia clássica.

---

<sup>1</sup> A região da Nova Inglaterra é composta pelos estados de *Connecticut, Maine, Massachusetts, New Hampshire, Rhode Island* e *Vermont*.

<sup>2</sup> "A Empresa de Pesquisa Energética – EPE tem por finalidade prestar serviços na área de estudos e pesquisas destinadas a subsidiar o planejamento do setor energético, tais como energia elétrica, petróleo e gás natural e seus derivados, carvão mineral, fontes energéticas renováveis e eficiência energética, dentre outras." **art 2º da Lei 10.847 de 15 de março de 2004**

### 3.1 IEEE Nova Inglaterra de 39 barras

A Figura abaixo apresenta o diagrama unifilar do sistema IEEE Nova Inglaterra de 39 barras.

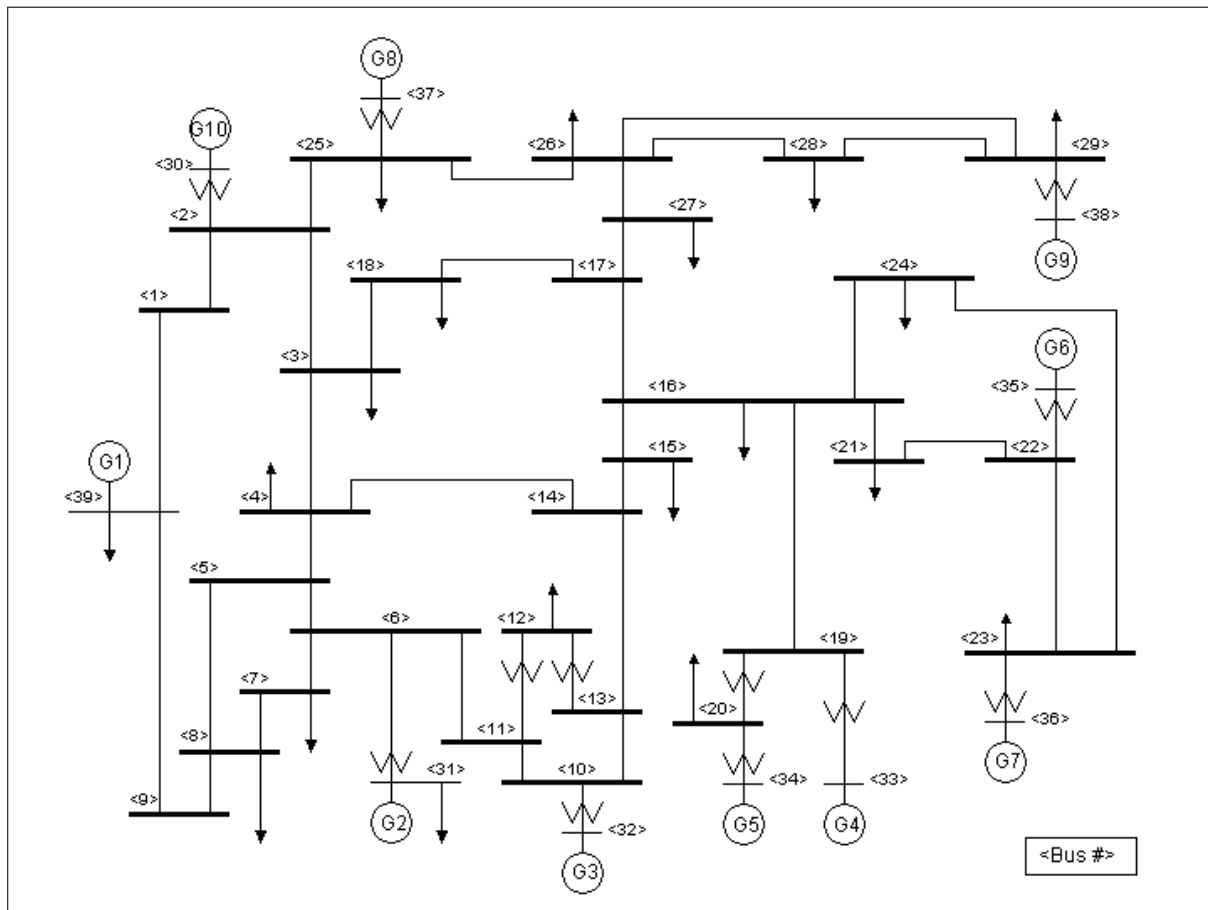


Figura 24 – Diagrama Unifilar do Sistema Elétrico de Potência Nova Inglaterra

Inicialmente, para a obtenção dos dados iniciais do sistema é necessário a resolução do Fluxo de Carga. Seu resultado é apresentado na Tabela 2 abaixo.

Tabela 2 – Fluxo de Carga para o Sistema IEEE Nova Inglaterra

Barra	Tensão (p.u.)	Ângulo (graus)
30	1,048	-4,486
31	0,982	0,116
32	0,983	1,726
33	0,997	2,175
34	1,012	0,738
35	1,049	4,146
36	1,064	6,832

Tabela 2 – Fluxo de Carga para o SEP Sistema IEEE  
Nova Inglaterra (continuação)

Barra	Tensão (p.u.)	Ângulo (graus)
37	1,028	1,24
38	1,027	6,523
39	1,03	-11
1	1,048	-9,462
2	1,049	-6,904
3	1,031	-9,748
4	1,004	-10,542
5	1,005	-9,356
6	1,008	-8,654
7	0,997	-10,856
8	0,996	-11,362
9	1,028	-11,189
10	1,017	-6,27
11	1,013	-7,083
12	1	-7,099
13	1,014	-6,985
14	1,012	-8,654
15	1,016	-9,072
16	1,032	-7,669
17	1,034	-8,666
18	1,032	-9,506
19	1,05	-3,044
20	0,991	-4,455
21	1,032	-5,263
22	1,05	-0,816
23	1,045	-1,015
24	1,038	-7,549
25	1,058	-5,542
26	1,052	-6,798
27	1,038	-8,809
28	1,051	-3,29
29	1,05	-0,533

Adotou-se que todas as 92 contingências simples<sup>3</sup> que poderiam ocorrer sob o

<sup>3</sup> Considera-se que as contingências são curto-circuitos trifásicos francos e apenas uma linha é eliminada

sistema foram consideradas como possíveis e analisadas. Foi considerado, também, um tempo de abertura para o sistema de proteção do SEP de 100ms.

As Tabelas 3, 4 e 5 apresentam os resultados da análise do sistema da Figura 24, utilizando a metodologia híbrida dos classificadores BCU.

Tabela 3 – Resultado dos Classificadores Indicadores de Ilhamento - IEEE Nova Inglaterra

<b>Filtro Classificador</b>	<b>Casos Filtrados</b>
Preliminar 1	22

Tabela 4 – Resultado dos Classificadores Indicadores de Casos Estáveis - IEEE Nova Inglaterra

<b>Filtro Classificador</b>	<b>Casos Filtrados</b>
BCU 2	0
BCU 3	6
BCU 6	0
BCU 8	48

Tabela 5 – Resultado dos Classificadores Indicadores de Casos Incertos - IEEE Nova Inglaterra

<b>Filtro Classificador</b>	<b>Casos Filtrados</b>
Preliminar 2	0
BCU 1	0
BCU 4	0
BCU 5	6
BCU 7	4
BCU 8	6

Tabela 6 – Resultado dos Classificadores - IEEE Nova Inglaterra

<b>Filtro Classificador</b>	<b>Casos Incertos</b>	<b>Casos Críticos</b>	<b>Casos Estáveis</b>
Preliminar 1	0	0	0
BCU 1	0	0	0
BCU 4	0	0	0
BCU 5	6	0	6
BCU 7	4	2	2
BCU 8	6	4	2

A Tabela 6 apresenta o resultado da simulação no domínio do tempo dos casos detectados como incertos pelos classificadores.

A Figura 25 ilustra o processo de classificação, em que cada barra indica o número total de contingências críticas e contingências estáveis apresentadas a cada filtro, durante o processo de filtragem. É preciso ressaltar que os filtros funcionam de maneira sequencial, as contingências classificadas como críticas e estáveis são eliminadas do processo de filtragem e as classificadas como incertas são retiradas do processo de filtragem e são simuladas no domínio do tempo. Dessa forma, a classificação de uma contingência estável como incerta, durante os primeiros filtros é prejudicial ao processo de classificação, pois impossibilita a detecção dos casos estáveis pelos filtros subsequentes e aumenta o número de casos a serem simulados no domínio do tempo.

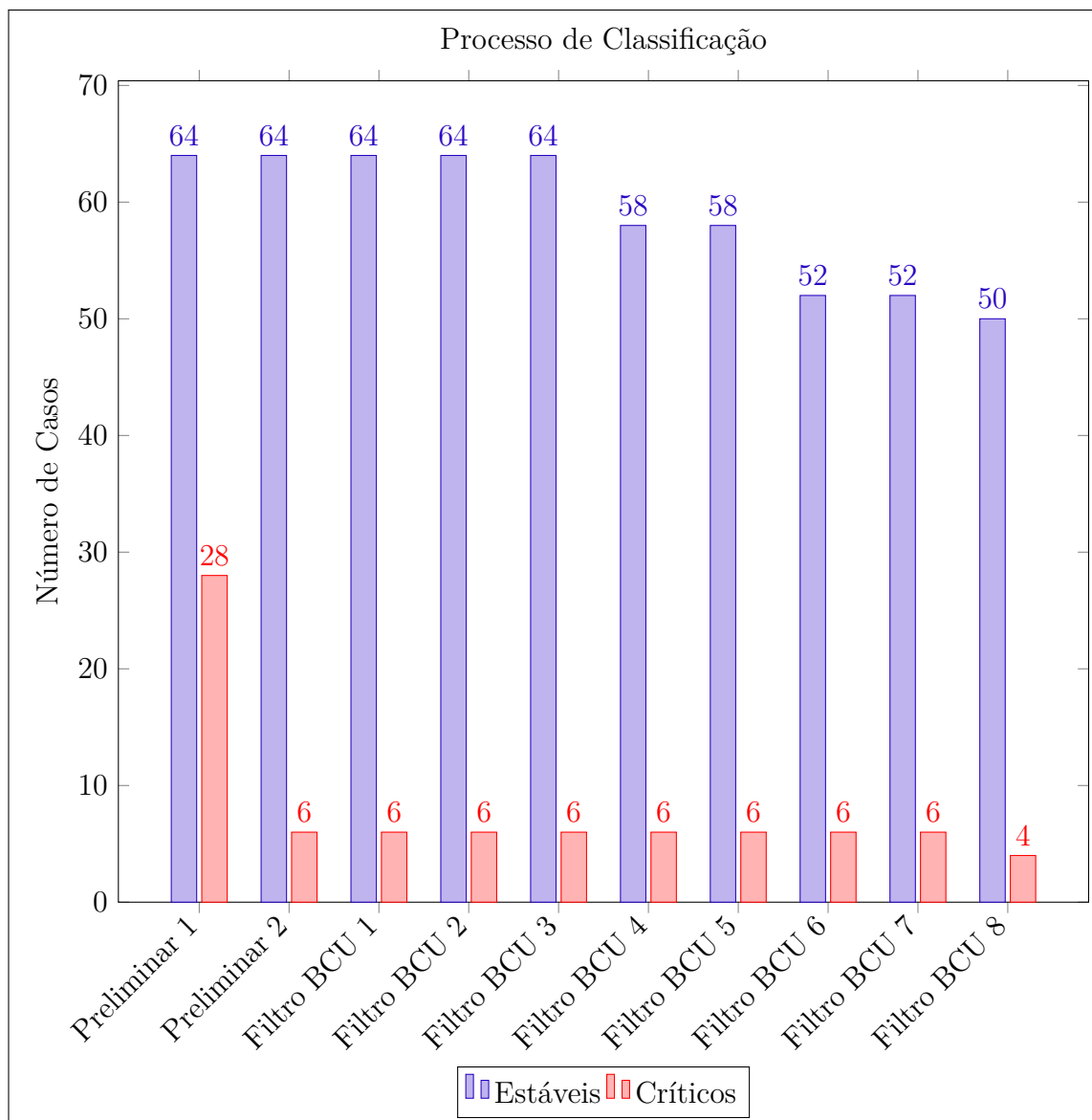


Figura 25 – Processo de Classificação-IEEE Nova Inglaterra

Com os resultados obtidos, observa-se que ao filtro Preliminar 1, foram apresentadas 92

contingências, das quais 28 eram críticas e 64 eram estáveis. Nesta etapa, foram detectados 22 ilhamentos, reduzindo o número de casos críticos apresentados aos filtros subsequentes para 6. Deve-se ressaltar que uma inspeção visual rigorosa na topologia do SEP foi realizada e indicou o resultado apresentado pelo filtro Preliminar 1 como sendo consistente.

Ao filtro Preliminar 2, foram apresentadas 70 contingências, das quais 6 eram críticas e 64 estáveis. O filtro não identificou erros durante o cálculo do ponto de equilíbrio assintoticamente estável pós-falta. Assim nenhuma contingência foi classificada como incerta.

Para o filtro BCU 1, foram apresentadas 70 contingências, das quais 6 eram críticas e 64 estáveis. Nesta etapa, nenhuma contingência foi classificada como incerta.

Ao filtro BCU 2, foram apresentadas 70 contingências, das quais 6 eram críticas e 64 estáveis. Nesta etapa, nenhuma contingência foi classificada como incerta.

Para o filtro BCU 3, foram apresentadas 70 contingências, das quais 6 eram críticas e 64 estáveis. O filtro detectou 6 das 64 casos estáveis. Dessa forma, para o filtro em sequência serão apresentadas 58 contingências estáveis.

Ao filtro BCU 4, foram apresentados 64 contingências, das quais 58 eram estáveis e 6 eram críticas, mas nenhuma contingência crítica foi detectada.

Ao filtro BCU 5, foram apresentadas 64 contingências, das quais 58 eram estáveis e 6 eram críticas. Nesta etapa, 6 contingências estáveis foram detectadas como incertas, dessa forma, das 58 contingências estáveis apresentados ao filtro, apenas 52 continuaram no processo de filtragem.

Para filtro BCU 6, foram apresentadas 58 contingências, das quais 52 eram estáveis e 6 eram críticas, mas nenhuma contingência estável foi detectada.

Ao filtro BCU 7, foram apresentadas 58 contingências, das quais 52 eram estáveis e 6 eram críticas. Nesta etapa, 2 contingências estáveis foram detectadas como incertas, dessa forma, das 52 contingências estáveis apresentadas ao filtro, apenas 50 continuaram no processo de filtragem. Também, neste filtro, 2 contingências críticas foram detectadas como incertas e retiradas do processo de classificação para serem simuladas no domínio do tempo.

Para o filtro BCU 8, foram apresentadas 54 contingências, das quais 50 eram estáveis e 4 eram críticas. Nesta etapa, o filtro identificou 48 das 50 contingências estáveis, classificou 4 contingências críticas como incertas e indicou 2 contingências estáveis como incertas.

No domínio do tempo, foram simulados todos os casos identificados como incertos pelos classificadores Preliminar 1, BCU 1, BCU 4, BCU 5, BCU 7 e BCU 8.

É necessário observar que o processo de classificação reduziu o número de casos a serem simulados no domínio do tempo em 74 casos, com a manutenção da exatidão.

Finalmente, verifica-se que o sistema apresenta 28 contingências críticas, das quais 22 provocam ilhamentos e 6 são instáveis, e 64 contingências estáveis.

A Tabela 7 apresenta os tempos exigidos para a execução de cada metodologia. O tempo de processamento refere-se, novamente, à execução em um processador Intel Core i7 5500U



Tabela 7 – Comparação do Esforço Computacional de cada Metodologia

Metodologia	Tempo(s)
Classificadores BCU	4,631
Clássica	9,5508

com *clock* de 2,4 GHz. Como esperado, a utilização dos classificadores BCU apresentou melhor desempenho, obtendo os mesmos resultados de avaliação de segurança com menor tempo de processamento.

É importante evidenciar que para a análise clássica o filtro Preliminar 1, detecção de ilhamentos, também foi aplicado, assim foi evitado a simulação desnecessária desses casos.



Tabela 8 – Fluxo de Carga para o Sistema Sul Brasileiro Reduzido

Barra	Tensão (p.u.)	Ângulo (graus)
800	1,049	0
808	1,045	11,005
810	1,045	4,655
904	1,045	-12,267
915	1,049	-9,063
919	1,02	14,546
925	1,045	7,391
814	0,989	-24,51
824	1,054	-7,201
839	1	2,049
840	0,994	-0,89
848	1,006	3,503
856	1,057	-1,896
895	0,995	-22,044
896	1,057	3,727
897	1,066	4,818
898	1,022	6,845
933	1,053	-7,588
934	0,996	-7,032
938	1,027	-27,131
939	0,99	-29,614
955	1,082	-16,801
959	0,995	-22,798
960	0,987	-25,672
964	1,073	-24,577
965	0,997	-26,887
976	1,051	-27,204
995	1,081	-14,389
1030	1,082	-15,33
1047	1,029	7,879
1060	1,067	-0,198
1210	0,996	-29,753
2458	1	1,732

Adotou-se que todas as 100 contingências simples<sup>4</sup> que poderiam ocorrer sob o sistema foram consideradas como possíveis e analisadas. Foi considerado, também, um tempo de abertura para o sistema de proteção do SEP de 100ms.

As Tabelas 9, 10 e 11 apresentam os resultados da análise do sistema da Figura 26, utilizando a metodologia híbrida dos classificadores BCU.

Tabela 9 – Resultado dos Classificadores Indicadores de Ilhamento - Sistema Sul Brasileiro Reduzido

<b>Filtro Classificador</b>	<b>Casos Filtrados</b>
Preliminar 1	16

Tabela 10 – Resultado dos Classificadores Indicadores de Casos Estáveis - Sistema Sul Brasileiro Reduzido

<b>Filtro Classificador</b>	<b>Casos Filtrados</b>
BCU 2	0
BCU 3	0
BCU 6	0
BCU 8	55

Tabela 11 – Resultado dos Classificadores Indicadores de Casos Incertos - Sistema Sul Brasileiro Reduzido

<b>Filtro Classificador</b>	<b>Casos Filtrados</b>
Preliminar 2	8
BCU 1	0
BCU 4	0
BCU 5	0
BCU 7	0
BCU 8	15

A Tabela 12 apresenta o resultado da simulação no domínio do tempo dos casos detectados como incertos pelos classificadores.

<sup>4</sup> Considera-se que as contingências são curto-circuitos trifásicos francos e apenas uma linha é eliminada

Tabela 12 – Resultado dos Classificadores - Sistema Sul Brasileiro Reduzido

<b>Filtro</b> <b>Classificador</b>	<b>Casos</b> <b>Incertos</b>	<b>Casos</b> <b>Críticos</b>	<b>Casos</b> <b>Estáveis</b>
Preliminar 1	8	8	0
BCU 1	0	0	0
BCU 4	6	6	0
BCU 5	6	0	6
BCU 7	4	2	2
BCU 8	15	7	8

A Figura 27 ilustra o processo de classificação, em que cada barra indica o número total de contingências críticas e contingências estáveis apresentadas a cada filtro, durante o processo de filtragem.

Com os resultados obtidos, observa-se que ao filtro Preliminar 1, foram apresentadas 100 contingências, das quais 37 eram críticas e 63 eram estáveis. Nesta etapa, foram detectados 16 ilhamentos, reduzindo o número de casos críticos apresentados ao filtros subsequentes para 21. Uma inspeção visual rigorosa na topologia do SEP foi realizada e indicou o resultado apresentado pelo filtro Preliminar 1 como sendo consistente.

Ao filtro Preliminar 2, foram apresentadas 84 contingências, das quais 21 eram críticas e 63 eram estáveis. O filtro identificou 8 contingências como incertas, das quais 8 eram críticas. Para o filtro BCU 1, foram apresentadas 76 contingências, das quais 13 eram críticas e 63 eram estáveis. Nesta etapa, nenhuma contingência foi classificada como incerta.

Ao filtro BCU 2, foram apresentadas 76 contingências, das quais 13 eram críticas e 63 eram estáveis. Nesta etapa, nenhuma contingência foi classificada como incerta.

Ao filtro BCU 3, foram apresentadas 76 contingências, das quais 13 eram críticas e 63 eram estáveis. Nesta etapa, nenhuma contingência foi classificada como incerta.

Ao filtro BCU 4, foram apresentadas 76 contingências, das quais 13 eram críticas e 63 eram estáveis. O filtro identificou 6 contingências como incertas, das quais 6 eram críticas.

Ao filtro BCU 5, foram apresentadas 70 contingências, das quais 63 eram estáveis e 7 eram críticas, mas nenhuma contingência foi detectada como incerta.

Ao filtro BCU 6, foram apresentadas 70 contingências, das quais 63 eram estáveis e 7 eram críticas. Neste filtro, nenhuma contingência estável foi detectada.

Ao filtro BCU 7, foram apresentadas 70 contingências, das quais 63 eram estáveis e 7 eram críticas, mas nenhuma contingência foi detectada como incerta.

Para o filtro BCU 8, foram apresentadas 70 contingências, das quais 63 eram estáveis e 7 eram críticas. Nesta etapa, o filtro identificou 55 das 63 contingências estáveis, classificou 7 contingências críticas como incertas e indicou 8 contingências estáveis como incertas.

No domínio do tempo, foram simulados todos os casos identificados como incertos pelos classificadores Preliminar 1, BCU 1, BCU 4, BCU 5, BCU 7 e BCU 8.

É necessário observar que o processo de classificação reduziu o número de casos a serem

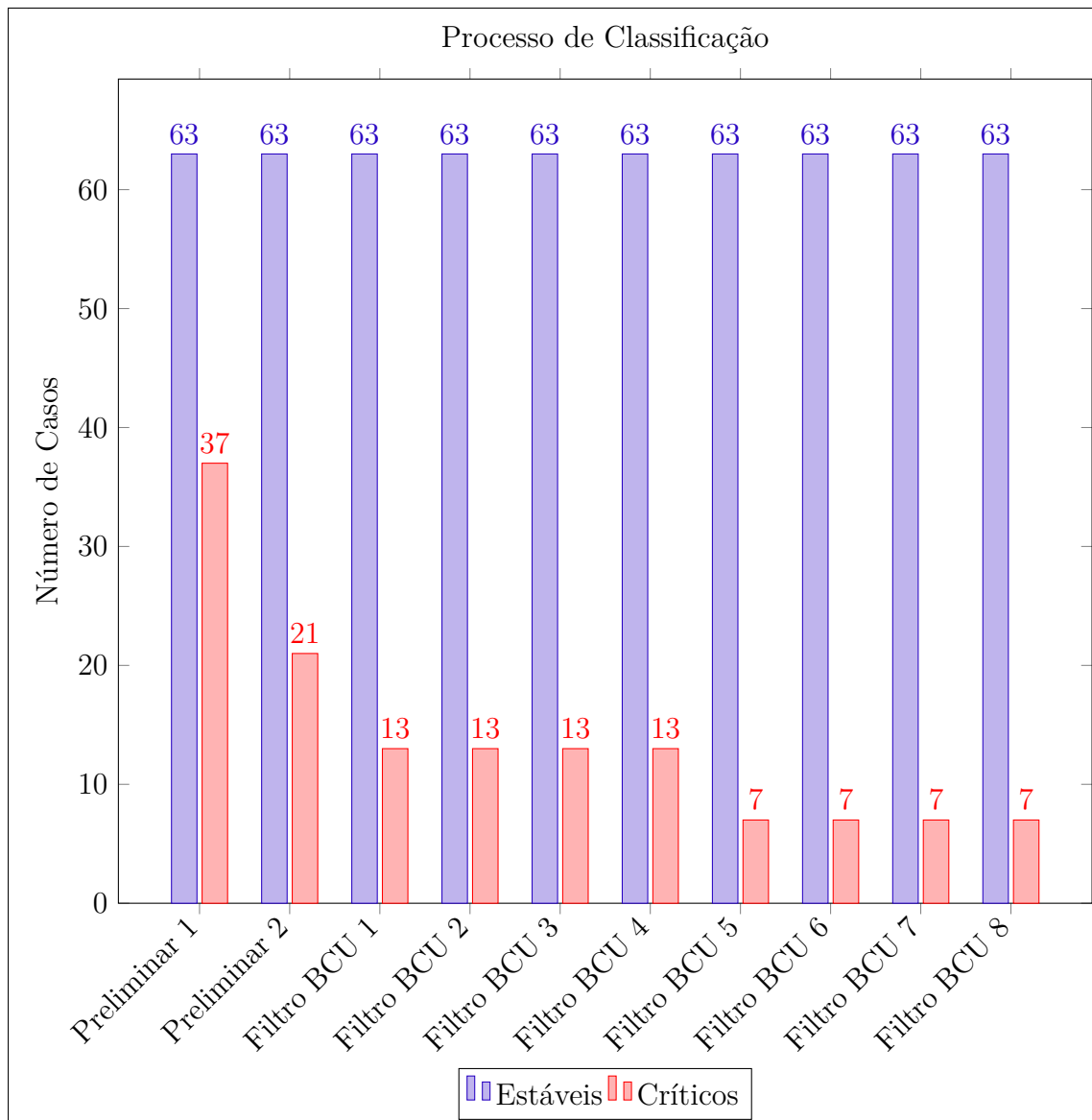


Figura 27 – Processo de Classificação - Sistema Sul Brasileiro Reduzido

simulados no domínio do tempo em 71 casos, com a manutenção da exatidão.

Finalmente, verifica-se que o sistema apresenta 37 contingências críticas, das quais 16 provocam ilhamentos e 21 são instáveis, e 63 contingências estáveis.

Tabela 13 – Comparação do Esforço Computacional de cada Metodologia

Metodologia	Tempo(s)
Classificadores BCU	2,846
Clássica	8,391

A Tabela 13 apresenta os tempos exigidos para a execução de cada metodologia. Novamente, o tempo de processamento refere-se, novamente, à execução em um processador Intel Core i7 5500U com *clock* de 2,4 GHz. Como esperado, a utilização dos classificadores BCU

apresentou melhor desempenho, obtendo os mesmos resultados de avaliação de segurança com menor tempo de processamento.





Tabela 14 – Fluxo de Carga para o SEP Sistema Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro Reduzido (continuação)

Barra	Tensão (p.u.)	Ângulo (graus)
22	1	-19,92
35	1	-26,985
48	1	-42,992
300	1,02	-18,974
301	1,01	-19,433
302	1,02	-18,302
303	1,02	-24,32
305	1	-22,18
500	1,02	-21,608
800	1,02	-6,706
808	1,02	4,422
810	1,02	-3,301
904	1,02	-14,742
915	1,02	-12,59
919	1	6,7
925	1,02	0,558
4523	1,01	-58,06
4596	1	-65,497
4804	1	-71,64
86	1,029	-42,992
100	1,054	-28,552
101	1,064	-36,432
102	1,054	-43,177
103	1,065	-43,482
104	1,054	-52,036
106	1,043	-52,921
120	1,037	-41,436
122	1,059	-41,921
123	1,029	-46,29
126	1,033	-43,731
131	1,024	-27,354
134	1,024	-26,461
136	1,025	-33,189
138	1,031	-44,336

Tabela 14 – Fluxo de Carga para o SEP Sistema Sul  
Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro Reduzido  
(continuação)

Barra	Tensão (p.u.)	Ângulo (graus)
140	1,016	-54,037
210	1,046	-27,588
213	1,044	-28,817
216	1,04	-27,878
217	1,046	-32,318
218	1,019	-40,175
219	1,023	-39,033
220	1,041	-31,941
225	1,053	-34,653
228	1,01	-40,748
231	1,056	-48,072
233	1,035	-36,287
234	1,022	-39,13
320	1,047	-24,076
325	1,044	-23,728
326	1,029	-25,973
360	1,045	-22,469
370	1,048	-25,454
396	1,03	-25,855
535	1,034	-26,066
536	1,022	-28,865
814	1,014	-37,763
824	1,019	-16,95
834	0,987	-28,646
839	0,981	-5,629
840	0,968	-8,731
848	0,978	-4,721
856	1,021	-10,252
895	1,027	-35,439
896	1,005	-3,399
897	1,017	-2,069
898	0,992	-1,19
933	1,019	-17,332
934	1,001	-17,532

Tabela 14 – Fluxo de Carga para o SEP Sistema Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro Reduzido (continuação)

Barra	Tensão (p.u.)	Ângulo (graus)
938	1,02	-37,579
939	1,016	-40,106
955	1,043	-23,454
959	1,015	-35,134
960	0,988	-37,722
964	1,022	-30,979
965	1,017	-33,521
976	0,997	-33,74
995	1,039	-19,112
1015	1,007	-39,998
1030	1,04	-20,421
1047	0,997	-0,164
1060	1,025	-7,352
1210	0,977	-36,578
1503	1,054	-49,818
1504	1,019	-53,842
2458	0,983	-5,868
4501	1,062	-58,524
4521	1,051	-63,659
4522	1,055	-65,744
4530	1,055	-70,025
4532	1,055	-70,025
4533	1,023	-70,35
4542	1,035	-69,197
4552	1,019	-76,66
4562	1,026	-84,755
4572	1,023	-81,887
4582	1,033	-87,519
4592	1,023	-64,32
4623	1,04	-68,564
4703	1,011	-71,442
4805	1,031	-75,348
4807	1,033	-76,636
4862	1,056	-74,947

Adotou-se que todos as 342 faltas simples que poderiam ocorrer sob o sistema foram consideradas como possíveis e analisadas. Foi considerado, também, um tempo de abertura para o sistema de proteção do SEP de 100ms.

As Tabelas 15, 16 e 17 apresentam os resultados da análise do sistema da Figura 28, utilizando a metodologia híbrida dos classificadores BCU.

Tabela 15 – Resultado dos Classificadores Indicadores de Ilhamento - Sistema Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro Reduzido

<b>Filtro Classificador</b>	<b>Casos Filtrados</b>
Preliminar 1	72

Tabela 16 – Resultado dos Classificadores Indicadores de Casos Estáveis - Sistema Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro Reduzido

<b>Filtro Classificador</b>	<b>Casos Filtrados</b>
BCU 2	37
BCU 3	50
BCU 6	0
BCU 8	110

Tabela 17 – Resultado dos Classificadores Indicadores de Casos Incertos - Sistema Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro Reduzido

<b>Filtro Classificador</b>	<b>Casos Filtrados</b>
Preliminar 2	10
BCU 1	16
BCU 4	0
BCU 5	9
BCU 7	33
BCU 8	2

Tabela 18 – Resultado dos Classificadores - Sistema Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro Reduzido

<b>Filtro Classificador</b>	<b>Casos Incertos</b>	<b>Casos Críticos</b>	<b>Casos Estáveis</b>
Preliminar 1	10	10	0
BCU 1	16	15	1
BCU 4	0	0	0
BCU 5	9	0	9
BCU 7	33	0	33
BCU 8	2	0	2

A Tabela 18 apresenta o resultado da simulação no domínio do tempo dos casos detectados como incertos pelos classificadores.

A Figura 29 ilustra o processo de classificação, em que cada barra indica o número total de contingências críticas e contingências estáveis apresentadas a cada filtro, durante o processo de filtragem.

Com os resultados obtidos, observa-se que ao filtro Preliminar 1, foram apresentadas 342 contingências, das quais 99 eram críticas e 243 eram estáveis. Nesta etapa, foram detectados 72 ilhamentos, reduzindo o número de casos críticos apresentados aos filtros subsequentes para 27. Deve-se ressaltar que uma inspeção visual rigorosa na topologia do SEP foi realizada e indicou o resultado apresentado pelo filtro Preliminar 1 como sendo consistente.

Ao filtro Preliminar 2, foram apresentados 270 casos, dos quais 27 eram críticos e 243 estáveis. O filtro identificou 10 casos como incertos, dos quais 10 eram críticos.

Para o filtro BCU 1, foram apresentados 260 casos, dos quais 17 eram críticos e 243 eram estáveis. O filtro indicou 16 casos como incertos, dos quais 15 eram críticos e 1 era estável.

Ao filtro BCU 2, foram apresentados 244 casos, dos quais 242 eram estáveis e 2 eram críticos. 37 dos 242 casos estáveis foram identificados nesta etapa.

Para o filtro BCU 3, foram apresentados 207 casos, 205 eram estáveis e 2 eram críticos. O filtro detectou 50 dos 205 casos estáveis.

Ao filtro BCU 4, foram apresentados 157 casos, dos quais 155 eram estáveis e 2 eram críticos, mas nenhum caso crítico foi detectado.

Ao filtro BCU 5, foram apresentados 157 casos, dos quais 155 eram estáveis e 2 eram críticos. Nesta etapa 9 casos estáveis foram detectados como incertos, dessa forma, dos 155 casos estáveis apresentados ao filtro, apenas 146 continuaram no processo de filtragem.

Para o filtro BCU 6, foram apresentados 148 casos, dos quais 146 eram estáveis e 2 eram críticos, mas nenhum caso estável foi detectado.

Ao filtro BCU 7, foram apresentados 148 casos, dos quais 146 eram estáveis e 2 eram críticos. Nesta etapa 33 casos estáveis foram detectados como incertos, dessa forma, dos 146 casos estáveis apresentados ao filtro, apenas 113 continuaram no processo de filtragem.

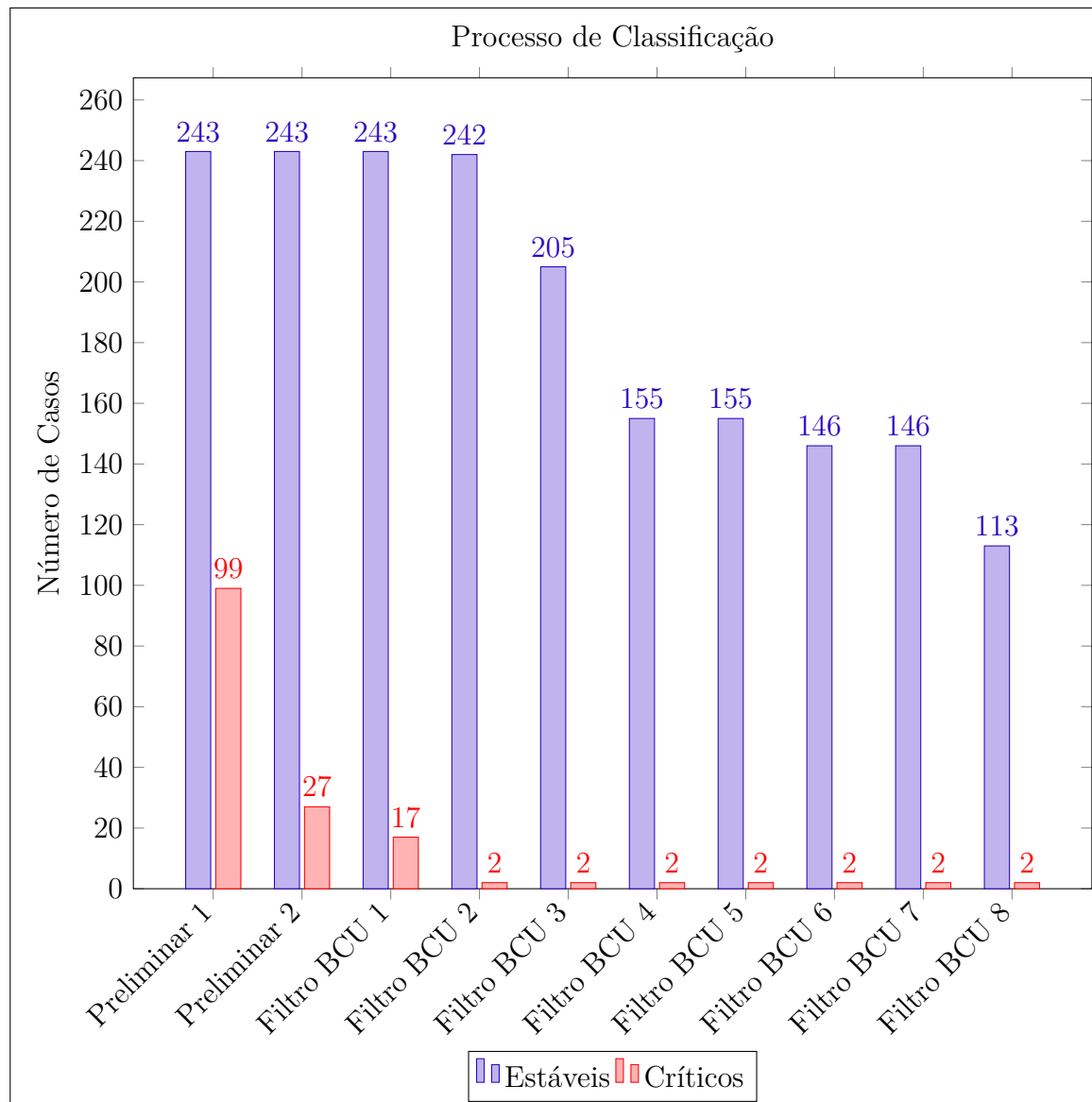


Figura 29 – Processo de Classificação - Sistema Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro Reduzido

Para o filtro BCU 8, foram apresentados 115 casos, dos quais 113 eram estáveis e 2 eram instáveis. Nesta etapa, o filtro identificou 110 dos 113 casos estáveis e classificou 2 casos estáveis como incertos.

No domínio do tempo, foram simulados todos os casos identificados como incertos pelos classificadores Preliminar 1, BCU 1, BCU 4, BCU 5, BCU 7 e BCU 8.

É necessário observar que o processo de classificação reduziu o número de casos a serem simulados no domínio do tempo em 73 casos, com a manutenção da exatidão.

Finalmente, verifica-se que o sistema apresenta 99 contingências críticas, das quais 72 provocam ilhamentos e 27 são instáveis, e 243 contingências estáveis.

Tabela 19 – Comparação do Esforço Computacional de cada Metodologia

Metodologia	Tempo(s)
Classificadores BCU	88,801
Clássica	166,188

A Tabela 19 apresenta os tempos exigidos para a execução de cada metodologia. Novamente, o tempo de processamento refere-se, novamente, à execução em um processador Intel Core i7 5500U com *clock* de 2,4 GHz. Como esperado, a utilização dos classificadores BCU apresentou melhor desempenho, obtendo os mesmos resultados de avaliação de segurança com menor tempo de processamento.

### 3.4 Comparação de Desempenho e Exatidão

Nesta seção serão comparados o desempenho e a exatidão dos resultados do programa modificado, utilizado neste trabalho, com o original desenvolvido por [Theodoro \(2010\)](#).

#### 3.4.1 Comparação para o Sistema IEEE Nova Inglaterra de 39 barras

A Tabela 20 apresenta os tempos exigidos para a execução da metodologia híbrida dos classificadores BCU para o programa modificado e o original.

Tabela 20 – Comparação de Desempenho - Sistema IEEE Nova Inglaterra

Programa	Tempo(s)
Modificado	4,631
Original	17,239

Verifica-se que o programa modificado apresenta desempenho superior ao original. A razão para isso são as otimizações no código e a implementação de métodos numéricos mais robustos e rápidos no programa original. Ressalta-se que as melhorias também se estenderam para a metodologia clássica, pois o tempo exigido para a execução da metodologia híbrida dos classificadores BCU no programa original (17,239 segundos) é superior aos 9,5508 segundos necessários para se executar a metodologia clássica no programa modificado (Tabela 7).

A Tabela 21 apresenta o número total de contingências críticas detectadas pela metodologia híbrida dos classificadores BCU executada no programa modificado e no programa original.

Tabela 21 – Comparação de Exatidão - Sistema IEEE Nova Inglaterra

<b>Programa</b>	<b>Casos Críticos</b>
Modificado	28
Original	28

Assim, para o Sistema IEEE Nova Inglaterra de 39 barras, o programa original e o modificado apresentaram os mesmos resultados.

### 3.4.2 Comparação para o Sistema Sul Brasileiro Reduzido de 33 barras

A Tabela 22 apresenta os tempos exigidos para a execução da metodologia híbrida dos classificadores BCU para o programa modificado e o original.

Tabela 22 – Comparação de Desempenho - Sistema Sul Brasileiro Reduzido

<b>Programa</b>	<b>Tempo(s)</b>
Modificado	2,846
Original	12,395

Verifica-se, novamente, que o programa modificado apresenta desempenho superior ao original. É necessário ressaltar que as melhorias também se estenderam para a metodologia clássica, pois o tempo exigido para a execução da metodologia híbrida dos classificadores BCU no programa original (12,395 segundos) é superior aos 8,391 segundos necessários para se executar a metodologia clássica no programa modificado (Tabela 13).

A Tabela 23 apresenta o número total de contingências críticas detectadas pela metodologia híbrida dos classificadores BCU executada no programa modificado e no programa original.

Tabela 23 – Comparação de Exatidão - Sistema Sul Brasileiro Reduzido

<b>Programa</b>	<b>Casos Críticos</b>
Modificado	37
Original	50

Assim, para o Sistema Sul Brasileiro Reduzido de 33 barras, o programa original classificou 13 contingências estáveis como críticas.

### 3.4.3 Comparação para o Sistema Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro Reduzido de 107 barras

A Tabela 24 apresenta os tempos exigidos para a execução da metodologia híbrida dos classificadores BCU para o programa modificado e o original.



Tabela 24 – Comparação de Desempenho - Sistema Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro Reduzido

<b>Programa</b>	<b>Tempo(s)</b>
Modificado	88,801
Original	292,570

Verifica-se, novamente, que o programa modificado apresenta desempenho superior ao original. É necessário ressaltar que as melhorias também se estenderam para a metodologia clássica, pois o tempo exigido para a execução da metodologia híbrida dos classificadores BCU no programa original (292,570 segundos) é superior aos 166,188 segundos necessários para se executar a metodologia clássica no programa modificado.

A Tabela 25 apresenta o número total de contingências críticas detectadas pela metodologia híbrida dos classificadores BCU executada no programa modificado e no programa original (Tabela 19).

Tabela 25 – Comparação de Exatidão - Sistema Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro Reduzido

<b>Programa</b>	<b>Casos Críticos</b>
Modificado	99
Original	99

Assim, para o Sistema Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro Reduzido de 107 barras, os programas apresentaram resultados iguais.



## 4 Conclusão

Neste trabalho foi realizada a avaliação de segurança dinâmica de Sistemas Elétricos de Potência, no contexto de estabilidade transitória, utilizando a metodologia híbrida dos classificadores baseados no método BCU (métodos diretos) e a metodologia clássica (simulação no domínio do tempo).

Verificou-se que a metodologia dos classificadores apresentou resultados equivalentes aos obtidos pela metodologia clássica em menores tempos de execução.

Especificamente para o Sistema IEEE Nova Inglaterra de 39 barras, os filtros classificadores filtraram cerca de 85% dos casos estáveis e detectaram todos os instáveis para o sistema. Dessa forma, com a mesma precisão dos resultados, a avaliação de estabilidade transitória via classificadores BCU foi executada em 50% do tempo requerido pela análise clássica.

Para o Sistema Sul Brasileiro Reduzido de 33 barras, os resultados apresentaram a mesma qualidade. Os filtros classificadores filtraram 87% dos casos estáveis e o tempo necessário para a avaliação de estabilidade transitória foi reduzido em 40%. Assim, ilustra-se a robustez dos filtros perante a diferentes topologias e, em especial, a topologia da rede Brasileira.

Também para o Sistema Sul Sudeste e Mato-Grosso Brasileiro Reduzido de 107 barras os filtros apresentaram a mesma eficiência, filtrando 72% dos casos estáveis e reduzindo o tempo necessário de execução em 50%. Verifica-se, assim, a robustez do uso dos classificadores em sistemas de maior porte.

Finalmente, conclui-se que a metodologia adotada apresenta a mesma robustez e precisão dos resultados da análise clássica para diferentes sistemas, mas seu custo computacional é reduzido. Portanto é a metodologia ideal para aplicações que exigem análises em tempo real.

É necessário ressaltar que neste trabalho, também, realizaram-se modificações e otimizações no programa originalmente desenvolvido por [Theodoro \(2010\)](#) e esta versão modificada foi utilizada para as análises realizadas. Observa-se que nessa nova versão do programa, alteraram-se os parâmetros e funcionamento de alguns dos filtros classificadores, além disso adotaram-se abordagens mais refinadas para a solução de sistemas lineares, não lineares e dinâmicos. Nelas, métodos numéricos mais robustos e eficientes foram utilizados, de forma a garantir maior desempenho e exatidão.

Por último, verificou-se que a versão desenvolvida e utilizada do programa neste trabalho apresenta desempenho bem superior ao programa original, reduzindo em 350% o tempo necessário para a avaliação de estabilidade transitória via classificadores BCU, e apresenta melhores resultados, não indicando contingências estáveis como críticas. Observa-se, ainda, que as melhorias realizadas se estenderam para a metodologia clássica, afinal, o esforço

computacional exigido por ela na nova versão do programa é menor do que o esforço exigido pela metodologia híbrida dos classificadores baseados no método BCU na versão original.

As perspectivas futuras deste trabalho são a aplicação dos filtros em sistemas de maior porte e com modelos mais detalhados. Espera-se também melhorar o desempenho dos filtros 5 e 7 que ainda deixam escapar contingências estáveis, encaminhando-as para simulação no domínio do tempo. Deseja-se, também, estender os métodos diretos apresentados neste trabalho para SEP's que apresentam incertezas em sua geração.

# Referências

- ALBERTO, L. F. C.; BRETAS, N. G. *Estabilidade Transitária em Sistemas Eletroenergéticos*. [S.l.]: EDUSP, 2000. (Projeto REENGE-EESC/USP). ISBN 8585205318. Citado na página 43.
- ALVES, W. F. Proposição de sistemas-teste para análise computacional de sistemas de potência. *Universidade Federal Fluminense. Rio de Janeiro, RJ, Brasil*, 2007. Citado 6 vezes nas páginas 13, 27, 28, 65, 72 e 78.
- ATHAY, T.; PODMORE, R.; VIRMANI, S. A practical method for the direct analysis of transient stability. *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, n. 2, p. 573–584, 1979. Citado 5 vezes nas páginas 27, 28, 49, 50 e 65.
- BOOLE, G. *An Investigation of the Laws of Thought, on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*. [S.l.]: Walton and Maberly, 1854. (George Boole's collected logical works). Citado na página 54.
- BROYDEN, C. G. A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations. *Mathematics of computation*, JSTOR, v. 19, n. 92, p. 577–593, 1965. Citado 2 vezes nas páginas 103 e 104.
- BURDEN, R.; FAIRES, J.; BURDEN, A. *Numerical Analysis*. [S.l.]: Cengage Learning, 2015. ISBN 9781305465350. Citado 5 vezes nas páginas 101, 102, 106, 107 e 108.
- CHIANG, H.-D. et al. Bcu classifiers for on-line dynamic contingency screening of electric power systems. In: IEEE. *Power System Technology, 1998. Proceedings. POWERCON'98. 1998 International Conference on*. [S.l.], 1998. v. 2, p. 1260–1265. Citado na página 53.
- CHIANG, H.-D.; WU, F. F.; VARAIYA, P. P. Foundations of the potential energy boundary surface method for power system transient stability analysis. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 35, n. 6, p. 712–728, 1988. Citado na página 50.
- CHIANG, H.-D.; WU, F. F.; VARAIYA, P. P. A bcu method for direct analysis of power system transient stability. *Power Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 9, n. 3, p. 1194–1208, 1994. Citado 6 vezes nas páginas 27, 32, 48, 51, 57 e 108.
- EPE. *Anuário Estatístico de Energia Elétrica 2015*. 2015. <<http://www.epe.gov.br/AnuarioEstatisticodeEnergiaEletrica/Forms/Anurio.aspx>>. Acessado em 7/04/2016. Citado na página 65.
- HAZEWINKEL, M. *Encyclopaedia of Mathematics (set)*. [S.l.]: Springer Netherlands, 1994. (Encyclopaedia of Mathematics). ISBN 9781556080104. Citado na página 111.
- KAKIMOTO, N.; OHSAWA, Y.; HAYASHI, M. Transient stability analysis of electric power system via lure type lyapunov function, parts i and ii. *Transactions IEE of Japan*, v. 98, p. 516, 1978. Citado na página 49.
- KHALIL, H. K.; GRIZZLE, J. *Nonlinear systems*. [S.l.]: Prentice hall New Jersey, 2002. v. 3. Citado na página 31.

- KUNDUR, P.; BALU, N. J.; LAUBY, M. G. *Power system stability and control*. [S.l.]: McGraw-hill New York, 1994. v. 7. Citado na página 48.
- LONDON, J.; ALBERTO, L. F. C.; BRETAS, N. G. Analysis of measurement-set qualitative characteristics for state-estimation purposes. *Generation, Transmission & Distribution, IET*, IET, v. 1, n. 1, p. 39–45, 2007. Citado na página 54.
- LYAPUNOV, A. The general problem of the stability of motion. *Kharkov Mathematical Society. Kharkov*, Academician, 1892. Citado na página 31.
- NASAR, S. *Schaum's Outline of Electrical Power Systems*. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 1990. (Schaum's outline of theory and problems). ISBN 9780070459175. Citado na página 40.
- NAZARENO, I. S. *Método dinâmico para detecção do PEBS e “shadowing method” para cálculo do ponto de equilíbrio de controle em estudos de estabilidade transitória*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2003. Citado na página 52.
- PENROSE, R. A generalized inverse for matrices. In: CAMBRIDGE UNIV PRESS. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* [S.l.], 1955. v. 51, n. 3, p. 406–413. Citado na página 100.
- PRESS, W. *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. ISBN 9780521880688. Citado na página 102.
- ROWLAND, T.; WEISSTEIN, E. W. 2016. MathWorld—A Wolfram Web Resource. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/LipschitzFunction.html>>. Citado na página 29.
- SERWAY, R.; JEWETT, J. *Physics for Scientists and Engineers, Volume 5, Chapters 40-46*. [S.l.]: Cengage Learning, 2013. ISBN 9781285657585. Citado na página 37.
- SKILLING, H.; YAMAKAWA, M. A graphical solution of transient stability. *Electrical Engineering, IEEE*, v. 59, n. 11, p. 462–465, 1940. Citado na página 44.
- STRANG, G. *Introduction to Linear Algebra*. 4. ed. [S.l.]: Wellesley Cambridge Press, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 99 e 101.
- THEODORO, E. A. R. Desenvolvimento de um ferramenta computacional para análise de segurança dinâmica, no contexto da estabilidade transitória, de sistemas elétricos de potência via métodos diretos. *Escola de Engenharia de São Carlos. São Carlos, SP, Brasil*, 2010. Citado 8 vezes nas páginas 9, 11, 27, 55, 58, 59, 85 e 89.
- THEODORO, E. A. R.; BENEDITO, R. A. d. S.; ALBERTO, L. F. Método rápido para identificação de ilha em sistemas elétricos de potência. In: *Congresso Brasileiro de Autômata, 2010. XVIII CBA. Anais do XVIII*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 2405–2412. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 54.
- TREINEN, R. T.; VITTAL, V.; KLIEMANN, W. An improved technique to determine the controlling unstable equilibrium point in a power system. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 43, n. 4, p. 313–323, 1996. Citado na página 52.

WEISSTEIN, E. W. *Frobenius Norm*. 1999. MathWorld—A Wolfram Web Resource. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/FrobeniusNorm.html>>. Citado na página 103.

WHITTAKER, E.; ROBINSON, G. *The Calculus of Observations: An Introduction to Numerical Analysis*. [S.l.]: Dover Publications, 1924. Citado na página 108.





## Apêndices



# APÊNDICE A – Métodos Numéricos

## A.1 Soluções de Sistemas de Equações Lineares

A resolução de sistemas de equações lineares é extremamente utilizada durante a execução da análise de estabilidade transitória. Em muitos dos casos, porém, os sistemas a serem resolvidos são mal condicionados, ou seja, a solução não é alcançada com a utilização de um método simples. Dessa forma, três diferentes algoritmos, encadeados pela robustez, foram aplicados com esse propósito:

1. Método de Gauss-Seidel;
2. Método de Gauss-Seidel melhorado;
3. Método dos Mínimos Quadrados.

Devido ao aumento de complexidade de cada método, o método subsequente só será executado se o método anterior tiver falhado. A seguir são descritas as metodologias.

### A.1.1 Método de Gauss-Seidel

Deseja-se resolver as  $n$  equações do sistema linear  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . A forma matricial para esse sistema é:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

A solução seria, então:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^n A_{ij}x_j}{A_{ii}}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{A.2})$$

Como os valores de  $x_1$  até  $x_n$  são desconhecidos, uma aproximação inicial da solução é tomada e calcula-se iterativamente a solução do sistema. A equação (A.2) fica, então, da seguinte forma:

$$x_i^k = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j^k - \sum_{j=i+1}^n A_{ij}x_j^{k-1}}{A_{ii}}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{A.3})$$

Esse processo é realizado até que a seguinte condição de convergência seja obtida:

$$\frac{\|x^k - x^{k-1}\|}{\|x^k\|} \leq \epsilon \quad (\text{A.4})$$

Finalmente o algoritmo, pode ser descrito como se segue:

**Input** : Matrizes  $\mathbf{A}, \mathbf{b}$ ;  
 Solução inicial  $x_1^0, \dots, x_n^0$ ;  
 Tolerância  $\epsilon$ ;  
 Número máximo de interações  $N$ .

**Output** : A solução aproximada de  $x_1 \dots x_n$ .

```

begin
  k = 1
  while k ≤ N do
    for i = 1, 2, ..., n do
       $x_i^k = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j^k - \sum_{j=i+1}^n A_{ij}x_j^{k-1}}{A_{ii}}$ 
    end
    if  $\frac{\|x^k - x^{k-1}\|}{\|x^k\|} \leq \epsilon$  then
      return  $x^k$ 
    end
    k = k + 1
  end
end

```

**Algoritmo 1:** Método de Gauss-Seidel

### A.1.2 Método de Gauss-Seidel melhorado

Na execução do algoritmo de Gauss-Seidel se a matriz  $\mathbf{A}$  (A.1) for mal condicionada, ou seja,  $\det(\mathbf{A}) \approx 0$ , a solução encontrada será muito distante da real. Dessa forma, é necessário modificar o método original para se tentar obter uma solução para o sistema. Para isso, definem-se dois novos vetores auxiliares para o sistema linear (A.1),  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}'$ :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 = \sum_{j \neq 1}^n \|A_{1j}\| \\ a_2 = \sum_{j \neq 2}^n \|A_{2j}\| \\ \vdots \\ a_n = \sum_{j \neq n}^n \|A_{nj}\| \end{bmatrix}, \mathbf{a}' = \begin{bmatrix} a'_1 = \alpha a_1 - A_{11} \\ a'_2 = \alpha a_2 - A_{22} \\ \vdots \\ a'_n = \alpha a_n - A_{nn} \end{bmatrix}, \text{ em que } \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{A.5})$$

Utilizando-se da matriz  $\mathbf{a}'$  (A.5) modifica-se o sistema linear original (A.1) e se obtêm uma estimativa para a solução inicial. A nova matriz  $\mathbf{A}$  e a solução inicial são dadas como se segue:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} + a'_1 & \cdots & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} + a'_2 & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} + a'_n \end{bmatrix}, \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} x_1 = b_1/A_{11} \\ x_2 = b_2/A_{22} \\ \vdots \\ x_n = b_n/A_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

A solução para o sistema linear considerando o método original (A.3) é, então, da seguinte forma:

$$x_i^k = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j^k - \sum_{j=i+1}^n A_{ij}x_j^{k-1} + a'_i x_i^{k-1}}{A_{ii}}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{A.7})$$

Finalmente, tendo em vista o Algoritmo (1) anterior, é obtido o novo algoritmo:

**Input** : Matrizes  $\mathbf{A}, \mathbf{b}$ ;  
 Multiplicador  $\alpha$   
 Tolerância  $\epsilon$ ;  
 Número máximo de interações  $N$ .

**Output** : A solução aproximada de  $x_1, \dots, x_n$ .

```

begin
  k = 1
  for i = 1, 2, ..., n do
    a_i =  $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \|A_{1j}\|$ 
    if  $A_{ii} \leq 0$  then
      |  $a'_i = \alpha a_i - A_{ii}$ 
    end
    else
      |  $a'_i = a_i$ 
    end
     $A_{ii} = A_{ii} + a'_i$ 
  end
  while k  $\leq N$  do
    for i = 1, 2, ..., n do
      |  $x_i^k = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j^k - \sum_{j=i+1}^n A_{ij}x_j^{k-1} + a'_i x_i^{k-1}}{A_{ii}}$ 
    end
    if  $\frac{\|x^k - x^{k-1}\|}{\|x^k\|} \leq \epsilon$  then
      | return  $x^k$ 
    end
    k = k + 1
  end
end

```

**Algoritmo 2:** Método de Gauss-Seidel-Melhorado

### A.1.3 Método dos Mínimos Quadrados

O último método é utilizado quando não é possível encontrar uma solução com a utilização dos métodos anteriores, dessa forma a matriz  $\mathbf{A}$  é uma matriz singular,  $\det \mathbf{A} \approx 0$ . Precisa-se, então, encontrar uma solução aproximada para o sistema, de forma que o erro cometido ao se estimar seja o menor possível (STRANG, 2009). Então, seja o sistema linear dado pela forma (A.1), é desejado minimizar o erro:

$$\mathbf{e} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \quad (\text{A.8})$$

Em que  $\hat{\mathbf{x}}$  é a solução aproximada do sistema dada pelo método dos mínimos quadrados que minimiza a soma quadrática dos erros, isto é,

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \sum_{i=1}^m [b_i - \sum_{j=1}^n A_{ij}\hat{x}_j]^2. \quad (\text{A.9})$$

O mínimo é encontrado quando  $\hat{x}$  satisfaz

$$\nabla \|e\|^2 = 0 \Leftrightarrow \nabla \sum_{i=1}^m [b_i - \sum_{j=1}^n A_{ij} \hat{x}_j]^2 = 0 \quad (\text{A.10a})$$

$$\sum_{i=1}^m 2[b_i - \sum_{j=1}^n A_{ij} \hat{x}_j] A_{ik} = 0, k = 1, \dots, n \quad (\text{A.10b})$$

$$\sum_{i=1}^m A_{ik} [b_i - \sum_{j=1}^n A_{ij} \hat{x}_j] = 0, k = 1, \dots, n \quad (\text{A.10c})$$

$$\mathbf{A}^T (\mathbf{b} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}) = 0 \quad (\text{A.10d})$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (\text{A.10e})$$

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}. \quad (\text{A.10f})$$

A matriz  $\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$  é conhecida na literatura ([PENROSE, 1955](#)) como matriz Pseudoinversa de Moore-Penrose. Calculada  $\mathbf{A}^\dagger$ , pode-se proceder com o método de Gauss-Seidel original. O algoritmo final é dado por:

**Input** : Matrizes  $\mathbf{A}, \mathbf{b}$ ;  
 Solução inicial  $x_1^0 \dots x_n^0$ ;  
 Tolerância  $\epsilon$ ;  
 Número máximo de interações  $N$ .

**Output** : A solução aproximada de  $x_1, \dots, x_n$ .

```

begin
  k = 1
  for i = 1, 2, ..., n do
    for j = 1, 2, ..., n do
       $A_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} A_{jk}$ 
    end
  end
  for i = 1, 2, ..., n do
     $b_i = \sum_{k=1}^n A_{ki} b_k$ 
  end
  while k ≤ N do
    for i = 1, 2, ..., n do
       $x_i^k = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^k - \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j^{k-1}}{A_{ii}}$ 
    end
    if  $\frac{\|x^k - x^{k-1}\|}{\|x^k\|} \leq \epsilon$  then
      return  $x^k$ 
    end
    k = k + 1
  end
end

```

**Algoritmo 3:** Método dos Mínimos Quadrados

#### A.1.4 Exemplo de solução de um Sistema de Equações Lineares

Como a solução dos métodos [A.3](#), [A.7](#) e [A.10](#) é equivalente para uma sistema bem condicionado e apenas o método [A.10](#) é aplicável para um sistema mal condicionado, não será exemplificado, aqui, a solução de um sistema de equações lineares. Ao leitor interessado, pode ser encontrado exemplos em ([STRANG, 2009](#)) e ([BURDEN; FAIRES; BURDEN, 2015](#)).

## A.2 Soluções de Sistemas não Lineares

A metodologia híbrida dos classificadores BCU necessita em muitos momentos a resolução de sistemas de equações não lineares. Por exemplo na resolução do fluxo de carga. Neste trabalho são utilizados dois métodos de resolução: Método de Newton-Raphson e Método de Broyden.

### A.2.1 Método de Newton-Raphson

A obtenção do Método de Newton-Raphson é realizada com a aproximação pela série de Taylor da função  $f(x)$  (PRESS, 2007), como se segue:

$$f(x + \epsilon) \approx f(x) + f'(x)\epsilon + \frac{f''(x)}{2!}\epsilon^2 + \dots \quad (\text{A.11})$$

Truncando o resultado anterior (A.11) na primeira derivada,  $f(x + \epsilon) = 0$  implica em

$$\epsilon = -\frac{f(x)}{f'(x)} \quad (\text{A.12})$$

O processo de (A.11) e (A.12) é repetido até ser obtida uma aproximação suficientemente próxima da solução real, dando origem ao Método de Newton-Raphson:

$$x^k = x^{k-1} - \frac{f(x^{k-1})}{f'(x^{k-1})} \quad (\text{A.13})$$

Para um problema  $n$  dimensional, o Método de Newton-Raphson é reescrito da seguinte forma

$$\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{J}(\mathbf{x}^{k-1})^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{k-1}) \quad (\text{A.14})$$

em que  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  é a matriz Jacobiana de  $\mathbf{F}$ ,

$$\mathbf{J}_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (\text{A.15})$$

Em prática o processo de inversão de uma matriz é muito custoso, ao invés disso, resolve-se o sistema linear

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{k-1})\mathbf{s}^k = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{k-1}) \quad (\text{A.16})$$

para  $\mathbf{s}^k$ , assim a iteração para o Método de Newton-Raphson fica como se segue:

$$\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k-1} + \mathbf{s}^k \quad (\text{A.17})$$

As condições para a convergência do método são duas (BURDEN; FAIRES; BURDEN, 2015):

- $\|\mathbf{F}(x^k)\| \approx 0$ ;
- $\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\| \approx 0$

A primeira indica o residual do método e a segunda indica o grau de proximidade da solução aproximada da verdadeira. O algoritmo de resolução é, assim, apresentado a seguir:



**Input** : n equações e variáveis;  
 Matriz Jacobiana do sistema de n equações  
 Solução inicial  $x_1^0 \dots x_n^0$ ;  
 Tolerância  $\epsilon$ ;  
 Número máximo de interações  $N$ .  
**Output** : A solução aproximada de  $x_1, \dots, x_n$ .

```

begin
  k = 1
  while k ≤ N do
    Calcular  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ 
    Resolver o sistema linear  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{k-1})\mathbf{s}^k = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{k-1})$ 
     $\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k-1} + \mathbf{s}^k$ 
    if  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}^k)\| < \epsilon$  then
      return  $\mathbf{x}^k$ 
    end
    k = k + 1
  end
end

```

**Algoritmo 4:** Método de Newton-Raphson

### A.2.2 Método de Broyden

O método de Broyden é um método para solucionar  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$ , mas ao invés de se computar a Jacobiana  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  (A.15) em cada iteração, atualiza-se seu valor com uma aproximação  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ . Para isso aplica-se a aproximação de diferença finita:

$$\mathbf{B}^k(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{k-1}) \quad (\text{A.18})$$

Por simplicidade define-se a seguinte notação:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}^k &= \mathbf{F}(\mathbf{x}^k) \\
 \mathbf{B}^k &= \mathbf{B}(\mathbf{x}^k) \\
 \mathbf{s}^k &= \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1} \\
 \mathbf{y}^k &= \mathbf{F}^k - \mathbf{F}^{k-1}
 \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Se  $n > 1$ , o sistema (A.18) é subdeterminado e não possui solução única. Então escolhe-se  $\mathbf{B}^k$  como solução de:

$$\min_{\mathbf{B}^k} \|\mathbf{B}^k - \mathbf{B}^{k-1}\|_F \quad (\text{A.20})$$

Em que  $\|\cdot\|_F$  é norma de Frobenius<sup>1</sup>.

Broyden (1965) propõe a solução para (A.20) da seguinte forma:

$$\mathbf{B}^k = \mathbf{B}^{k-1} + \frac{(\mathbf{y}^k - \mathbf{B}^{k-1}\mathbf{s}^k)(\mathbf{s}^k)^T}{(\mathbf{s}^k)^T \mathbf{s}^k} \quad (\text{A.21})$$

<sup>1</sup> A norma de Frobenius de uma matriz  $A_{m \times n}$  é dada por:  $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |A_{ij}|^2}$  (WEISSTEIN, 1999)

Para inicializar o método de Broyden é necessário uma aproximação inicial da matriz Jacobiana (A.15). Usualmente utilizam-se duas aproximações (BROYDEN, 1965):

- $\mathbf{B}^0 = \mathbf{J}(\mathbf{x}^0)$ ;
- $\mathbf{B}^0 = \alpha \mathbf{I}$ , em que  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade  $n \times n$  e  $\alpha$  é um escalar.

Agora é possível proceder com o Algoritmo 4 com as alterações propostas anteriormente.

**Input** : n equações e variáveis;  
 Aproximação inicial da Matriz Jacobiana para o sistema  
 Solução inicial  $x_1^0 \dots x_n^0$ ;  
 Tolerância  $\epsilon$ ;  
 Número máximo de interações  $N$ .

**Output** : A solução aproximada de  $x_1, \dots, x_n$ .

```

begin
  k = 1
  while k ≤ N do
    Calcular  $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{k-1})$ 
    Resolver o sistema linear  $\mathbf{B}^{k-1} \mathbf{s}^k = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{k-1})$ 
     $\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k-1} + \mathbf{s}^k$ 
    Calcular  $\mathbf{F}(\mathbf{x}^k)$ 
    if  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}^k)\| < \epsilon$  then
      | return  $\mathbf{x}^k$ 
    end
     $\mathbf{y}^k = \mathbf{F}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{k-1})$ 
     $\mathbf{B}^k = \mathbf{B}^{k-1} + \frac{(\mathbf{y}^k - \mathbf{B}^{k-1} \mathbf{s}^k)(\mathbf{s}^k)^T}{(\mathbf{s}^k)^T \mathbf{s}^k}$ 
    k = k + 1
  end
end

```

**Algoritmo 5:** Método de Broyden

### A.2.3 Exemplo de solução de Sistema não Linear

Para exemplificar os métodos, suponha que se é desejado resolver o seguinte sistema não linear:

$$\begin{aligned} e^{-e^{-(x_1+x_2)}} - x_2(1+x_1^2) &= 0 \\ x_1 \cos(x_2) + x_2 \sin(x_1) - 0.5 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

A matriz Jacobiana é, então, calculada por (A.15):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-e^{-(x_1+x_2)}-x_1-x_2} - 2x_1x_2 & -x_1^2 + e^{-e^{-(x_1+x_2)}-x_1-x_2} - 1 \\ x_2 \cos(x_1) + \cos(x_2) & \sin(x_1) - x_1 \sin(x_2) \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

Para  $\epsilon = 10^{-4}$ , obteve-se o seguinte resultado:

Tabela 26 – Resultado da Aplicação do Método de Newton-Raphson e Método de Broyden

Iteração( $k$ )	$\mathbf{x}_{Newton}$	$\ \mathbf{F}(\mathbf{x})\ _{Newton}$	$\mathbf{x}_{Broyden}$	$\ \mathbf{F}(\mathbf{x})\ _{Broyden}$
1	$[0; 0]^T$	0,6208	$[0; 0]^T$	0,6208
2	$[0, 5; 0, 873]^T$	0,8900	$[0, 5; 0, 873]^T$	0,8900
3	$[0, 3801; 0, 1362]^T$	0,3096	$[0, 4004; 0, 2520]^T$	0,1306
4	$[0, 3428; 0, 4947]^T$	0,2427	$[0, 3960; 0, 3347]^T$	0,0045
5	$[0, 4042; 0, 2029]^T$	0,2069	$[0, 3927; 0, 3370]^T$	7,8541e-04
6	$[0, 3622; 0, 4378]^T$	0,1560	$[0, 3931; 0, 3366]^T$	6,6486e-06
7	$[0, 4033; 0, 2526]^T$	0,1298	×	×
8	$[0, 3759; 0, 4008]^T$	0,0990	×	×
9	$[0, 4009; 0, 2845]^T$	0,0805	×	×
10	$[0, 3833; 0, 3768]^T$	0,0620	×	×
11	$[0, 3986; 0, 3044]^T$	0,0498	×	×
12	$[0, 3874; 0, 3616]^T$	0,0386	×	×
13	$[0, 3967; 0, 3167]^T$	0,0307	×	×
14	$[0, 3897; 0, 3522]^T$	0,0239	×	×
15	$[0, 3954; 0, 3243]^T$	0,0190	×	×
16	$[0, 3911; 0, 3462]^T$	0,0148	×	×
17	$[0, 3946; 0, 3290]^T$	0,0117	×	×
18	$[0, 3919; 0, 3426]^T$	0,0092	×	×
19	$[0, 3940; 0, 3319]^T$	0,0072	×	×
20	$[0, 3924; 0, 3403]^T$	0,0057	×	×
21	$[0, 3937; 0, 3337]^T$	0,0045	×	×
22	$[0, 3926; 0, 3389]^T$	0,0035	×	×
23	$[0, 3935; 0, 3348]^T$	0,0028	×	×
24	$[0, 3928; 0, 3380]^T$	0,0022	×	×
25	$[0, 3933; 0, 3355]^T$	0,0017	×	×
26	$[0, 3929; 0, 3375]^T$	0,0013	×	×
27	$[0, 3933; 0, 3359]^T$	0,0011	×	×
28	$[0, 3930; 0, 3372]^T$	8,3126e-04	×	×
29	$[0, 3932; 0, 3362]^T$	6,5382e-04	×	×
30	$[0, 3930; 0, 3370]^T$	5,1402e-04	×	×
31	$[0, 3932; 0, 3364]^T$	4,0425e-04	×	×
32	$[0, 3931; 0, 3368]^T$	3,1784e-04	×	×
33	$[0, 3931; 0, 3365]^T$	2,4995e-04	×	×
34	$[0, 3931; 0, 3368]^T$	1,9653e-04	×	×
35	$[0, 3931; 0, 3367]^T$	1,2152e-04	×	×
36	$[0, 3931; 0, 3366]^T$	9,5561e-05	×	×

É possível verificar, assim, que a mesma solução inicial apresenta resultados distintos entre os dois métodos, até mesmo fazendo com que o Método de Broyden convirja mais rapidamente para a solução do sistema. Justifica-se, assim, a metodologia adotada neste trabalho da utilização combinada dos dois métodos: Itera-se poucas vezes o sistema não linear via o Método de Broyden e utiliza-se esse ponto como solução inicial do Método de Newton-Raphson. Dessa forma se o Método de Broyden for convergente para uma solução inicial, em poucas iterações o Método de Newton-Raphson convergirá, por outro

lado se o método divergir, descarta-se o resultado obtido e utiliza-se apenas o Método de Newton-Raphson. Dessa forma alia-se a velocidade do primeiro método com a robustez do segundo (BURDEN; FAIRES; BURDEN, 2015).

### A.3 Soluções de Sistemas de Equações Diferenciais

Um Sistema Elétrico de Potência (SEP) é modelado por equações diferenciais. Assim para seu estudo é necessário a resolução dessas equações dinâmicas. Neste trabalho, dois métodos distintos são utilizados: 1) Método de Runge-Kutta e 2) Método de Adams-Bashfort-Moulton. Por simplicidade e uniformidade, denota-se a equação diferencial da seguinte forma:

$$x' = f(t, x) \quad (\text{A.24})$$

#### A.3.1 Método de Runge-Kutta

Para derivar o método é necessário as seguintes séries de Taylor:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + (\Delta t)x'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2!}x''(t) + \text{termos de ordem mais alta} \quad (\text{A.25})$$

$$f(t + \Delta t, x(t) + \Delta x(t)) = f(t, x(t)) + (\Delta t) \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial t} + (\Delta x(t)) \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial x} + \text{termos de ordem mais alta} \quad (\text{A.26})$$

É de interesse resolver a equação diferencial (A.24), logo integra-se a equação da seguinte forma:

$$x(t + h) = x(t) + \int_t^{t+h} f(\tau, x(\tau)) d\tau \quad (\text{A.27})$$

A solução para (A.27) é aproximada pela regra da quadratura:

$$x(t + h) \approx x(t) + h \sum_{i=1}^N \omega_i f(t + \nu_i h, x(t + \nu_i h)) \quad (\text{A.28})$$

Para resolver a equação (A.28), fazem-se as seguintes considerações:

- Seja  $\nu_1 = 0$ , então define-se  $k_1 = hf(t, x(t))$ ;
- O segundo termo da quadratura é, então,  $k_2 = h(f(t + \alpha h, x(t) + \beta k_1))$ ;

Com isso a regra da quadratura é:

$$x(t + h) \approx x(t) + \omega_1 k_1 + \omega_2 k_2 \quad (\text{A.29})$$

Na equação (A.29), substitui-se a equação (A.25):

$$x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2!}x''(t) + \mathcal{O}(h^3) = x(t) + \omega_1 k_1 + \omega_2 k_2 \quad (\text{A.30})$$

Mas  $x'(t) = f(t, x(t))$  e  $x''(t) = \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial t} + f(t, x(t)) \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial x}$ , dessa forma:

$$hf(t, x(t)) + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial t} + f(t, x(t)) \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial x} \right] + \mathcal{O}(h^3) = \omega_1 k_1 + \omega_2 k_2 \quad (\text{A.31})$$

Substituindo as expressões de  $k_1$  e  $k_2$ :

$$\begin{aligned} hf(t, x(t)) + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial t} + f(t, x(t)) \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial x} \right] + \mathcal{O}(h^3) \\ = \omega_1 hf(t, x(t)) + \omega_2 h(f(t + \alpha h, x(t) + \beta k_1)) \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Aplicando a segunda série de Taylor (equação (A.26)) na equação (A.32) chega-se no seguinte resultado:

$$\begin{aligned} hf(t, x(t)) + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial t} + f(t, x(t)) \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial x} \right] + \mathcal{O}(h^3) = \\ \omega_1 hf(t, x(t)) + \omega_2 \left( hf(t, x(t)) + \alpha h^2 \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial t} + \beta h^2 f(t, x(t)) \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Logo o Método de Runge-Kutta será equivalente a série de Taylor se forem escolhidos os seguintes valores para as constantes:

$$\omega_1 + \omega_2 = 1 \quad (\text{A.34a})$$

$$\alpha \omega_2 = \frac{1}{2} \quad (\text{A.34b})$$

$$\beta \omega_2 = \frac{1}{2} \quad (\text{A.34c})$$

A escolha canônica para as constantes de (A.34) é  $\alpha = \beta = 1$  e  $\omega_1 = \omega_2 = 1/2$ . Dessa forma, foi obtido o Método de Runge-Kutta de ordem 2. Para maior precisão, foi utilizado, nesse trabalho, o Método de Runge-Kutta de ordem 4, dado por:

$$x(t_i) = x_i \quad (\text{A.35a})$$

$$k_1 = hf(t_i, x_i) \quad (\text{A.35b})$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{1}{2}k_1\right) \quad (\text{A.35c})$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{1}{2}k_2\right) \quad (\text{A.35d})$$

$$k_4 = hf(t_i + h, x_i + \frac{1}{2}k_3) \quad (\text{A.35e})$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 3k_3 + k_4) \quad (\text{A.35f})$$

A derivação desse resultado pode ser encontrada em (BURDEN; FAIRES; BURDEN, 2015).

O Algoritmo 6 implementa o Método de Runge-Kutta de ordem 4.

**Input** : Ponto inicial  $(t_0, x_0)$ ;  
 Tempo de simulação  $T$ ;  
 Passo de integração  $h$ .

**Output** : A solução aproximada de  $x'(t) = f(t, x(t))$  em  $[t_0, t_0 + T]$

```

begin
   $N = T/h$ 
   $t = t_0$ 
   $x = x_0$ 
   $i = 0$ 
  Output :  $t, x$ 
  while  $i \leq N$  do
    Calcular:  $k_1 = hf(t_i, x_i)$ ;
     $k_2 = hf(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{1}{2}k_1)$ ;
     $k_3 = hf(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{1}{2}k_2)$ ;
     $k_4 = hf(t_i + h, x_i + k_3)$ .
    Calcular:  $x = x + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ 
    Atribuir:  $t = t + h$ 
    Output :  $t, x$ 
     $i = i + 1$ 
  end
end

```

**Algoritmo 6:** Método de Runge-Kutta de Ordem 4

É necessário observar que o método pode ser estendido para um sistema de equações diferenciais. Nesse caso substituem-se no Algoritmo 6,  $f(t, x(t))$ ,  $x(t)$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  e  $k_4$  por vetores.

### A.3.2 Método de Adams-Bashforth-Moulton

Foi observado que as equações diferenciais utilizadas no Método BCU apresentam *stiffness* (CHIANG; WU; VARAIYA, 1994). Assim, há a necessidade de utilização de um método implícito de integração numérica para a resolução eficiente do sistema. Porém, métodos implícitos usuais introduzem a necessidade de resolução de sistemas de equações não lineares.

O Método de Adams-Bashforth-Moulton apresenta uma solução aos dois problemas apresentados, pois é um método implícito que é resolvido explicitamente. Para isso é preciso combinar o Método de Adams-Bashfort com o Método de Adams-Moulton (BURDEN; FAIRES; BURDEN, 2015).

Inicialmente se integra a equação diferencial (A.24) de  $t_{i+1}$  até  $t_{i+2}$ , obtêm-se (WHITTAKER; ROBINSON, 1924):

$$\int_{t_{i+s}}^{t_{i+s-1}} x'(\tau) d\tau = \int_{t_{i+s}}^{t_{i+s-1}} f(\tau, x(\tau)) d\tau \Leftrightarrow x(t_{i+s}) - x(t_{i+s-1}) = \int_{t_{i+s-1}}^{t_{i+s}} f(\tau, x(\tau)) d\tau \quad (\text{A.36})$$

Aproxima-se  $f$  pelo seu polinômio interpolador linear. A formula de Lagrange para a interpolação polinomial é:

$$p(\tau) = \sum_{j=0}^{s-1} p_L(\tau) f(t_{i+j}, x_{i+j}) \quad (\text{A.37})$$

$$p_L(\tau) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{s-1} \frac{\tau - t_{i+k}}{t_{k+j} - t_{i+k}}, j = 0, 1, \dots, s-1 \quad (\text{A.38})$$

Assim:

$$\begin{aligned} x(t_{i+s}) - x(t_{i+s-1}) &\approx \int_{t_{i+s-1}}^{t_{i+s}} p(\tau) d\tau = \int_{t_{i+s-1}}^{t_{i+s}} \sum_{j=0}^{s-1} p_L(\tau) f(t_{i+j}, y_{i+j}) d\tau = \\ &\sum_{j=0}^{s-1} f(t_{i+j}, y_{i+j}) \int_{t_{i+s-1}}^{t_{i+s}} p_L(\tau) d\tau \quad (\text{A.39}) \end{aligned}$$

O método numérico é então:

$$x_{i+s} = x_{i+s-1} + h \sum_{j=0}^{s-1} b_j f(t_{i+j}, y_{i+j}) \quad (\text{A.40})$$

Os coeficientes,  $b_j$ , são obtidos de:

$$b_j = \frac{1}{h} \int_{t_{i+s-1}}^{t_{i+s}} p_L(\tau) d\tau = \frac{1}{h} \int_0^h p_L(t_{i+s-1} + u) du \quad (\text{A.41})$$

O Método de Adams-Moulton segue a mesma demonstração acima, mas agora acrescenta-se o ponto  $t_s$  ao polinomio interpolador  $p_L$ . Os coeficientes,  $b_j$ , são obtidos, assim, de:

$$\begin{aligned} b_j &= \frac{1}{h} \int_0^h p_L(t_{i+s-1} + u) du, \text{ com } p(\tau) = \sum_{j=0}^s p_L(\tau) f(t_{i+j}, x_{i+j}) \text{ e} \\ p_L(\tau) &= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^s \frac{\tau - t_{i+k}}{t_{k+j} - t_{i+k}}, j = 0, 1, \dots, s \quad (\text{A.42}) \end{aligned}$$

O Método de Adams-Bashfort-Moulton é a combinação dos dois métodos. Para isso, inicialmente aproxima-se solução de (A.24) em  $t_{i+h}$ , conhecido na literatura como preditor, via Adams-Bashfort em seguida corrige-se esse resultado, conhecido como corretor, via Adams-Moulton. Porém esse método não consegue se iniciar por si só, é necessário o cálculo de 3 pontos iniciais, para isso emprega-se o Método de Runge-Kutta (A.35). O Método de Adams-Bashfort-Moulton de Ordem 4 está descrito abaixo:

$$\text{Preditor: } x_{ip} = x_{i-1} + \frac{h}{24} [55f(t_{i-1}, x_{i-1}) - 59f(t_{i-2}, x_{i-2}) + 37f(t_{i-3}, x_{i-3}) - 9f(t_{i-4}, x_{i-4})] \quad (\text{A.43})$$

$$\text{Corretor: } x_i = x_{i-1} + \frac{h}{24} [9f(t_i, x_{ip}) + 19f(t_{i-1}, x_{i-1}) - 5f(t_{i-2}, x_{i-2}) + f(t_{i-3}, x_{i-3})] \quad (\text{A.44})$$

Finalmente o algoritmo final é da forma:

**Input** : Ponto inicial  $(t_0, x_0)$ ;  
 Tempo de simulação  $T$ ;  
 Passo de integração  $h$ .

**Output** : A solução aproximada de  $x'(t) = f(t, x(t))$  em  $[t_0, t_0 + T]$

```

begin
   $N = T/h$ 
   $t = t_0$ 
   $x = x_0$ 
  Output :  $t, x$ 
  for  $i = 0, 1, 2$  do
    Calcular:  $k_1 = hf(t_i, x_i)$ ;
     $k_2 = hf(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{1}{2}k_1)$ ;
     $k_3 = hf(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{1}{2}k_2)$ ;
     $k_4 = hf(t_i + h, x_i + k_3)$ .
    Calcular:  $x = x + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ 
    Atribuir:  $t_{i+1} = t_0 + h(i + 1)$ 
    Output :  $t, x$ 
  end
  for  $i = 3, \dots, N$  do
     $t = t_0 + h(i + 1)$ 
     $x_p = x_3 + \frac{h}{24}[55f(t_3, x_3) - 59f(t_2, x_2) + 37f(t_1, x_1) - 9f(t_0, x_0)]$ 
     $x = x_3 + \frac{h}{24}[9f(t, x_p) + 19f(t_3, x_3) - 5f(t_2, x_2) + f(t_1, x_1)]$ 
    Output :  $t, x$ 
    for  $j = 0, 1, 2$  do
       $t_j = t_{j+1}$ 
       $x_j = x_{j+1}$ 
    end
     $t_3 = t$ 
     $x_3 = x$ 
  end
end
  
```

**Algoritmo 7:** Método de Adams-Bashfort-Moulton de Ordem 4

Novamente o método pode ser estendido para um sistema de equações diferenciais. Nesse caso substituem-se no Algoritmo 7,  $f(t, x(t))$ ,  $x(t)$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  e  $k_4$  por vetores.

O método, pode, também se utilizar de passos de integração variáveis. Por exemplo, avalia-se o  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ , se  $\Delta x > \gamma_1$  diminua o passo em  $\sigma$ , ou se  $\Delta x < \gamma_2$  aumente o passo em  $\sigma$ .



### A.3.3 Exemplo de solução de Sistema Dinâmico

Considere, por exemplo, que é desejado saber a solução da equação diferencial de Mathieu (HAZEWINKEL, 1994) em  $t = [0, 2\pi]$ , descrita abaixo:

$$x'' = -[a - 2q \cos(2t)]x, \text{ com } a=2 \text{ e } q=5 \quad (\text{A.45})$$

As Figuras 30 e 31, abaixo, apresentam o resultado com a aplicação dos método (A.43) e (A.35) para um passo de integração de  $h = 0,01$ .

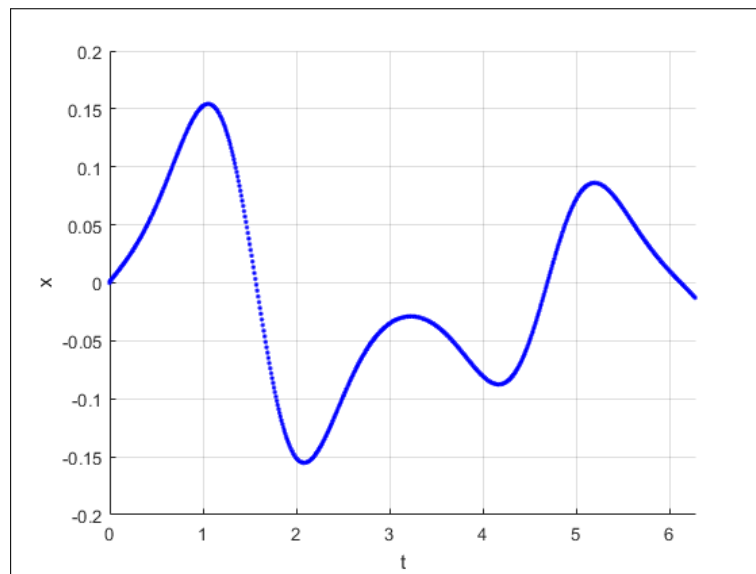


Figura 30 – Solução com o Método de Runge-Kutta

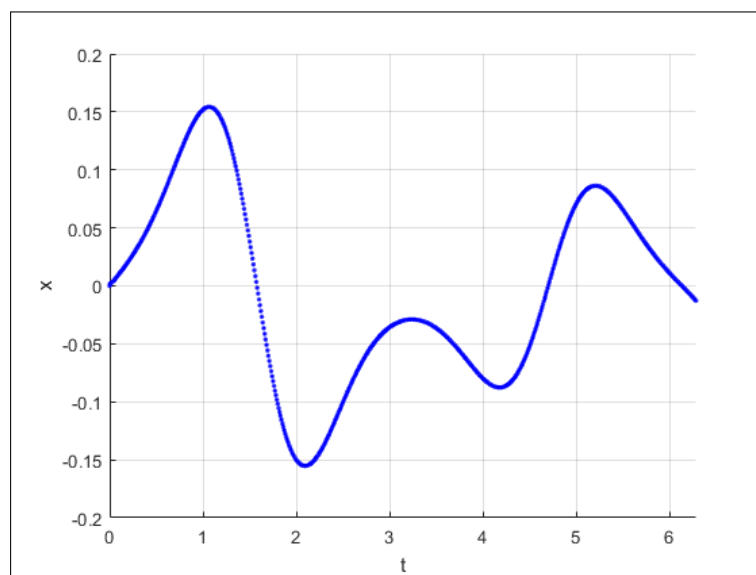


Figura 31 – Solução com o Método de Adams-Bashfort-Moulton

Pelos resultados obtidos é possível verificar que ambos os métodos resolveram a equação

diferencial (A.45) satisfatoriamente. É necessário observar que o método de Adams-Bashfort-Moulton (A.43) foi executado em 90% do tempo necessário para executar o método de Runge-Kutta (A.35).

## APÊNDICE B – Prova do Teorema de Estabilidade de Lyapunov

A prova do Teorema fundamental para o estudo de estabilidade transitória é apresentado nesta seção. O autor acredita que dessa forma há completude no trabalho. Suponha por simplicidade que a origem seja um ponto de equilíbrio do sistema, observa-se que é sempre possível transladar um ponto de equilíbrio qualquer, por exemplo  $x_e$  para a origem com a seguinte transformação:  $T(x) = x - x_e$ .

**Demonstração.** Dado  $\epsilon > 0$ , escolhe-se  $r \in [0, \epsilon]$ , tal que  $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq r\} \subset D$ . Seja  $\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x)$ . Escolhe-se  $\beta \in [0, \alpha]$  e define-se  $\Omega_\beta = \{x \in B_r, V(x) \leq \beta\}$ . Se  $x(t_0) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta, \forall t > t_0$ , pois

$$\dot{V}(x(t)) \leq 0 \Rightarrow V(x(t)) \leq V(x(t_0)) \leq \beta. \quad (\text{B.1})$$

Além disso  $\exists \delta > 0$  de forma que  $\|x\| < \delta \Rightarrow V(x) < \beta$ . Logo, tem-se que

$$B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r \quad (\text{B.2})$$

e, além disso,

$$x(t_0) \in B_\delta \Rightarrow x(t_0) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in B_r. \quad (\text{B.3})$$

Finalmente, chega-se em

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < r \leq \epsilon, \forall t > t_0 \quad (\text{B.4})$$

Está demonstrada, assim, a primeira parte do Teorema 1. Resta, agora, demonstrar a estabilidade assintótica. Para isso, suponha que a trajetória de  $x(t)$  não convirja para 0. Como  $V(x(t))$  é decrescente e não negativa, então  $V(x(t))$  converge para um  $\xi$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Como  $x(t)$  não converge para 0, então  $\xi > 0$ , dessa forma para todo  $t \geq t_0$ ,  $\xi \leq V(x(t)) \leq V(x(t_0))$ .

Seja  $C = \{z, \xi \leq V(z) \leq V(x(t_0))\}$ , então  $C$  é fechado e limitado, logo compacto. Logo  $\dot{V}$  possui seu supremo em  $C$ , isto é,  $\sup_{z \in C} \dot{V}(z) = -a < 0$ . Como  $\dot{V}(x(t)) \leq -a, \forall t > t_0$ , então

$$V(x(T)) = V(x(t_0)) + \int_{t_0}^T \dot{V}(x(t)) dt \leq V(x(t_0)) - aT. \quad (\text{B.5})$$

Porém para  $T > V(x(t_0))/a$ , isso implica que  $V(x(T)) < 0$ , uma contradição.

Logo toda trajetória  $x(t)$  converge para 0. Isto é, o sistema dinâmico é assintoticamente estável em  $D$  e a demonstração está concluída.



## APÊNDICE C – Estabilidade de Métodos Implícitos

No Apêndice A afirmou-se que métodos implícitos apresentam estabilidade numérica. Para demonstrar tal afirmação, considera-se, por simplicidade, o Método de Adams-Moulton (implícito) e o Método de Adams-Bashfort (explícito) ambos de primeira de ordem. Supõe-se, agora, que a equação diferencial seja da forma a seguir:

$$y' = \lambda y, \lambda \in \mathbb{C} \text{ e } y(0) \triangleq y_0 \quad (\text{C.1})$$

A solução exata é obtida como se segue:

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y \rightarrow \frac{dy}{y} = \lambda dt \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \lambda dt \rightarrow \log(y) = \lambda t + c_1 \quad (\text{C.2})$$

$$y = e^{\lambda t + c_1} \rightarrow y = c_1 e^{\lambda t} \quad (\text{C.3})$$

$$y(0) = y_0 = c_1 e^{\lambda 0} = c_1 \quad (\text{C.4})$$

$$y = y_0 e^{\lambda t} \quad (\text{C.5})$$

Para a verificação de estabilidade do método, escolhe-se  $\lambda < 0$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , de forma que (C.5) seja estável. Pelo Método de Adams-Bashfort de primeira ordem a equação (C.1) pode ser aproximada por:

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n \quad (\text{C.6})$$

Supondo que a solução de (C.6) seja  $Am^n$ , a equação de diferença pode ser reescrita como segue:

$$Am^{n+1} = Am^n + h\lambda Am^n \rightarrow m^{n+1} = m^n + h\lambda m^n \quad (\text{C.7})$$

Resolvendo-se (C.7) para  $m$ :

$$m = 1 + h\lambda \quad (\text{C.8})$$

Logo a solução geral de (C.6) é:

$$y_{n+1} = A(1 + h\lambda)^n, \text{ mas } y_0 = A(1 + h\lambda)^0 = A, \text{ então } y_{n+1} = y_0(1 + h\lambda)^n \quad (\text{C.9})$$

A condição de estabilidade para sistemas discretos implica em:

$$|1 + h\lambda| < 1 \quad (\text{C.10})$$

Como  $\lambda \in \mathbb{R}$ , resolve-se a equação (C.10) da seguinte forma:

$$|1 + h\lambda| = \sqrt{(1 + h\lambda)^2} < 1 \rightarrow (1 + h\lambda)^2 < 1 \rightarrow h\lambda < -2 \rightarrow h < \frac{-2}{\lambda} \quad (\text{C.11})$$

Dessa forma o resultado apresentado em (C.11) diz que apesar da equação diferencial (C.5) ser convergente, o método numérico o será, apenas se a condição de  $h < \frac{-2}{\lambda}$  for satisfeita. O mesmo procedimento pode ser realizado para o Método de Adams-Moulton de primeira ordem, assim a equação (C.1) pode ser aproximada por:

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_{n+1} \quad (\text{C.12})$$

Supondo que a solução de (C.12) seja  $Am^n$ , a equação de diferença pode ser reescrita como segue:

$$Am^{n+1} = Am^n + h\lambda Am^{n+1} \rightarrow m^{n+1} = m^n + h\lambda m^{n+1} \quad (\text{C.13})$$

Resolvendo-se (C.13) para  $m$ , encontra-se:

$$m = 1 + h\lambda m \rightarrow m(1 - h\lambda) = 1 \rightarrow m = \frac{1}{1 - h\lambda} \quad (\text{C.14})$$

A solução geral de (C.12) é:

$$y_{n+1} = A\left(\frac{1}{1 - h\lambda}\right)^n, \text{ mas } y_0 = A\left(\frac{1}{1 - h\lambda}\right)^0 = A, \text{ então } y_{n+1} = y_0\left(\frac{1}{1 - h\lambda}\right)^n \quad (\text{C.15})$$

Como  $\lambda < 0 \in \mathbb{R}$  e  $h > 0$ , verifica-se que  $\left|\frac{1}{1 - h\lambda}\right| < 1$ . De fato,  $\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - h\lambda} = 0$  e  $\lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{1 - h\lambda} = 1$

Dessa forma, conclui-se que enquanto que a estabilidade do método explícito é condicionada ao valor do passo de integração, o método implícito é irreverentemente estável.

As Figuras, abaixo, ilustram esse resultado.

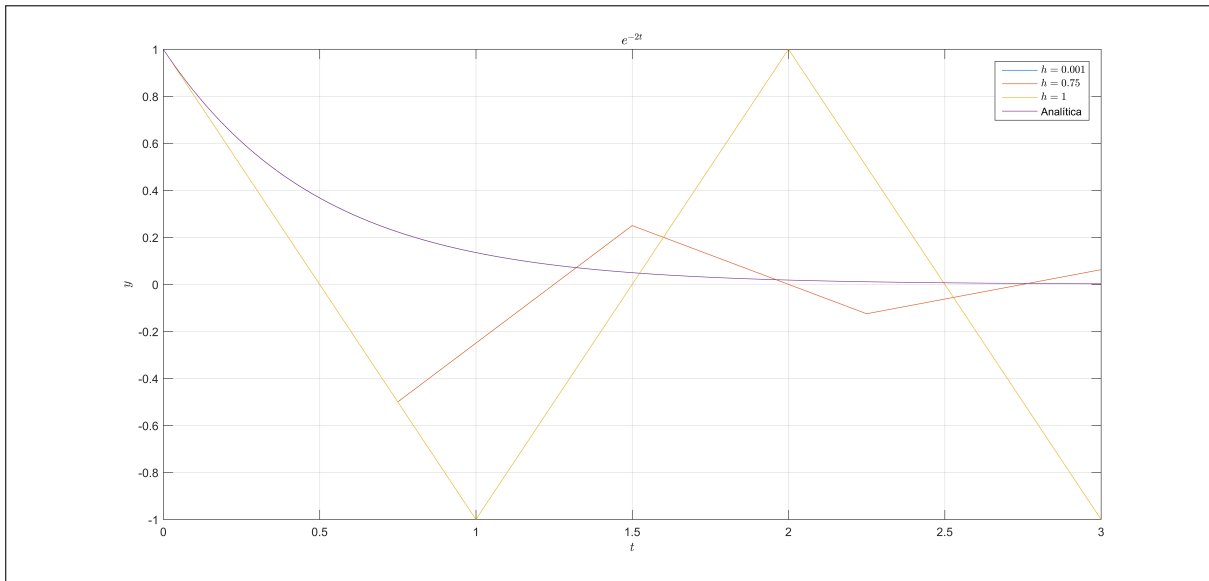


Figura 32 – Comparação entre passos de integração-Método Explícito para  $\lambda = -2$

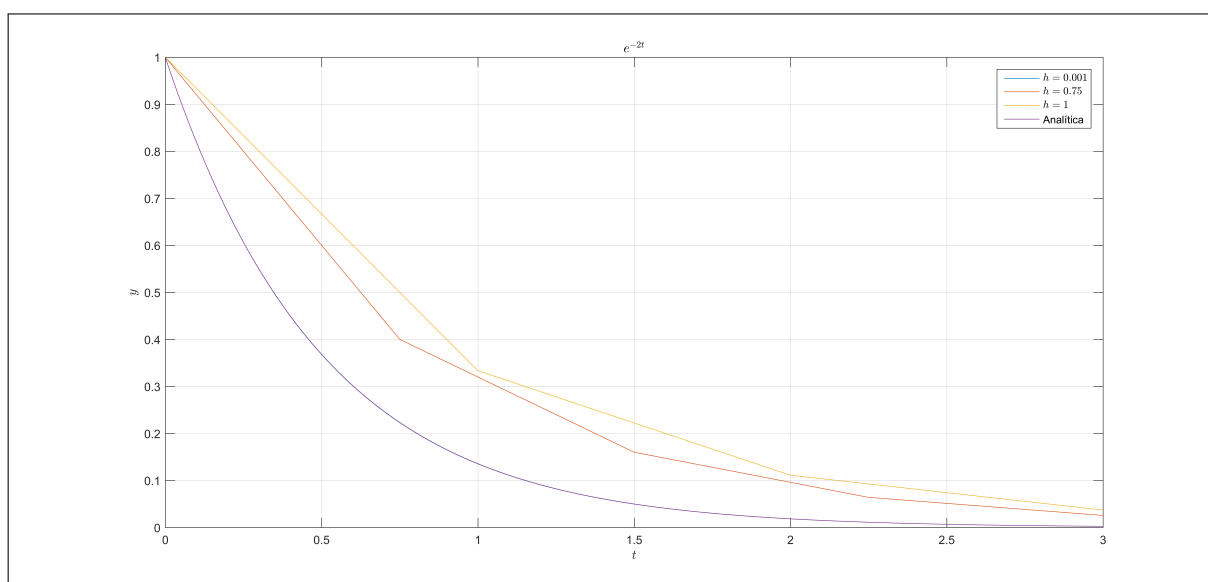


Figura 33 – Comparação entre passos de integração-Método Implícito para  $\lambda = -2$