

2301541

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROJETO MECÂNICO

9,0 (work)
~~9,0~~

CÁLCULO DE FORÇAS DE SUSTENTAÇÃO E ARRASTO
EM SUPERFÍCIES TIPO VELA-BIPLANO

Francisco Eduardo W.A. Silva
AUTOR: FRANCISCO EDUARDO W.A. SILVA
ORIENTADOR: SÍLVIO DE OLIVEIRA JUNIOR

1984

INDICE

Capítulo	Pag.
SUMÁRIO	01
1. INTRODUÇÃO	02
2. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	05
3. VIABILIDADE	11
4. EXPOSIÇÃO TEÓRICA BÁSICA	12
4.1. Introdução	12
4.2. Cinemática e Dinâmica de um Campo Fluido	12
4.2.1. Equação de Bernoulli	12
4.2.2. Escoamento Irrotacional	14
4.2.3. Potencial de Velocidades	17
4.2.4. Vórtice Pontual, Filamento de Vórtices. Lei de Biot Savart	18
4.2.5. Esteira de Vórtices	20
4.2.6. Teorema de Holmholtz	22
5. A ASA DE ENVERGADURA INFINITA	24
5.1. A Equação do Momento para Escoamento Irro- tacional	24
5.2. A Sustentação de um Aerofólio de Envergadu- ra Infinita	27
5.2.1. Arrasto e Sustentação: Definições	27
5.2.2. A Relação entre Sustentação e Circulação	28
5.2.3. A Sustentação a partir da Distribuição de Pressões ao Longo do Perfil	30
5.2.4. Derivação da Lei de Kutta-Joukowski por Intermédio do Escoamento através de uma "Grelha"	31

5.2.5.	Derivação da Equação de Kutta-Joukowski	35
5.2.6.	A Circulação	37
5.2.7.	Superposição de Escoamentos Potencial e de Circulação	38
5.2.8.	Determinação da Quantidade de Circulação	40
5.3.	Teoria dos Aerofólios Finos	43
6.	A ASA DE ENVERGADURA FINITA	48
6.1.	Esteira de Vórtices	48
6.2.	O Escoamento por uma Asa de Envergadura Finita	50
6.3.	O Problema da Superfície de Sustentação	54
6.3.1.	Linha de Sustentação	57
6.3.2.	Relação entre C_L e C_{Di}	67
7.	TEORIA DE BIPLANOS	70
8.	RESOLUÇÃO DO PROBLEMA	76
8.1.	Introdução	76
8.2.	Apresentação do Problema	76
8.3.	Cálculo dos Coeficientes	79
8.4.	Cálculo das Forças de Sustentação e Arrasto	80
8.5.	Resultados	82
8.6.	Conclusões	85
ANEXO 1 -	PROGRAMA MINAR	88
ANEXO 2 -	PROGRAMA VELA 1	89
ANEXO 3 -	PROGRAMA BIPLANO	90
ANEXO 4 -	RESULTADOS REFERÊNCIA (1)	91

SUMÁRIO

Este trabalho foi desenvolvido com a finalidade básica de ser mais um passo em direção a se ter um tratamento numérico/analítico que chegue a definir cortes de vela mais eficientes.

O ponto de partida do tratamento aerodinâmico é a teoria de linha de sustentação (única) com limitação em um plano paralelo ao escoamento, perpendicular à linha de sustentação, envolvida por um escoamento que varia com a distância a esse plano. Esta parte do trabalho será baseada em trabalho já desenvolvido pelo Engº Bernardo L.R. Andrade apresentado como parte de seu programa de Mestrado em Seminário realizado em Junho de 1982. Na sequência, aproveitando os resultados encontrados para uma linha de sustentação simples, e com base na teoria desenvolvida chega-se a resultados numéricos para um par de linhas de sustentação interagindo.

O objetivo básico deste conjunto de trabalhos é chegar próximo ao que o Engº Jerome H. Milgram do MIT, Cambridge, desenvolveu, sendo possível definir cortes de vela de eficiência razoavelmente alta por intermédio do computador.

Como respostas ao programa desenvolvido temos, nesta fase, a sustentação, arrasto e momento de emborcamento de uma dada superfície tipo vela.

1. INTRODUÇÃO

Desde os primórdios da humanidade o homem tem procura do romper as barreiras que lhe são impostas pela própria natureza. O transporte de cargas e passageiros, tem sido um dos maiores desafios do homem. Quanto mais o homem progredia, mais ele necessitava estar em tempo menor em lugares distintos.

Por essa razão, talvez, ou até por algum motivo são explicado por Freud, o fascínio do homem pelos meios de transporte se fez cada vez maior, e este fascínio, gerou em todas as épocas uma corrida do ser humano contra ele mesmo no intuito de "encurtar" as distâncias.

No começo a roda, as embarcações primitivas, os animais de tração, as primeiras "máquinas" os barcos movidos a energia eólica. Com o passar do tempo a roda se uniu às embarcações, e hoje pode-se transportar centenas de milhares de toneladas em embarcações motorizadas, mas hoje ainda é usada a energia eólica para navegar.

Pequenas embarcações com finalidades esportivas ou de lazer, mas, milhares de anos após sua invenção, seu princípio ainda é quase o mesmo, o vento sobre as velas as impulsionam.

No início as embarcações "a vela" eram auxiliadas por remos, seu rendimento era baixo, às vezes chegavam a se atrapalhar. Com o passar dos tempos foi-se descobrindo os seus segredos. A maior parte das vezes sem ciência nenhuma, e surgiram os grandes "Lobos do Mar", os grandes "Piratas". Gênios que serviram para o progresso do transporte marítimo; gênios que sem conhecer a equação de Bernoulli, as condições de Kutta ou qualquer esboço de teoria, por puro sentimento geraram o progresso nesse campo por experiência, erros/acertos chegaram ao começo do século XX com o surgimento das primeiras embarcações de lazer.

Cada vez mais aumentava a importância da melhoria do rendimento de tais embarcações, (aprimoramento hidro/aero-dinâmica). Os estudos de aeronáutica começaram a se desenvolver com maior ciência. Grandes cientistas se dedicaram a estudos de aeronáutica.

No entanto somente depois da metade do século é que surgiram os primeiros trabalhos sobre dimensionamento e projeto analítico de velas para pequenas embarcações. Mesmo assim os trabalhos que surgiram não foram claros. Por terem surgido com fins puramente comerciais, tais trabalhos não demonstraram nada mais que o princípio de sua modelagem física e matemática, a menos de um trabalho de Pós-Graduação da referência(2) que mostra a sua modelagem e como enfrentar numericamente o problema. Porém infelizmente tal trabalho se restringiu tão somente ao projeto e análise de embarcações com uma única vela, quando na verdade se tem a maior parte das embarcações com duas ou mais velas.

A grande dificuldade em se projetar velas eficientes residia no fato de como, em qualquer projeto de Engenharia, os melhores resultados são oriundos de uma mistura de métodos analíticos, numéricos e experiências, sendo no caso do projeto em questão o problema mais crítico: A quase ausência de processos analíticos. Com o advento do computador este problema se reduz devido a possibilidade de desenvolvimento numérico para praticamente qualquer problema matemático conhecido.

A parte matemática em questão começou a ser desenvolvida por Prandtl (1919) e Glauert (1948) sendo então feito um tratamento numérico adequado de maneira que se possa chegar a conclusões mais paupáveis.

Do ponto de vista aerodinâmico, a diferença entre uma vela e outra superfície de sustentação qualquer, é que as velas são mais "carregadas" isto é: enquanto uma asa ou hélice têm coeficientes de sustentação por volta de 0,5. Uma vela tem

coeficientes em torno de 1,5. Isto faz com que a teoria linearizada que é empregada neste trabalho tenha um nível de aproximação ainda melhor do que se fossem usadas superfícies menos carregadas. Calcula-se que os erros implícitos a tal aplicação sejam da ordem de um por cento.

Já um erro bastante significativo associado a superfícies carregadas aerodinamicamente é a separação do escoamento. Tufos de lã colocados sobre velas de um modo geral, mostram que a maioria das velas ditas boas têm separação do escoamento em partes relativamente pequenas de sua área total quando em barlavento. Parte dos esforços teóricos que têm sido desenvolvidos, são no sentido de minimizar tais efeitos.

O desenvolvimento teórico que se segue neste trabalho tem como princípio a minimização de tais efeitos, mesmo que os trabalhos mais atuais indiquem que há a necessidade de um pequeno deslocamento próximo ao bordo de fuga da vela, quando a mesma se encontra em vento leve.

A maior parte da teoria aqui desenvolvida se baseia no princípio da linha de sustentação e nos efeitos da superposição de linhas de sustentação.

2. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Para melhor definir o conjunto de variáveis envolvidas e o problema propriamente dito serão construídas uma série de ilustrações.

Devido à necessidade de se tratar o problema em duas etapas (1 vela e duas velas) as primeiras ilustrações dirão respeito ao problema com uma vela, quando, no entanto, começarmos a fazer o tratamento teórico do problema com duas velas serão então apresentadas as ilustrações relativas a tal situação.

Pelo fato de as ditas velas estarem dispostas sobre a embarcação, as mesmas se moverão com a mesma velocidade, direção e sentido que a dada embarcação. Tal movimento tem duas fontes distintas: Transferência de quantidade de movimento do vento para as velas e das correntes para o casco e bolina. No caso em questão, ao invés de analisarmos a interação dos dois sobre a embarcação, vamos nos restringir ao que ocorre no velame do barco.

Na figura 1 temos a apresentação de um barco genérico, tendo então definidas todas as partes importantes do mesmo.

Naturalmente, como era de se esperar, a distribuição das velocidades do vento sobre a água obedece a leis da mecânica dos fluídos. Tal distribuição foi pela primeira vez levantada por Curry (1953), e é apresentada na Figura 2. Da observação das curvas levantadas podemos perceber nitidamente que as velas em questão no presente trabalho estarão sujeitas a uma movimentação de ar com velocidade variável diferindo a cada ponto em sua envergadura.

Um outro conceito envolvido neste trabalho que deve ser esclarecido nesta etapa, é o conceito de Vento Real e Vento Aparente.

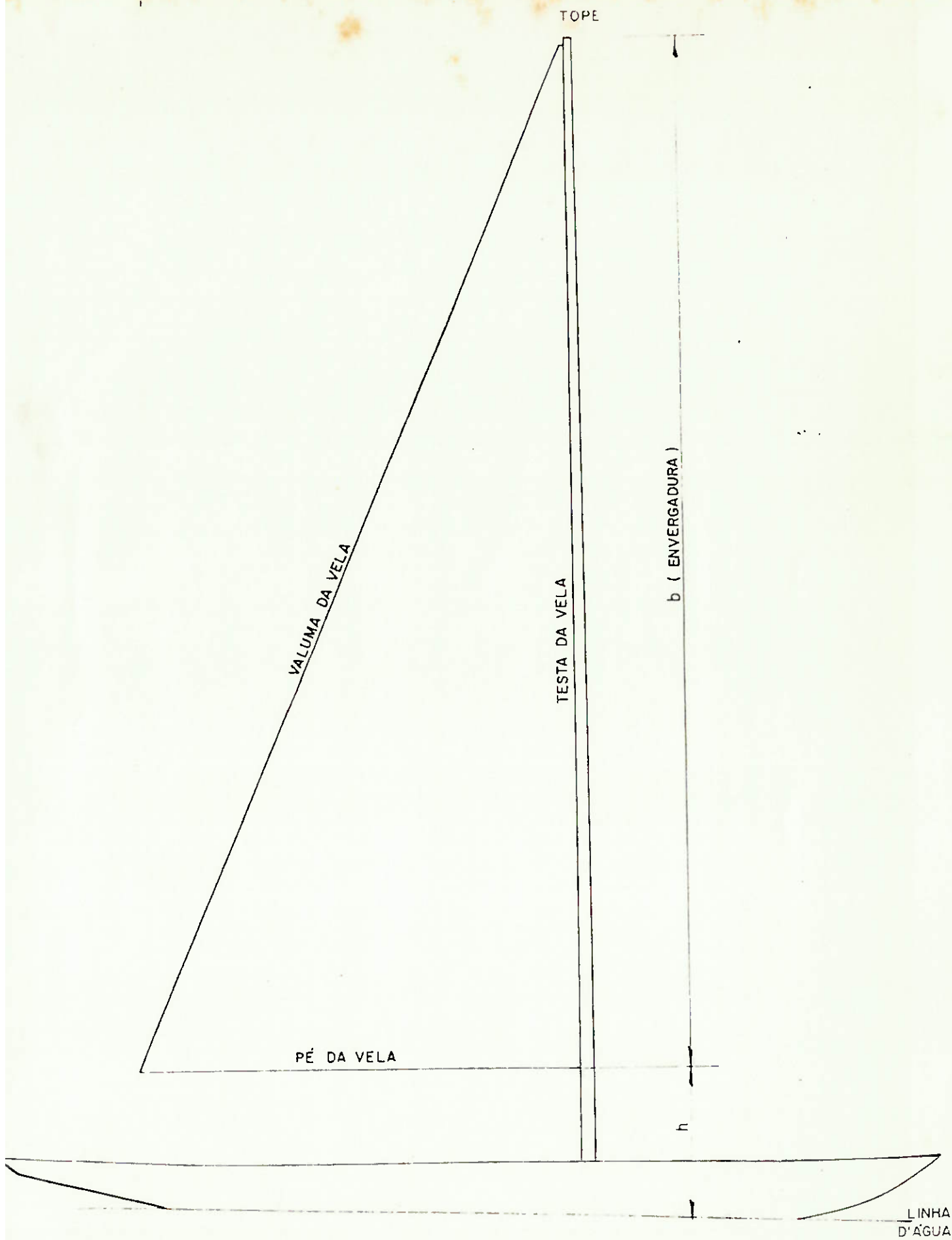


FIGURA 1 (REF [2])

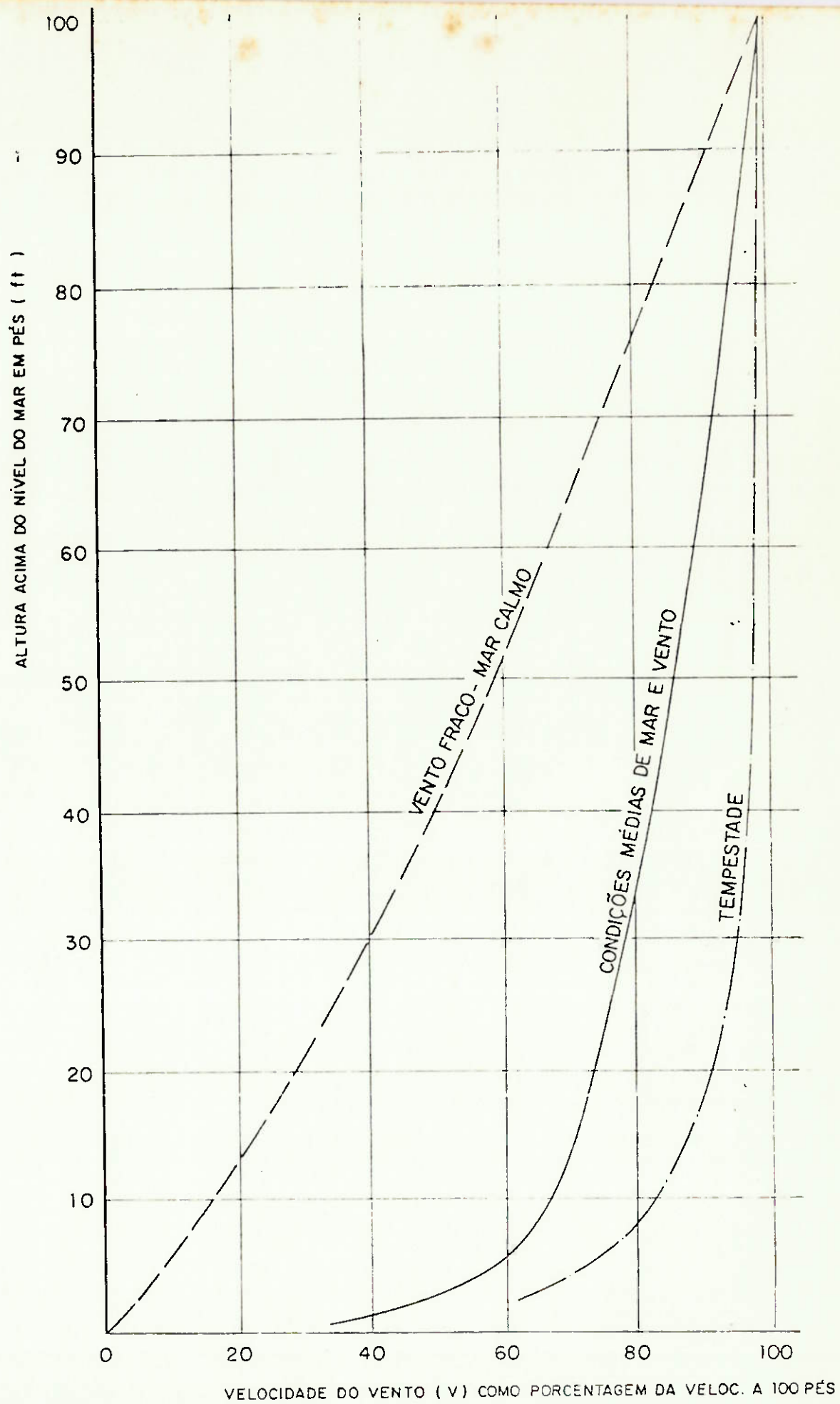
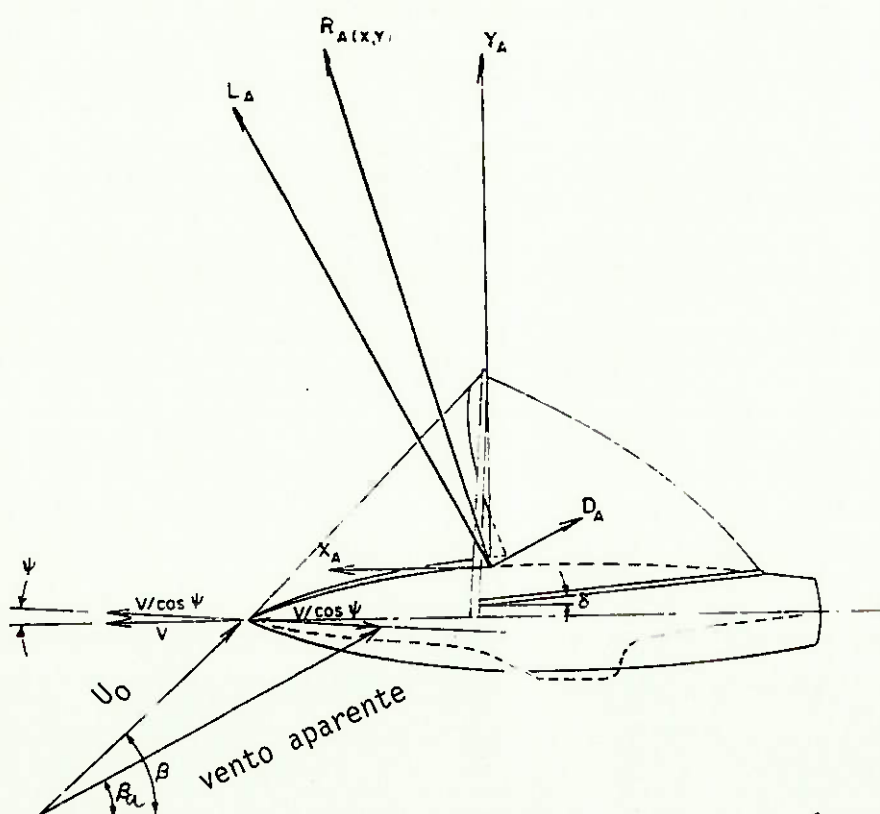
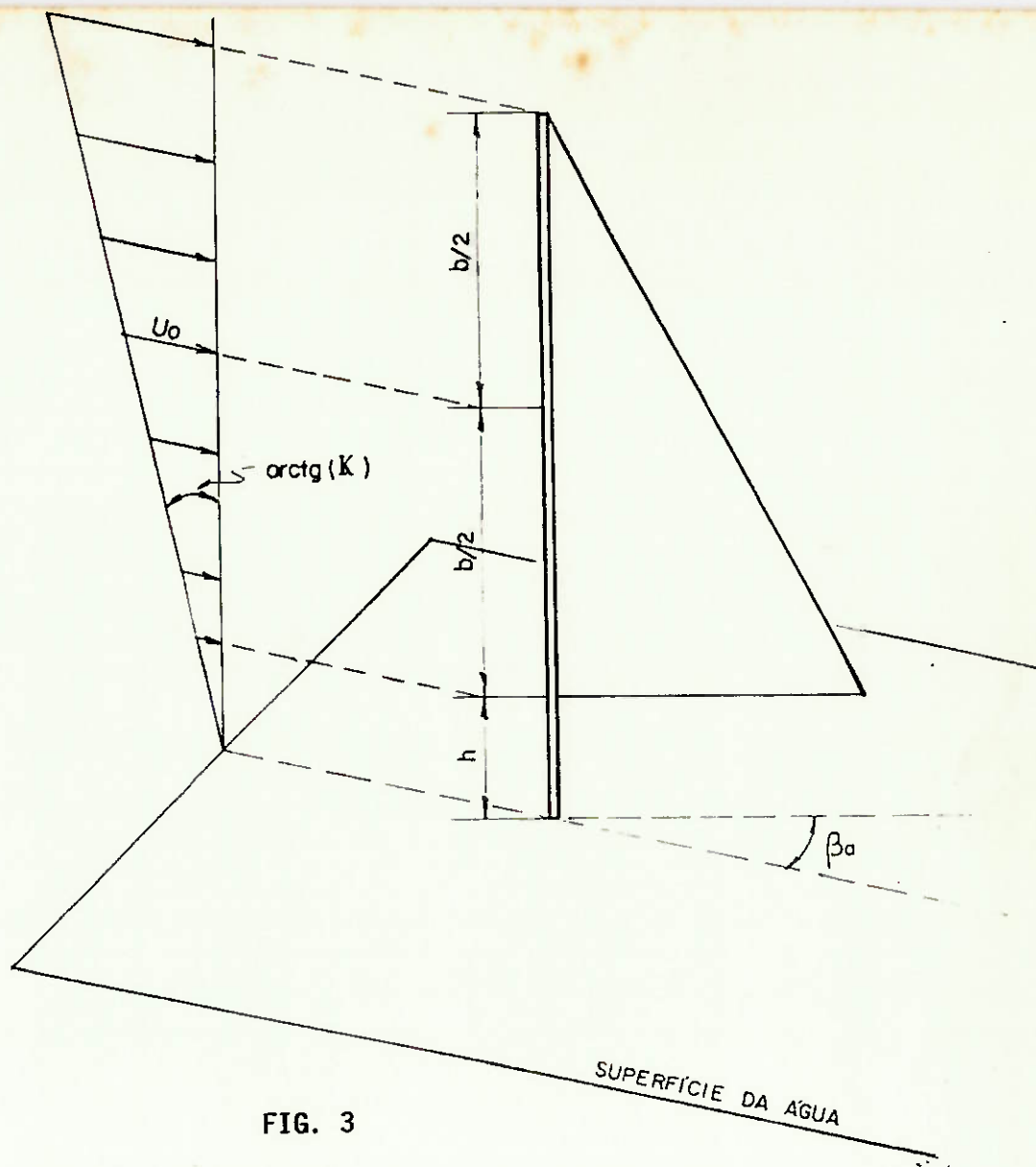


FIGURA 2 (REF [2])



Vento Real é aquele cuja velocidade e direção são medidos por um observador fixo sobre a superfície da água, enquanto o vento aparente é aquele medido por um observador sobre a embarcação, como se pode ver na figura 3. Tal diferença se deve à existência de variação de posição relativa entre os dois referenciais com o tempo. Devemos observar também que como a velocidade do vento sobre a superfície da água é variável com a altura, o mesmo acontece com o Vento Real e o Aparente. Isso vem a ter uma implicação mais importante no sentido em que a resultante que atua sobre a vela terá sua direção alterada conforma a altura (y). (Fig.3)

De modo a facilitar o desenvolvimento algébrico a origem do sistema de coordenadas será localizada na metade do vão de envergadura da vela, com o eixo das ordenadas (y) paralelo à testa da vela sobre a mesma. Definido o sistema desta forma (Fig.4) podemos calcular as velocidades e direções do vento aparente sobre a vela da seguinte forma:

$$|U(y)| = \sqrt{V_b + V(y) \cos(\beta)^2 + V(y) \cdot \text{SEN}(\beta)^2} \quad (1)$$

(Vide figura (4) para nomenclatura)

e

$$\beta_a = \text{ARCTAN} \frac{V(y) \text{ SEN}(\beta)}{V_b + V(y) \cos(\beta)} \quad (2)$$

Como já foi exposto anteriormente, o tratamento dado ao problema será dividido em duas partes. Em primeiro lugar, usando a teoria da linha de sustentação, chegar aos resultados pretendidos para cada vela em separado, e depois com estes resultados chegar a um tratamento adequado para a interação das duas velas. Para tanto, deve-se definir formalmente o problema da linha de sustentação que é colocado como se segue: determinar o campo de escoamento e a sustentação associada a ele, além do arrasto induzido e momento de emborcamento, para uma dada linha de sustentação de comprimento b perpendicular a um escoamento incidente (na direção x) inclinado com a vertical do ângulo ϕ . Um plano infinito horizontal é colocado a uma distância h abaixo

da linha de sustentação (simulando a água), e a variação da velocidade do ar ao longe dependerá somente da altura seguindo uma distribuição linear (que apesar de não correta é bem próxima da realidade) dada por

$$U = U_0 + k.y \quad (3)$$

onde U_0 será o valor da velocidade do ar na origem do sistema adotado; U a velocidade num ponto qualquer, k uma constante e y a ordenada do ponto.

O método de solução utilizado, parte de uma modelagem matemática feita por Prandtl e Glauert, de forma que terão de ser obedecidas certas condições de contorno impostas por tal modelagem e que serão apresentadas oportunamente quando do tratamento teórico. Uma condição que é fundamental é impor que o fluxo de ar através da superfície da água seja nulo. Para garantir tal condução, aproxima-se a superfície da água a um plano e impõe-se que não haja fluxo de ar através do mesmo.

Por questões justificadas mais adiante é importante notar que o problema será tratado na presença de uma "imagem" da linha de sustentação em questão além da mesma.

Basicamente, as respostas que são necessárias para posterior tratamento e consequente resposta ao problema proposto são as distribuições das vorticidades no plano $Z = 0$ de forma que o escoamento induzido venha a cancelar a componente normal à superfície de sustentação do escoamento.

Para utilizarmos a modelagem em questão será preciso a utilização de séries de Fourier de forma que um dos programas (Minar) utilizados foi elaborado para o seminário da referência (2), para encontrar os coeficientes de uma série de Fourier, que levam a um mínimo arrasto induzido, representando a circulação ao longo da vela.

3. VIABILIDADE

Definido o problema, devemos então partir para uma análise sobre a sua viabilidade. Viabilidade a ser analisada em todos os níveis.

De um modo geral quando é analisada a viabilidade de um dado projeto, analisa-se principalmente a viabilidade econômica, além da técnica. Este não é o intuito deste item.

Basicamente a viabilidade econômica é irrelevante a partir do instante que um trabalho de Graduação não encontra entraves econômicos a não ser que o mesmo venha a ser fisicamente executado. Os entraves encontrados se resumem principalmente em tempo e conhecimento.

A proposta original deste trabalho era a de, partindo do trabalho já desenvolvido sobre o cálculo das forças sobre uma superfície do tipo vela, projetar integralmente tal superfície chegando inclusive à definição de seu corte. Depois de algum tempo de estudo foi verificado que com a literatura encontrada não seria possível em tempo hábil se chegar ao resultado pretendido, pois para tanto seria necessário, a partir das teorias oferecidas na literatura existente, que se desenvolvessem teórica e praticamente sistemas para chegar às respostas pretendidas. Durante esta fase de estudos foi percebido que para se abranger uma gama maior de embarcações reais, dever-se-ia resolver o problema de sustentação para embarcações com duas velas dispostas tal qual um biplano, chegando-se então à conclusão, que, mais realisticamente, o passo a ser dado seria adaptar o trabalho já existente para cálculos de forças em uma superfície de sustentação tipo vela para superfícies tipo "vela-biplano".

4. EXPOSIÇÃO TEÓRICA BÁSICA

4.1. Introdução

Para melhor compreensão esta fase do trabalho trará o desenvolvimento teórico sucinto, porém procurando elucidar ca da ponto que se julga importante para a boa compreensão do que seria o método empregado na modelagem.

4.2. Cinemática e Dinâmica de um Campo Fluido

4.2.1. Equação de Bernoulli

Em primeiro lugar é importante estabelecer alguns pon tos:

- a) o escoamento considerado é uniforme e de fluido incompressível
- b) o estudo será feito para a situação de regime permanente
- c) o conceito de linhas de corrente.

Em regime permanente consideramos que num dado ponto de escoamento as condições nunca se alterarão em função da de corrência de um intervalo de tempo, de forma que as partículas fluidas que, uma após a outra passam por um dado ponto, se mo vem da mesma maneira ao longo do mesmo caminho. Nesta espécie de escoamento os caminhos das partículas fluidas são então cur vas permanentes, e, a cada ponto das mesmas a tangente tem a mesma direção da velocidade. Tais curvas são as ditas linhas de corrente. (fig.5)

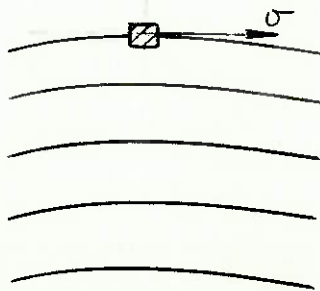


Fig. 5 - Linhas de corrente

d) Seja a equação de Euler, a qual representa o equilíbrio de forças, considerando-se as prerrogativas acima pode-se integrá-la de modo a se obter uma relação algébrica entre as pressões e as velocidades. Tal integração é possível porque as forças viscosas não são admitidas para o fluido dito fluido ideal além de estarmos assumindo que o fluido é incompressível. A integração de tal equação representa a conservação da energia mecânica do fluido.

A equação de Euler pode ser dada como se segue:

$$\rho g - \text{grad} p = \rho \frac{DV}{Dt} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \{ \rho g - \text{grad} p \} ds = \left\{ \rho \frac{DV}{Dt} \right\} \cdot ds$$

Rearranjando temos:

$$\left(\frac{DU}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - gx \right) dx + \left(\frac{DV}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - gy \right) dy + \left(\frac{DW}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - gz \right) dz = 0 \quad (5)$$

onde u, v e w serão as componentes da velocidade em x, y e z respectivamente.

Pode-se observar ainda que:

$$\frac{v}{u} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{w}{u} = \frac{dz}{dx}, \quad \frac{w}{v} = \frac{dz}{dy}$$

se expandirmos e eliminarmos os termos que representam o escoamento não permanente para o primeiro termo temos:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} dx + u \frac{\partial u}{\partial y} dy + u \frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} dx - g x dx = u du + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - gx \right) \quad (6)$$

e que para o segundo e terceiro termos teremos:

$$v dv + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - gy \right) dy \quad (6a)$$

$$wdw + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - gz \right) dz \quad (6b)$$

onde ρ é a densidade do fluido, g a aceleração da gravidade, P Pressão e ds uma porção elementar de área.

Se introduzirmos 6, 6a e 6b em 5 teremos:

$$(udu + vdv + wdw) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) - (g_x dx + g_y dy + g_z dz) = 0 \quad (7)$$

Se rearranjarmos e lembrarmos que a aceleração da gravidade é proveniente de um campo U chegamos à seguinte expressão:

$$d \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{P}{\rho} - U \right) = 0 \quad (8)$$

ou seja: $\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} - U = \text{constante} \quad (9)$ que é a expressão mais conhecida da equação Bernoulli.

4.2.2. Escoamento Irrotacional

Seja a velocidade angular na direção z de um elemento fluido dada por:

$$w_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

percebe-se claramente que o termo entre-parênteses é o termo em z do rotacional do vetor velocidade do elemento fluido.

Desta forma percebemos que as outras componentes do vetor velocidade angular serão compostas pela metade das outras componentes do rotacional do vetor velocidade (V)

$$\Rightarrow \vec{w} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{V} \quad (10)$$

como geralmente o plano de rotação de um dado elemento fluido é arbitrário com relação ao sistema de coordenadas, a velocidade angular do mesmo terá as três componentes.

Para o caso bidimensional (plano x - y) temos:

$$x^2 + y^2 = \text{constante}$$

⇒ é facilmente demonstrado que:

$$u = -wy$$

$$e \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{V} \big|_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2w_z$$

$$v = +wx$$

Um escoamento é dito irrotacional quando o rotacional do campo é nulo. Tais condições são expressas pelas seguintes condições:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (11)$$

$$e \quad x^2 + y^2 = \text{const}$$

Resolvendo para u e v temos:

$$u = - \frac{yf(r)}{r} \quad e \quad v = + \frac{xf(r)}{r}$$

seja então $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ daí temos:

$$f(r) = \frac{k}{r} = |\vec{V}| \quad (k \text{ é uma constante, e } r \text{ o raio do elemento ao centro do giro do escoamento}) \quad (12)$$

Este escoamento, o qual representa um campo fluido com linhas de corrente circulares e com o valor absoluto da velocidade variando inversamente com a distância a partir do "centro" dessas linhas, é chamado escoamento em vórtices.

Pela definição de rotacional temos:

$$\vec{\nabla}_n \times \vec{V} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{V} \cdot d\vec{s}}{\Delta S}$$

onde $\vec{V}$ é o campo de velocidades considerado e S um elemento do

deslocamento daí vem que:

$(\vec{\nabla}_n \times \vec{V} \Delta S)_1 \approx (\oint \vec{V} \cdot d\vec{s})_1$ onde o índice 1 significa que o cálculo das duas expressões é feito no mesmo ponto.

Para K pontos temos:

$$\sum_{i=1}^k (\vec{\nabla}_i \times \vec{V} \Delta S) \approx \sum_{i=1}^k (\oint \vec{V} \cdot d\vec{s}) \Rightarrow$$

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{V} dS = \oint \vec{V} \cdot d\vec{s} \quad (12)$$

Que é o teorema de Stokes na sua forma mais conhecida.

Se chamarmos a integral de linha da expressão (12) de circulação e adotarmos o símbolo $-\Gamma$ p/ ela temos:

$$\oint \vec{V} \cdot d\vec{s} = -\Gamma$$

O sinal negativo vem de a circulação ser positiva no sentido horário enquanto o rotacional no anti-horário.

Parece óbvio, a partir de (12), que a circulação sobre um caminho fechado em um campo irrotacional é zero. É também evidente que, se todos os pontos exceto um ponto em um da do campo são irrotacionais, a circulação ao redor de qualquer caminho que circunde este ponto será igual a $\nabla \times \vec{V} dS$ naquele ponto.

Se escolhermos agora o ponto $r = 0$ para um escoamento vórtice cujas linhas de corrente são círculos concêntricos e a velocidade inversamente proporcional à distância do centro, e se escolhermos o ponto $r = 0$ (pois o valor do rotacional é in determinado neste ponto)

O produto $\vec{V} \cdot d\vec{s}$ é simplesmente $\left(\frac{k}{r}\right) (r d\theta)$ daí a circulação será:

$$\Gamma = - \oint \vec{V} \cdot d\vec{s} = - \int_0^{2\pi} \frac{k}{r} (r d\theta) = - 2\pi \cdot k$$

Por consequência em $r = 0$, $\vec{\nabla} \times \vec{V} d\vec{S} = -2 \pi k$ porque $d\vec{S}$ é infinitesimal e $(\vec{\nabla} \times \vec{V})_{r=0} = \infty$ se k for substituído por $-\Gamma/2\pi$ as equações que descrevem o escoamento serão

$$x^2 + y^2 = c^2$$

$$|\vec{V}| = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} \quad (13)$$

4.2.3. Potencial de Velocidades

Como já foi visto, pelo teorema de Stokes a integral de linha de $\vec{V} \cdot d\vec{s}$ por um dado caminho fechado em um campo irrotacional é zero, daí concluímos que sobre qualquer caminho que for traçado entre dois pontos dentro de um escoamento irrotacional será independente do caminho utilizado, e será dado por:

$$\oint_A^B \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_A^B (u dx + v dy + w dz) = f(A, B)$$

Uma integral de linha só pode ser independente do caminho utilizado caso o integrando seja uma diferencial exata, portanto $\vec{V} \cdot d\vec{s}$ deve ser uma diferencial exata em função das coordenadas do campo. A tal função daremos o símbolo $\phi(x, y, z)$. Seja então a diferencial total.

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \quad \text{e} \quad d\phi = u dx + v dy + w dz \Rightarrow$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (14)$$

$$\text{Da } |\vec{V}| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2} \quad \text{e} \quad \vec{V} = \text{grad } \phi$$

Donde concluímos que:

$$\int_A^B \vec{V} \cdot d\vec{s} = \phi_B - \phi_A \quad (15)$$

Em resumo deve-se ter em mente o seguinte:

Uma consequência importante da irrotacionalidade permanente é a existência de um potencial de velocidades ($V = \nabla\phi$) onde ϕ será o potencial por todo o escoamento ($\phi(x,y,z,t)$) e sua existência permite a reposição de um vetor de 3 componentes por um simples escalar como no princípio das variáveis dependentes em investigações teóricas.

Dada a existência do potencial ϕ derivamos como importante consequência a equação de Bernoulli para escoamento irrotacional.

Como condição necessária e suficiente para a existência de um potencial ϕ de tal forma que $V = \nabla\phi$ é que $\nabla \times \vec{V} = 0$.

4.2.4. Vórtice Pontual, Filamento de Vórtices. Lei de Biot Savart

O campo de velocidades que define o escoamento que pode ser dado pela expressão (13) é de suma importância nos estudos de aerodinâmica. Tal expressão é deduzida para modelos onde o fluido considerado é incompressível e não viscoso e obviamente não se pode esperar encontrar tais condições na natureza. Tanto um redemoinho como um furacão podem ser tomados como exemplos na natureza de algo que se aproxima do que foi tomado como modelo para as deduções, isto se deve principalmente ao fato de para tais casos a viscosidade e a compressibilidade não exercem influência significativa.

Em tal modelo de escoamento o fluido se desloca em círculos concêntricos e, exceto para a porção central, este movimento é irrotacional. Como já foi demonstrado, para tal escoamento a velocidade deve ser inversamente proporcional à primeira potência da distância do elemento fluido ao centro do escoamento. Uma imagem física de um vórtice seria uma região em um escoamento onde a velocidade linear das partículas fluidas aumen

tassem permanentemente conforme as mesmas se aproximassem do centro do escoamento. O ponto central destes escoamentos é chamado de vórtice puntual e sua intensidade é dada pela circulação em volta do ponto central. É costumeiro se dizer que um vórtice puntual está induzindo um escoamento na região que o circunda, contudo é importante lembrar que um vórtice e o escoamento ã sua volta simplesmente coexistem, um não é o causador do outro.

No campo de velocidades Bidimensionais descrito pela expressão (13) temos um escoamento do tipo vórtice com o vórtice puntual no centro das coordenadas. Um escoamento bidimensional é aquele cuja forma é idêntica em todos os planos paralelos ao plano $x - y$ de $-\infty$ a $+\infty$, e se unirmos todos os vórtices puntuais por uma linha, a mesma será reta e perpendicular ao plano $x - y$ considerado. No caso de um escoamento tridimensional esta linha não é necessariamente paralela ao eixo z , nem sequer é necessariamente reta e é chamada de filamento de vórtices. Pode-se também definir filamento como a linha que une o centro de rotação de sucessivos elementos fluidos.

Neste ponto é conveniente discutir a velocidade "induzida", em uma região que circunda um filamento de vórtices, por um elemento ds deste filamento. O incremento de velocidade induzida em p pelo elemento ds do filamento é dado por: (vide fig. 6)

$$dv = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\cos\beta ds}{r^2} \quad (16)$$

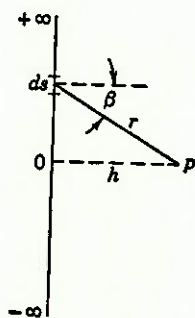


Fig. 6 -

A prova desta expressão pode ser encontrada em livros de análise vetorial para Hidrodinâmica, como por exemplo Ref.3 pg. 206.

Na expressão acima temos: Γ é a intensidade do filamento de vórtices, r é a distância entre o incremento do filamento e o ponto P, e β é o ângulo entre a reta que une P a ds e a normal ao filamento. O incremento de velocidade tem direção perpendicular ao plano determinado por ds e o ponto p.

A expressão (16) é completamente análoga à Lei de Biot-Savart para campos magnéticos e a velocidade induzida em p pelo filamento é determinada pela integração da expressão (16).

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\cos\beta ds}{r^2} \quad \text{onde} \quad \begin{aligned} r &= h \sec\beta \\ s &= h \tan\beta \end{aligned}$$

Se efetuarmos a integração da expressão (16) fazendo as substituições necessárias e colocando β entre $\pm \pi/2$ chegamos a:

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi h} \quad (17)$$

Que é a expressão da velocidade em p.

4.2.5. Esteira de Vórtices

Se extendermos o conceito de vórtices de uma linha para uma superfície, podemos ter um tratamento muito útil para o caso de corpos finos. Imagine-se uma superfície formada por uma infinidade de filamentos de vórtices de intensidade infinitasimal colocados lado a lado. A integral do rotacional de V para uma unidade de comprimento deve ser um valor finito, a qual será chamada de intensidade da esteira. Aplicando-se o teorema de Stokes a intensidade da esteira em qualquer ponto e então

dada por:

$$\gamma = \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{1}{\ell} \oint V \cdot ds$$

onde ℓ é o comprimento da esteira compreendido na integração. Se a circulação for no sentido horário.

O incremento de velocidade para um ponto p nas proximidades da esteira é dado por:

$$dv = \frac{\gamma ds}{2\pi r}$$

Tanto continuidade quanto irrotacionalidade são observadas em todos os pontos neste campo, pois cada elemento sozinho preenche os requisitos para tais condições serem observadas, exceto, é claro no centro de rotação do escoamento.

O escoamento induzido por uma linha poligonal fechada de vórtices é irrotacional.

Nenhuma descontinuidade na velocidade ocorre em qualquer parte do escoamento exceto na própria esteira, onde a componente da velocidade paralela à esteira dá um salto exatamente do valor da intensidade da esteira no instante em que se cruza a esteira. Tal salto de velocidade pode ser visto ao se considerar a circulação em torno de um trecho unitário da esteira (Figura 7). O valor da circulação é igual à integral do rotacional de V sobre uma área fechada, o qual por definição se iguala à circulação da esteira. Dai temos:

$$(u_1 - u_2) + (v_1 - v_2) \Delta n = \iint_S \nabla \times V \cdot d\vec{S} = \gamma$$

A geometria é mostrada na figura 7.

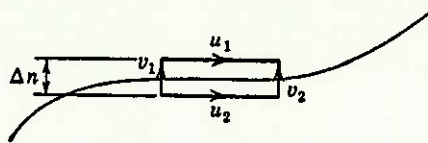


Fig. 7 - Descontinuidade da velocidade sobre uma esteira de vórtices.

Tal integral não se altera quando se faz Δn tender a zero, daí segue que:

$$\gamma = u_1 - u_2 \quad (18)$$

4.2.6. Teoremas de Helmholtz

É facilmente demonstrado pelo que se segue que um filamento de vórtice tem sua intensidade constante ao longo de seu comprimento. Fechando-se um segmento do filamento de vórtice com uma casca cilíndrica (figura 7) donde se retirou uma tira paralela ao eixo, chegar-se-á aos teoremas. Como o rotacional da velocidade sobre a referida casca é nulo, segue, do teorema de Stokes que a integral de linha da velocidade sobre o perímetro da casca também é nula. Ao se separar o perímetro em trechos, percebe-se que a contribuição das integrais de b a c e de d a a serão de igual magnitude e de sinais contrários. A partir do instante em que considerarmos a tira muito estreita, daí para se manter o valor da integral igual a zero devemos ter as integrais de a a b iguais às de c a d porém com sinais trocados o que demonstra o primeiro teorema de Helmholtz:

"A intensidade de um filamento de vórtices é constante ao longo de seu comportamento". (T.1.)

Levando a demonstração um pouco mais adiante, imagine que o cilindro imaginário foi colocado de tal forma que o filamento termine na metade do referido cilindro. A integral de linha a A B e de c a d já não podem mais ser de igual magnitude de forma que a condição de que a circulação sobre esse perímetro seria zero foi então violada. Desta forma chega-se ao segundo teorema de Helmholtz:

"Um filamento de vórtice não pode terminar num fluido; o mesmo deve se estender às fronteiras do fluido ou formar um caminho fechado" (T.2)

Já o terceiro teorema de Helmholtz que pode ser provado teoricamente por considerações da continuidade e equilíbrio de um fluido incompressível não viscoso é colocado como segue:

"Na ausência de forças rotacionais externas, um fluido inicialmente irrotacional permanecerá irrotacional" (T.3)

Que como corolário temos, a partir do terceiro teorema de Helmholtz e do teorema de Stokes, a seguinte afirmação:

"Na ausência de forças rotacionais externas, se a circulação sobre um caminho que inclui um número definido de partículas é inicialmente zero, permanecerá sempre zero".

Este corolário será de grande utilidade no estudo dos fôlios bidimensionais.

5. A ASA DE ENVERGADURA INFINITA

É fundamental termos em mente a constante analogia que será feita entre velas e asas. A teoria existente em geral foi desenvolvida para asas, mas como já foi exposto anteriormente, a analogia é completa a não ser com relação a certos pontos da modelagem (posição da vela em relação ao vento e este em relação à água) que serão devidamente explorados posteriormente.

O termo "infinito" será usado para denotar que a análise será feita sobre um modelo bidimensional.

5.1. A Equação do Momento para Escoamento Irrotacional

Seja a equação de Bernoulli:

$$P = \gamma H - \gamma h - \frac{\rho}{2} v^2$$

onde h é a elevação do elemento sobre um plano horizontal de referência e H é uma constante.

Consideramos o plano vertical do escoamento orientado da seguinte forma: eixo x na horizontal e y na vertical para cima. Denote-se C' o contorno do perfil considerado e C'' uma curva arbitrária circundando o perfil (Fig.7). Consideremos a equação do momento da quantidade de movimento.

$$X = P_x + W_x - \int_{(S'')} \rho V_n V_x ds \quad \text{e} \quad Y = P_y + W_y - \int_{(S'')} \rho V_n V_y ds \quad (19)$$

Aplicando-se tal equação à região entre C' e C'' temos os seguintes resultados:

$$P_x = - \int \rho \cos(n, x) d\ell \quad P_y = - \int \rho \sin(n, x) d\ell$$

onde n é a normal dirigida para fora e $d\ell$ o elemento de comprimento

mento infinitesimal de C'' ($d\ell \times 1$ é o elemento de área). Mas

$$d\ell \cos(n, x) = dy \quad \text{e} \quad d\ell \cos(n, y) = -dx$$

Se substituirmos o valor de P obtido da equação de Bernoulli nas expressões de P_x P_y e levando em consideração que no sistema adotado temos: $W_x = 0$ e $W_y = -W$ temos:

$$P_x + W_x = -\gamma \int H \cos(n, x) d\ell + \gamma \int h \cos(n, x) d\ell + \frac{\rho}{2} \int V^2 \cos(n, x) d\ell$$

e

$$P_y + W_y = -\gamma \int H \sin(n, x) d\ell + \gamma \int h \sin(n, x) d\ell - W + \frac{\rho}{2} \int V^2 \sin(n, x) d\ell$$

Pode-se facilmente perceber que $\gamma \int H \cos(n, x) d\ell = \gamma H \int dy = 0$ já que o caminho é fechado da mesma forma temos que

$$\gamma \int H \sin(n, x) d\ell = -\gamma H \int dx = 0 \quad \text{e substituindo } y \text{ por } h \text{ temos}$$

$$\gamma \int h \cos(n, x) d\ell = \gamma \int y dy = \frac{1}{2} \gamma \int d(y^2) = 0 \quad \text{e pela mesma}$$

$$\text{razão } \gamma \int h \sin(n, x) d\ell = -\gamma \int y dx$$

A integral de $\gamma \int h \sin(n, x) d\ell$ é vista como peso de uma massa fluida que ocupasse todo o espaço da a diferença $\bar{W} - W$ será o empuxo. Então tem-se as expressões

$$X = \frac{\rho}{2} \int \left[V^2 \cos(n, x) - 2 V_x V_n \right] d\ell \quad (20)$$

$$Y = \bar{W} - W + \frac{\rho}{2} \int \left[V^2 \sin(n, x) - 2 V_y V_n \right] d\ell$$

A diferença $\bar{W} - W$ será tida como zero no resto do texto por ser uma quantidade muito pequena. Seja então a velocidade expressa como:

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 \quad V_n = V_x \cos(n, x) + V_y \sin(n, x) \quad \text{daí então as expressões (20) serão:}$$

$$X = \frac{\rho}{2} \int \left[(v_y^2 - v_x^2) \cos(n, x) - 2 v_x v_y \sin(n, x) \right] d\ell \quad (21)$$

$$Y = \frac{\rho}{2} \int \left[(v_x^2 - v_y^2) \sin(n, x) - 2 v_x v_y \cos(n, x) \right] d\ell \quad (22)$$

Que é então a base para o cálculo da força que com certo fluido exerce sobre um aerofólio de envergadura infinita.

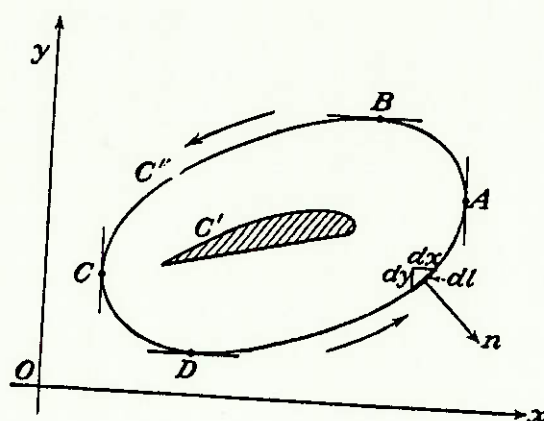


Fig.8 - Aplicação do teorema do momento da quantidade de movimento a um escoamento bidimensional por um aerofólio.

Se investigarmos as equações que fornecem os momentos (equação (11) seção III-3 Ref.6) chegaremos aos seguintes resultados, com relação aos momentos devidos à sustentação surgida no aerofólio

$$M'_z = - \rho \int V_n (x v_y - y v_x) d\ell \quad (23)$$

5.2. A Sustentação de um Aerofólio de Envergadura Infinita

5.2.1. Arrasto e sustentação: definições.

Arrasto, $\vec{D}$, como se pode imaginar, uma força de resistência ao avanço na direção do movimento de um corpo imerso num dado fluido. Mas, ao contrário daquilo que se pode imaginar a princípio a sua origem (pelo menos em sua maior parte) não é em fricção do fluido com o corpo em questão, mas sim devido ao escoamento e sua disposição no espaço devido à existência de tal corpo.

Tanto o arrasto quanto a sustentação têm origem nos campos de pressão que se formam ao redor do corpo quando o mesmo se encontra em movimento imerso em um dado fluido.

Assim como o arrasto $\vec{D}$ é uma força na direção do movimento a sustentação $\vec{L}$ é perpendicular ao mesmo.

Basicamente podemos definir as duas forças como uma única decomposta em suas componentes, uma na direção do fluxo e outra perpendicular ao mesmo.

Alguns dos parâmetros analisados em aerofólios quanto à sustentação e arrasto são a razão entre estas duas grandezas e o ângulo de ataque α do aerofólio sobre o fluido que influirá diretamente sobre a razão anterior (Fig.9).

Perfis aerodinâmicos mais modernos conseguem razões entre a sustentação e o arrasto da ordem de 20:1

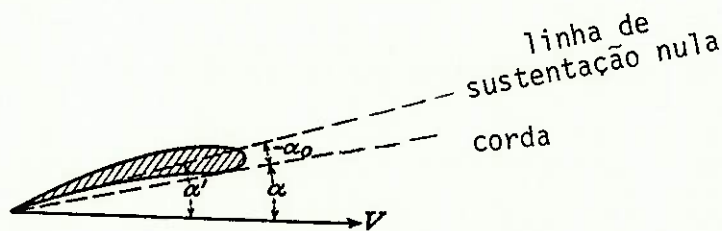


Fig. 9 - Ângulo de ataque

5.2.2. A relação entre sustentação e circulação.

A teoria desenvolvida sobre sustentação em corpos imer sos em fluidos é muito mais completa, por ser mais fácil de ser desenvolvida, do que aquela para o arrasto. O arrasto tem como uma de suas componentes problemas viscosos, mesmo que haja so mente uma fina camada limite, ao mesmo tempo que a sustentação pode ser explicada sem se entrar no mérito dessas questões.

Em primeiro lugar deve-se analisar o problema simplifi cando alguns pontos: Ao invés de um perfil com várias curvatu ras, para melhor entendimento dos conceitos envolvidos, será analisado, conceitualmente, um plano inclinado em relação a um dado escoamento. (Fig. 10)

Se um dado corpo experimenta uma certa sustentação, is to é, uma força perpendicular ao escoamento no qual está imer so, pode-se relacionar tal fenômeno somente a um certo acrēsci mo de pressão na parte inferior do corpo e um "vácuo parcial" (decrēscimo de pressão) na parte superior. (Fig. 10)

Em se analisando a configuração proposta acima por in termédio da equação de Bernoulli chega-se à conclusão que a ve locidade média do escoamento em torno do corpo deve ser maior na parte superior do que na parte inferior. Tal condição pode muito bem ser explicada com a superposição de um escoamento da esquerda para a direita (Fig. 11) e um escoamento em forma de circulação no sentido horário. (Fig. 12) Tal configuração foi mostrada e provada pela primeira vez por Rayleigh e Lanchester*. Para melhor entendimento deve-se observar na figura 10(b) que um escoamento puramente de translação em torno do perfil não exerce qualquer força no plano senão um momento em torno do seu eixo de rotação. A superposição desse escoamento de translação pura com um escoamento de circulação (Fig. 12) leva então à con dição original (Fig. 10(a)) onde a velocidade na parte superior do plano é maior do que na parte inferior. A condição da figura

10(b) é a que existe logo após o início do escoamento. A circulação, designada por Γ , é a integral de linha da componente tangencial da velocidade ao longo de qualquer curva fechada envolvendo o perfil.



Fig. 10 - Superposição dos escoamentos em torno de um plano inclinado de 10(b) e 10(c)
Os sinais + indicam acréscimo de pressão e os - decréscimo.

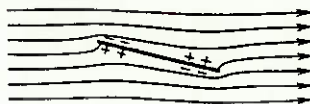


Fig. 11 - Escoamento de translação puro em torno de um plano inclinado.

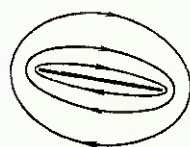


Fig. 12 - Escoamento de circulação pura em torno de um plano inclinado.

5.2.3. A sustentação a partir da distribuição de pressões ao longo do perfil.

Nesta seção, é importante assumir-se que o aerofólio considerado tem envergadura infinita (estende-se para o infinito em ambos os lados perpendicular ao papel). Devido a tais simplificações os efeitos de extremidades serão desprezados, de forma que o padrão que seguir as linhas de corrente em qualquer ponto, repetir-se-á ao longo de todo o fôlio. A curvatura do aerofólio e o ângulo de ataque (α) com respeito à direção do escoamento são ambos tão pequenos que pode-se aproximar o cosseno de α como sendo igual à unidade. A partir de tais simplificações, será necessário adotarmos a notação u_a para a componente na direção x da circulação na parte superior do fôlio enquanto u_b será para a parte inferior.

Se for retirada uma "fatia" dessa asa infinita, pode-se calcular a sustentação com base nas pressões da parte superior e inferior. A pressão na parte superior será denotada por p_a e na parte inferior será denotada por p_b . Segue-se a seguinte relação para a sustentação dessa "fatia". Vide figura 13

$$L = \iint (p_b - p_a) dS = \rho \int_A^B (p_b - p_a) dx \quad (24)$$

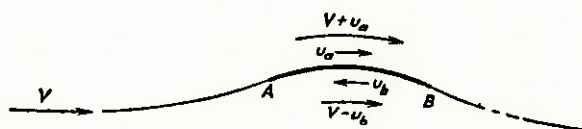


Fig. 13 - Decomposição das velocidades.

onde dS é o elemento de superfície igual a $\overline{AB} \cdot \lambda$. Eliminando da

expressão (24) as pressões por intermédio da equação de Bernoulli temos:

$$\begin{aligned} L &= \iint (p_b - p_a) dS = \frac{\rho \ell}{2} \int_A^B \left[(V + u_a)^2 - (V - u_b)^2 \right] dx \\ &= \frac{\rho \ell}{2} \int_A^B \left[2V (u_a + u_b) + u_a^2 - u_b^2 \right] dx \end{aligned} \quad (25)$$

que, devido às simplificações impostas anteriormente tem-se

$$\int_A^B u_a dx + \int_A^B u_b dx = \Gamma$$

substituindo-se em (25) chega-se a:

$$L = \rho \ell V \Gamma + \frac{\rho \ell}{2} \int_A^B (u_a^2 - u_b^2) dx \quad (26)$$

Na próxima seção será provado que a integral da expressão (26) é nula, de forma que temos a sustentação dada pela primeira parte da expressão.

5.2.4. Derivação da Lei de Kutta-Joukowski por intermédio do escoamento através de uma "grelha".

De modo a que se possa chegar a um resultado mais exato, ao invés de considerar um único fôlio infinito, considera-se uma série de fôlios dispostos de maneira a que estes estejam paralelos e dispostos verticalmente um sobre o outro (figura 14) sendo a distância entre cada "lâmina" e seus vizinhos mais próximos, e o sistema de coordenadas será disposto com o eixo x na vertical e o y na horizontal. A área sobre a qual se estenderá a integral consiste de um plano $A_1 = a \cdot \ell$ do lado esquerdo, distante da "grelha" e paralelo ao eixo x , um plano A_2 semelhante ao anterior, porém situado na porção direita e duas superfícies cilíndricas sobre as linhas de corrente. Como $A_1 = A_2$, da equação da continuidade temos que $v_1 = v_2 = v$

Aplicando o teorema do momento da quantidade de movimento, pode-se notar que devido às linhas de corrente serem idênticas em sua forma a integral da pressão e da quantidade de movimento são nulas resultando então em componentes X e Y como se segue:

$$-X = \rho \ell v (u_2 - u_1) \quad (27)$$

$$Y = a (v_1^2 - v_2^2) + a \ell (p_1 - p_2) = a \ell (p_1 - p_2)$$

mas

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 + u_2^2) - \frac{\rho}{2} (v_1^2 + u_1^2) \text{ que como } v_1 = v_2 \text{ tem-se:}$$

$$Y = \rho \ell a \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} = \rho \ell a \frac{u_1 + u_2}{2} (u_2 - u_1) \quad (28)$$

Como para o cálculo da circulação, a integral de linha sobre as linhas de corrente se anulam, calculando-se a circulação para uma "lâmina" chega-se a

$$\Gamma = a(u_2 - u_1)$$

$$X = -\rho \ell \Gamma v$$

$$Y = \rho \ell \Gamma \frac{u_1 + u_2}{2}$$

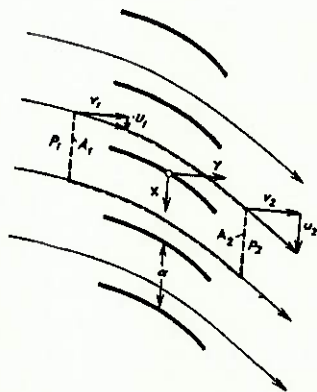


Fig. 14 - Escoamento por uma grelha.

Para termos tal cálculo extendido sobre uma única lâmina seria o mesmo que se calculássemos a circulação para a tendendo a infinito, daí como o valor de Γ é constante temos que

$$u_2 = u_1$$

Se a direção do escoamento no infinito é paralela ao eixo Y $u_2 = u_1 = 0$ então a componente Y é também nula, sobrando somente a componente X, ou seja, a sustentação.

Se definirmos a direção x como sendo então positiva para cima e a velocidade do escoamento no infinito denotada por V, temos finalmente:

$$L = \rho \ell V \Gamma \quad (29)$$

Que em síntese é a fórmula de sustentação de Kutta-Joukowski.

Como resultado importante desse fato temos que: "em um escoamento bidimensional-irrotacional que passa por um dado aerofólio, o mesmo não experimenta nenhum arrasto, mas tão somente uma sustentação que, por unidade de envergadura, a uma dada densidade e velocidade e circulação se iguala ao produto das mesmas ($L = \rho \ell V$). Este é o teorema de Kutta-Joukowski.

Desde que não se conheça a circulação, tal teorema não permite avaliação imediata da sustentação de um aerofólio de uma dada forma; mas pode-se chegar a resultados importantes a partir dos dois fatos que se seguem:

- a) Qualquer distribuição de velocidades obtidas por superposição de dois campos irrotacionais à volta de um perfil, representa um outro escoamento irrotacional à volta do mesmo perfil.
- b) Evidências experimentais mostram que o escoamento em torno de um aerofólio de uma dada forma está completamente determinado pela magnitude da velocidade ao longe (velocidade do escoamento não perturbado pela presença do fólio) e o ângulo de ataque. Já não se pode afirmar isso sobre corpos cilíndricos de seção transversal arbitrárias. Este é um dos méritos

da teoria que Joukowski desenvolveu mostrando que no caso de um perfil com um bordo de fuga cuneiforme existe um e somente um escoamento irrotacional que preenche todas as condições físicas e geométricas de forma que este escoamento é totalmente determinado pela forma do perfil e velocidade do escoamento não perturbado.

Considere-se todas as conclusões sobre a equação (29) como a circulação é linearmente dependente da velocidade, a mesma pode ser visualizadas como a soma de dois escoamentos cujas circulações seriam Γ' e Γ'' portanto $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$. Seja agora o eixo x paralelo à corda do perfil (Fig. 16). Considere-se o escoamento cuja velocidade do fluxo não perturbado é de magnitude unitária e sentido oposto ao do eixo x . Neste escoamento a circulação terá um valor definido Γ_1 . No caso de a velocidade do fluxo não perturbado ter a mesma direção da que gerou Γ_1 porém com outro módulo (V_1) sua circulação será então $\Gamma_1 |V_1|$.

Pode-se então decompor a circulação do seguinte modo, adotando a prerrogativa acima para as duas direções, x e y (Fig. 16).

$$\Gamma = |V| (\Gamma_1 \cos \alpha + \Gamma_2 \sin \alpha) \quad (30)$$

com

$$C = 2 \sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2} \quad \sin \alpha_0 = - \frac{\Gamma_1}{\sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2}} \quad \cos \alpha_0 = \frac{\Gamma_2}{\sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2}}$$

Pode-se desenvolver a circulação da seguinte forma:

$$\Gamma = \frac{1}{2} CV (\sin \alpha \cos \alpha_0 - \cos \alpha \sin \alpha_0) = \frac{1}{2} CV \sin (\alpha - \alpha_0) \quad (31)$$

Daí tiramos pelo teorema de Kutta-Joukowski que:

$$L = \frac{\rho}{2} V^2 (\sin (\alpha - \alpha_0)) \quad (32)$$

onde L é a sustentação por unidade de comprimento do aerofólio.

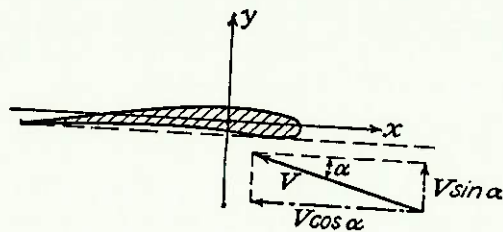


Fig. 15 - Decomposição da velocidade do ar.

5.2.5. Derivação da equação de Kutta-Joukowski.

Coloque-se na função de corrente da seguinte maneira:

$$Z_1 = V_z + \frac{\Gamma i}{2\pi} \log z + \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z^3} + \dots$$

$$\text{e como } w = \frac{dZ}{dz} = v + \frac{\Gamma i}{2\pi z} - \frac{A}{z^2} - \frac{2B}{z^3} - \frac{3C}{z^4} - \dots$$

onde A,B,C são constantes complexas que determinam a forma precisa do escoamento em torno do corpo considerado. A grandes distâncias (Z grande) os termos em A,B,C podem ser desprezados de forma que o escoamento se comportará como se houvesse um único "vórtice de sustentação" de magnitude Γ na origem do sistema. É importante se notar que este não é um vórtice de Helmholtz (no qual a velocidade é nula com relação ao fluido que o circunda) mas sim um "vórtice de sustentação" ou "vórtice de fronteira" para o qual a velocidade com relação ao fluido que o circunda é diferente de zero. É sabido que este tipo de vórtice não é uma realidade física porém é um conceito muito útil para a teoria dos aerofólios.

Utilizando-se de tal conceito, a velocidade a grandes distâncias do aerofólio pode ser tida como a superposição de V e a velocidade devida à circulação $w = \frac{\Gamma}{2\pi r}$ (Fig. 15).

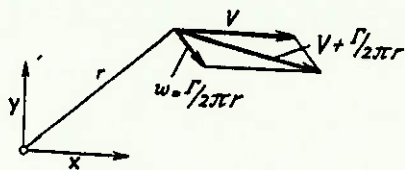


Fig. 16 - A velocidade a grandes distâncias.

Se considerarmos um caminho circular fechado em torno do perfil considerado pode-se observar que a partir do teorema do momento da quantidade de movimento chega-se aos seguintes resultados.

$$\rho \oint dS w \cos(n, W) = \rho \int_0^{2\pi} r d\phi \frac{\Gamma}{2\pi r} \cos^2 \phi = \frac{\rho \Gamma V}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \cos^2 \phi = \frac{\rho \Gamma V}{2} \quad (33)$$

já que $\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = \pi$

como, se partirmos da soma vetorial dos vetores V e W, temos, levando em consideração a equação de Bernoulli.

$$p - \frac{\rho}{2} (v+w)^2 = p_0 + \frac{\rho}{2} v^2$$

Se escolhermos r tão pequeno quanto possível, podemos desprezar os termos em w^2 daí se integrarmos as expressões de p

$$\oint p dS = \rho \int_0^{2\pi} V w \sin^2 \phi r d\phi = \rho r V w \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi = \frac{\rho \Gamma V}{2} \quad (34)$$

se somarmos as expressões (33) e (34) temos a sustentação total

$$L = \frac{\rho \Gamma V}{2} \quad (34.A)$$

Em uma dada atmosfera dita infinita é impossível se de-
terminar qual parte da sustentação é devida à pressão e qual
parte ao momento da quantidade de movimento. Já não se pode di-
zer o mesmo no momento em que se considerar o "solo". Dessa mane-
ra somente o caso em que se tem uma pressão acima da atmosfêri-
ca abaixo do perfil e abaixo da atmosférica acima do mesmo será
possível. Este tipo de distribuição de pressões pode ser conve-
nientemente calculado utilizando-se o método das imagens (Fig.17)

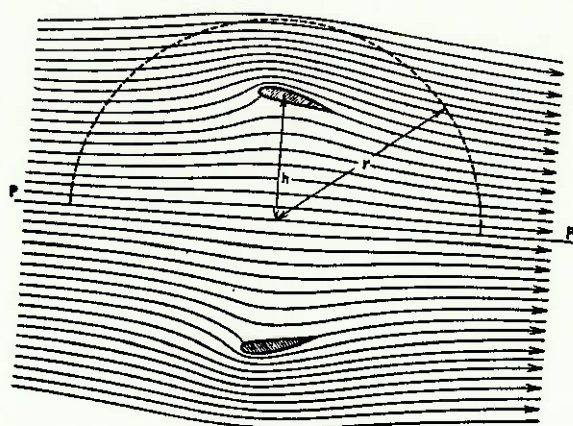


Fig. 17 - Método das imagens. A sustentação de um aero-
fólio é transferida para o solo na forma de
um acréscimo de pressão.

5.2.6. A circulação

Num instante inicial considere-se o fluido em repouso
de forma que a integral de linha da velocidade ao longo de uma
curva envolvendo completamente o aerofólio será zero, devido às
velocidades serem todas zero. De acordo com o teorema de Thomson,
a circulação em um fluido ideal (sem viscosidade), deve ser sem-
pre constante e, neste caso, será nula quando o fluido for pos-
to em movimento de translação com respeito ao aerofólio. Isto
aparenta ser uma contradição aos fatos experimentais que mos-
tram existir uma certa circulação em situações como a descrita
acima.

Um exame detalhado do fenômeno mostra que o escoamento considerado, no momento em que este se inicia, é um escoamento potencial sem circulação. O fato mais importante de tal escoamento é que no bordo de fuga do perfil a velocidade é extremamente grande.

Como resultado da ação de uma viscosidade muito pequena na camada limite, tem-se, contudo, a tradução desta alta velocidade em uma superfície de descontinuidade. Esta superfície que surge no bordo de fuga se torna um vórtice chamado de "vórtice de partida". Pelo teorema de Helmholtz um dado vórtice estará sempre associado às mesmas partículas num dado escoamento, desta maneira este "vórtice de partida" é levado junto com o fluido. Devido à geração de tal vórtice, o campo de velocidades se modifica de forma a superpor ao escoamento de translação, uma circulação em torno do perfil que em qualquer instante tem mesmo valor com sinal inverso ao vórtice que se formou na partida. Se o perfil é acelerado a partir do repouso e, logo em seguida, desacelerado ao repouso, formar-se-ão dois vórtices de igual valor e sentidos contrários. De compreender que a geração da circulação em torno de um aerofólio é necessariamente seguido pela formação de um "vórtice de partida", percebe-se que isto não está em contradição com o teorema de Thomson.

5.2.7. Superposição de Escoamentos Potencial e de Circulação

É importante se ressaltar os conceitos das funções ϕ e ψ discutidos em 15. Com base nestes conceitos pôde-se facilmente demonstrar (Vide Ref.3 pg.176) que o escoamento à volta de um círculo de raio a no plano complexo é dado por:

$$\phi + i\psi = V\left(Z + \frac{a^2}{Z}\right) = Vz + V\frac{a^2}{Z} \quad (35)$$

onde z é um número no plano complexo ($z = x + iy$) e V é a velocidade do escoamento potencial.

Se for desenvolvida a expressão (35) em suas partes reais e imaginárias chega-se a:

$$\phi + i\psi = V \cos\phi \left(r + \frac{a^2}{r}\right) + i V \sin\phi \left(r - \frac{a^2}{r}\right) \quad \text{onde } z = r \cos\phi \quad (36)$$

O segundo termo quando tomado como constante é a equação para as linhas de corrente que circundam um círculo. Um caso especial no qual $\psi = 0$ mostra que o próprio círculo é uma linha de corrente, uma vez que a equação (36) com $r=a$ é satisfeita para qualquer valor de ϕ ; o mesmo ocorre com r (menos para $r=0$) se $\phi=0$ ou π ; ou seja, o eixo x é também uma linha de corrente.

A função de corrente de um escoamento em círculos concêntricos é dada por:

$$\phi_1 + i\psi_1 = \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z$$

onde Γ é constante. Como $i \log z = -\phi + i \log r$ temos:

$$\phi_1 + i\psi_1 = \frac{\Gamma\phi}{2\pi} + i \frac{\Gamma}{2\pi} \lg r$$

e, uma vez que se o termo imaginário for uma constante (também r será constante), as linhas de corrente serão círculos concêntricos.

A diferenciação da função ψ_1 com respeito a r leva a :

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad \therefore \Gamma = 2\pi r w \quad \text{onde } w \text{ é a velocidade do escoamento.}$$

ou seja Γ é o produto entre o perímetro do círculo considerado e a velocidade, ou seja, a circulação.

Em se superpondo as duas funções de corrente chega-se ao escoamento paralelo adicionado de circulação em torno de um dado cilindro infinito dado por:

$$V \left(z + \frac{a^2}{z}\right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \log z \quad (37)$$

5.2.8. Determinação da Quantidade de Circulação.

Uma ferramenta muito forte que pode ser utilizada para a determinação da circulação são as transformações conformes. Um círculo imerso num escoamento dado pode ser transformado em uma série de outros perfis através da utilização de certas funções analíticas (Vide Ref.3 seção 102).

Na figura 18, vê-se a aplicação da superposição dos escoamentos de translação e de circulação aplicando a função $\zeta = z \pm \frac{a^2}{z}$ (da seção 102 Ref.3) chega-se à configuração da figura 19. A mesma função leva o círculo da figura 20, com centro em if , ao arco de círculo da figura 21. A circulação é assumida tal que os dois pontos de estagnação coincidem com os pontos $-a$ e $+a$ (Fig.20). Se girarmos os eixos x, iy da figura 20 de um certo ângulo α no sentido horário será possível determinar uma circulação tal que o ponto de estagnação da direita do cilindro coincida com o ponto $+a$. Transformando então o círculo no plano complexo para o arco no plano " ζ " observa-se que com a escolha correta da circulação o bordo de fuga do "arco de circunferência" foi levado a ter o escoamento deixando-o com suavidade. Estas observações estão de pleno acordo com a prática de onde se observa que, até um certo ponto, um acréscimo no ângulo de ataque causa um acréscimo na sustentação e conseqüentemente um acréscimo na circulação. O escoamento da figura 22 (que é o resultado da situação proposta no parágrafo anterior) é muito semelhante àquele que realmente ocorre, com exceção da alta velocidade que se desenvolve no bordo de ataque.

De modo a ultrapassar este problema com o bordo de ataque, Joukowski desenvolveu um método de achar uma transformação conforme tal que um círculo é transformado em um perfil com o bordo de ataque arredondado.

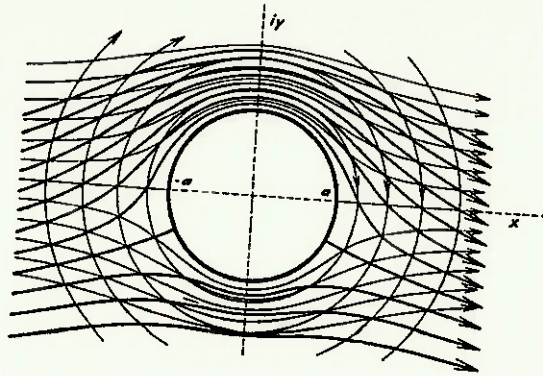


Fig. 18 - Superposição de escoamento de transformação (potencial) e circulação.

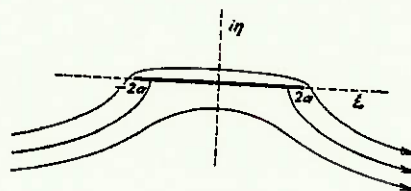


Fig. 19 - Transformações conformes da Figura 18.

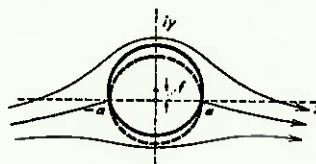


Fig. 20 - Superposição de escoamentos com centro do círculo deslocado.



Fig. 21 - Transformação conforme da Figura 20.

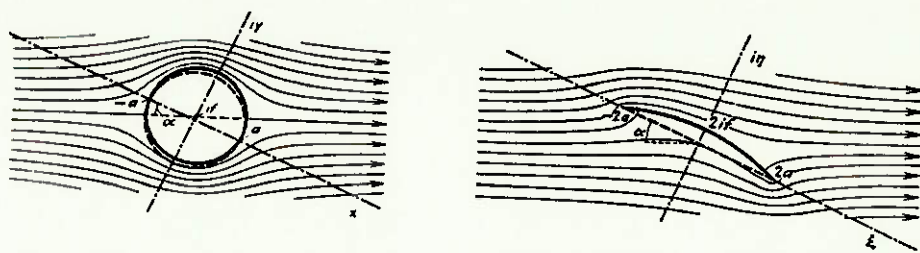


Fig. 22 - Rotação nos eixos de α .

Para executar tal transformação Joukowski fez, além de um deslocamento no centro do círculo, ele executou uma superposição de círculos conforme se pode observar na figura 23 (C_2 circunda C_1 de forma que os dois círculos têm somente o ponto $+2a$ em comum). O círculo K_0 transforma-se na porção $-2a$ a $+2a$ em cima do eixo horizontal. O círculo k_1 transforma-se no arco de circunferência (que no caso se confundirá com a corda do perfil), e o círculo k_2 se transforma no perfil que envolve completamente o arco de circunferência e tem o ponto $+2a$ em comum com o arco de circunferência. Tal perfil se assemelha muito à realidade, principalmente no que diz respeito ao bordo de ataque e à parte central do perfil, pois o bordo de fuga é afiado a ponto de não ter espessura, o que seria fisicamente impossível.

Um método gráfico razoavelmente simples para executar a transformação de Joukowski foi apresentado por Trefftz.

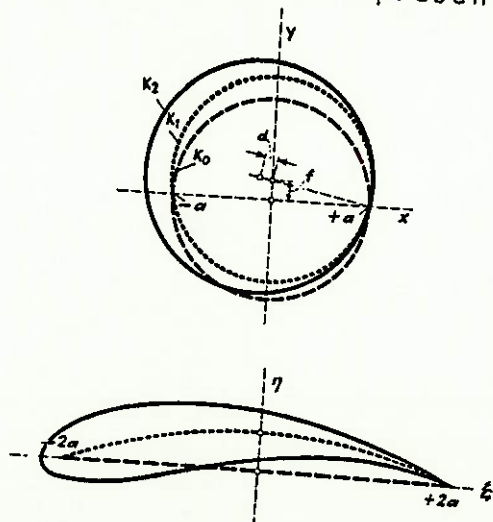


Fig. 23 - Transformação de Joukowski.

5.3. Teoria dos Aerofólios Finos

Como já foi visto anteriormente, o dito "problema direto", ou seja, a determinação dos coeficientes aerodinâmicos de um dado perfil, é de grande dificuldade teórica. De modo a permitir então um tratamento teórico razoável, em vista do fato que estes coeficientes para uma grande parte dos perfis usuais variam muito pouco, pode-se empregar o método chamado "teoria dos aerofólios finos" para aproximar tais coeficientes. Este método foi, a princípio, desenvolvido por M.Munk.

Atualmente os perfis em uso (mesmo em se tratando de velas) têm uma espessura que varia entre 10 e 12 por cento da corda máxima, além de um camber médio de 1 a 2 por cento da corda máxima. Para tais aerofólios, podemos substituir o aerofólio pela sua linha média de "camber" que forma um ângulo pequeno α com a direção do escoamento não perturbado (C^∞ na figura 24).

Levando em consideração que a magnitude da velocidade tangencial também terá diferentes valores para os diferentes lados de C^∞ , e levando em conta que uma distribuição de velocidades induzidas por uma esteira de vórtices com C como seção transversal tem uma descontinuidade do mesmo tipo, pode-se tentar acabar com esta descontinuidade pela superposição de escoamentos como já exposto na seção anterior.

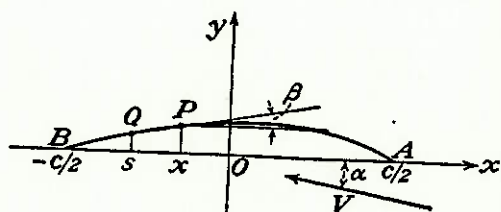


Fig. 24 - Aerofólio fino.

A condição de Kutta pode ser exposta como sendo a necessidade de uma velocidade finita do escoamento no bordo de fuga pois caso isto não ocorra haverá uma descontinuidade. Daí chega-se à conclusão de que a vorticidade (circulação) no bordo de fuga deve ser zero além de se impor que não haja escoamento através da linha "C".

Para se chegar às expressões matemáticas para essas condições deve-se considerar a curva "C" em um sistema retangular de coordenadas cuja origem "0" esteja colocada ao centro da curva e a função que descreverá deve estar no intervalo $-C/2 < x < C/2$ seja V a velocidade do escoamento não perturbado, as ordenadas dadas por uma função $y(x)$ assim como as inclinações da curva ($\beta = dy/dx$) e o ângulo de ataque são pequenos. Em qualquer ponto da linha "C" o escoamento uniforme de velocidade V pode ser decomposto em uma componente perpendicular e outra tangencial, a perpendicular a circulação Γ deve ser determinada de tal forma que em qualquer ponto de "C", a componente normal da velocidade seja cancelada pela componente do escoamento induzido.

Devido a tais prerrogativas pode-se considerar os termos de ordem superior como nulos no tratamento matemático e assim a distância entre P e Q pode ser confundida com a distância entre x e s (Fig.24) além de a linha que une P e Q ter aproximadamente a direção da tangente em um ponto entre P e Q. A magnitude desta velocidade induzida neste ponto será $\Gamma(s)ds$ dividida por 2π multiplicado pela distância $\overline{PQ} = x-s$ e a velocidade total induzida por toda a esteira de vórtices ẽ

$$\int_A^B \frac{\Gamma(s) ds}{2\pi(x-s)} \quad (38)$$

de forma que se chega a um novo problema: como determinar $\Gamma(x)$ para uma dada velocidade V e uma dada função $\beta(x)$ no intervalo $-C/2 < x < C/2$ de forma que

$$\Gamma\left(-\frac{C}{2}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-C/2}^{C/2} \frac{\Gamma(s)ds}{(x-s)} = V \left[\alpha + \beta(x) \right] \quad (39)$$

onde V e α sejam constantes.

Resolvendo este problema a circulação absoluta Γ , ao longo de qualquer caminho em torno do perfil é dada por:

$$\Gamma = \int_{-C/2}^{C/2} \Gamma(s) ds \quad (40)$$

que de acordo com o teorema de Kutta-Joukowski (34 A) chega-se à seguinte expressão.

$$L = \rho v \int_{-C/2}^{C/2} \Gamma(s) ds \quad (40 A)$$

Para encontrarmos a diferença de pressão de um lado para o outro, podemos perceber que a mesma, a cada ponto, será, se multiplicada pela respectiva área, igual à sustentação, daí temos:

$$\Delta p = \rho V_m \Gamma(s) \quad \text{onde } V_m \text{ é a velocidade média do escoamento.}$$

Para se resolver o problema proposto na expressão (39) será muito útil substituir as variáveis x e v por duas novas variáveis ϕ e ν que são definidas como:

$$\frac{2x}{c} = -\cos\phi \quad \text{e} \quad \frac{2s}{c} = -\cos\nu$$

De forma que para x e s variando de $-\frac{c}{2}$ a $\frac{c}{2}$ ϕ e ν devem variar de zero a π . Como $ds = \frac{c}{2} \sin\theta d\nu$ temos:

$$\Gamma(\nu) = 0 \quad \text{p/ } \nu = 0$$

e

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\Gamma(\nu) \text{SEN}\nu d\nu}{\text{COS}\nu - \text{COS}\phi} = -V(\alpha + \beta(\phi)) \quad (39A)$$

No caso de um aerofólio fino simétrico, a linha média coincide com a corda $\overline{AB}$ e $\beta = 0$. Daí, a equação (39A) é satisfeita por

$$\Gamma(\nu) = 2\alpha V \frac{(1 - \text{COS}\nu)}{\text{SEN}\nu} \quad \text{ou} \quad \Gamma(\nu) = 2\alpha v \text{ TAN } \frac{\nu}{2} \quad (42)$$

que, de fato, se substituirmos $\Gamma(v)$ na equação (39A) o SEnv é cancelado e o lado esquerdo da equação se torna

$$\frac{\alpha V}{\pi} \int_0^\pi \frac{dv}{\cos v - \cos \phi} = \frac{\alpha V}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos v dv}{\cos v - \cos \phi} \quad (42)$$

tais integrais são resolvidas na referência (6) pg. 208 e daí chega-se às expressões de C_L e C_M (coeficientes de arrasto e momento).

$$C_L = 2\alpha \int_0^\pi (1 - \cos v) dv = 2\pi\alpha \text{ e } C_M = -\alpha \int_0^\pi (1 - \cos v) \cos v dv = \int_0^\pi \cos^2 v dv = \frac{\pi}{2} \alpha \quad (43)$$

Da equação (43) tira-se que a distância d da linha de ação da força de sustentação ao centro da corda tem-se que: $Ld = M$ e $C_L d = C_M c$ daí

$$d = \frac{C_M c}{C_L} = \frac{c}{4} \quad (44)$$

que mostra que o centro de pressão de um dado aerofólio situa-se a um quarto da corda a contar do centro da corda na direção do bordo de ataque, que para pequenos ângulos é praticamente independente do ângulo de ataque.

No caso de uma linha curvada pode ser assumido que a distribuição de vorticidade $\Gamma(s)$ seja uma soma trigonométrica.

$$\Gamma(v) = 2V \left(\Gamma(0) \frac{1 - \cos v}{\text{SEnv}} + \Gamma(1) \text{SEnv} + \Gamma(2) \text{SEN}2v + \dots + \Gamma(n) \text{SEN} nv \right) \quad (45)$$

onde os $\Gamma(n)$ são determinados pela forma da linha de "camber" média.

Dando o tratamento algébrico necessário (Vide. Ref. (6) pg. 205) chega-se a

$$\alpha + \beta(\phi) = \Gamma(0) + \Gamma(1)\cos\phi + \Gamma(2)\cos 2\phi + \dots + \Gamma(n)\cos n\phi \quad (46)$$

onde $\beta(\phi)$ que representa o formato do perfil) $\bar{e}$ representado por

$$\beta(\phi) = \beta(0) + \beta(1)\cos\phi + \beta(2)\cos 2\phi + \dots + \beta(n)\cos n\phi \quad (47)$$

onde os $\beta(n)$ dependem da forma da linha média do perfil. Pode-se observar que ao compararmos as equações (46) e (47) temos que:

$$\Gamma(0) = \alpha + \beta(0); \quad \Gamma(1) = \beta(1); \quad \Gamma(2) = \beta(2); \quad \Gamma(n) = \beta(n)$$

que leva a uma solução do problema para o caso em que a curva tura do perfil $\bar{e}$ conhecida e chega-se então a:

$$C_L = 2\pi\left(\alpha + \beta(0) + \frac{\beta(1)}{2}\right) \quad \text{e} \quad C_M = \frac{1}{2}\pi\left(\alpha + \beta(0) - \frac{\beta(1)}{2}\right) \quad (48)$$

Tais equações foram pela primeira vez concluídas por Munk e são os principais resultados da teoria dos fôlios-finos.

6. A ASA DE ENVERGADURA FINITA

Aproveitando-se dos resultados obtidos anteriormente no capítulo 4 adicionados da teoria dos fôlios finos, pode-se então partir para o desenvolvimento de uma teoria própria para o conhecimento da sustentação e do arrasto para fôlios de envergadura finita. Para tal propósito é importante que se extrapole a teoria desenvolvida em 4.2.4, 4.2.5 e 4.2.6 para o caso em que os escoamentos são tridimensionais, e por consequência as linhas de curvas de vórtices deverão ser consideradas.

6.1. Esteiras de Vórtices

No capítulo 4 havia sido definido uma esteira de vórtices cilíndrica como sendo uma distribuição paralela de linhas retas de vórtices de vorticidade infinitesimal dispostas sobre uma superfície cilíndrica. Para que se possa estudar as asas de envergadura finita deve-se estender a discussão para esteiras curvas de vórtices.

O campo de velocidades induzidas por uma esteira curva de vórtices é irrotacional desde que defina-se tal esteira como a superposição de infinitos escoamentos irrotacionais, cada um deles induzido por uma linha fechada de vórtices. Como já visto anteriormente a circulação será nula em cada circuito que não tenha pontos em comum com a esteira de vórtices, bem como entre tais circuitos. É sabido que para um dado circuito fechado envolvendo uma linha de vórtice simples a circulação se iguala à vorticidade de tal linha de onde, por extrapolação, conclui-se que se tal caminho envolver uma série de linhas de vórtices, a circulação será a soma das vorticidades. É importante lembrar que o sinal da circulação será relativo ao sentido em que a mesma foi tomada pois a vorticidade (assim como a massa, tempo, etc), é uma grandeza sempre positiva.

É importante se perceber que em um dado escoamento (em regime permanente) a esteira de vórtices formada em uma superfície qualquer deve sempre tangenciar a corrente resultante. Além disso pode-se considerar qualquer superfície descontínua em um escoamento como uma esteira de vórtices. Tal superfície de descontinuidade separa o deslocamento do escoamento propriamente dito. Se o escoamento é suposto paralelo ao plano x-y, a superfície de separação pode ser considerada como uma esteira de vórtices com suas linhas paralelas a z de densidade Γ' igual à velocidade do escoamento ao longo dos limites do deslocamento. Um outro exemplo foi suprido na referência (6) pg.198 e no capítulo 5 itém quando era tratada a teoria dos fôlios finos. Tal discussão não será aprofundada pois é de certa forma tão complexa que vem a ser assunto de um dos desenvolvimentos mais valiosos de Helmholtz, mas é bom ter-se em mente que: superfície de descontinuidade, superfície de separação e esteira de vórtices significam a mesma coisa.

De modo a que se possa desenvolver a teoria a seguir, é fundamental que seja lembrado que os corpos considerados são regulares e simplesmente conexos.

Dois teoremas importantes não serão provados aqui mas o são na seção VIII.5 da referência 6, são estes:

- 1) Um escoamento contínuo irrotacional passando por um corpo finito, simplesmente conexo de forma regular, é plenamente determinado pela magnitude e direção da velocidade do escoamento ao longe.
- 2) Tal escoamento pode ser considerado como o resultado de uma superposição de um escoamento uniforme com velocidade $\vec{V}$ e o escoamento induzido por uma dada esteira de vórtices desenhada sobre a superfície considerada.

No entanto, foi visto no capítulo 5 que a forma do obstáculo assim como a velocidade e direção do escoamento no infinito não definem completamente o escoamento por este corpo. Um pa

râmetro, a circulação ao longo de uma curva envolvendo o corpo, pode ainda ser escolhida arbitrariamente. Tais asserções são verdadeiras para o tratamento bidimensional, sendo no entanto completamente falsas para o caso tridimensional. No caso tridimensional a circulação deve ser nula para qualquer curva fora do corpo simplesmente conexo. Tal situação é exposta na forma de um teorema que vem a ser complementar aos dois anteriores.

- 3) Uma esteira de vórtices na superfície de um corpo determina imediatamente a velocidade do escoamento em seus pontos; tal velocidade tem a magnitude Γ' e é normal à linha de vórtices, dirigida para a direita de quem anda na direção da linha de vórtice.

Pode ainda ser salientado que a contribuição induzida ao campo de velocidades tem seu próprio significado físico. Se o meio estiver originalmente em repouso, perturbado apenas pelo corpo que se move em velocidade V , as velocidades enão surgidas em todo o espaço são exatamente aquelas induzidas pela esteira de vórtices.

6.2. O Escoamento por uma Asa de Envergadura Finita

Matematicamente, o problema que é levantado pelos teoremas precedentes é muito simples de se resolver para o caso de corpos simples tais quais esferas, elipsóides, etc. Normalmente temos, a partir das velocidades na superfície do corpo, as pressões podem ser obtidas por intermédio da equação de Bernoulli que, quando integrada, fornece um momento (binário) resultante e não uma força. Tal fato é o já exposto paradoxo de D'Alambert. Uma outra disparidade foi encontrada no tratamento bidimensional onde um escoamento que passava por um cilindro infinito não experimentava nenhuma força de arrasto, mas sim uma sustentação que dependia da circulação no escoamento ao seu redor. Tal circula

ção ficava completamente indeterminada. A resposta para esse problema foi exposta conforme as condições de Kutta e o perfil aerodinâmico de Joukowski cujo bordo de fuga deve ser "afiado". Tal tratamento ao problema levou então a velocidades finitas no bordo de fuga retirando as indeterminações e levando a um valor determinado da sustentação mais de acordo com as observações práticas.

Para o caso tridimensional, o bordo de fuga afilado se torna também uma das ferramentas para a solução do problema.

No caso dos teoremas 1 e 2 da seção anterior, se as curvaturas forem muito acentuadas, as velocidades em tais pontos poderão ser muito grandes o que implicaria em pressões muito baixas. Em bordas afiladas a curvatura seria infinita gerando aí pressões negativas sempre. Este é motivo pelo qual os teoremas da seção anterior não se aplicam a não ser em corpos regulares. No caso de um fôlho real tridimensional percebe-se então que existe uma superfície de discontinuidade colocada ao longo do bordo de fuga (afilado).

Baseado em idéias como essas e em certas observações F.W. Lanchester começou a desenvolver a teoria para asas com razão de aspecto finitas. No entanto somente algum tempo depois é que surgiram as primeiras conclusões práticas, feitas por Prandtl.

A idéia principal da teoria de Prandtl e Lanchester pode ser resumida no seguinte: O escoamento de um fluido perfeito ao redor de uma asa de envergadura finita suporta uma superfície de discontinuidade que se estende corrente abaixo a partir do bordo de fuga da asa. Com o crescimento da razão de aspecto da asa em questão, tal discontinuidade se torna cada vez menos pronunciada até desaparecer para asas com razão de aspecto infinitas.

É óbvio que as dificuldades antes mencionadas são levadas a uma solução desta forma. Para envergadura infinita a distribuição de velocidades se torna contínua de forma que a teoria

de Joukowski pode ser mantida, e, por outro lado, para asas finitas o paradoxo de D'Alambert é superado.

No capítulo anterior foi dito que um escoamento bidimensional em torno de um corpo regular, simplesmente conexo, pode ser colocado como a superposição de um escoamento uniforme de velocidade V e de um escoamento induzido por uma esteira de vórtices coincidente com a superfície do corpo. Para o caso tridimensional deve-se observar mais um fator sendo superposto: Um escoamento induzido por uma esteira de vórtices de forma desconhecida que se forma a partir do bordo de fuga da asa considerada. Conclui-se, a partir do paradoxo d'Alambert que tal esteira deve se estender para o infinito já que de outra forma o fluido não exerceria nenhuma força de sustentação sobre a asa.

Cinematicamente a introdução dessa esteira de vórtices se equivale ao alongamento do fôlio ao infinito de modo a sua envergadura se tornar infinita. Caso não seja possível que a esteira formada no bordo de fuga se estenda para o infinito, a esteira que está sobre o corpo e a esteira que se forma no bordo de fuga formam um corpo finito ao qual se aplicam os princípios D'Almbert, onde então teremos a resultante das forças nas duas esteiras nula.

A partir dos teoremas expostos na seção 6.1 pode-se ao menos estabelecer um perfil grosseiro da distribuição dos filamentos de vórtice.

Na parte superior da asa pode-se supor que o escoamento tem aproximadamente a direção do escoamento não perturbado. Na figura 25 o escoamento é assumido da direita para a esquerda e por consequência os filamentos se dirigem de cima para baixo (de acordo com o teorema 3 da seção 6.1).

Na parte inferior da asa a situação não é tão facilmente exposta. Para os valores usuais de ângulos de ataque e velocidades, um escoamento bidimensional teria um ponto de estagnação

ção próximo ao bordo de ataque na parte inferior do perfil. Devido à essa estagnação no caso bidimensional, o caso tridimensional assume então um formato como o da figura 26, perto da estagnação os filamentos são linhas fechadas na própria face inferior.

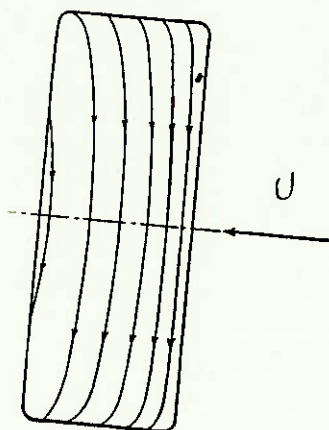


Fig. 25 - Filamentos de vórtice na parte superior da asa (vista superior).

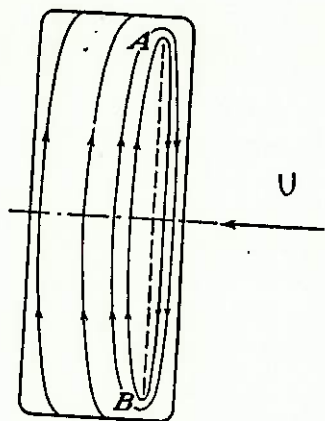


Fig. 26 - Filamentos de vórtice na superfície inferior de uma asa.

Uma vez que ao longo da superfície da asa a velocidade é normal aos filamento de vórtice, o vetor velocidade deve ser dirigido para dentro na parte superior (vetores em linhas cheias

figura 27) e para fora na parte inferior (vetores tracejados figura 27).

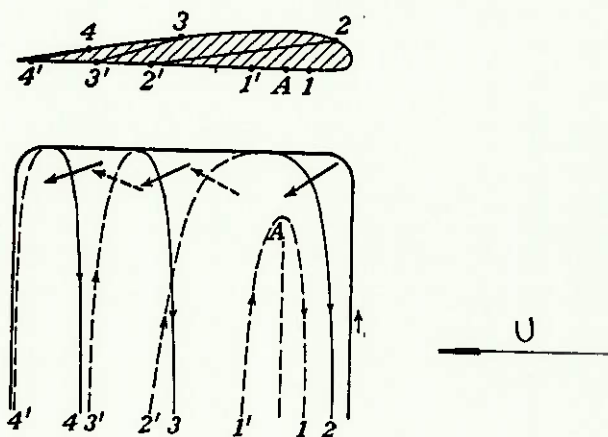


Fig. 27 - Filamentos de vórtices (linhas cheias representam a parte superior da asa).

6.3. O Problema da Superfície de Sustentação

Como a asa em questão é fina o suficiente para que se despreze o problema de espessura, admite-se a princípio que a superfície de sustentação pode ser assimilada por uma região do plano $x-y$. Devido às condições de contorno (cinemáticas) sobre a superfície de sustentação, as velocidades normais à superfície devem ser nulas e pelas condições de Kutta as velocidades no bordo de fuga devem ser finitas.

Como no caso bidimensional (cap.5) tais condições são cumpridas por uma superposição adequada de vórtices e escoamentos planos.

Devido ao teorema de Helmholtz temos que os filamentos que formam a esteira de vórtices fixa sobre a asa devem estar ligados aos filamentos de vórtice que surgem no bordo de fuga (filamentos livres) que por sua vez se unem aos vórtices de par

tida fazendo o fechamento do "circuito" (fig.28).

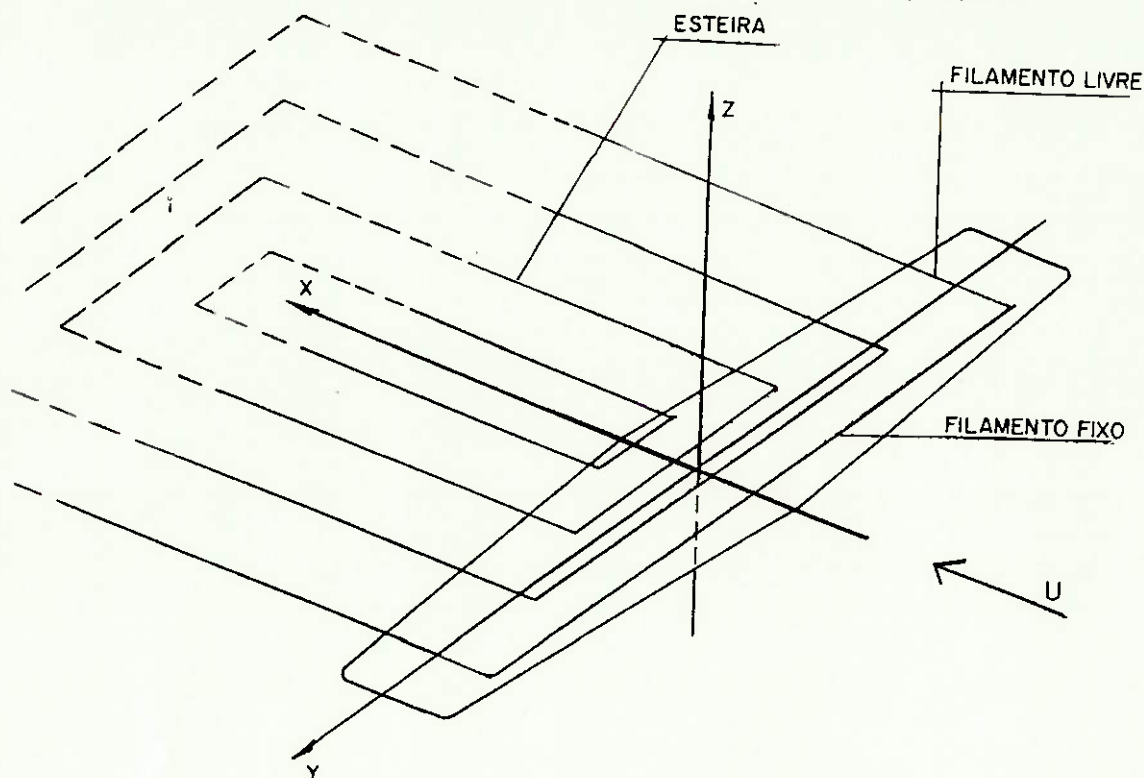


Fig. 28 -

Por analogia ao caso bidimensional a distribuição de velocidades induzidas por tais esteiras são:

$$u(x,y,0) = \pm 1/2 \Gamma_F(x,y)$$

$$v(x,y,0) = \pm 1/2 \Gamma_L(x,y)$$

onde o Índice F significa fixo sobre a asa e o Índice L livre.

Utilizando-se das expressões acima pode-se chegar à componente do rotacional na direção z do campo de velocidades adjacente à superfície.

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \Gamma_F}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_L}{\partial x} = 0 \quad (49)$$

Integrando-se ao longo da corda chega-se à seguinte expressão para cada seção da superfície de sustentação:

$$\int_{x_{BA}}^{x_{BF}} \left(\frac{\partial \Gamma_F}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} \right) dx = 0 \Rightarrow \frac{d\Gamma(y)}{dy} + \Gamma_L(x_1, y) \frac{x_{BF}}{x_{BA}} = 0 \quad (50)$$

onde x_{BF} - coordenada x do bordo de fuga de cada seção
 x_{BA} - coordenada x do bordo de ataque de cada seção
 $\Gamma(y)$ - circulação total de cada seção

A intensidade dos filamentos na esteira é dada por:

$$\Gamma_E = - \frac{d\Gamma(y)}{dy}$$

E a circulação total é

$$\Gamma(y) = \int_{x_{BA}}^{x_{BF}} \Gamma_F(x, y) dx \quad (51)$$

Devido à impossibilidade física de haverem diferenças infinitas (descontinuidades) nos valores da circulação quando se passa do fluido para a superfície de sustentação, surge mais uma condição de contorno dada por:

$$\Gamma(y) = 0 \quad \text{em} \quad y = \pm b/2 \quad (52)$$

Analogamente ao caso bidimensional tem-se a resultante das pressões induzidas pelas folhas de vórtices:

$$P(x, y) = \rho \cdot U \cdot \Gamma_f(x, y) \quad (53)$$

que se integrada ao longo da corda resultara na sustentação por unidade de comprimento.

$$L(y) = \rho \cdot U \cdot \int_{x_{BA}}^{x_{BF}} \Gamma_f(x, y) dx = \rho \cdot U \cdot \Gamma(y) \quad (54)$$

Portanto a sustentação total será a integral ao longo de y :

$$L = \rho \cdot U \cdot \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy \quad (40A)$$

No caso de se estar tratando de asas com altas razões de aspecto, pode ser admitido que a posição dos filamentos fixos ao longo da corda não importa chegando-se então, no limite, à situação em que todos se superporiam em um único filamento de intensidade variável acoplado aos filamentos da esteira livre. (fig.29)

Tal tratamento pode ser aplicado com certa precisão e foi a princípio desenvolvido por Prandtl chamando-o de teoria da linha de sustentação.

6.3.1. Linha de Sustentação

Para poder ser desenvolvida a teoria da linha de sustentação deve-se a princípio desprezar as velocidades na direção y para depois serem acrescentadas.

A definição de linha de sustentação já se encontra no item anterior e é mostrado na figura 29. Tal linha é colocada sobre o eixo y e ligada aos filamentos da esteira livre conforme figura 29.

Devido a tais aproximações ter-se-a a cada ponto da superfície de sustentação um ponto correspondente na linha de sustentação.

Como os filamentos das esteiras induzem velocidades verticais ao escoamento que circunda o perfil e a cada ponto da linha de sustentação corresponde uma seção da superfície, o escoamento que incide sobre uma dada seção será composto pelo escoamento ao longe, de velocidade U , mais o escoamento induzido, de

velocidade W_i .

A resultante da soma vetorial da velocidade do escoamento não perturbado (U) com a velocidade W_i será U_r a velocidade relativa.

$$U_r = \sqrt{U^2 + W_i^2} \quad (55)$$

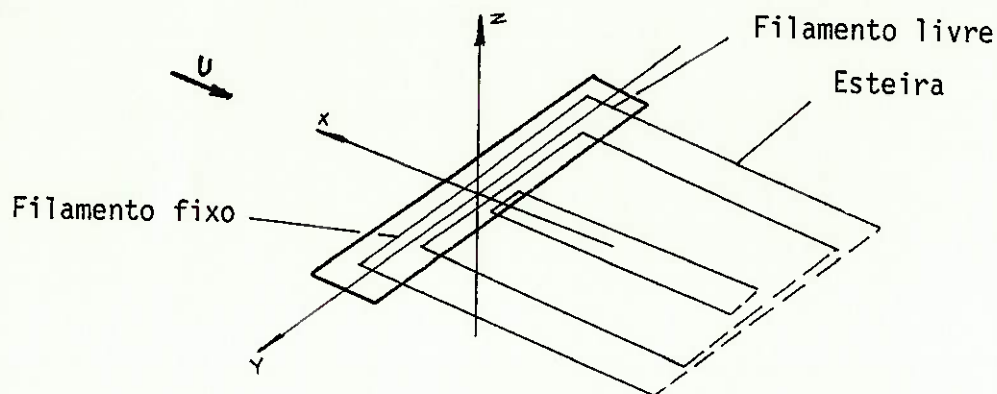


Fig. 29 - Linha de Sustentação.

Define-se também três importantes parâmetros: α_i ; α_a e α_o . Onde α_i é o ângulo de ataque induzido, ângulo formado entre a direção da velocidade relativa e a velocidade no infinito, α_a é o ângulo de ataque absoluto com relação à velocidade do escoamento não perturbado e α_o é o ângulo de ataque absoluto com relação à velocidade relativa (vide fig.30)

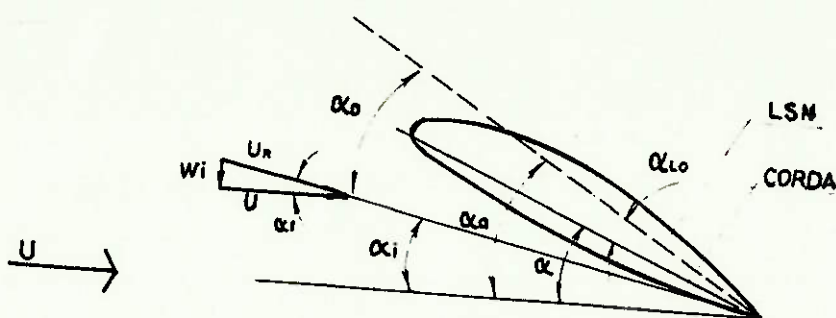


Fig. 30 -

Seja a relação entre a velocidade induzida e o ângulo de ataque induzido dada por

$\alpha_i = \tan^{-1} \frac{W_i}{U} \approx \frac{W_i}{U}$ pois $\frac{W_i}{U}$ é pequeno. Tal relação pode ser tirada da figura 30.

Dessa forma a força total surgida na asa é dada pela expressão (56) que sub-entende que a tal força é perpendicular à direção da velocidade relativa. Se for decomposta essa força em uma componente paralela e outra perpendicular à velocidade relativa (fig.31), será então definido o arrasto e a sustentação da asa.

$$F = \rho \cdot U_r \cdot \Gamma \quad (56)$$

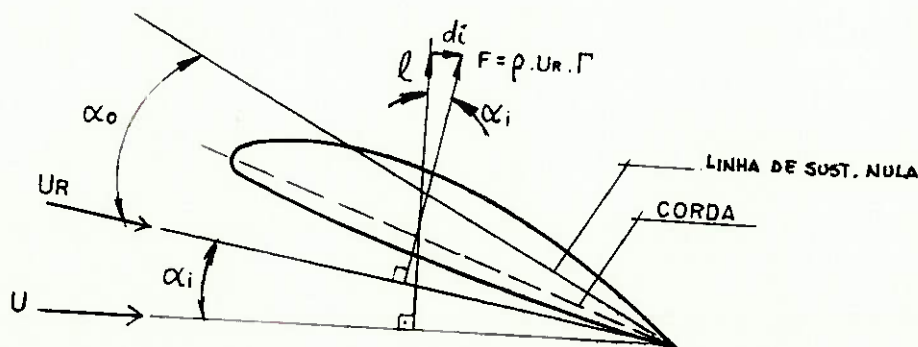


Fig. 31 - Decomposição da força total em arrasto e sustentação.

Das figuras 30 e 31 pode-se tirar as seguintes relações:

$$\alpha_a = \alpha_o - \alpha_i \quad (57)$$

$$d_i = -\ell \alpha_i \quad (58)$$

$$\ell = F \cos \alpha_i = \rho \cdot U_r \cdot \Gamma \cos \alpha_i = \rho U \Gamma \quad (59)$$

onde d_i é o arrasto induzido por unidade de comprimento e ℓ é a sustentação por unidade de comprimento.

Do capítulo anterior tem-se que:

$$C\ell = \frac{\ell}{\frac{1}{2} \rho U^2 C} = 2\pi\alpha_o$$

Portanto ao multiplicarmos a expressão (57) por 2π teremos:

$$2\pi\alpha_a = 2\pi\alpha_o - 2\pi\alpha_i$$

de onde se pode concluir que como $2\pi\alpha_o = C\ell$ e $2\pi\alpha_a = C\ell_B$ onde $C\ell_B$ é o coeficiente de sustentação para o caso bidimensional (ℓ_B é a sustentação para bidimensional e Γ_B a circulação) a equação (57) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Gamma = \Gamma_B + \pi \cdot U \cdot C \cdot \alpha_i \quad (60)$$

Da expressão (60) pode-se observar que para a solução do problema, admitindo-se conhecida a geometria da superfície de sustentação, é possível determinar a cada seção, por intermédio da teoria dos fôlios bidimensionais, o valor de Γ_B através do qual se chegará ao Γ para cada seção só faltando então para tanto determinar as velocidades induzidas W_i sobre cada ponto da linha de sustentação. Para se executar tal tarefa é necessário que inicialmente que se saiba calcular a velocidade induzida por um filamento de vórtices em um ponto qualquer não situado sobre o filamento. Tal velocidade, pode-se ver a dedução na referência e seção 113 pg. 197, é dada pela seguinte expressão:

$$\vec{W}_i = - \frac{\bar{\Gamma}}{4\pi} \oint_C \frac{\vec{R} \times d\vec{\ell}}{|\vec{R}|^3} \quad (61)$$

onde $\bar{\Gamma}$ é a circulação média, C é o contorno que envolve a região considerada, $\vec{R}$ o vetor distância entre o elemento do filamento de vórtice ($d\vec{\ell}$) e o ponto em questão.

A lei de Biot-Savart é completamente válida para o cálculo da influência sobre cada ponto da linha de sustentação de cada filamento da esteira. Na figura 32 define-se geometricamente o problema descrito.

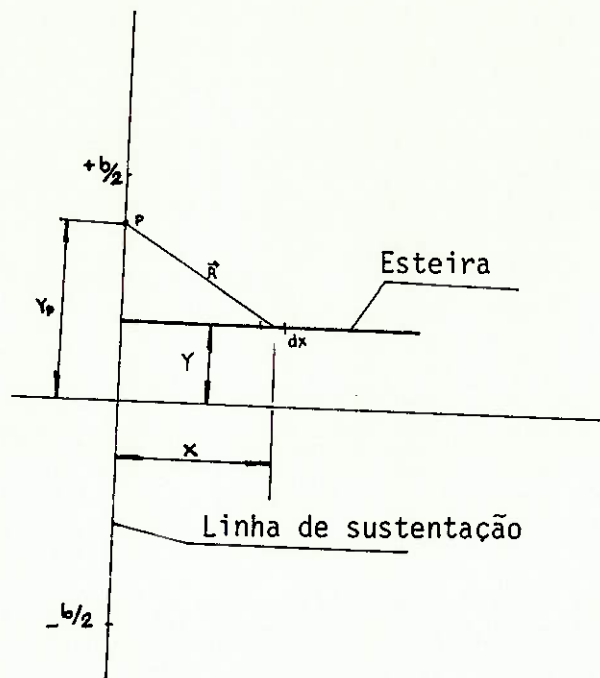


Fig. 32 - Influência de um ponto p da linha de sustentação no escoamento, definição geométrica.

Tal estudo será feito no plano $x-y$ de forma que $d\vec{\ell} = dx \cdot \vec{i}$ e $\vec{R} = -x \vec{i} + (y_p - y) \vec{j}$ (Vide figura 32).

O produto vetorial dos vetores e o módulo de $\vec{R}$ serão respectivamente:

$$\vec{R} \times d\vec{\ell} = -dx (y_p - y) \vec{k}$$

$$\vec{R} = \frac{e}{\sqrt{x^2 + (y_p - y)^2}}$$

e a intensidade do filamento será $-\frac{d\Gamma(y)}{dy}$

da equação 61 tem-se a expressão que, se forem aplicados, os dados acima calculados, se chega à seguinte expressão:

$$\vec{v}_i = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Gamma(y)}{dy} \int_0^\infty \frac{(y_p - y) dx}{x^2 + (y_p - y)^2} \cdot \vec{k} \quad (61A)$$

que faz perceber ser esta uma parcela infinitesimal dw_i da velocidade induzida (w_i).

Resolvendo-se a integral acima tem-se que:

$$dw_i = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d\Gamma(y)}{dy} \cdot \frac{1}{(y_p - y)}$$

que por consequência levará ao se integrar à obtenção de w_i .

$$w_i = -\frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{(y_p - y)} \quad (61B)$$

a qual se for substituída na expressão 60 gerará a seguinte expressão:

$$\Gamma(y_p) = \Gamma_B(y_p) - \frac{C(y_p)}{4} \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{d\Gamma(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{y_p - y} \quad (62)$$

onde: $\Gamma(y_p)$ é o valor da circulação na seção da superfície de sustentação representada pelo ponto p na linha de sustentação.

A expressão 62 é obviamente impossível de ser resolvida analiticamente, sendo para tanto então necessário o emprego de métodos numéricos. A fim de executar tal tarefa, uma das propostas da referência 8 é o desenvolvimento da circulação ao longo de toda a linha de sustentação em uma série de Fourier, que conhecida como solução de Glauert, respeitando as condições de contorno.

Seja a condição de contorno (52) $\Gamma=0$ em $y=\pm b/2$ respeitada daí tem-se que se for empregada uma função seno ou cosseno para exprimir y o trabalho será facilitado. Daí

$$y = - \frac{b}{2} \cos \theta \quad (63)$$

onde b é a envergadura da asa considerada.

No caso de se empregar uma série de senos, θ fica limitado entre $0 < \theta < \pi$ de forma para que seja possível trabalhar com os coeficientes todos adimensionais será necessário então multiplicar toda a série por $2.U.b$ sendo então possível de descrever a circulação como

$$\Gamma(\theta) = 2.U.b \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{SEN}(n\theta) \quad (63A)$$

daí pode-se, então, executando algumas substituições na expressão (62), chegar à seguinte expressão:

$$\Gamma(\theta_p) = \Gamma_B(\theta_p) - C(\theta_p) \cdot U \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n.A_n \int_0^{\pi} \frac{\cos(n\theta) d\theta}{(\cos\theta - \cos\theta_p)} \quad (64)$$

onde θ indica que as variáveis foram alteradas conforme expressão 63 e o índice p indica ser relativo ao ponto p figura 32.

A integral vista na expressão 64 é encontrada exatamente como a integral de Glauert indicada na equação 69 da referência 2 fazendo então que se chegue à equação 64. A que é a expressão

são 64 aplicada a resolução de Glauert.

$$\Gamma(\theta_p) = \Gamma_B(\theta_p) - C(\theta_p) \cdot U \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot A_n \cdot \pi \frac{\text{SEN}(n\theta_p)}{\text{SEN}(\theta_p)} \quad (64A)$$

De forma que se for introduzida a expressão 63.A para descrever $\Gamma(\theta_p)$ chega-se à expressão 64.B

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{SEN}(n\theta) = \frac{\Gamma_B(\theta)}{2U \cdot b} - \frac{2\pi}{2b} \cdot C(\theta) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot A_n \cdot \frac{\text{SEN}(n\theta)}{\text{SEN} \theta} \quad (64B)$$

onde se observa que a falta do índice p se deve ao fato de tal expressão ser válida ao longo de toda a linha de sustentação.

Para o caso em questão são conhecidas as características geométricas da superfície de sustentação sendo assim possível determinar $C(\theta)$ e $\Gamma_B(\theta)$ de forma que só restarão como incógnitas os coeficientes A_n das séries de Fourier. Para se determinar tais coeficientes em uma quantidade M determinada existem métodos numéricos adequados indicados na referência 8 que basicamente a resolução de sistemas de M equações a M incógnitas cujas soluções serão os coeficientes A_n .

Com o intuito de partir de algo já existente, devido à falta de tempo para desenvolver um programa próprio ou mesmo devido à inutilidade de se executar algo novo no momento em que já existe um programa específico para essa solução, foi utilizado no atual trabalho o programa "MINAR", da referência 2 anexo B, cuja operação e listagem constam do anexo 1 do atual trabalho. Os resultados obtidos com o programa em questão serão analisados e discutidos (além de confrontados com os resultados da referência 1) no capítulo 8 deste trabalho.

Uma vez obtidos os coeficientes da série de Fourier fica fácil se encontrar a sustentação e o arrasto para uma dada superfície tri-dimensional.

A sustentação será encontrada por substituição dos valores encontrados para os coeficientes A_n nas expressões para a circulação. Pode-se no entanto substituir primeiro as expressões 63.A (subintende-se que 63 também é substituída automaticamente) em 40.A de forma que se chega à seguinte expressão:

$$L = \rho \cdot U \cdot 2 \cdot U \cdot b \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{SEN}(n\theta) \cdot \frac{b}{2} \text{SEN}\theta d\theta \quad (65)$$

sendo então possível determinar o coeficiente de sustentação já que o mesmo é dado por

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U^2 S}$$

Define-se a razão de aspecto de uma superfície de sustentação como sendo a relação entre o quadrado da envergadura pela área total.

$$AR = \frac{b^2}{S}$$

De modo que agora pode-se obter uma expressão para o coeficien-
te de sustentação em função somente da razão de aspecto, dos
coeficientes A_n e de n .

$$C_L = 2 \cdot AR \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^\pi \text{SEN}(n\theta) \text{SEN}\theta d\theta \quad (66)$$

Mas, dos fundamentos do cálculo sabe-se que:

$$\int_0^\pi \text{SEN}(n\theta) \text{SEN}(m\theta) d\theta = \begin{matrix} \theta & \text{se } m \neq n \\ e \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } m = n \end{matrix} \quad (66A)$$

o que fará então o coeficiente de sustentação assumir a seguinte forma:

$$C_L = \pi \cdot AR \cdot A_1 \quad (67)$$

Assim como foi possível se encontrar expressões para a sustentação e seu coeficiente, pode-se escrever, partindo das expressões obtidas para o arrasto total induzido, expressões onde se obtenha o arrasto total induzido em função dos coeficientes A_n .

Da expressão 58 tem-se que:

$$d_i = -\ell \alpha_i \quad (\text{que para } \alpha_i \text{ pequeno } \alpha_i \sim \text{SEN } i)$$

seja então

$$D_i = -\rho \int_{-b/2}^{b/2} d_i(y) dy = \int_{-b/2}^{b/2} -\rho w_i(y) \Gamma(y) dy \quad (58A)$$

que ao se substituir o valor de W_i de (61B) chega-se a

$$D_i = \frac{\rho}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma(\xi)}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{y-\xi} \cdot (y) dy \quad (68)$$

onde D_i é o arrasto total induzido e ξ é uma variável auxiliar onde $\xi = -\frac{b}{2} \cos \phi$ de modo que a circulação em função de ϕ será como na expressão 63. A mudando-se a variável de θ para ϕ .

Dando-se um tratamento algébrico adequado (Vide Ref. 2 pg.41 anexo A) chega-se à expressão final para o arrasto total induzido.

$$D_i = \rho U^2 b^2 \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \text{SEN}(n\theta) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{SEN}(n\theta) d\theta \quad (69)$$

Para evitar confusões substitui-se na segunda somatória n por m

e rearranja-se a expressão chegando em;

$$D_i = \rho U^2 b^2 \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sum_{m=1}^{\infty} A_m \int_0^{\pi} \text{SEN}(n\theta) \cdot \text{SEN}(m\theta) d\theta \quad (69A)$$

Tal expressão quando aplicada aos resultados da resolução da integral (66A) faz chegar ao resultado seguinte:

$$D_i = \frac{\pi}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot b^2 \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot A_n^2 \quad (70)$$

O coeficiente de arrasto total induzido é dado por

$$C_{Di} = \frac{D_i}{\frac{1}{2} \rho S U^2}$$

que se for rearranjado e introduzida a razão de aspecto assume a seguinte forma:

$$C_{Di} = \pi \cdot AR \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot A_n^2 \quad (71)$$

Tendo então resolvido o problema da obtenção dos coeficientes para a série de Fourier fica automaticamente resolvido o problema da sustentação e do arrasto de uma dada superfície de sustentação.

É importante para o tratamento da questão como um todo, a determinação da relação entre C_L e C_{Di} que será feita a seguir.

6.3.2. Relação entre C_L e C_{Di}

Seja a expressão 67 elevada ao quadrado,

$$C_L^2 = (\pi \cdot AR \cdot A_1)^2 \Rightarrow$$

$$A_1^2 = \frac{C_L^2}{\pi^2 \cdot AR^2} \quad (72)$$

A expressão 71 depois de um certo rearranjo se torna a seguinte expressão:

$$C_{Di} = \pi \cdot AR \cdot A_1^2 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \left(\frac{A_n}{A_1} \right)^2 \right] \quad (71A)$$

Para não sobrecarregar as expressões é interessante chamar

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \left(\frac{A_n}{A_1} \right)^2 = \sigma$$

que fará com que 71.A seja escrita da seguinte forma:

$$C_{Di} = \pi \cdot AR \cdot A_1^2 (1 + \sigma)$$

se daí então for substituído A_1^2 pela expressão 72 chega-se a

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi \cdot AR} (1 + \sigma) \quad (73)$$

Fazendo ver então que a relação entre o arrasto e a sustentação é quadrática.

Pode-se observar com facilidade que, sendo σ um número positivo, o menor arrasto induzido para uma dada sustentação se rá para a situação em que σ se iguala a zero. Se σ se iguala a zero, todos os coeficientes da série, menos A_1 , também se igua lam a zero.

Da equação 61.B percebe-se que a integral indicada na mesma se resolve por intermédio da solução de Glauert gerando então a expressão, seguinte:

$$W_i = - U \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot A_n \frac{\text{SEN}(n\theta_p)}{\text{SEN } \theta_p} \quad (74)$$

Para que haja m̃nimo arrasto induzido ẽ necessãrio que todos os A_n exceto A_1 sejam nulos o que faz claro que

$$W_i = -U \cdot A_1$$

Portanto

$$\alpha_i = -A_1 \quad (75)$$

Fazendo claro que para uma dada superf̃cie de sustentação com m̃nimo arrasto induzido, os ângulos de ataque induzidos devem ser constantes ao longo da envergadura alẽ de ser igual ao coeficiente A_1 exceto pelo sinal.

7. TEORIA DE BIPLANOS

A teoria desenvolvida por Prandtl para resolver os problemas de sustentação e arrasto em superfícies de sustentação simples se mostra útil também, após o tratamento adequado, à solução dos mesmos problemas para o caso de biplanos, sendo então necessário agora desenvolver as relações que envolvem as interações entre duas superfícies de sustentação quando então tratadas por linhas de sustentação.

A princípio deve ser esclarecida a notação utilizada para o caso específico biplano, tal notação está na figura 33.

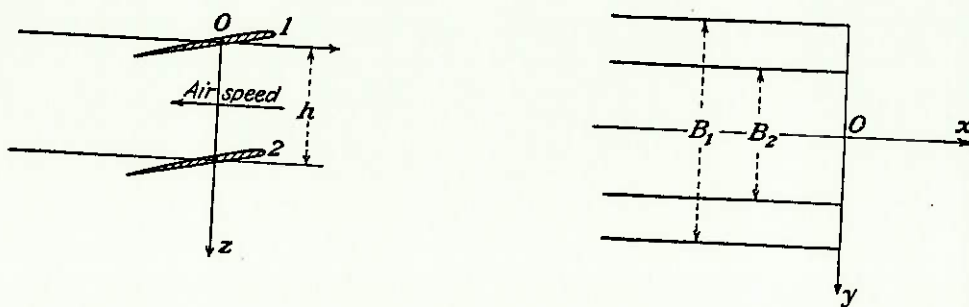


Fig. 33 - Notação para biplano.

De modo a simplificar a solução do problema, será assumida uma distribuição elíptica de sustentação sobre cada um dos planos de sustentação. O desenvolvimento e dedução da expressão para tal distribuição se encontra na referência 6 seção IX - 5. Outra simplificação que será assumida e não é verdade na maioria dos casos é que, a princípio, as duas linhas de sustentação se situam em um plano perpendicular ao escoamento espaçadas de uma distância h (figura 33) correspondendo à distância média existente entre as duas asas. Cada linha de sustentação traz consigo a esteira de vórtice com largura igual à da envergadura da asa.

Como se pode observar na figura 33 tudo o que diz respeito à superfície de sustentação superior terá o índice 1 e tudo o que disser respeito ao plano inferior levará índice 2.

Para cada ponto P_1 da linha de sustentação superior e para cada ponto P_2 da linha de sustentação inferior a velocidade de total induzida pelas esteiras deve ser levada em conta para o cálculo da circulação. Sendo então a velocidade total induzida w_1 e o ângulo de incidência de cada seção α' , a circulação ao redor de uma dada seção é então igual a

$$\Gamma_1 = kU \left(\alpha' - \frac{w_1}{V} \right) \text{ ou } \Gamma_2 = kU \left(\alpha' - \frac{w_2}{V} \right)$$

onde o fator k é dependente do perfil da seção transversal e o mesmo é fornecido pela teoria bi-dimensional.

De acordo com as equações 40A e 58A

$$L_1 = \rho V \int_{-\frac{B_1}{2}}^{\frac{B_1}{2}} \Gamma_1(y_1) dy_1 \quad \text{e} \quad D_1 = \rho \int_{-\frac{B_1}{2}}^{\frac{B_1}{2}} \Gamma_1(y_1) w_1(y_1) dy_1$$

onde $w_1(y_1)$ pode ser escrita como a soma da velocidade induzida pela esteira de vórtices superior (w_{11}) e aquela induzida pela esteira de vórtices inferior w_{12} no ponto P_1 da superfície superior. Desta forma pode-se escrever

$$L = L_1 + L_2 \quad (76)$$

$$D_1 = D_{11} + D_{12} = \rho \int \Gamma_1(y_1) w_{11}(y_1) dy_1 + \rho \int \Gamma_1(y_1) w_{12}(y_1) dy_1 \quad (76A)$$

onde o primeiro termo D_{11} é o arrasto que a asa superior experimental se fosse usada como um monoplane. A vorticidade de um elemento P_2 da asa inferior induz em P_1 a velocidade dada pela equação

$$- \frac{1}{4\pi} \frac{\Gamma_2(y_2)}{r} dy$$

onde r denota a distância de P_1 a P_2 . Como tal velocidade é perpendicular a $\underline{P_1P_2}$ a componente da velocidade induzida é igual a

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\Gamma_2'(y_2)}{r} \cos\beta dy_2$$

onde β é o ângulo entre $\underline{P_1P_2}$ e o eixo y positivo, ou seja:

$$\cos\beta = \frac{(y_2 - y_1)}{r} \quad \text{e} \quad r^2 = h^2 + (y_2 - y_1)^2$$

de forma que a velocidade induzida w_{12} no ponto P_1 pode ser escrita por:

$$w_{12}(y_1) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-B/2}^{B/2} \frac{y_2 - y_1}{h^2 + (y_2 - y_1)^2} \Gamma_2(y_2) dy_2 \quad (77)$$

Com tal expressão, depois do tratamento algébrico necessário, pode-se então escrever a expressão do arrasto na linha superior devido à inferior como:

$$D_{12} = \frac{\rho}{4\pi} \int_{-B/2}^{B/2} \int_{-B/2}^{B/2} \Gamma_1(y_1) \Gamma_2(y_2) \frac{h^2 - (y_2 - y_1)^2}{h^2 + (y_2 - y_1)^2} dy_1 dy_2 \quad (78)$$

Como se trocarmos y_1 com y_2 tal expressão permanece inalterada percebe-se que $D_{12} = D_{21}$ de maneira que o arrasto total de um biplano é dado por:

$$D = D_1 + D_2 = (D_{11} + D_{12}) + (D_{21} + D_{22}) = D_{11} + 2D_{12} + D_{22} \quad (79)$$

onde D_{11} e D_{22} seriam os arrastos que as asas experimentariam caso as mesmas fossem utilizadas como mono-planos e $2D_{12}$ é o efeito mútuo entre as asas.

Como já foi dito no começo, a distribuição assumida para a sustentação neste capítulo será a elíptica de modo que

de-se obter a expressão da circulação em função da sustentação. Da referência 6 seção IX-4 tem-se que:

$$\Gamma(y) = \frac{4L}{\pi \rho U B} \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{B}\right)^2}$$

e da expressão 58 tem-se que:

$$D = \frac{W_i}{U} \cdot L = \frac{2L^2}{\pi \rho U^2 B^2}$$

De onde se conclui que a expressão para D_{12} pode ser modificada para:

$$D_{12} = D_{21} = \frac{4L_1 L_2}{\pi^3 \rho U^2 B_1 B_2} \int_{-\frac{B_1}{2}}^{\frac{B_1}{2}} \int_{-\frac{B_2}{2}}^{\frac{B_2}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{2y_1}{B_1}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{2y_2}{B_2}\right)^2} \times \frac{h^2 - (y_2 - y_1)^2}{h^2 + (y_2 - y_1)^2} dy_1 dy_2 \quad (80)$$

Depois de efetuada a integral dupla de (80), a qual gera um pesado trabalho de cálculo numérico chega-se à expressão seguinte:

$$D_{12} = \frac{2L_1 L_2}{\pi \rho U^2 \cdot B_1 B_2} \sigma \quad (81)$$

onde σ é a integral dupla da expressão 80 multiplicada por:

$$\frac{B_1 B_2}{2\pi^2 h^2}$$

Fator de interferência, assim é chamado σ que pode ser avaliado segundo o procedimento acima. Devido à dificuldade em se avaliar mesmo numericamente as integrais da expressão (80) o valor de σ foi plotado em função da razão de envergaduras B_2/B_1 (μ), da razão $2h/(B_1 + B_2)$ e da distância entre as asas h , na figura 34. Foi assumido que $B_2 \leq B_1$ sendo que no entanto tal fator tem validade para o caso em que a asa inferior seja de maior envergadura, sendo aí então necessário inverter os índi

ces, ou seja o índice 1 é usado para a asa de maior envergadura.

Fazendo uso dos resultados já encontrados chega-se à seguinte expressão:

$$D = D_{11} + 2D_{12} + D_{22} = \frac{2}{\pi \rho U^2} \left(\frac{L_1^2}{B_1^2} + 2\sigma \frac{L_1 L_2}{B_1 B_2} + \frac{L_2^2}{B_2^2} \right) \quad (82)$$

Seja S a soma da área das duas asas, o coeficiente de arrasto será dado por:

$$C_D = \frac{1}{\pi} \left(\frac{S}{B_1^2} C_{L1}^2 + 2\sigma \frac{S}{B_1 B_2} C_{L1} C_{L2} + \frac{S}{B_2^2} C_{L2}^2 \right) \quad (83)$$

onde C_{L1} e C_{L2} são os coeficientes de sustentação da asa 1 e 2 respectivamente.

Para facilitar a notação é interessante que seja introduzida a seguinte notação:

$$\frac{B_2}{B_1} = \mu, \quad \frac{L_2}{L_1} = \nu.$$

sendo $L = L_1 + L_2$ então $L_1 = L/(1+\nu)$ e $L_2 = \nu \cdot L/(1+\nu)$ de modo que a expressão (83) pode ser reescrita como:

$$D = \frac{2L^2}{\pi \rho U^2 B_1^2} \cdot \frac{(\mu^2 + 2\mu\nu\sigma + \nu^2)}{(1+\nu)^2 \cdot \mu^2} \quad (83A)$$

Pode-se perceber claramente que o primeiro termo é o arrasto de um monoplo cuja sustentação é L .

Mais uma vez é possível simplificar a notação adotando fatores. É chamado de fator de Munck o seguinte:

$$M = \frac{(1 + v) \mu}{\sqrt{\mu^2 + 2\mu\nu\sigma + \nu^2}} \quad (83C)$$

O que faz com que 83.A se torne

$$D = \frac{2L^2}{\pi\rho U^2 (MB_1)^2} \quad (83B)$$

é possível observar que MB_1 é a envergadura equivalente de um monoplane que substituiria este biplano, e $(MB_1)^2 \div S$ é a razão de aspecto equivalente.

Em posse de tais expressões seria possível então, da dos valores arbitrários de B_1 , B_2 , h , L_1 e L_2 projetar biplanos dispondo cordas e ângulos de incidência de uma maneira adequada para as duas asas. Contudo o maior interesse reside no fato de qual relação entre L_1 e L_2 faz observar o menor arrasto possível para um dado valor de sustentação total ($L_1 + L_2$). Basta então se ter as derivadas parciais da expressão do arrasto em função de L_1 e L_2 e igualá-las de modo a encontrar um ponto de mínimo.

Seja então:

$$\frac{L_1}{B_1^2} + \sigma \frac{L_2}{B_1 B_2} = \frac{L_2}{B_2^2} + \sigma \frac{L_1}{B_1 B_2}$$

que resulta em

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{B_1/B_2 - \sigma}{B_2/B_1 - \sigma} \quad \text{e} \quad \frac{L_1}{L_1 + L_2} = \frac{1 - \sigma B_2/B_1}{1 - 2\sigma B_2/B_1 + (B_2/B_1)^2}$$

de modo que o arrasto mínimo será então dado por:

$$D_{\min} = \frac{L^2}{\pi (\rho/2) U^2 B_1^2} \cdot \frac{1 - \sigma^2}{1 - 2\sigma B_2/B_1 + (B_2/B_1)^2} \quad (84)$$

cujo segundo membro oferece o valor ótimo para o fator de Munk

$$M_{OT} = \frac{1 - 2\sigma\mu + \mu^2}{1 - \sigma^2}$$

que será ótimo quando a razão de sustentação v é composta pela razão de envergaduras e pelo fator de interferência da seguinte maneira:

$$v = \frac{\mu - \sigma}{(1/\mu) - \sigma} \quad (85)$$

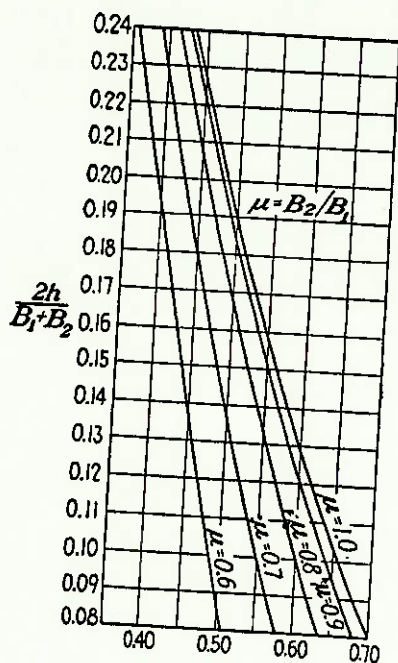


Fig. 34 - Fator de Interferência (σ).

8. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

8.1. Introdução

Como foi definido no capítulo 2 o problema se resume basicamente em resolver o problema de sustentação e arrasto para o caso de uma vela e por intermédio das conclusões do capítulo 7 chegar à resolução do problema de velas de velas-biplano.

Na figura 1 tem-se a apresentação de um barco genérico de uma só vela cuja simbologia será exatamente a mesma para o caso de duas velas.

De modo a procurar trazer uma generalidade maior ao trabalho será feito o cálculo para uma série de velas.

8.2. Apresentação do Problema

Para a aplicação da teoria desenvolvida no capítulo 6, a linha de sustentação de Prandtl, assume-se que o escoamento seja incompressível, invíscido e irrotacional. As velocidades do escoamento incidente seguem a distribuição da equação (3) e as condições expostas no capítulo 2. O sistema de coordenadas é definido pela figura 4 e a origem se encontrará à metade da envergadura da vela, sobre a testa da mesma. O eixo x terá a mesma direção e sentido do escoamento incidente, o eixo y é perpendicular à superfície da água e está dirigido para cima, e, por se tratar de um sistema ortonormal positivo o eixo z fica determinado pela regra da mão direita.

De forma a se aproximar mais da realidade, as velas deveriam ser inclinadas no plano $x-y$ de um ângulo igual ao ângulo de banda assumido pela embarcação quando sujeita às forças e momentos gerados pela vela. Observa-se na referência (1) que para ângulos de banda de até $25-30^\circ$ a influência do mesmo na resolu

ção do problema é irrelevante.

As condições de contorno abaixo da linha de sustentação são tomadas como um plano horizontal infinito localizado arbitrariamente a uma certa distância da linha de sustentação. De modo a satisfazer a condição de nenhum escoamento normal à superfície horizontal, o método das imagens é utilizado no qual a imagem da linha de sustentação é tida como especular no plano horizontal.

O problema da linha de sustentação é formalmente colocado como: Determinar um campo de escoamentos associados a seu arrasto, sustentação e momento de emborcamento para uma linha de sustentação de envergadura b perpendicular a um escoamento incidente na direção x inclinado na vertical de um ângulo ϕ . Um plano infinito horizontal é colocado a uma distância h abaixo da linha de sustentação, e a variação da velocidade do fluxo livre é dada pela equação (3).

As condições de contorno matemáticas são dadas por:

$$y/y = -b/2 h \quad (86)$$

$$\lim_{y \rightarrow \pm \infty} \nabla \phi = 0 \quad (87)$$

$$\lim_{z \rightarrow \pm \infty} \nabla \phi = 0 \quad (88)$$

$$\lim_{x = -\infty} \nabla \phi = 0 \quad (89)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \nabla \phi < \infty \quad (90)$$

Analiticamente se chega às expressões do capítulo 6 quando tratadas numericamente gerarão as respostas obtidas pelos programas "MINAR" e "VELA 1".

As equações (65) e (70) são as soluções do problema da linha de sustentação simples e da referência (2) pg.22 pode ser

obtida a expressão do momento em relação ao eixo x.

$$M_x = - \frac{\rho U b^3}{8} \left[A_2 U \pi - 2kb \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \left(\frac{n}{4n^2-1} - \frac{n}{4n^2-9} \right) \right] \quad (91)$$

Da equação tem-se que:

$$\Gamma[y(\theta)] = 2U.b. \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{ SEN } n\theta$$

e

$$\ell[y(\theta)] = \rho.U(y). \Gamma(y)$$

Depois de executar o tratamento algébrico adequado chega-se à seguinte expressão para a sustentação canônica expressa (65)

$$L = \rho U_0 b^2 \frac{\pi}{2} \left[U_0 A_1 - \frac{kb}{4} A_2 \right] \quad (92)$$

Esses resultados (além da expressão (70) são as expressões utilizadas pelo programa "Vela 1" para calcular a força propulsora, o arrasto e o momento de emborcamento.

Para extrapolar os resultados obtidos no programa Vela 1 será construído um outro programa, não para o computador devido à falta de tempo mas para uma calculadora texas 58, que fará o tratamento de dados e gerará os resultados para o problema Vela-Biplano. As expressões usadas em tal tratamento são aquelas descritas no capítulo 7 com os números (76) a (83A).

Baseando-se no processo descrito para a solução do problema, é importante tentar orientar a escolha dos coeficientes da série que representa a circulação de modo a se obter a sustentação desejada para a vela, com o menor arrasto induzido e o menor momento possíveis. Tais coeficientes são determinados conforme descrito no próximo item.

8.3. Cálculo dos Coeficientes

Os coeficientes a serem calculados são aqueles que geram mínimo arrasto induzido em uma dada linha de sustentação imersa em um meio infinito no qual a velocidade do fluxo varia ao longo da linha.

Tal problema foi resolvido por Von Karman e Tsien e como resultado existe a afirmação que o arrasto é mínimo quando o ângulo de ataque induzido é constante ao longo da envergadura. Para que isso aconteça deve-se ter:

$$\frac{W_i(y)}{U(y)} = C \quad (93)$$

Em (61B) é obtido o resultado de W_i que quando submetida às mudanças impostas por () e colocada em (93) chega-se à conclusão que:

$$U \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \frac{\text{SEN}(n\theta)}{\text{SEN}(m\theta)} - \frac{hQ(\theta) - Q^2(\theta) - 1}{Q^2(\theta) - 1} \frac{1/2 h^n}{1/2} = CU \left(\frac{kb}{2U} \cos\theta - 1 \right) \quad (94)$$

de onde, para valores fixos de $\frac{h}{b}$ e $\frac{kb}{2U}$ pode-se montar um sistema M equações a M incógnitas cujas saídas serão em função de A_n . Para se conhecer o coeficiente A_1 é necessário seguir o procedimento exposto no próximo parágrafo.

A partir de um coeficiente de sustentação fixado, com a equação (67) tem-se o valor de A_1 .

O programa "MINAR" traz como saídas as relações $\frac{A_n}{A_1}$. Tal programa consta do anexo 1.

8.4. Cálculo das Forças de Sustentação e Arrasto

Uma vez escolhidos os coeficientes da série que representa a circulação ao longo da vela, pode-se determinar as forças e os momentos gerados por ela. As forças e os momentos gerados por uma vela são calculados em posse desses coeficientes baseado na teoria desenvolvida neste trabalho.

Os cálculos desenvolvidos para se chegar a tais forças e momentos são executados pelo programa "Vela 1" da referência (2).

O programa "Vela 1" tem como dados de entrada os coeficientes A_n as características geométricas da vela em questão e as condições de vento sobre ela. Em posse desses dados o programa posiciona a linha de sustentação real e a imaginária com relação ao fluxo (a imaginária é a imagem especular da real). Outro dado de entrada é em quantos filamentos deve ser dividida tal linha operação essa que é efetuada pelo programa compondo os filamentos de vórtice do tipo ferradura sendo as partes verticais trechos da linha de sustentação e as partes horizontais a representação das esteiras. A intensidade de cada ferradura tem valor igual ao da circulação no ponto onde está centrado o filamento, ou seja, nas extremidades dos segmentos.

Aplicando o equacionamento deduzido no presente trabalho o programa chega aos resultados dando os valores da força propulsora, arrasto e momento de emborcamento de uma dada vela.

Sejam definidas as forças e momentos:

- Força Propulsora - Força gerada pela vela na direção do rumo do barco.
- Força Transversal - Força gerada na vela perpendicular ao rumo do barco.
- Momento de Emborcamento - Momento em torno do eixo que passa pela origem do sistema de coordenadas e é paralelo à linha de centro do barco.

Para cada força e momento, o programa determina os coeficientes baseados na velocidade do vento real e do vento aparente no meio da vela. Para os momentos o comprimento adimensionalizante ẽ a envergadura da vela.

O programa "Vela 1" consta de anexo de número 2.

A nomenclatura para o caso de duas velas ẽ praticamente idêntica ã nomenclatura para uma vela surgindo somente uma vela a mais conforme mostrado na figura (35).

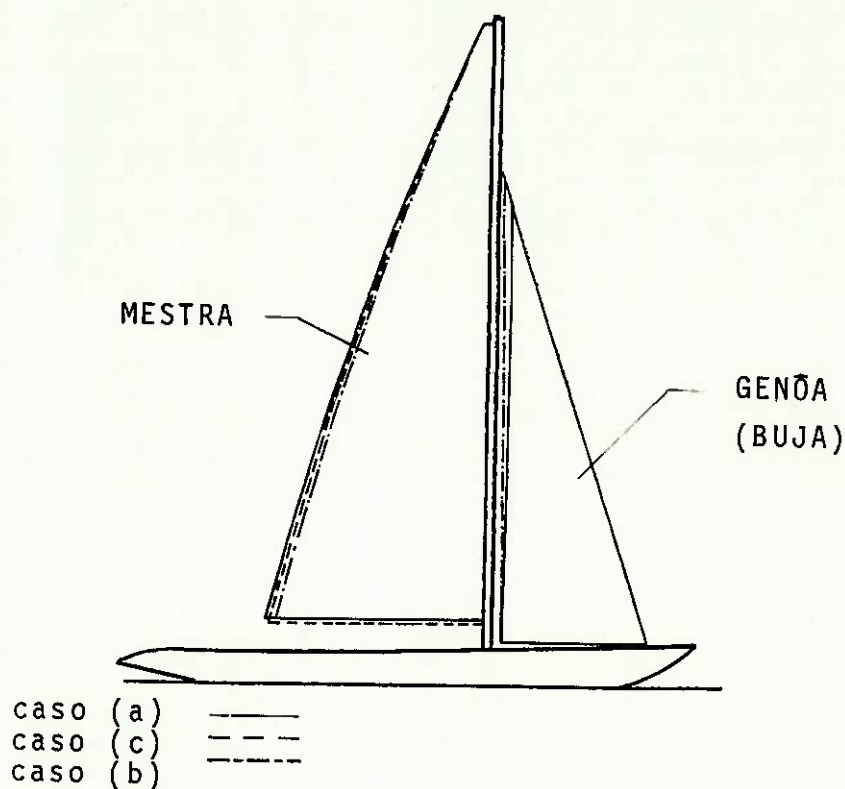


Fig. 35 - Barco com duas velas.

Para o caso a ser analisado, embarcação com duas velas as expressões desenvolvidas no capítulo 7 constituirão um programa para uma calculadora Texas TI58C sendo o mesmo apresentado no anexo 3.

8.5. Resultados

Os resultados aqui apresentados são frutos dos programas acima e, assim como na referência (2) serão comparados com os resultados obtidos da referência (1). Os casos estudados serão desenvolvidos sobre um veleiro 5.5 com 2 alterações realizadas sobre suas velas:

- a) Velame básico
- b) Maior genôa e menor vela mestra
- c) Razão de aspecto da vela mestra aumentada

As dimensões, velocidades e ângulos considerados serão os seguintes:

	(a)	(b)	(c)
-envergadura da vela mestra:	34,75 tf	34,75 ft	35,00 ft
-taxa de variação do vento:	0,09	0,09	0,09
-distância do pé da vela ao plano horizontal (h):	2,50 ft	2,50 ft	2,50 ft
-área vëllica projetada (mestra):	209,37 ft ²	200,2 ft ²	209,125
-ângulo B ₁₁ :	0,645rd	0,645rd	0,645rd
-coeficiente de sustentação (mestra):	2,30	2,30	2,30
-corda da vela mestra na base:	12,05 ft	11,52 ft	11,95 ft
-envergadura da genôa:	25,80 ft	27,35 ft	25,80 ft
-corda da genôa na base:	8,00 ft	8,12 ft	8,00 ft
-diferença de altura entre o pé da mestra e o da genôa:	1,65 ft	1,65 ft	1,4 ft
-velocidade do vento real:	11,70fps	11,70fps	11,70fps
-velocidade do barco:	8,45fps	8,45fps	8,45fps
-área vëllica projetada (genôa):	103,20 ft ²	111,04 ft ²	103,2 ft ²
-coeficiente de sustentação (genôa):	2,20	2,20	2,20

Tabela 1 - Velas a serem estudadas.

Para o cálculo dos coeficientes pelo programa Minar é necessário o conhecimento de 2 fatores:

$$\frac{h}{b} \quad e \quad \frac{kb}{2U}$$

então temos:

CASO	VELA	$\frac{h}{b}$	$\frac{kb}{2U}$
A	Mestra	0,072	0,1337
	Genôa	0,033	0,046
B	Mestra	0,072	0,1337
	Genôa	0,074	0,0443
C	Mestra	0,0643	0,1346
	Genôa	0,071	0,046

Tabela 2 - Fatores h/b e $kb/2U$ para as velas estudadas

A partir de tais fatores como dados de entrada do programa Minar foi possível obter com a execução do programa os coeficientes para o cálculo da circulação, sustentação e arrasto.

Os coeficientes vêm a seguir na tabela 3.

h/B	$kb/2U$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0,072	0,1337	0,001928	0,001928	0,001753	0,000595	0,000211
0,033	0,046	0,003933	0,003933	0,001608	0,000545	0,000194
0,072	0,1337	0,127000	0,001928	0,001753	0,000595	0,000211
0,074	0,0443	0,104145	0,003641	0,001472	0,000499	0,000178
0,0643	0,1346	0,123044	0,001944	0,001705	0,000576	0,000205
0,071	0,046	0,108758	0,003762	0,001538	0,000521	0,0001858

Tabela 3 - Coeficientes do programa Minar.

OBS: Para o cálculo de A_1 foi imposto $C_L = 2,3$ para as mestras e $C_L = 2,2$ para as genôas.

Com a utilização das tabelas 1, 2, 3 pode-se dar entrada nos dados para o programa "VELA 1" de onde foram obtidos os seguintes resultados:

CASO	VELA	SUSTENTAÇÃO	ARRASTO	PROPULSORA	LATERAL	σ
A	Mestra	135,220	12,922	37,679	126,859	0,55
	Genôa	62,115	6,238	17,027	58,870	
	Total	197,335	15,558	58,056	189,242	
B	Mestra	129,103	12,339	35,973	121,170	0,58
	Genôa	66,964	6,496	18,569	63,380	
	Total	196,067	15,326	57,806	187,978	
C	Mestra	134,289	13,020	37,917	126,270	0,54
	Genôa	62,115	6,111	17,230	59,084	
	Total	196,404	15,909	57,387	188,505	

Tabela 4 - Resultados.

Para os cálculos de forças totais foi utilizada a teoria dos biplanos do capítulo 7 onde é necessário o parâmetro distância entre as linhas de sustentação, para os casos considerados tal distância foi considerada 3,3 pés (1,0m).

É interessante se fazer a comparação destes resultados com os obtidos na referência (1).

CASO	VELA	SUSTENTAÇÃO	ARRASTO	PROPULSORA	LATERAL	σ
A	Mestra	134,503	12,623	37,694	129,729	0,55
	Genôa	61,839	6,174	16,986	59,780	
	Total	196,342	18,797	54,679	189,509	
B	Mestra	128,620	12,167	35,956	124,090	0,58
	Genôa	66,878	6,402	18,626	64,551	
	Total	195,498	18,568	54,582	186,640	
C	Mestra	134,377	12,307	37,941	129,495	0,54
	Genôa	62,085	6,044	17,197	59,961	
	Total	196,462	18,351	55,138		

Tabela 5 - Resultados Ref.(1)

Pode-se observar da comparação das duas tabelas uma ligeira discrepância. Tal discrepância será analisada no item seguinte.

8.6. Conclusões

Da teoria desenvolvida por Munk sabe-se que o arrasto, a sustentação e o momento de emborcamento são praticamente inalterados se trasladamos os elementos de sustentação na direção do fluxo incidente. Como tal teorema foi uma das bases do desenvolvimento da teoria dos biplanos.

Apesar disso é importante perceber que a independência do arrasto mútuo com relação à defasagem entre as duas linhas de sustentação é verdadeira no momento em que a distribuição da sustentação se mantenha inalterada para as duas superfícies envolvidas.

Foi assumido no capítulo 7 que a distribuição de sustentação é elíptica de forma que todos os cálculos foram feitos em cima de tal premissa.

Pode-se observar dos resultados da tabela 4 que o arrasto total é menor do que se fosse usada um monoplane com igual envergadura e sustentação total. Isso se deve ao fato de que o arrasto total para o biplano ser de certa forma proporcional a $\frac{\sigma + 1}{2}$ (caso extremo onde $B_1 = B_2$ e $L_1 = L_2$) e σ é um número menor que a unidade.

Contudo, a vantagem obtida pelo biplano quando comparado a um monoplane não é tão importante quanto aos resultados podem indicar. Um acréscimo relativamente pequeno na envergadura do monoplane possibilita um decréscimo no arrasto induzido de modo a este assumir praticamente o mesmo valor que para o biplano. O fator pelo qual a envergadura do monoplane deve ser multi

plicada é o fator de Munk (M , expressão (83C)). Tal conclusão é de suma importância no projeto de veleiros uma vez que sob certas condições os velames têm seus coeficientes de arrasto limitados pelos efeitos de separação do escoamento. Contudo, para um dado velame, a velocidade ótima ocorre com uma carga maior na genôa do que aquela existente para a situação de mínimo arrasto, resultando num arrasto maior do que o esperado.

Com relação aos resultados obtidos pode-se dizer que houve uma pequena discrepância no que diz respeito à sustentação e arrasto para cada uma das velas, apesar de uma enorme discrepância nos coeficientes a partir de $A(3)$. Tal fato pode ser explicado devido à sustentação e o arrasto praticamente só dependerem de $A_{(1)}$ e $A_{(2)}$ além do que a partir de $A(3)$ os coeficientes são muito pequenos.

Outra discrepância observada foi o total para as duas velas do arrasto, força propulsora e força lateral. Tal discrepância se deve a princípio à ligeira diferença entre os valores individuais para cada uma das velas mas principalmente ao fato de que apesar de na referência (1) ter sido exposto que o cálculo das forças seria feito segundo a teoria dos biplanos, tal afirmativa não se verificou pois basta somarmos os valores de tais forças na vela mestra e na genôa para se obter os resultados que Milgram obteve. Tal procedimento não é verdadeiro do que pode ser observado das referências (3) e (6) o que faz inclusive que se lance certo ceticismo sobre a validade quantitativa de tal trabalho (ref.(1)). Qualitativamente porém pode-se estudar qual arranjo é mais indicado perdendo no entanto a possibilidade da comparação da diferença que exerce o fator σ sobre o conjunto.

É interessante a colocação sobre a possibilidade de se ter uma única vela de envergadura um pouco maior do que o biplano com as mesmas características aerodinâmicas. Tal afirmativa se vê confirmada em alguns veleiros de competição que na sua evolução passaram de duas velas, para uma única como é o caso dos catamarans classe C.

REFERÊNCIAS

- MILGRAN, Jerome H.; The analytical design of Yatch Sails transname. Vol.76, 1968.
- ANDRADE, Bernardo L.R.; Seminário relativo ao programa de Mestrado na área de concentração de Engenharia Naval. EPUSP, São Paulo. 1982
- PRANDTL, L. and TIETJENS, O.G.; Applied Hydro-and Aeromechanics. Mc Graw-Hill, New York, 1934.
- VEIGA, Jorge P.C.; Hidrodinâmica Básica. EPUSP, São Paulo, 1980.
- KUETHE, A.M.; Schetzer J.D. Foundations of Aerodynamics. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1959
- VON MISES, Richard.; Theory of Flight. Dover Publications, Inc. New York, 1959
- FALKNER, V.M.; The solution of lifting-plane problems by vortex-lattice theory. Aeronautical Research Council, London, 1947
- HAMMING, Richardw.; Numerical methods for scientists and engineers. New York, Mc Graw-Hill, 1962.

ANEXO 1 - PROGRAMA MINAR

A.1.1. Dados de Entrada

19 Cartão: NCOF, NHSB, NBKSU, EPS (Formato livre entre vírgulas)

NCOF - Número de coeficientes a serem calculados (máximo 30).

NHSB - Número de valores de h/b para calcular os coeficientes (máximo 10).

NBKSU - Número de valores de $kb/2U_0$ para calcular os coeficientes (máximo 10).

EPS - Precisão desejada para o cálculo da matriz inversa (um bom valor é $EPS=1,0 \text{ E-}10$)

29 Cartão: HSB (I), = 1, NHSB (Format 10 (F 5.3)).

HSB() - Valores de h/b para o cálculo dos coeficientes.

39 Cartão: BK(), = 1, NBKSU (Format 10 (F 5.3)).

BK() - Valores para $kb/2U_0$ para o cálculo dos coeficientes.

OBS: Este programa foi desenvolvido pelo Engº Bernardo L.R. Andrade para seu programa de Mestrado.

A.1.2. Listagem

C H I C O O N D I S K
 = = = = =

DIMENSION C(31,31),G(10,30),FI(30),BK(10),HSE(10),X(30),A(31,31)
 READ(5,/)NCOF,NHSB,NBKSU,EPS

READ(5,510)(HSE(I),I=1,NHSE)

READ(5,510)(BK(I),I=1,NBKSU)

WRITE(6,/) "NCOF=",NCOF,"NHSE=",NHSE,"NHSB=",NHSB,"NBKSU=",NBKSU,"EPS=",EPS

WRITE(6,/)(HSE(I),I=1,NHSE),"HSE"

PI=3.141592654

FI(1)=0

FI(NCOF)=PI

NCO=NCOF-2

DO 5 I=1,NCO

FI(I+1)=FI(I)+FI/(NCOF-1)

5 CONTINUE

DO 15 I=1,NHSB

DO 10 J=1,NCOF

G(I,J)=2.+4.*HSE(I)-COS(FI(J))

10 CONTINUE

15 CONTINUE

NCO=NCOF+1

DO 60 L=1,NHSB

WRITE(6,540)HSE(L)

DO 12 I=1,NHSB

DO 20 K=1,NCOF

DO 19 N=1,NCOF

IF(K.NE.1)GO TO 16

V1=N

GO TO 18

16 IF(K.NE.NCOF) GO TO 17

V1=-N*((-1.)*N)

GO TO 18

17 V1=SIN(N*FI(K))/SIN(FI(K))

18 V2=SQRT(G(I,K)**2.-1.)

V3=(G(I,K)-V2)**N

V4=V3/V2

V5=(V1-V4)*N

C(K,N)=V5

19 CONTINUE

20 CONTINUE

12 CONTINUE

DO 30 J=1,NBKSU

DO 23 N1=1,NCOF

DO 22 N2=1,NCOF

A(N1,N2)=C(N1,N2)

22 CONTINUE

23 CONTINUE

DO 25 K=1,NCOF

V6=1.-BK(J)*COS(FI(K))

A(K,NCO)=V6

25 CONTINUE

WRITE(6,550)BK(J)

DETER=SIMUL(NCOF,A,X,EPS)

IF(DETER.NE.0.)GO TO 26

```

WRITE(6,570)
GO TO 60
26 W1=X(1)
DO 27 NN=1,NCOF
X(NN)=X(NN)/W1
27 CONTINUE
WRITE(6,620)(X(N3),N3=1,ACOF)
30 CONTINUE
60 CONTINUE
500 FORMAT(3I5,E10.1)
510 FORMAT(10F5.3)
540 FORMAT(1X,///,50X,'*****',/,50X,'*',13X,'*',/,50X,'*',2X
1,'H/B=',F5.3,2X,'*',/,50X,'*',13X,'*',/,50X,'*****',/)
550 FORMAT(1X,///,52X,'KB/2L=',F5.3,/,52X,'*****',///)
570 FORMAT(1X,///,10X,'A MATRIZ DOS COEFICIENTES E SINGULAR',/,10X,'N
1AO HA SOLUCAO PARA ESTE VALOR DE H/B',/)
620 FORMAT(38X,'VETOR DOS COEFICIENTES NORMALIZADOS',/,1X,/,100PE1C
1.3,2X)))
STOP
END

```

```

=====

FUNCTION SIMUL(N,A,X,EPS)
DIMENSION IROW(30),JCOL(30),JORD(30),A(31,31),X(30)
MAX=N+1
DETER=1.
DO 18 K=1,N
KMI=K-1
PIVOT=0
DO 11 I=1,N
DO 11 J=1,N
IF(K.EQ.1) GO TO 9
DO 8 ISCAN=1,KMI
DO 8 JSCAN=1,KMI
IF(I.EQ.IROW(ISCAN)) GO TO 11
IF(J.EQ.JCOL(JSCAN)) GO TO 11
8 CONTINUE
9 IF(ABS(A(I,J)).LE.AESCFPIVOT) GO TO 11
PIVOT=(A(I,J))
IROW(K)=I
JCOL(K)=J
11 CONTINUE
IF(ABS(PIVOT).GT.EPS) GO TO 13
SIMUL=0
RETURN
13 IROWK=IROW(K)
JCOLK=JCOL(K)
DETER=DETER*PIVOT
DO 14 J=1,MAX
14 A(IROWK,J)=A(IROWK,J)/PIVOT
A(IROWK,JCOLK)=1./PIVOT
DO 18 I=1,N
AIJCK=A(I,JCOLK)
IF(I.EQ.IROWK) GO TO 18
A(I,JCOLK)=AIJCK/PIVOT
DO 17 J=1,MAX
17 IF(J.NE.JCOLK) A(I,J)=A(I,J)-AIJCK*A(IROWK,J)

```

```

18 CONTINUE
   DC 20 I=1,N
   IROWI=IROW(I)
   JCOLI=JCOL(I)
   JCRD(IRCHI)=JCOLI
20 X(JCOLI)=A(IRCHI,MAX)
   INTCH=0
   PN1=N-1
   DC 22 I=1,NM1
   IP1=I+1
   DO 22 J=IP1,N
   IF(JORD(J).GE.JORD(I)) GO TO 22
   JTEMP=JORD(J)
   JCRD(J)=JORD(I)
   JORD(I)=JTEMP
   INTCH=INTCH+1
22 CONTINUE
   IF(INTCH/2*2.NE.INTCH) DETER=-DETER
   SIMUL=DETER
   RETURN
   END

```

=====

```

1
NO ERRORS DETECTED.  NUMBER OF CARDS = 129.
COMPILATION TIME = 16 SECONDS ELAPSED,  1.43 SECONDS PROCESSING(54
02 STACK SIZE = 18 WORDS.  FILESIZE = 140 WORDS.  ESTIMATED CORE S
TICAL PROGRAM CODE = 462 WORDS.  ARRAY STORAGE = 2392 WORDS.
NUMBER OF PROGRAM SEGMENTS = 15.  NUMBER OF DISK SEGMENTS = 53.
PROGRAM CODE FILE = (PNC51902394&0)CHICO ON DISK.

```

ANEXO 2 - PROGRAMA VELA 1

A.2.1. Dados de Entrada

1º Cartão: NCASO (Format I5)

NCASO - Número de casos a serem analisados. Os cartões seguintes devem ser repetidos para cada caso.

2º Cartão: B, H, SPR (Formato livre, entre vírgulas).

B - Envergadura da vela.

H - Distância do pé da vela ao plano horizontal (superfície da água).

SPR - Área Vêlica.

3º Cartão: M, N (Formato livre, entre vírgulas).

M - Número de filamentos que representam a esteira de vórtices.

N - Número de coeficientes A_n que serão fornecidos.

4º Cartão: VB, VVR, AVR, CK, RO (Format 5(F 10.0)).

VB - Velocidade do Barco.

VVR - Velocidade do Vento Real.

AVR - Ângulo entre a Direção do Vento Real e o rumo do Barco.

CK - Taxa de variação da velocidade do vento real.

RO - Densidade do Ar.

5º e 6º Cartão: A(J), J=1, N (Format 8 (F 10.0)).

A(J) - Valores dos coeficientes A_n para cálculos de circulação.

OBS: Este programa foi desenvolvido pelo Engº Bernardo L.R. Andrade para seu programa de Mestrado.

A.2.2. Listagem

E U L N D I S K
 = = = = =

```

DIMENSION A(10),FI(30),SIGMA(30),SUS(30),ARR(30)
READ(5,490)NCASO

DO 10 C LL=1,NCASO
  READ(5,/)B,H,SPR
  READ(5,/)M,N
  READ(5,520)VB,VVR,AVR,CR,R0
  READ(5,530)(A(J),J=1,N)
  WRITE(6,/) "B=",B,"H=",H,"SPR=",SPR,"M=",M,"N=",N

  R1=(VB+VVR*COS(AVR))*2.+(VVR*SIN(AVR))*2.
  UO=SQRT(R1)
  R2=(VVR*SIN(AVR))/(VE+VVR*COS(AVR))
  BETA=ATAN(R2)
  WRITE(6,200)
  WRITE(6,210)B,H,SPR
  WRITE(6,220)VB,VVR,AVR,CR,R0
  WRITE(6,230)
  WRITE(6,240)UO,BETA
  WRITE(6,250)
  WRITE(6,270)(A(J),J=1,N)
  FI=3.141592654
  DIV=PI/M+1
  DO 10 J=1,M
    FI(J)=J*DIV
10  CONTINUE
  DO 20 J=1,M
    V1=C
    DO 15 I=1,N
      V1=V1+A(I)*SIN(I*FI(J))
15  CONTINUE
    SIGMA(J)=2.*UO*B*V1
20  CONTINUE
    WRITE(6,300)
    DO 50 J=1,M
      YF=-B*.5*COS(FI(J))
      W=0.
      DO 30 I=1,M
        V2=FI(I)+DIV/2.
        V3=FI(I)-DIV/2.
        YD=-B*.5*COS(V2)
        YL=-B*.5*COS(V3)
        CALL WVMVN(SIGMA(I),YP,YC,YL,H,B,VI)
        W=W+VI
30  CONTINUE
      U=UO-CK*B*.5*COS(FI(J))
      ALFA=ATAN(W/U)
      SUS(J)=R0*U*SIGMA(J)
      ARR(J)=-R0*W*SIGMA(J)
      WRITE(6,320)YP,J,SIGMA(J),W,ALFA,SUS(J),ARR(J)
50  CONTINUE

```

```

DC 70 J=1,M
IF(J.EQ.1) GO TO 60
IF(J.EQ.M) GO TO 65
Y1=-B*.5*COS(FI(J-1))
Y2=-B*.5*COS(FI(J))
Y3=-B*.5*COS(FI(J+1))
CALL FOLINT (Y1,Y2,Y3,SUS(J-1),SUS(J),SUS(J+1),C1,C2,C3)
CALL POLINT (Y1,Y2,Y3,ARR(J-1),ARR(J),ARR(J+1),C4,C5,C6)
PARS=(C1/3.)*(Y2**3.-Y1**3.)+(C2/2.)*(Y2**2.-Y1**2.)+C3*(Y2-Y1)
TINS=TINS+PARS
FARA=(C4/3.)*(Y2**3.-Y1**3.)+(C5/2.)*(Y2**2.-Y1**2.)+C6*(Y2-Y1)
TINA=TINA+FARA
PARM=(C1/4.)*(Y2**4.-Y1**4.)+(C2/3.)*(Y2**3.-Y1**3.)+(C3/2.)*(Y2**
12.-Y1**2.)
TINM=TINM+PARM
PARMZ=(C4/4.)*(Y1**4.-Y2**4.)+(C5/3.)*(Y1**3.-Y2**3.)+(C6/2.)*(Y1**
1*2.-Y2**2.)
TINMZ=TINMZ+PARMZ
GO TO 70
60 Y1=-B*.5
Y2=-B*.5*COS(FI(1))
Y3=-B*.5*COS(FI(2))
CALL FOLINT (Y1,Y2,Y3,0.,SUS(1),SUS(2),C1,C2,C3)
CALL POLINT (Y1,Y2,Y3,0.,ARR(1),ARR(2),C4,C5,C6)
TINS=(C1/3.)*(Y2**3.-Y1**3.)+(C2/2.)*(Y2**2.-Y1**2.)+C3*(Y2-Y1)
TINA=(C4/3.)*(Y2**3.-Y1**3.)+(C5/2.)*(Y2**2.-Y1**2.)+C6*(Y2-Y1)
TINM=(C1/4.)*(Y2**4.-Y1**4.)+(C2/3.)*(Y2**3.-Y1**3.)+(C3/2.)*(Y2**
12.-Y1**2.)
TINMZ=(C4/4.)*(Y1**4.-Y2**4.)+(C5/3.)*(Y1**3.-Y2**3.)+(C6/2.)*(Y1**
1*2.-Y2**2.)
GO TO 70
65 Y1=-B*.5*COS(FI(J-1))
Y2=-B*.5*COS(FI(J))
Y3=B*.5
CALL FOLINT (Y1,Y2,Y3,SUS(J-1),SUS(J),0.,C1,C2,C3)
CALL POLINT (Y1,Y2,Y3,ARR(J-1),ARR(J),0.,C4,C5,C6)
PARS=(C1/3.)*(Y3**3.-Y1**3.)+(C2/2.)*(Y3**2.-Y1**2.)+C3*(Y3-Y1)
TINS=TINS+PARS
FARA=(C4/3.)*(Y3**3.-Y1**3.)+(C5/2.)*(Y3**2.-Y1**2.)+C6*(Y3-Y1)
TINA=TINA+FARA
PARM=(C1/4.)*(Y3**4.-Y1**4.)+(C2/3.)*(Y3**3.-Y1**3.)+(C3/2.)*(Y3**
12.-Y1**2.)
TINM=TINM+PARM
PARMZ=(C4/4.)*(Y1**4.-Y3**4.)+(C5/3.)*(Y1**3.-Y3**3.)+(C6/2.)*(Y1**
1*2.-Y3**2.)
TINMZ=TINMZ+PARMZ
70 CONTINUE
CL=TINS/(.5*RO*SPR*VAR**2.)
CLA=TINS/(.5*RO*SPR*LO**2.)
CD=TINA/(.5*RO*SPR*VAR**2.)
CDA=TINA/(.5*RO*SPR*LO**2.)
CMX=TINM/(.5*RO*SPR*E*VVR**2.)
CMXA=TINM/(.5*RO*SPR*B*UC**2.)
CMZ=TINMZ/(.5*RO*SPR*B*VVR**2.)
CMZA=TINMZ/(.5*RO*SPR*B*LO**2.)
FR=TINS*SIN(BETA)-TINA*CGS(BETA)
FFR=TINS*COS(BETA)+TINA*SIN(BETA)
TRM=TINM*SIN(BETA)+TINMZ*CGS(BETA)
BAR=TINM*COS(BETA)-TINMZ*SIN(BETA)
CFR=FR/(.5*RO*SPR*VVR**2.)

```

```

CFMA=FR/(.5*RO*SPR*UC**2.)
CFPR=FPR/(.5*RC*SPR*VH**2.)
CFPRA=FF/(.5*RC*SPR*UC**2.)
CTRM=TRM/(.5*RO*SPR*E*VVR**2.)
CTHMA=TRM/(.5*RC*SPR*B*UC**2.)
CBAM=BAF/(.5*RC*SPR*E*VVR**2.)
CBAMA=BAF/(.5*RC*SPR*B*UC**2.)
WRITE(6,600)
WRITE(6,610)TINS,CL,CLA
WRITE(6,620)
WRITE(6,630)TINA,CD,COA
WRITE(6,640)
WRITE(6,650)TINY,CMX,CMXA
WRITE(6,660)
WRITE(6,670)TINMZ,CMZ,CMZA
WRITE(6,680)
WRITE(6,690)FR,CFR,CFRA
WRITE(6,700)
WRITE(6,710)FPR,CFPR,CFPRA
WRITE(6,720)
WRITE(6,730)TRM,CTRM,CTHMA
WRITE(6,740)
WRITE(6,750)BAF,CBAF,CBAMA
100 CONTINUE
200 FORMAT(1H1,48X,'DADOS DE ENTRADA',/,49X,'*****',/)
210 FORMAT(41X,'ENVERGADURA DA VELA = ',F7.3,/,41X,'DISTANCIA DO
1 PE DA VELA',/,41X,'AO PLANO HORIZONTAL = ',F7.3,/,41X,'AREA
2 VELICA PROJETADA = ',F7.2,/)
220 FORMAT(41X,'VELOCIDADE DO BARCO = ',F7.3,/,41X,'VELOCIDADE
1 DO VENTO',/,41X,'NO MEIO DA VELA = ',F7.2,/,41X,'ANGU
2 LO ENTRE A DIRECAO',/,41X,'DO VENTO E O RUM = ',F7.4,/,4
31X,'TAXA DE VARIAÇAO DA',/,41X,'VELOCIDADE DO VENTO = ',F
47.4,/,41X,'DENSIDADE DO AR = ',F7.5,/)
230 FORMAT(49X,'DADOS GERADOS',/,49X,'*****',/)
240 FORMAT(41X,'VELOCIDADE APARENTE DO',/,41X,'VENTO NO MEIO DA VE
1A = ',F7.2,/,41X,'ANGULO ENTRE A DIRECAO',/,41X,'DO VENTO AFA
2 NTE E RUM = ',F7.4,/)
250 FORMAT(38X,'COEFICIENTES PARA CALCULO DA CIRCULACAO',/,38X,'*****
1*****',/,/,6X,'A( 1)',6X,'A( 2)
2( 3) A( 4) A( 5) A( 6) A( 7) A( 8)',6X,'A
3( 9) A(10)',/)
270 FORMAT(3X,10(1F,10.3,1X))
300 FORMAT(1H1,5X,'ORDENADAX',3X,'VELOCIDADE DA CIRCULACAO',3X,'
1ELUCIDADE ANGULO DE',6X,'SUSTENTACAO AFRASTO',/,20X,'VENT
2 APARENTE',17X,'INDUZIDA ATAGLE INDUZIDO P/LN1.COMP.',3X,'F/L
3I.COMP.',/)
320 FORMAT(8X,F8.3,7X,F7.3,6X,F9.3,5X,F8.4,7X,F7.4,8X,F8.3,6X,F8.3,/)
490 FORMAT(I5)
500 FORMAT(3F10.0)
510 FORMAT(2I5)
520 FORMAT(5F10.0)
530 FORMAT(8F10.0)
600 FORMAT(1H1,20X,'SUSTENTACAO',14X,'COEFICIENTE DE',14X,'COEFI
1ENTE DE',/,21X,'DA VELA',14X,'SUSTENTACAO BASEADO',14X,'
2SUSTENTACAO BASEADO',/,48X,'NO VENTO REAL',NO VENTO A
3PARENTE',/)
610 FORMAT(21X,'L=',F10.3,18X,'CL=',F10.4,19X,'CLA=',F10.4,/)
620 FORMAT(21X,'ARRASTO DA',14X,'COEFICIENTE DE',14X,'COEFICIENT
1E DE',/,24X,'VELA',18X,'ARRASTO BASEADO',14X,'ARRASTO
2 BASEADO',/,46X,'NO VENTO REAL',14X,'NO VENTO APARENTE',/)

```

```

630 FORMAT(21X,'D=',F10.3,18X,'CD=',F10.4,19X,'CDA=',F10.4,/)
640 FORMAT(21X,'MOMENTO EM',14X,'COEFICIENTE DO',14X,'COEFICIENTE
1E DO',/,21X,'RELACAO AO',14X,'MOMENTO X BASEADO',14X,'MOME
2NTO X BASEADO',/,21X,'EIXO X',14X,'NO VENTO REAL',14X
3,'NO VENTO APARENTE',/)
650 FORMAT(20X,'MX=',F10.3,15X,'CMX=',F10.4,19X,'CMXA=',F10.4,/)
660 FORMAT(21X,'MOMENTO EM',14X,'COEFICIENTE DO',14X,'COEFICIENTE
1E DO',/,21X,'RELACAO AO',14X,'MOMENTO Z BASEADO',14X,'MOME
2NTO Z BASEADO',/,21X,'EIXO Z',14X,'NO VENTO REAL',14X
3,'NO VENTO APARENTE',/)
670 FORMAT(20X,'MZ=',F10.3,15X,'CMZ=',F10.4,19X,'CMZA=',F10.4,/)
680 FORMAT(24X,'FORCA',17X,'COEFICIENTE DA FORCA',13X,'COEFICIENTE DA
1FORCA',/,21X,'PROPULSORA',15X,'PROPULSORA BASEADO',14X,'PROPULSOR
2A BASEADO',/,48X,'NO VENTO REAL',14X,'NO VENTO APARENTE',
3,/)
690 FORMAT(20X,'FP=',F10.3,18X,'CFP=',F10.4,18X,'CFPA=',F10.4,/)
700 FORMAT(24X,'FORCA',17X,'COEFICIENTE DA FORCA',13X,'COEFICIENTE DA
1FORCA',/,21X,'TRANSVERSAL',14X,'TRANSVERSAL BASEADO',14X,'TRANSVER
2SAL BASEADO',/,48X,'NO VENTO REAL',14X,'NO VENTO APARENTE',
3,/)
710 FORMAT(20X,'FT=',F10.3,18X,'CFI=',F10.4,18X,'CFTA=',F10.4,/)
720 FORMAT(21X,'MOMENTO DE',14X,'COEFICIENTE DO MOMEN',13X,'COEFICIENTE
1E DO MOMEN',/,24X,'TRIM',18X,'TC DE TRIM BASEADO',14X,'TC DE TRI
2M BASEADO',/,48X,'NO VENTO REAL',14X,'NO VENTO APARENTE',
3,/)
730 FORMAT(20X,'MT=',F10.3,18X,'CMI=',F10.4,18X,'CMTA=',F10.4,/)
740 FORMAT(21X,'MOMENTO DE',14X,'COEFICIENTE DO MOMEN',13X,'COEFICIENTE
1E DO MOMEN',/,21X,'EMBROCAMENTO',13X,'TC DE EMBROCAMENTO',15X,'TC
2 DE EMBROCAMENTO',/,48X,'BASEADO NO VENTO REAL',12X,'BASEADO NO VE
3NTO APARENTE',/)
750 FORMAT(20X,'ME=',F10.3,18X,'CME=',F10.4,18X,'CMEA=',F10.4)
STOP
END

```

```

=====

SUBROUTINE POLINT (T1,T2,T3,Z1,Z2,Z3,AA,BB,CC)
X1=(Z3-Z1)-(T3-T1)*(Z2-Z1)/(T2-T1)
X2=(T3**2.-T1**2.)-(T3-T1)*(T2**2.-T1**2.)/(T2-T1)
AA=X1/X2
BB=((Z2-Z1)-AA*(T2**2.-T1**2.))/(T2-T1)
CC=Z1-AA*T1**2.-BB*T1
RETURN
END
=====

```

```

=====

SUBROUTINE WVMVM (SIG,YFS,YOS,YLS,HS,BS,VIS)
SU1=1./(YLS-YFS)-1./(YOS-YFS)
SU2=1./(YLS+BS+2.*HS+YFS)-1./(YOS+BS+2.*HS+YFS)
SU3=SIG/(4.*3.141592554)
VIS=SU3*(SU1+SU2)
RETURN
END

```

ANEXO 3 - PROGRAMA BIPLANO

Programa para cálculo da força de arrasto causada por um conjunto de sustentação tipo biplano. Utilizando-se da figura 34 e das expressões de 82 a 83B chega-se ao seguinte programa executado para uma calculadora Texas 58C.

As entradas são as seguintes:

A - L_1 ; L_2 (R/S)

B - B_1 ; B_2 (R/S)

C - ρ ; U ; σ (R/S)

A listagem é a seguinte:

LBL A

STO 00 R/S

STO 01 R/S

LBL B

STO 02 R/S

STO 03 R/S

LBL C

STO 04 R/S

STO 05 R/S

STO 06 R/S

LBL D

$((RCL00 + RC | 01) x^2 * 2 \div (2ND\pi * RC | 04 * RC | 05 x^2 * (SBR GTO * RCL 02) x^2))$

INV SBR

LBL STO

$(RCL 01 \div RCL 00) INV SBR$

LBL RCL

$(RCL 03 \div RC | 02) INV SBR$

LBL GTO

$((1 + SBR STO) * SBR RCL \div (SBR RCL x^2 + 2 * SBR RCL * SBR STO * RCL 06 + SBR STO x^2) \sqrt{ }) INV SBR$

ANEXO 4 - RESULTADOS REFERENCIA (1)

CASO (a)

FORCES AND COEFFICIENTS			
	JIB	MAIN	TOTAL
FORWARD	16.886	37.686	54.679
SIDE	.357	.390	.749
LIFT	59.780	129.729	189.509
DRAG	1.255	1.343	2.598
DRAG FACTOR	61.839	134.503	196.342
HEELING MOMENTS AND COEFFICIENTS ABOUT JIB TACK	1.298	1.392	2.690
MAIN DIMENSIONAL LENGTH IS FROM JIB TACK TO MID SPAN OF JIB FOR JIB	6.174	12.623	18.797
AND TO MIDSPAN OF MAIN FOR MAIN AND TOTAL	1.150	.232	.130
MOMENT	.077	.067	.070
	680.853	2375.582	3056.435
	1.108	1.292	1.123

CASO (b)

FORCES AND COEFFICIENTS			
	JIB	MAIN	TOTAL
FORWARD	18.626	35.956	54.582
SIDE	.363	.389	.752
LIFT	64.551	124.090	188.640
DRAG	1.260	1.343	2.603
DRAG FACTOR	66.878	128.620	195.498
HEELING MOMENTS AND COEFFICIENTS ABOUT JIB TACK	1.305	1.392	2.697
MAIN DIMENSIONAL LENGTH IS FROM JIB TACK TO MID SPAN OF JIB FOR JIB	6.402	12.167	18.569
AND TO MIDSPAN OF MAIN FOR MAIN AND TOTAL	.125	.132	.128
MOMENT	.075	.068	.070
	780.150	2270.616	3050.766
	1.113	1.292	1.116

CASO (c)

FORCES AND COEFFICIENTS			
	JIB	MAIN	TOTAL
FORWARD	17.397	37.941	55.338
SIDE	.361	.393	.754
LIFT	59.961	129.495	189.457
DRAG	1.259	1.342	2.601
DRAG FACTOR	62.085	134.377	196.462
HEELING MOMENTS AND COEFFICIENTS ABOUT JIB TACK	1.303	1.392	2.695
MAIN DIMENSIONAL LENGTH IS FROM JIB TACK TO MID SPAN OF JIB FOR JIB	6.044	12.307	18.351
AND TO MIDSPAN OF MAIN FOR MAIN AND TOTAL	.127	.128	.127
MOMENT	.075	.066	.069
	680.777	2352.981	3033.758
	1.108	1.290	1.114

- * OBS: JIB - Genôa
 MAIN - Mestra
 FORWARD - Força Propulsora
 SIDE - Força Lateral
 LUFT - Força de Sustentação
 DRAG - Força de Arrasto