

DANIEL AMORIM DE OLIVEIRA

**Apreçamento de opções usando volatilidade
estocástica**

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Financeira, da Universidade São Paulo, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de MBA em Engenharia Financeira.

Orientador: Oswaldo Luiz do Valle Costa

São Paulo
19 de Novembro de 2015

Daniel Amorim de Oliveira

Apreçamento de opções usando volatilidade estocástica / Daniel Amorim de Oliveira

. – São Paulo , 19 de Novembro de 2015 36 p. : il.
(algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Oswaldo Luiz do Valle Costa

Monografia – UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA DA USP (POLI-USP)

PECE

ENGENHARIA FINANCEIRA , 19 de Novembro de 2015 .

Daniel Amorim de Oliveira

Apreçamento de opções usando volatilidade estocástica

Trabalho aprovado. São Paulo, 19 de Novembro de 2015:

Oswaldo Luiz do Valle Costa
Orientador

Danilo Zucolli Figueiredo

Roberto Moura Sales

São Paulo
19 de Novembro de 2015

*Dedico esse trabalho à todos que de forma direta ou indireta me apoiaram
nesta jornada, principalmente aos meus pais, que sem eles nada disso seria possível.*

Insanidade é continuar fazendo sempre a mesma coisa e esperar resultados diferentes.

Albert Einstein

Os cientistas devem vestir a camisa de força do materialismo, caso contrário, não é possível fazer ciência.

Richard Feynman

Resumo

O presente trabalho aplicou a metodologia de modelagem estocástica da volatilidade, desenvolvida por Oztukel e Wilmott, para o apreçamento de opções. Tal abordagem visa a evolução do modelo padrão de Black-Scholes, que assume uma volatilidade constante durante todo o tempo de exercício da opção.

A metodologia foi aplicada para a volatilidade diária mensalizada do índice histórico do Ibovespa no período de 02/01/1968 até 30/01/2015, gerando uma equação estocástica para a volatilidade, que mostrou uma boa aderência ao modelo matemático proposto.

Tal equação foi utilizada para o apreçamento de uma opção da Vale, através da metodologia de Monte Carlo. O valor simulado via Monte Carlo padrão (com volatilidade constante) foi R\$ 6,03, e utilizando-se a volatilidade estocástica, o valor foi R\$ 6,08. Tal opção era negociada no mercado com o preço de R\$ 6,00.

Abstract

This work applied the stochastic volatility modeling methodology, developed by Oztukel and Wilmott, for pricing options. Such an approach seeks the development of the standard model of Black-Scholes that assumes a constant volatility throughout the option exercise time.

The methodology was applied to the daily volatility transformed on monthly basis of Brazilian Ibovespa index in the period from 01/02/1968 to 01/30/2015, generating a stochastic equation for the volatility, that showed good adhesion to the proposed mathematical model.

This equation was used for pricing an option of Vale, using Monte Carlo methodology. The simulated value via standard Monte Carlo (with constant volatility) was R\$ 6.03, and using the stochastic volatility, the value was R\$ 6.08. Such an option was traded in the market with the price of R\$ 6.00.

Lista de Figuras

Figura 1 – Variação da volatilidade do Ibovespa ao longo do tempo	13
Figura 2 – Ajuste para obtenção de $\beta(\sigma)$	26
Figura 3 – Ajuste para obtenção de $\alpha(\sigma)$	27
Figura 4 – Volatilidade estocástica	31
Figura 5 – Histograma da Volatilidade Estocástica	32
Figura 6 – Preço da Vale simulado por Black Scholes Padrão	32
Figura 7 – Preço da Vale simulado por Black Scholes com volatilidade estocástica	33

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Especificações da opção da Vale	29
Tabela 2 – Código do Matlab para simulação da Volatilidade Estocástica	29

Sumário

1	Introdução	11
1.1	Opções	11
1.2	Precificação padrão por Black Scholes	12
1.3	Objetivo do trabalho	12
1.4	Organização do trabalho	13
2	Revisão Bibliográfica	15
3	Desenvolvimento teórico	17
3.1	Ibovespa	17
3.2	Processo estocástico e Movimento Browniano Geométrico	18
3.3	Lema de Ito	19
3.4	Black-Scholes	20
3.5	Modelo de Volatilidade Estocástica	22
4	Resultados	25
4.1	Análise empírica da volatilidade	25
4.2	Aplicação em opções de Ibovespa	27
4.3	Resultados Obtidos	29
5	Conclusão	34
	Referências	36

1 Introdução

1.1 Opções

Opção é instrumento financeiro classificado como derivativo, pois seu preço é baseado em outro ativo (denominado ativo-objeto). Uma opção confere, ao titular, o direito (e não o dever) de comprar um determinado ativo por um valor determinado, enquanto o vendedor é obrigado a concluir a transação.

A opção geralmente é considerada como uma apólice de seguro, pois garante ao comprador um valor desejável do ativo-objeto.

O conceito de opção veio de uma necessidade de controle do risco ligado as flutuações dos preços nos mercados agrícolas. A primeira documentação de tal uso das opções ocorre na Holanda em 1634.

As tulipas eram um símbolo de status entre a aristocracia holandesa do século 17 e, neste tempo, era comum os mercadores venderem a futuro (para entregar a posteriori). Havia portanto, grande risco em aceitar vender a um preço fixo no futuro sem saber, com certeza, qual seria o preço exato no momento da venda.

Para limitar este risco e assegurar uma margem de lucro, muitos mercadores compravam opções dos plantadores. Estas opções asseguravam aos mercadores o direito, mas não a obrigação, de comprar tulipas dos plantadores a um preço pré-determinado por um período específico de tempo. Em outras palavras, o preço máximo para os mercadores era fixado até que chegasse a hora de entregar as tulipas aos aristocratas e receber o pagamento.

Se as tulipas passassem a custar mais que o preço máximo (ou pré-determinado), os mercadores que possuíam as opções, exigiriam do plantador a entrega ao preço máximo combinado, assegurando uma margem de lucro.

Se, entretanto, o preço caísse e a opção expirasse sem valor, o mercador ainda podia ter lucro comprando tulipas a um preço mais baixo e depois revendendo com lucro. Estes contratos de opções, permitiram que muitos mercadores permanecessem trabalhando durante períodos de extrema volatilidade nos preços das tulipas. (BASTTER,)

Os principais ativos-objeto de opções são: ação, índice, contrato futuro, letra do tesouro, commodity, etc.

Por se tratar de um produto que depende do valor futuro do seu ativo-objeto, que por sua vez possui um valor futuro estocástico, a opção segue um comportamento

estocástico. Seu comportamento estocástico foi estudado por Fischer Black e Myron Scholes, culminando no conhecido Modelo de Black-Scholes (BLACK; SCHOLES, 1973).

1.2 Precificação padrão por Black Scholes

O Modelo original de Black-Scholes (BLACK; SCHOLES, 1973) faz as seguintes suposições explícitas:

- É possível emprestar e tomar emprestado a uma taxa de juros livre de risco constante e conhecida.
- O preço do ativo objeto segue um movimento Browniano geométrico com taxa de crescimento e volatilidade constantes.
- Não há custos de transação.
- A ação não paga dividendos.
- Não há restrições para a venda a descoberto.
- As opções são europeias

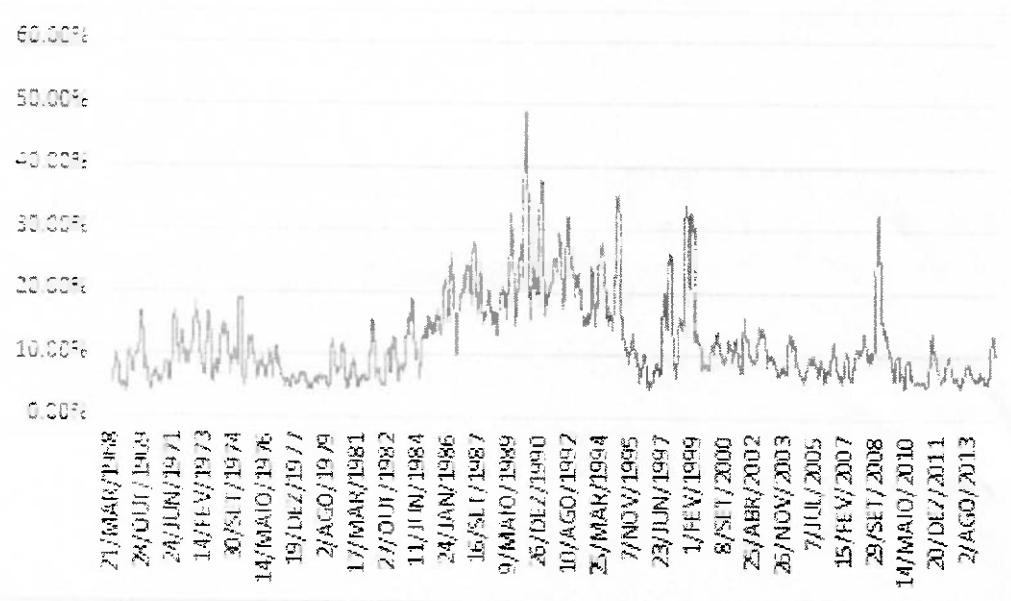
A partir dessas premissas, os autores mostram que o valor de uma opção varia apenas com o preço da ação e com o tempo até o vencimento.

A dedução do Modelo será apresentado no Capítulo 4.

1.3 Objetivo do trabalho

Como discutido na seção acima, uma das premissas do Modelo de Black-Scholes é que a volatilidade da variável estocástica é constante. É sabido que essa premissa não corresponde à realidade enfrentada no mercado financeiro, um exemplo da variação da volatilidade pode ser visto na Figura 1.

Figura 1 – Variação da volatilidade do Ibovespa ao longo do tempo



Tendo em vista essa premissa fraca, será apresentado neste trabalho a metodologia proposta por Oztukel e Wilmott (OZTUKEL; WILMOTT, 1998) para estimação estocástica da volatilidade, aplicada no mercado brasileiro.

Posteriormente, essa volatilidade estocástica será utilizada, através da metodologia de Monte Carlo, para o apreçamento de um caso real de opção da Vale.

Os dados utilizados são do fechamento do Ibovespa diário, que pode ser adquirido através do site oficial da BM&FBovespa. Através dos valores diários, foi possível calcular a volatilidade mensal, que será a base para todos os cálculos deste trabalho. O período analisado é de 02/01/1968 até 30/01/2015.

Foi escolhido propositadamente um longo período de tempo (todo o histórico disponível no site), para que seja incluído na análise períodos de crise e de bonança.

1.4 Organização do trabalho

No Capítulo 2 será apresentado o entorno bibliográfico do apreçamento de opções e o paradigma da volatilidade não ser constante no mundo real.

No Capítulo 3 será desenvolvida toda a teoria presente neste trabalho, começando com uma explicação dos conceitos do índice Ibovespa e como é possível representar o mesmo através de um processo estocástico, mais precisamente através de um Movimento Browniano Geométrico. Logo após será apresentada uma ferramenta matemática (Lema de Ito) que será utilizada para a dedução da equação diferencial de Black-Scholes padrão. Posteriormente será apresentada a metodologia de Volatilidade Estocástica criada por Oztukel e Wilmott.

O Capítulo 4 irá modelar a metodologia de Volatilidade Estocástica para o Ibovespa, e logo após será apresentado uma aplicação da modelagem para o apreçamento de uma opção da Vale através de simulação de Monte Carlo.

Finalmente, no Capítulo 5 será apresentada a conclusão com relação à aplicação da metodologia de Volatilidade Estocástica para o mercado brasileiro.

2 Revisão Bibliográfica

Em 1973, Black e Scholes (BLACK; SCHOLES, 1973) revolucionaram o mercado financeiro através de uma metodologia para o cálculo do preço de uma opção. Para a dedução de sua formulação final e amplamente conhecida, eles utilizaram cálculo estocástico e várias suposições que simplificaram a resolução do problema.

Uma das simplificações mais controversas é a assunção de que a volatilidade se mantém constante durante todo o período de vida da opção. Como já foi discutido no Capítulo 1 deste trabalho, tal simplificação se demonstra grosseira e não factível com o mundo real.

Tendo em vista esta aparente inconsistência, e visando a sua mensuração, diversos autores realizaram trabalhos tentando incorporar uma volatilidade não constante nos resultados de Black e Scholes. Uma das principais formas de realizar uma predição da volatilidade futura, e sua incorporação no modelo de Black-Scholes, é a metodologia de volatilidade estocástica.

A metodologia desenvolvida por Oztukel e Wilmott (OZTUKEL; WILMOTT, 1998) foi a metodologia adotada para a elaboração do presente trabalho, que incorpora a abordagem estocástica de modelagem, aplicada ao mercado Americano. Wilmott desenvolveu vários outros trabalhos que abordam esse tema, tentando ampliar a sua aplicabilidade.

Uma das principais críticas à modelagem estocástica é a sua dificuldade de implementação e distância ao mundo intuitivo. Em seu trabalho, Oztukel e Wilmott optaram por uma modelagem mais simples e que pudesse ser trabalhada sem grandes dificuldades matemáticas.

Wilmott sumariza esta metodologia em seu livro (WILMOTT, 2006), e realiza novas parcerias para que a sua abordagem fosse utilizada em outros contextos como o trabalho de Ahmad e Wilmott () que faz o uso da metodologia em ativos de renda fixa, estudando a curva de juros futuro, e a influência de sua volatilidade.

Bodra (2012) em sua dissertação de mestrado utiliza as mesmas ferramentas para realizar o apreçamento de opções de commodities agrícolas, incluindo novas técnicas para tratar dos saltos de preços que este mercado apresenta.

Avellaneda, Levy e Paras (1995), faz uso de uma metodologia mais rudimentar, que utiliza bandas de volatilidade para definir a variação da volatilidade. Este trabalho serviu de inspiração para a metodologia abordada neste texto.

Informações adicionais sobre o tema podem ser encontradas em Sinclair (2008),

Dixit e Pindyck (1994).

Para a utilização da técnica de Monte Carlo, é necessário a discretização da equação diferencial com a qual se deseja trabalhar, Kloeden e Platen (1992) desenvolvem uma metodologia de discretização exata da equação diferencial do preço de uma opção. A discretização exata é a possibilidade de discretizar uma equação diferencial de tal forma que ela não dependa do passo adotado, ou seja, ela não é sensível a mudanças no passo adotado no modelo numérico.

3 Desenvolvimento teórico

3.1 Ibovespa

O Índice Bovespa - Ibovespa (BOVESPA,) foi criado em 1968 e desde então é considerado como o mais importante indicador do desempenho das cotações das ações negociadas no mercado brasileiro. Ele é o resultado de uma carteira teórica de ativos, elaborada de acordo com os critérios estabelecidos pela BM&FBOVESPA.

Segundo a BM&FBOVESPA, o objetivo do Ibovespa é ser o indicador do desempenho médio das cotações dos ativos de maior negociabilidade e representatividade do mercado de ações brasileiro.

O Ibovespa é o somatório da representatividade (quantidade teórica da ação no índice) ponderada pelo valor de mercado do "free float" (ativos que se encontram em circulação) da mesma ação integrante da carteira teórica. Portanto:

$$Ibovespa_t = \sum_{i=1}^n Q_{i,t} P_{i,t}$$

sendo:

$Ibovespa_t$ = índice Bovespa no instante t ;

n = número total de ações pertencentes à carteira teórica;

$P_{i,t}$ = valor de mercado do "free float" da ação i , no instante t ;

$Q_{i,t}$ = quantidade teórica da ação i , no instante t .

Em 2014 houve uma importante alteração na metodologia de cálculo do Ibovespa, as principais mudanças são listadas a seguir:

- A ponderação do índice passa a ser realizada pelo valor de mercado das ações circulantes (free float);
- Ações cujo valor unitário é inferior a R\$1,00 (penny stocks) são excluídas do índice;
- Uma dada ação pode ter no máximo 20% de participação na formação da carteira teórica;
- O Índice de Negociabilidade (IN), passa a considerar 1/3 da participação no número de negócios da ação e 2/3 de volume financeiro;

- A representatividade de um ativo no índice, quando das reavaliações periódicas, não poderá ser superior a duas vezes a participação que o ativo teria, caso a carteira fosse ponderada pela representatividade dos INs individuais no somatório de todos os INs dos ativos integrantes da carteira.

3.2 Processo estocástico e Movimento Browniano Geométrico

Um processo estocástico é definido como um processo que depende de uma variável não determinística, ou seja, que se desenvolve no tempo de uma maneira que é pelo menos parcialmente aleatória e imprevisível. Formalmente ele é definido por uma lei de probabilidade para a evolução de uma variável z durante um tempo t .

O Movimento Browniano é um caso particular de processo estocástico, e é definido pelas seguintes propriedades (DIXIT; PINDYCK, 1994):

1. É um processo que é completamente definido apenas com sua distribuição de probabilidade e seu valor atual (Processo de Markov).
2. Possui incrementos independentes.
3. Mudanças no processo sobre qualquer intervalo de tempo são normalmente distribuídas, com uma variância que aumenta linearmente com o intervalo de tempo.

Logo, considerando que $z(t)$ segue um Movimento Browniano, então qualquer variação de z , dz , no correspondente intervalo de tempo dt , seguem as seguintes condições:

- $dz = \epsilon_t \sqrt{dt}$, onde $\epsilon_t \sim N(0, 1)$. (Propriedade 3)
- $cov(\epsilon_t, \epsilon_s) = 0$, para $t \neq s$. (Propriedade 2)

Com isso temos que:

$$E(dz) = E(\epsilon_t \sqrt{dt}) = \sqrt{dt} E(\epsilon_t) = 0$$

$$Var(dz) = Var(\epsilon_t \sqrt{dt}) = dt Var(\epsilon_t) = dt$$

Portanto o Movimento Browniano segue uma distribuição normal $dz \sim N(0, dt)$.

$$(dz)^2 = (\epsilon_t \sqrt{dt})^2 = \epsilon_t^2 dt$$

Sabemos que $E(\epsilon_t^2) = 1$ para $\epsilon_t \sim N(0, 1)$, e portanto:

$$E(dz)^2 = E(\epsilon_t \sqrt{dt})^2 = dt E(\epsilon_t^2) = dt$$

$$Var(dz)^2 = Var(\epsilon_t \sqrt{dt})^2 = dt^2 Var(\epsilon_t^2) = 0$$

Assim, temos que $dz^2 \sim N(dt, 0)$ é determinístico e o seu valor é igual ao seu valor esperado $E(dz)^2 = (dz)^2 = dt$.

Um caso especial do processo acima é o Movimento Browniano Geométrico, definido por (3.1). Sendo α e β constantes.

$$dx = \alpha x dt + \beta x dz \quad (3.1)$$

Neste trabalho, iremos considerar que uma ação S é uma variável aleatória com uma distribuição log-normal definida pelo Movimento Browniano Geométrico.

3.3 Lema de Ito

Equações Estocásticas não seguem as regras do cálculo convencional. Um dos principais Lemas do Cálculo Estocástico é conhecido como Lema de Ito, sendo $F(x, t)dx = \alpha(x, t)dt + \beta(x, t)dz$, e z uma variável que segue o Movimento Browniano, ele é dado por (WILMOTT, 2006):

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \alpha(x, t) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} \beta^2(x, t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] dt + \beta(x, t) \frac{\partial F}{\partial x} dz$$

A demonstração formal de tal Lema pode ser encontrado em Øksendal (1985), porém uma demonstração não formal, mas intuitiva pode ser feita aplicando a Série de Taylor até segunda ordem em x de $F(x)$:

$$dF \approx \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (dx)^2$$

Sendo que

$$(dx)^2 = (\alpha(x, t)dt + \beta(x, t)dz)^2 = \alpha^2(x, t) (dt)^2 + \beta^2(x, t) (dz)^2 + 2\alpha(x, t)\beta(x, t) dt dz$$

Como estamos considerando que dt é um intervalo de tempo muito pequeno, podemos desprezar qualquer potência acima de 1. Desta forma a equação anterior resume-se a $(dx)^2 = \beta^2(x, t)(dz)^2$. Como já vimos anteriormente, $(dz)^2 = dt$. E portanto, substituindo dx e $(dx)^2$:

$$dF \approx \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} (\alpha(x, t) dt + \beta(x, t) dz) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \beta^2(x, t) dt$$

Rearranjando os termos:

$$dF \approx \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \alpha(x, t) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} \beta^2(x, t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] dt + \beta(x, t) \frac{\partial F}{\partial x} dz$$

3.4 Black-Scholes

Para deduzir a fórmula de Black-Scholes, iremos considerar o caso de um ativo S que não paga dividendos. Iremos considerar que o ativo segue um Movimento Browniano Geométrico:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX \quad (3.2)$$

Onde μ é a taxa de crescimento do ativo, regido pela variação de tempo dt de forma determinística, σ é a variância do ativo regido pela variável aleatória dX que possui distribuição normal com média zero e variância dt . Para essa primeira análise iremos considerar μ e σ constantes durante toda a vida da opção.

Iremos definir $V(S, t)$ como o valor da opção com ativo base S , no tempo t e valor de exercício K . Onde $0 \leq t \leq T$, sendo T a data de exercício da opção.

Utilizando o Lema de Ito para o processo estocástico V , temos:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dX \quad (3.3)$$

Nosso objetivo é eliminar a fonte de incerteza da equação (3.3), para tal iremos criar um portfólio Π que será constituído de uma opção $V(S, t)$ e seu ativo objeto S , em alguma proporção Δ .

$$\Pi = V - \Delta S$$

Logo,

$$d\Pi = dV - \Delta dS \quad (3.4)$$

Portanto, substituindo (3.2) e (3.3) na equação (3.4):

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dX - \Delta \mu S dt - \Delta \sigma S dX$$

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \Delta \mu S \right) dt + \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dX$$

Para que a fonte de incerteza seja zerada na equação (3.3), devemos ter o termo envolvendo dX zerado, e portanto $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$.

Uma vez que estabelecemos que o portfólio Π é livre de riscos, temos que a sua evolução no tempo deve depender da taxa livre de risco r :

$$d\Pi = dV - \Delta dS = r\Pi dt \quad (3.5)$$

Substituindo (3.5) em (3.4), e usando $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$:

$$r\Pi dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \mu S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt$$

$$r \left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) = \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \mu S \frac{\partial V}{\partial S}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \mu S \frac{\partial V}{\partial S} - rV + rS \frac{\partial V}{\partial S} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (3.6)$$

Esta equação é uma EDP unidimensional de segunda ordem, que para possuir solução única e bem comportada necessita da condição final (o payoff da opção) e duas condições de contorno. Para uma call simples, temos:

Condição Final:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Condições de contorno:

$$V(S, t) \rightarrow 0 \text{ quando } S \rightarrow 0$$

$$V(S, t) \sim S - Ke^{-r(T-t)} \text{ quando } S \rightarrow \infty$$

A equação de Black-Scholes (3.6) pode ser resolvida em uma equação fechada quando os parâmetros σ e r são constantes para todo $0 \leq t \leq T$ (BLACK; SCHOLES, 1973).

Para uma Call a solução é:

$$C(S, t) = N(d_1)S - N(d_2)Ke^{-r(T-t)} \quad (3.7)$$

E a solução da Put é:

$$P(S, t) = -N(-d_1)S + N(-d_2)Ke^{-r(T-t)} \quad (3.8)$$

Onde:

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \right];$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \right] = d_1 - \sigma\sqrt{T-t};$$

$N(\bullet)$ é a função de distribuição acumulada da distribuição normal padrão.

3.5 Modelo de Volatilidade Estocástica

As equações (3.7) e (3.8) possuem solução fechada quando se assume (entre outras coisas) que a volatilidade é constante durante toda a vida da opção, tal pressuposto não é observado na prática, como já foi discutido no seção 1.3.

Logo, formas numéricas de solução via Monte Carlo foram desenvolvidas, considerando-se uma volatilidade variável. Uma das principais dificuldades com essa técnica é a obtenção de uma função que descreve a trajetória da volatilidade no tempo.

Conforme proposto por Oztukel e Wilmott (OZTUKEL; WILMOTT, 1998), iremos assumir que o processo estocástico para a volatilidade é dado por:

$$d\sigma = \alpha(\sigma) dt + \beta(\sigma) dX \quad (3.9)$$

Onde $\alpha(\sigma)$ é a taxa de crescimento e $\beta(\sigma)$ a volatilidade da volatilidade, ambas funções da volatilidade. Tal modelagem assume que seus termos são independentes do tempo, simplificação esta que torna a modelagem mais fácil e evita grandes erros na modelagem.

O próximo passo é a estimação das funções $\alpha(\sigma)$ e $\beta(\sigma)$.

$\beta(\sigma)$ será modelado seguindo a seguinte função:

$$\beta(\sigma) = \phi\sigma^\gamma \quad (3.10)$$

Sendo ϕ e γ constantes a serem determinadas.

De (3.9) e (3.10) e usando as relações do seção 3.2, temos que:

$$(d\sigma)^2 = \phi^2\sigma^{2\gamma} dt \epsilon^2 \quad (3.11)$$

Sendo ϵ uma variável aleatória Normal padronizada.

Tirando a esperança e depois o logaritmo natural de (3.11), temos:

$$\ln(E[(d\sigma)^2]) = \ln(\phi^2 dt) + 2\gamma \ln(\sigma) \quad (3.12)$$

Logo, se a assunção (3.10) for verdadeira, e considerando $d\sigma \simeq \Delta\sigma$ e $dt \simeq \Delta t$, esperamos que um gráfico de $\ln(E[(d\sigma)^2])$ versus $\ln(\sigma)$ seja uma linha reta com coeficiente angular 2γ e coeficiente linear de $\ln(\phi^2 dt)$.

O mesmo procedimento não pode ser utilizado para a obtenção de $\alpha(\sigma)$, pois o mesmo só se torna aparente em grandes escalas de tempo. A fim de respeitar as propriedades de comportamento em grande escalas de tempo, Oztukel e Wilmott (OZTUKEL; WILMOTT, 1998) assumem que existe uma distribuição estacionária P_∞ , que pode ser determinada pela equação de Fokker-Planck.

Através desta assunção, Oztukel e Wilmott (OZTUKEL; WILMOTT, 1998) mostram que:

$$\alpha(\sigma) = \frac{1}{2P_\infty} \frac{d(\beta(\sigma)^2 P_\infty)}{d\sigma} \quad (3.13)$$

Neste trabalho, P_∞ será modelado como uma distribuição log-normal (se tal assunção se mostrar infeliz, o próprio ajuste da mesma nos dados do Ibovespa mostrará que a metodologia não pode ser utilizada no mercado financeiro), que segue a seguinte distribuição genérica:

$$P_\infty \sim \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln\frac{\sigma}{\bar{\sigma}})^2}{2a^2}} \quad (3.14)$$

Onde $\bar{\sigma}$ é a média da distribuição e a é dispersão em relação à média. De (3.13) e (3.14), temos:

$$a(\sigma) = \phi^2 \sigma^{2\gamma-1} \left(\gamma - \frac{1}{2} - \frac{\ln\frac{\sigma}{\bar{\sigma}}}{2a^2} \right) \quad (3.15)$$

4 Resultados

4.1 Análise empírica da volatilidade

Na sessão anterior, foram apresentadas as equações que definem as variáveis ϕ , γ , $\bar{\sigma}$ e a . O objetivo desta seção é obter os seus valores, quando ajustadas ao σ do Ibovespa histórico.

ϕ , γ são obtidas através da equação (3.12):

$$\ln(E[(d\sigma)^2]) = \ln(\phi^2 dt) + 2\gamma \ln(\sigma)$$

Sendo $dt = \frac{1}{252}$, ou seja, dt representa um dia útil.

σ foi calculado através do desvio padrão dos retornos históricos diários do Ibovespa citados na seção 1.3, em uma janela de 50 dias.

Para o cálculo empírico da esperança E , σ foi ordenado em ordem crescente e dividido em b divisões do mesmo tamanho, de tal modo que:

$$b_i = \sigma_{min} + i \left(\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{b} \right) \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, b$$

A ideia foi calcular $E[(d\sigma)^2]$ calculando-se a média de cada $(d\sigma)^2$ que cai em cada uma das b divisões de σ , usando-se a aproximação $d\sigma \simeq \Delta\sigma$:

$$E[(d\sigma)^2]_i \simeq E[(\Delta\sigma)^2]_i \simeq \frac{1}{n} \sum_{\sigma_i \leq \sigma < \sigma_{i+1}} (\Delta\sigma)^2$$

Para os dados do Ibovespa, foi utilizado $b = 21$, sendo $\sigma_{min} = 3,92\%$ e $\sigma_{max} = 48,67\%$, ou seja, o σ diário foi dividido em 21 grupos ordenados, e para cada um desses grupos, foi calculado o valor médio dos σ pertencentes ao grupo. O mesmo processo foi feito para $\Delta\sigma^2$, utilizando-se a mesma divisão b .

Logo, para cada um dos grupos ordenados, tem-se o valor médio de σ_i e $\Delta\sigma_i^2$. Com tais dados pôde-se fazer um gráfico de $\ln(\Delta\sigma_i^2)$ por $\ln(\sigma_i)$, lembrando-se que $\ln(\Delta\sigma_i^2)$ representa $\ln(E[(d\sigma)^2])$.

Com a metodologia citada, foi possível fazer a Figura 2 (utilizando os 15 primeiros b), que possui um ajuste linear (através da metodologia de mínimos quadrados) de $y = 1,97x - 7,12$. Com tal ajuste temos:

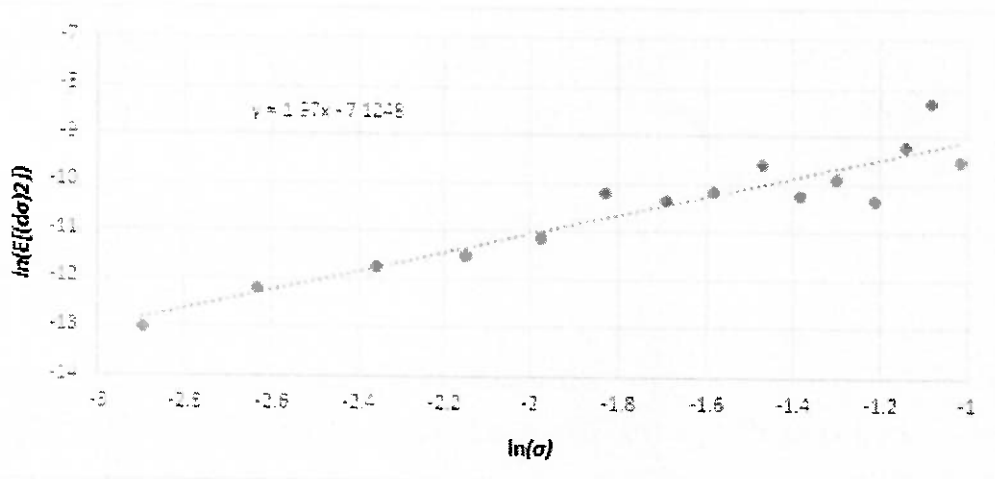
$$\ln(\phi^2 dt) = -7,12 \implies \phi = 0,45$$

$$2\gamma = 1,97 \implies \gamma = 0,99$$

Logo, segundo (3.10)

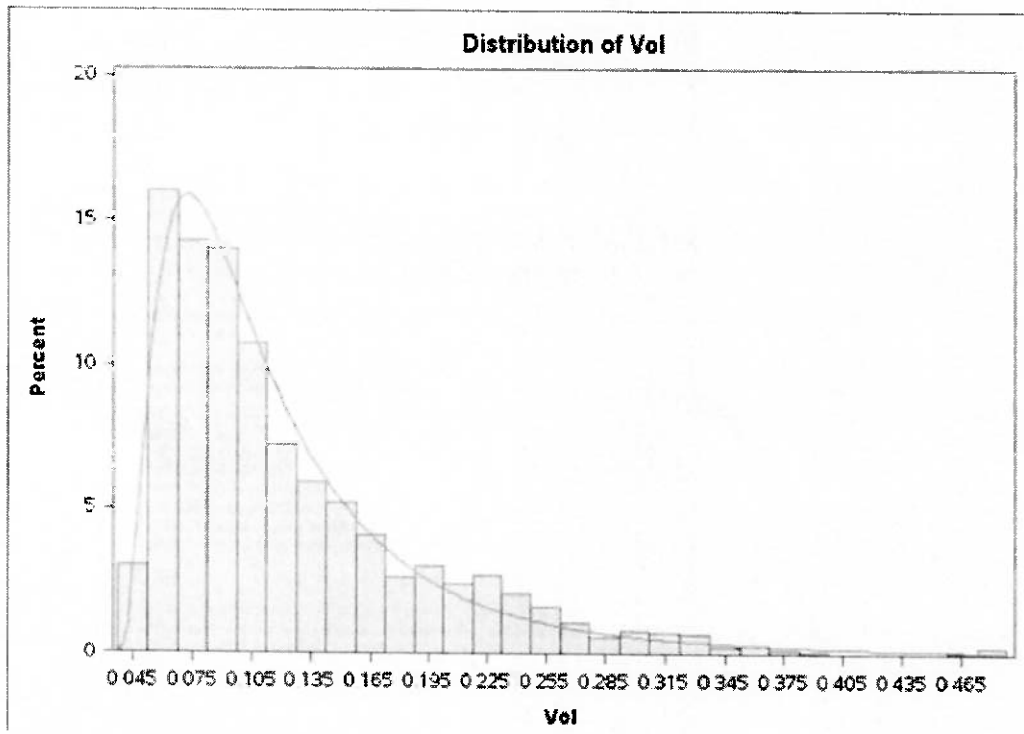
$$\beta(\sigma) = 0,45\sigma^{0,99}$$

Figura 2 – Ajuste para obtenção de $\beta(\sigma)$



Para a obtenção de $\bar{\sigma}$ e a foi feito o histograma da volatilidade, e logo após, foi feito o ajuste da distribuição de probabilidade log-normal (3.14):

$$P_{\infty} \sim \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln \frac{\sigma}{\bar{\sigma}})^2}{2a^2}}$$

Figura 3 – Ajuste para obtenção de $\alpha(\sigma)$ 

Que nos fornece, através dos parâmetros de ajuste, $\bar{\sigma} = 0,12$ e $a = 0,80$. E substituindo em (3.15):

$$a(\sigma) = 0,45^2 \sigma^{2 \times 0,99 - 1} \left(0,99 - \frac{1}{2} - \frac{\ln \frac{\sigma}{0,12}}{2 \times 0,8^2} \right)$$

Com $\alpha(\sigma)$ e $\beta(\sigma)$ temos o modelo estocástico para a volatilidade dado por:

$$d\sigma = 0,2025\sigma^{0,98} \left(0,49 - \frac{\ln \frac{\sigma}{0,12}}{1,28} \right) dt + 0,45\sigma^{0,99} dX \quad (4.1)$$

4.2 Aplicação em opções de Ibovespa

Através das deduções apresentadas anteriormente, temos que o apreçamento de uma opção com volatilidade estocástica pode ser calculado via Monte Carlo (HAUGH, 2004; PRESS et al., 2007) através das equações diferenciais (3.2) e (3.9). A saber:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX_1$$

$$d\sigma = \alpha(\sigma) dt + \beta(\sigma) dX_2$$

Sendo X_1 e X_2 variáveis aleatórias correlacionadas.

A equação (3.2) possui uma discretização exata para a simulação de Monte Carlo (KLOEDEN; PLATEN, 1992), dada por:

$$S_t = S_{t-1} e^{(r - \sigma_t^2/2)dt + \sigma_t \sqrt{dt} X_1}$$

Para a equação (3.9) foi utilizada uma discretização mais simples, Euler de primeira ordem:

$$\sigma_t = \sigma_{t-1} + \left(\phi^2 \sigma_{t-1}^{2\gamma-1} \left(\gamma - \frac{1}{2} - \frac{\ln \frac{\sigma_{t-1}}{\sigma}}{2a^2} \right) \right) dt + \phi \sigma_{t-1}^\gamma \sqrt{dt} X_2$$

Sendo dt o passo do tempo (para esse trabalho $dt = 1/252$)

Assumindo que a volatilidade do índice Ibovespa é uma aproximação razoável para a trajetória da volatilidade de uma dada ação do mercado brasileiro, com representatividade significativa na construção do Ibovespa, temos que uma opção derivada da mesma ação pode ser modelada pela equação abaixo, utilizando-se o resultado de (4.1).

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX_1$$

$$d\sigma = 0,2025 \sigma^{0,98} \left(0,49 - \frac{\ln \frac{\sigma}{0,12}}{1,28} \right) dt + 0,45 \sigma^{0,99} dX_2$$

E portanto, para a simulação de Monte Carlo será usada a seguinte relação recursiva:

$$S_t = S_{t-1} e^{(r - \sigma_t^2/2)dt + \sigma_t \sqrt{dt} X_1}$$

$$\sigma_t = \sigma_{t-1} + \left(0,2025 \sigma_{t-1}^{0,98} \left(0,49 - \frac{\ln \frac{\sigma_{t-1}}{0,12}}{1,28} \right) \right) dt + 0,45 \sigma_{t-1}^{0,99} \sqrt{dt} X_2$$

Para que as variáveis aleatórias σ e S possam ser usadas no modelo de Monte Carlo, é necessário que ambas sejam correlacionadas (pois σ e S são variáveis correlacionadas). Para tal é necessário calcular a correlação ρ das séries históricas, e utilizar esse valor na obtenção dos sorteios. Nos dados analisados foi obtido $\rho = 0,088$ através da cálculo da correlação simples entre os dados diários do valor do índice e de sua volatilidade.

Através do valor de ρ pode-se descobrir qual a relação entre σ e S para que o sorteio seja correlacionado:

$$X_2 = \epsilon_1$$

$$X_1 = \rho X_2 + \sqrt{1 - \rho^2} \epsilon_2$$

Onde ϵ_1 e ϵ_2 são valores aleatórios normais padrão.

4.3 Resultados Obtidos

Com a utilização dos resultados anteriores, foi realizada uma aplicação através do apreçamento de uma opção de compra de call de Vale, com as seguintes especificações:

Tabela 1 – Especificações da opção da Vale

Nome: VALEA13

Vencimento: 19/01/2015

Data atual: 06/01/2015

Duração de tempo anualizado até o vencimento (T): 0.051587302

Valor atual da ação da VALE (S_0) = R\$ 19,29

Strike da opção (K) = R\$ 13,35

Volatilidade anual atual da Vale (σ_0) = 37,28%

Taxa de juros livre de risco (r) = 11,57%

Preço negociado da opção: R\$ 6,00

Na Tabela 2 é apresentado o código em Matlab usado para a simulação.

Tabela 2 – Código do Matlab para simulação da Volatilidade Estocástica

```
% Opções da simulação
```

```
N=10000; T=0.051587302; J=252; dt=T/J;
```

```
% Dados da opção
```

```

% Opções da simulação
S0 =19.29; K=13.35; r=0.1157;

% Dados da volatilidade
sigma_0_anual=0.3728;
phi=0.45; gama=0.99;
sigma_hat=0.12; a=0.80;
correl = 0.088;

% Dados para rodar a simulação
sigma_0=sigma_0_anual/sqrt(12); % a dedução foi feita com vol mensal
randn('state',666); X_vol = randn(J,N);
dW = zeros(J,N); W = zeros(J,N);

% Simulação estocástica da volatilidade
W(1,:) = (sigma_0+(phi^2)*(sigma_0^(2*gama-1))*gama-0.5*log(sigma_0/ ...
    sigma_hat)/2*a^2)*dt+ phi*sigma_0^gama*sqrt(dt)*X_vol(2,:)*sqrt(12);

for n=1:N
    for j = 2:J
        dW(j,n) = ((phi^2)*(W(j-1,n)^(2*gama-1))*(gama-0.5*log(W(j-1,n)/sigma_hat) ...
            /2*a^2)*dt+phi*W(j-1,n)^gama*sqrt(dt)*X_vol(j,n))*sqrt(12); %incremento
        W(j,n) = W(j-1,n) + dW(j,n);
    end
end

% Simulação estocástica da opção
X_option = X_vol.*correl + sqrt(1-correl^2).*randn(J,N);

% Black & Scholes
S1 = S0*cumprod(exp((r-0.5.*W.^2)*dt+W.*sqrt(dt).*X_option));
S_BS = S0*cumprod(exp((r-0.5*sigma_0_anual^2)*dt+sigma_0_anual*sqrt(dt).*X_vol));

```

```
% Opções da simulação
f = exp(-r*T)*max(S1(J,:) - K,0);
f_BS = exp(-r*T)*max(S_BS(J,:) - K,0);

% Cálculo do apreçamento
C = mean(f)
C_BS = mean(f_BS)
```

O código acima primeiramente define os valores dos parâmetros de simulação, da opção, e da modelagem da volatilidade estocástica, nesta ordem. Logo após é realizado o sorteio dos valores aleatórios X_2 , e com isso é possível simular a trajetória que a volatilidade terá durante todo o tempo de exercício da opção. O terceiro passo é análogo ao segundo, mas utilizando a variável aleatória X_1 (que é correlacionada com X_2), porém o objetivo é simular a trajetória do preço da ação objeto (Vale), utilizando-se os valores simulados para a volatilidade em cada período de tempo no passo anterior. Os dois últimos passos têm como finalidade a obtenção do valor da opção para cada uma das trajetórias, e seu valor médio (que será considerado como a resposta da simulação)

O resultado da volatilidade estocástica se encontra na Figura 4. Como pode ser visto, a volatilidade é variável no tempo, fato esse que irá impactar cada simulação (linha) do preço futuro da ação (Figura 7). A volatilidade estocástica simulada possui o histograma representado na Figura 5 e média $\sigma_{est_media} = 37,51\%$, sendo portanto maior que a volatilidade inicial considerada constante no modelo padrão de Black Scholes ($\sigma_0 = 37,28\%$).

Figura 4 – Volatilidade estocástica

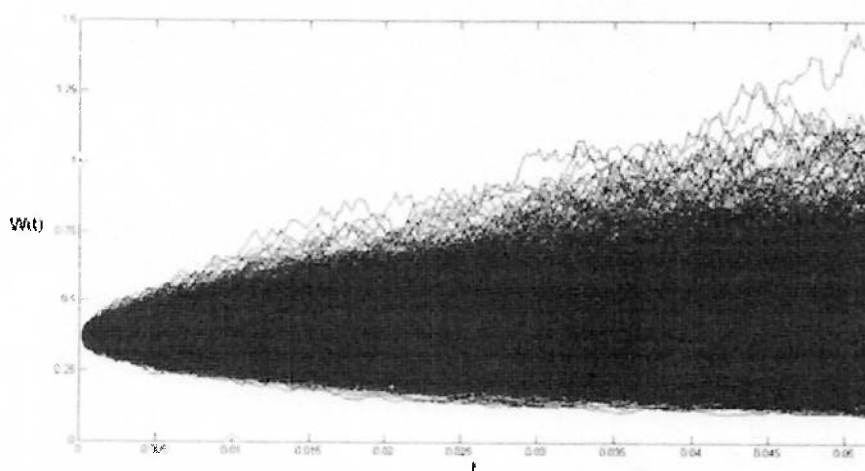
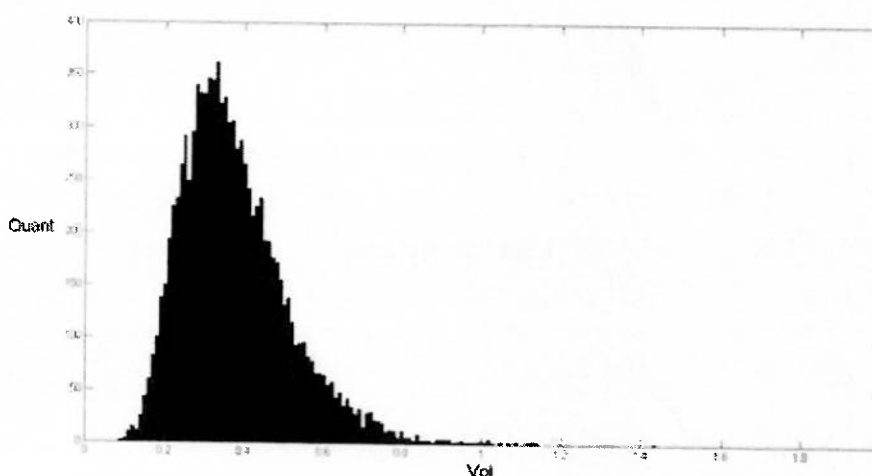


Figura 5 – Histograma da Volatilidade Estocástica



As Figuras 6 e 7 apresentam a simulação para o preço futuro da ação da Vale, é possível perceber que para o caso simulado por Black Scholes com volatilidade estocástica há uma maior variação no preço, gerando um apereçamento de $C_{BS_vol_est} = 6,0837$, sendo que utilizando a simulação padrão, temos $C_{BS_padrao} = 6,0286$.

Como a opção estava sendo negociada no mercado com o preço de R\$ 6,00, temos que o mercado não estava incluindo a variação do valor de σ . Novos testes devem ser realizados visando confirmar este comportamento, que se for constante, apresenta uma oportunidade na operação deste ativo. O autor recomenda um backtest diário durante toda a vida do ativo, para que conclusões mais concretas possam ser tiradas.

Figura 6 – Preço da Vale simulado por Black Scholes Padrão

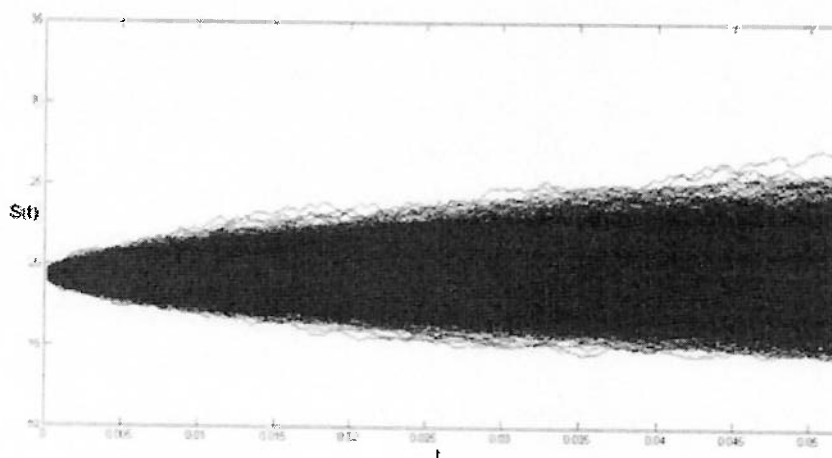
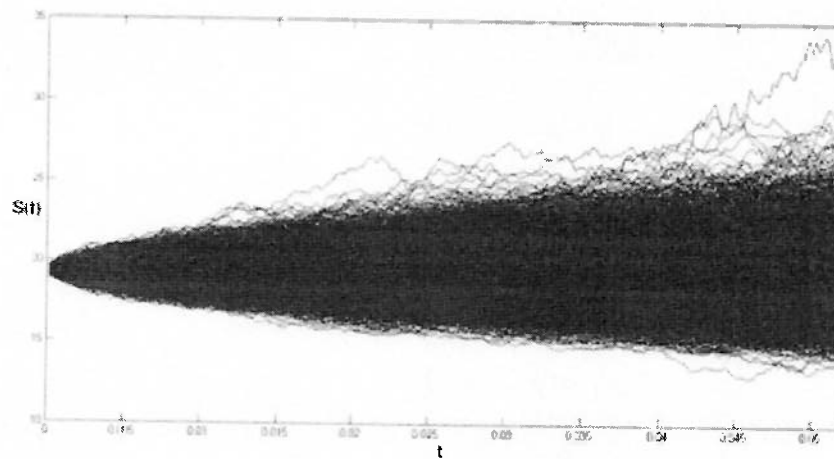


Figura 7 – Preço da Vale simulado por Black Scholes com volatilidade estocástica



5 Conclusão

Através da metodologia adotada por Oztukel e Wilmott (OZTUKEL; WILMOTT, 1998), pôde-se notar que a volatilidade do Ibovespa pode ser aproximada através de uma equação estocástica dada por $d\sigma = \alpha(\sigma) dt + \beta(\sigma) dX$.

Com o ajuste dos dados históricos de 02/01/1968 até 30/01/2015, foi determinado o seguinte ajuste para $\alpha(\sigma)$ e $\beta(\sigma)$.

$$d\sigma = 0,2025\sigma^{0,98} \left(0,49 - \frac{\ln \frac{\sigma}{0,12}}{1,28} \right) dt + 0,45\sigma^{0,99} dX$$

Que possibilita o cálculo via Monte Carlo através das relações

$$S_t = S_{t-1} e^{(r - \sigma_t^2/2)dt + \sigma_t \sqrt{dt} X_1}$$

$$\sigma_t = \sigma_{t-1} + \left(0,2025\sigma^{0,98} \left(0,49 - \frac{\ln \frac{\sigma_{t-1}}{0,12}}{1,28} \right) \right) dt + 0,45\sigma_{t-1}^{0,99} \sqrt{dt} X_2$$

Sendo

$$X_2 = \epsilon_1$$

$$X_1 = 0,088X_2 + \sqrt{1 - 0,088^2} \epsilon_2$$

Foi realizado o apreçamento de uma opção da Vale através do método de Monte Carlo, utilizando-se volatilidade constante e estocástica, para que seja possível comparar as metodologias.

O preço da opção com volatilidade constante deu R\$ 6,0286, e R\$ 6,0837 para o modelo com volatilidade estocástica. Esta opção estava sendo negociada por R\$ 6,00.

O maior preço para a opção com volatilidade estocástica se deve ao fato de a simulação da volatilidade estocástica acarretou em uma maior dispersão da volatilidade com o tempo, tendendo na maioria das vezes para volatilidades maiores do que a volatilidade inicial. Na dinâmica da opção estudada, quanto maior a volatilidade, maior o seu preço.

Pode-se concluir, portanto, que para o exemplo apresentado, a volatilidade sendo considerada como constante subestima o valor da opção.

O presente estudo pode ser aprimorado realizando-se o ajuste da equação diferencial para a volatilidade estocástica do próprio ativo que irá derivar a opção que se deseja precificar, ou seja, realizar a metodologia de Oztukel e Wilmott (1998) para a ação da Vale, em vez do estudo genérico realizado com o Ibovespa.

Referências

- AHMAD, R.; WILMOTT, P. *The Market Price of Interest-rate Risk: Measuring and Modelling Fear and Greed in the Fixed-income Markets*. [S.l.].
- AVELLANEDA, M.; LEVY, A.; PARAS, A. Pricing and hedging derivative securities in markets with uncertain volatilities. *Applied Mathematical Finance*, p. 73 – 88, 1995.
- BASTTER. *A história das opções*. Disponível em: <<http://www.bastter.com/mercado/aprendizado/entendendo-o-mercado/aprenda-a-operar-opcoes/a-historia-das-opcoes.aspx>>.
- BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, v. 81, p. 637 – 654, 1973.
- BODRA, R. A. *Modelo de volatilidade estocastica com saltos aplicado a commodities agricolas*. Dissertação (Mestrado) — FUNDACAO GETULIO VARGAS, 2012.
- BOVESPA. *IBOVESPA*. Disponível em: <<http://www.bmfbovespa.com.br/indices/ResumoIndice.aspx?Indice=lbovespa&Idioma=pt-br>>.
- DIXIT, A. K.; PINDYCK, R. S. *Investment under Uncertainty*. [S.l.]: Princeton University Press, 1994.
- HAUGH, M. *The Monte Carlo Framework and Financial Applications*. 2004. Disponível em: <http://www.columbia.edu/~mh2078/MCS_Framework_FEegs.pdf>.
- KLOEDEN, P. E.; PLATEN, E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. [S.l.]: Springer, 1992.
- ØKSENDAL, B. *Stochastic Differential Equations*. Fifth edition. [S.l.]: Springer-Verlag, 1985.
- OZTUKEL, A.; WILMOTT, P. Uncertain Parameters, an Empirical Stochastic Volatility Model and Confidence Limits. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, v. 1, p. 175 – 189, 1998.
- PRESS et al. *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing*. Third edition. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007.
- SINCLAIR, E. *Volatility Trading*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.
- WILMOTT, P. *Paul Wilmott on Quantitative Finance*. Second edition. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2006.