

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

Marcos Paulo Attanasio Filho

**Polarização hadrônica do vácuo, o experimento
MUonE e o $g - 2$ do múon**

São Carlos, 2025

Marcos Paulo Attanasio Filho

Polarização hadrônica do vácuo, o experimento MUonE e o $g - 2$ do múon

Trabalho de Conclusão de Curso – Monografia apresentada ao curso de Bacharelado em Física (habilitação teórico-experimental) do Instituto de Física de São Carlos (IFSC) da Universidade de São Paulo (USP) como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Diogo Rodrigues Boito
(IFSC/USP)

SÃO CARLOS - SP

2025

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Resumo

A previsão do Modelo Padrão (SM) para o momento magnético anômalo do múon, conhecido por $g_\mu - 2$, depende crucialmente da contribuição da chamada polarização hadrônica do vácuo (HVP). Resultados experimentais recentes, da colaboração *Muon g-2* do Fermilab, publicados em 2023, mostram uma grande discrepância com relação a determinações anteriores de $g_\mu - 2$ do SM obtidas da descrição baseada em dados para a contribuição de HVP. Por outro lado, resultados provenientes tanto de cálculos obtidos via QCD na rede para a HVP quanto de determinações baseadas em dados utilizando os resultados de 2023 do experimento CMD-3 levam a uma determinação consistente com resultados experimentais. Essa tensão entre determinações anteriores baseadas em dados e o valor experimental é justamente o que motiva o interesse nesta contribuição. Assim sendo, o propósito deste Trabalho de Conclusão de Curso é estudar, utilizando ferramentas de teoria quântica de campos, a HVP em ordem dominante com a intenção de estabelecer qual a relação entre tal fenômeno e $g_\mu - 2$, bem como descrever a estratégia do experimento MUonE, recentemente proposto no CERN, cujo objetivo é obter as contribuições da HVP para o $g_\mu - 2$ de uma maneira completamente independente — estudando o espalhamento elétron-múon elástico.

Palavras-chave: QED. Modelo Padrão. $g_\mu - 2$. HVP. Teoria quântica de campos.

1 Introdução

Em 1928, o artigo “*The Quantum Theory of the Electron*” [1] foi publicado por Paul Dirac. Nele, o autor apresenta sua famosa equação, que unifica a Relatividade Restrita com a Mecânica Quântica no esforço de explicar o comportamento quântico de partículas (e antipartículas) fermiônicas. A partir da equação de Dirac, é possível encontrar a expressão do vetor momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ de uma partícula com spin¹:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{ge}{2m} \mathbf{S}, \quad (1)$$

que é responsável por dar o acoplamento da partícula (através de seu spin, \mathbf{S}) com o campo eletromagnético. Inclusive, isso permite a analogia clássica de que essas partículas — fundamentalmente quânticas — são como pequenas espiras com corrente.

É importante perceber que a Eq. (1) contém, na constante de proporcionalidade, o fator g , chamado de fator giromagnético, o qual é de especial relevância no contexto da Física de Partículas. Da equação de Dirac, é possível concluir que, para léptons, $g_\ell = 2$. No entanto, experimentos realizados posteriormente, como os de Kusch e Foley [2], de 1948, obtiveram

$$g_e^{[\text{KF}]} = (2.00232 \pm 0.00010) \quad (2)$$

¹Neste trabalho, vamos usar as *unidades naturais*, isto é, vamos fixar $c = 1$ e $\hbar = 1$.

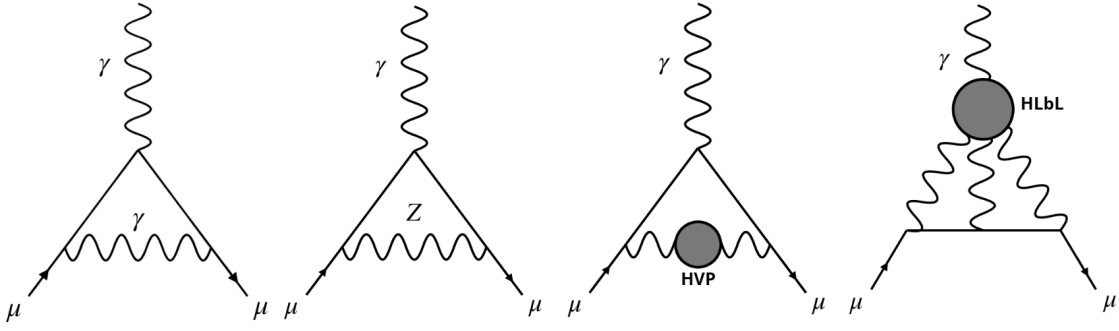


Figura 1: Representação em diagramas de Feynman dos tipos de correções ao $g - 2$ do múon: QED, eletrofracas e hadrônicas (exemplificadas por polarização hadrônica do vácuo e interação fóton-fóton), respectivamente.

Fonte: [4].

para o fator giromagnético do elétron, um valor aproximadamente 0,12% maior do que aquele previsto pela equação de Dirac, o que suscitou um esforço teórico para tentar compreender o que estava faltando. É a partir da noção de que existem correções a g_ℓ que se convencionou escrever $g_\ell = 2(1 + a_\ell)$, em que a_ℓ representa a soma de todas elas, e que, portanto, carrega a informação sobre o desvio entre o valor previsto por Dirac e o verdadeiro valor do momento magnético — é justamente esse desvio que motiva o termo "momento magnético *anômalo*", ou $g_\ell - 2$. Conclui-se então que, do experimento de Kusch e Foley, $a_e^{[\text{KF}]} = (0.00116 \pm 0.00005)$.

Foi também em 1948 que Julian Schwinger, utilizando teoria quântica de campos — mais especificamente a Eletrodinâmica Quântica (QED) —, calculou a primeira correção a g_e , devida à troca de um fóton virtual [3]. O valor encontrado por ele, de $a_e^{[\text{Schw}]} = \alpha/2\pi \approx 0.0011614$, em que α é a constante de estrutura fina, é compatível com os dados experimentais de Kusch e Foley e mostra que a teoria quântica de campos é bem-sucedida em cálculos altamente precisos envolvendo observáveis físicos — o que rendeu, inclusive, o Prêmio Nobel de 1965 para Schwinger, Feynman e Tomonaga por seus trabalhos fundamentais em QED.

A partir de então, desenvolvimentos teóricos e experimentais da Física culminaram na elaboração do chamado Modelo Padrão (SM, do inglês), o qual descreve as interações eletromagnética, fraca e forte em um único arcabouço teórico. O Modelo Padrão dá conta de descrever o comportamento da matéria constituída por partículas fermiônicas fundamentais de spin 1/2 — os quarks e léptons —, que interagem entre si através dos chamados bósons de gauge, responsáveis por mediar as forças fundamentais. O fóton é o intermediador das interações eletromagnéticas (descritas via QED), enquanto o glúon e os bósons Z^0 e W^\pm têm papéis análogos nas interações forte (descritas via QCD) e fraca, respectivamente.

Cada uma dessas interações gera correções ao momento magnético de léptons, o que

nos permite escrever a soma

$$a_\mu = a_\mu^{\text{QED}} + a_\mu^{\text{EW}} + \underbrace{a_\mu^{\text{HVP}} + a_\mu^{\text{HLbL}}}_{a_\mu^{\text{had}}}, \quad (3)$$

onde o índice μ indica que a análise é feita para o múon, escolhido dentre os léptons por ser suficientemente estável e massivo para que a detecção de eventuais contribuições além do Modelo Padrão² seja otimizada. Na Eq. (3), a_μ^{QED} representa as correções de QED, que surgem por conta da emissão e reabsorção de fótons virtuais e que são dominantes em comparação às outras, além de representarem o tipo de contribuição a $g_\mu - 2$ com maior precisão teórica associada; a_μ^{EW} representa as correções eletrofracas, devidas ao acoplamento entre férmions e bósons de gauge (Z^0 e W^\pm) e com o Higgs; e a_μ^{had} representa as correções hadrônicas, que ocorrem por causa da interação forte via loops hadrônicos virtuais. Elas são subdivididas — vide Figura 1 — em dois tipos: polarização hadrônica do vácuo (HVP), em que uma bolha hadrônica é inserida na linha do fóton, e interações fóton-fóton (HLbL), nas quais fótons interagem entre si via loops hadrônicos. As correções hadrônicas, de forma geral, são dominadas pelas contribuições de baixas energias, região em que resultados de QCD têm de ser extraídos através de métodos não-perturbativos, como o *data-driven* (ou guiado por dados) e as simulações computacionais de QCD na rede. Isso faz com que essa classe de contribuições tenha a maior incerteza teórica associada dentre as correções a $g_\mu - 2$.

Aqui, vale comentar que um dos motivos para $g_\mu - 2$ despertar tanto interesse atualmente é por conta da existência de uma tensão entre resultados obtidos através do método guiado por dados, de acordo com o artigo de revisão de 2020 da *g-2 Theory Initiative* [5], e dados experimentais — vide Figura 2. Essa discrepância, que não existe quando se comparam os dados de experimentos com o que se obtém através da QCD na rede e com a versão do resultado guiado por dados com a inclusão das medidas recentes do experimento CMD-3 [6], deve ser muito bem entendida antes que se possa presumir existência de física além do SM. Uma boa maneira de compreender melhor essas tensões é estudar as contribuições hadrônicas, pois, como já citado, é nelas que se originam essas discrepâncias, constituindo a principal fonte de incerteza teórica.

Sendo assim, neste trabalho, focaremos na polarização hadrônica do vácuo, que será analisada em ordem dominante (LO). O objetivo é reproduzir os cálculos, feitos pela primeira vez em 1968 por Brodsky e de Rafael [7, 8], utilizando métodos canônicos em QED, para que se chegue numa expressão matemática que coloque a correção da HVP ao momento magnético do múon em termos de observáveis experimentais bem determinados.

²O momento magnético do múon é, de certa forma, um "laboratório" para a chamada Física além do Modelo Padrão. Isso porque nela os efeitos escalam como m_f^2/m_X^2 , em que f indexa o férmion estudado e X é uma partícula hipotética além do SM. Em quase todas as teorias, $m_X \gg m_f$ e, sendo assim, quanto maior é m_f , mais fácil fica detectar efeitos devidos a uma eventual nova física. Mas é preciso ponderar esse fator com a estabilidade do férmion — por isso, o tau, lépton de maior massa, mas o mais instável, não é analisado.

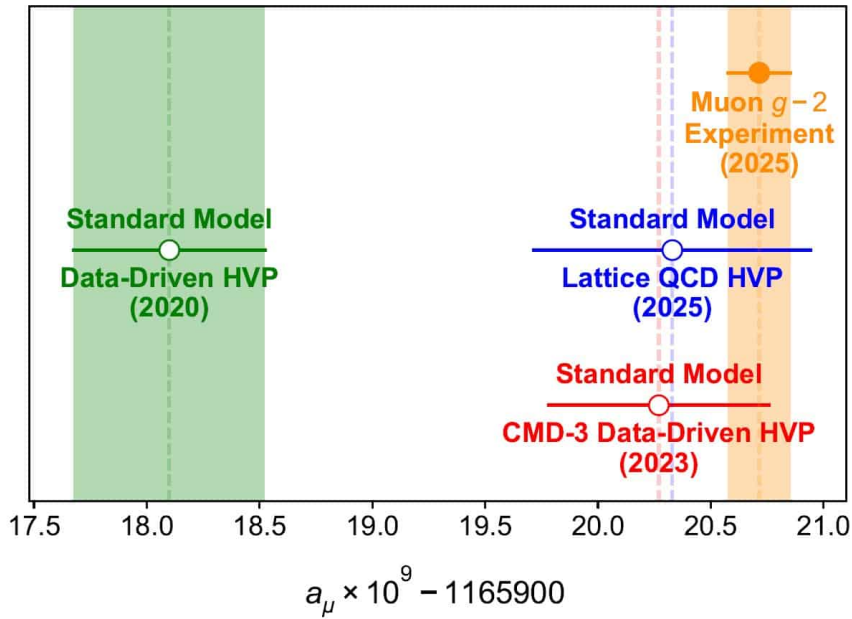


Figura 2: Comparação entre os dados experimentais e os resultados obtidos a partir de diferentes métodos de QCD não-perturbativa para o $g - 2$ do múon.

Fonte: *Physics World* (2025), "Muon $g - 2$ achieves record precision, but theoretical tension remains". Figura de Alex Keshavarzi.

Além disso, pretende-se introduzir alguns aspectos no que diz respeito ao experimento MUonE —atualmente em fase de testes no CERN—, que almeja determinar a contribuição $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ de uma forma totalmente nova e independente: a partir do estudo do espalhamento elétron-múon ($e\mu$) elástico.

2 Princípio de gauge e QED

Para cumprirmos com os objetivos apresentados na Seção 1, será necessário discutir alguns aspectos fundamentais em Eletrodinâmica Quântica, a QED. Por ser uma teoria quântica de campos, ela tem seu formalismo baseado em lagrangianas de campos quantizados (e suas derivadas), a partir das quais se determinam as interações, normalmente impondo princípios de simetria — diferentemente do que se faz em Mecânica Quântica, em que a interação entre partículas é medida em termos de potenciais obtidos externamente à teoria. Já que neste trabalho estamos interessados nas correções quânticas ao momento magnético de um férmion de spin $1/2$, precisaremos construir a lagrangiana que rege o comportamento de tais partículas.

Para tanto, vamos começar introduzindo a lagrangiana do campo fermiônico livre (também chamada de lagrangiana de Dirac),

$$\mathcal{L}_0 = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x), \quad (4)$$

a qual descreve o campo livre de partículas de spin $1/2$. Nela, ψ e $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ são, respectivamente, o spinor e o spinor adjunto de Dirac — no escopo da QED, eles serão quantizados e promovidos a operadores, capazes de criar e destruir estados de partículas.

Aplicando a equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) = 0, \quad (5)$$

na Eq. (4), obtém-se

$$(i\rlap{\not{D}} - m)\psi = 0, \quad (6)$$

que é justamente a equação de Dirac — onde utilizamos a convenção de notação $\rlap{\not{D}} = \partial_\mu \gamma^\mu$ para a contração do operador de derivação covariante, ∂_μ , com as matrizes de Dirac, γ^μ . Nota-se, então, que a lagrangiana dada na Eq. (4) leva à equação que dá a dinâmica de um férmion de spin $1/2$ livre de interações. No entanto, como estamos interessados no momento magnético dessas partículas fermiônicas, precisaremos introduzir na lagrangiana um termo que dê a interação entre elas e o campo eletromagnético quantizado. Faremos isso utilizando o importante princípio da invariância local de gauge, sobre o qual passamos agora a discorrer.

Uma propriedade fundamental da Eletrodinâmica Quântica é que ela possui invariância por transformação de fase $U(1)$ global. Matematicamente, isso significa que a mudança de campos

$$\psi(x) \mapsto \psi'(x) = e^{ie\theta} \psi(x), \quad (7)$$

com θ uma fase real constante, não promove qualquer alteração em \mathcal{L}_0 . O mesmo não ocorre se θ for uma função das coordenadas do espaço-tempo (ou seja, se $\theta = \theta(x)$). Neste caso, a lagrangiana \mathcal{L}'_0 do campo $\psi'(x)$ é

$$i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu(\partial_\mu + ie\partial_\mu\theta(x))\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) \neq \mathcal{L}_0, \quad (8)$$

o que mostra que \mathcal{L}_0 não é invariante pelo tipo de transformação dado na Eq. (7) quando o parâmetro de fase é dependente das coordenadas espaço-temporais.

Há, no entanto, uma maneira de contornar esta situação. Para isso, note que $i\partial_\mu\theta(x)$, no interior dos parênteses da Eq. (8), é o termo que impede a igualdade entre \mathcal{L}_0 e \mathcal{L}'_0 . O que podemos fazer é introduzir na lagrangiana um novo campo, $A_\mu(x)$, de spin 1, o qual se transforma como

$$A_\mu(x) \mapsto A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\theta(x) \quad (9)$$

e que atuará de forma a absorver o termo problemático. A introdução de $A_\mu(x)$ é feita através da definição de uma derivada covariante,

$$D_\mu\psi(x) = (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi(x), \quad (10)$$

simétrica por transformações de $U(1)$ locais, afinal

$$D'_\mu \psi'(x) = [\partial_\mu + ie(A_\mu - \partial_\mu \theta(x))] (\psi(x) e^{ie\theta(x)}) = e^{ie\theta(x)} \underbrace{[\partial_\mu + ieA_\mu]}_{D_\mu} \psi(x), \quad (11)$$

de onde se vê que $D'_\mu \psi'(x)$ e $D_\mu \psi(x)$ diferem apenas por uma fase.

Assim, para obter uma lagrangiana que seja invariante por transformações $U(1)$ locais, fazemos $\partial_\mu \mapsto D_\mu$ na Eq. (4), e isso nos leva a

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu D_\mu \psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) = \mathcal{L}_0 - e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x), \quad (12)$$

em que $\mathcal{L}_{\text{int}} = -e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x)$ define um termo de interação, o que sugere que $A_\mu(x)$, por ser um campo de gauge quantizado de spin 1, deve ser interpretado como o campo do fóton, enquanto que o termo lagrangiano \mathcal{L}_{int} representa a sua interação com o férmion. Para o campo $A_\mu(x)$ ser, de fato, um campo físico, é necessário introduzir na Eq. (12) um termo cinético do tipo

$$\mathcal{L}_{\text{cin}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x), \quad (13)$$

com $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ o tensor eletromagnético (também chamado de tensor de Faraday), que também é invariante por transformações $U(1)$ locais.

Dessa forma, concluímos a construção da lagrangiana da QED, invariante por transformações locais de gauge:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x), \quad (14)$$

a qual, além de descrever as interações entre férmions e fótons em teoria quântica de campos, permite a determinação de correções de QED a $g_\mu - 2$ (e a diversos outros processos). Para tanto, seria necessário definir aqui o operador de evolução temporal dos estados como função da lagrangiana de interação — isso permitiria escrevê-los em termos de uma série iterativa, a chamada série de Dyson —, bem como colocar os campos quantizados em termos de operadores de criação e aniquilação de estados. Após isso, encontrar o objeto fundamental para se determinar as almejadas correções, a amplitude do processo físico, exigiria manipulações envolvendo a atuação desses operadores na série de Dyson, o que pode vir a ser muito trabalhoso.

Felizmente, há um algoritmo que leva aos mesmos resultados, mas sem exigir todo esse trabalho: desenham-se os chamados diagramas de Feynman representando o processo físico de interesse, e aplicam-se neles as regras de Feynman de QED, as quais associam cada elemento do desenho feito a um fator ligado à amplitude do processo. É importante deixar claro que essas regras, deduzidas a partir da Eq. (14), são completamente equivalentes a seguir os passos expostos no parágrafo anterior, mas sua aplicação acelera (e muito)

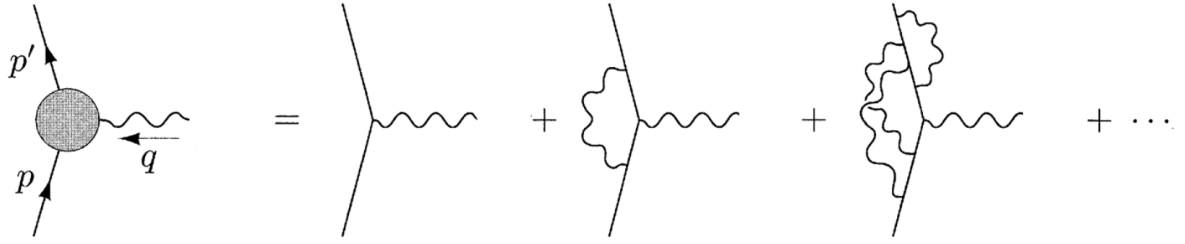


Figura 3: Representação diagramática da série perturbativa das correções de vértice em QED.

Fonte: [10].

os cálculos. Partindo-se da conservação de quadrimomento em cada vértice do diagrama, coloca-se em prática a seguinte sequência de procedimentos [9]:

1. Para as linhas externas, incluir

$$\text{férmion} \begin{cases} \text{inicial : } u(p) \\ \text{final : } \bar{u}(p') \end{cases}, \quad \text{antiférmion} \begin{cases} \text{inicial : } \bar{v}(p) \\ \text{final : } v(p') \end{cases}, \quad \text{fóton} \begin{cases} \text{inicial : } \epsilon_\mu(p) \\ \text{final : } \epsilon_\mu^*(p') \end{cases},$$

com u e v sendo os spinores para partículas e antipartículas, respectivamente, e ϵ_μ representando o vetor de polarização do fóton. Além disso, p e p' são os quadrimomentos de entrada e de saída do diagrama, respectivamente;

2. Para cada vértice, incluir o termo $(-ie\gamma^\mu)$, o vértice fundamental da QED;
3. Para linhas internas de quadrimomento p , incluir

$$\text{férmion} : i \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad \text{fóton} : -i \frac{g_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon},$$

que são os propagadores livres da teoria. O termo $i\epsilon$, com $\epsilon \rightarrow 0$, nos denominadores é a prescrição de Feynman para tratar singularidades;

4. Integrar sobre cada momento de loop interno do diagrama;
5. O resultado final corresponde a $-i\mathcal{M}$, com \mathcal{M} a amplitude do processo físico representado pelo diagrama.

Seguir a ordem dos passos colocados acima é essencial para que o que se obtenha no final seja, de fato, a amplitude desejada. Além disso, vale comentar que a leitura dos diagramas de Feynman deve ser feita de forma a percorrer a linha fermiônica no sentido contrário ao do fluxo da partícula, ou seja, no sentido contrário ao dado pela direção da seta, bem como que o resultado obtido deve ser um invariante de Lorentz.

Por fim, é conveniente introduzir o conceito de fatores de forma. Para tanto, consideremos o diagrama à esquerda da igualdade na Figura 3, onde o círculo sombreado representa a soma do vértice elétron-fóton em ordem mais baixa com todas as correções de vértice.

Utilizando as regras de Feynman anteriormente apresentadas, escreve-se a amplitude $-i\mathcal{M}^\mu$ desse diagrama como

$$-ie\bar{u}(p')\Gamma^\mu(p,p')u(p), \quad (15)$$

em que $-ie\Gamma^\mu(p,p')$ representa a soma de todos os vértices mostrados à direita da igualdade na Figura 3. É possível encontrar qual é a relação entre γ^μ e Γ^μ colocando esse último como a combinação linear

$$\Gamma^\mu = A \cdot \gamma^\mu + B \cdot (p'^\mu + p^\mu) + C \cdot (p'^\mu - p^\mu) \quad (16)$$

e determinando A , B e C . O vetor Γ^μ pode ser colocado na forma da Eq. (16) porque os únicos objetos com índice vetorial μ disponíveis aqui são γ^μ e os quadrimomentos p^μ e p'^μ . Assim, contraindo cada termo da Eq. (16) com q_μ , vê-se que, por conta da identidade de Ward [10],

$$q_\mu \Gamma^\mu = 0, \quad (17)$$

apenas o termo de coeficiente C não se anula, o que nos obriga a impor que $C = 0$. Agora, é possível reescrever o que sobrou da Eq. (16) utilizando a identidade de Gordon,

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \frac{1}{2m}\bar{u}(p')(p^\mu + p'^\mu + i\sigma^{\mu\nu}q_\nu)u(p), \quad (18)$$

que nos permite trocar $(p^\mu + p'^\mu)$ por $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$. Dessa forma, temos que

$$\Gamma^\mu(p,p') = F_1(q^2)\gamma^\mu + F_2(q^2)\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}, \quad (19)$$

onde as funções F_1 e F_2 , a priori desconhecidas, são os chamados fatores de forma.

É possível mostrar que os fatores de forma, em especial $F_2(q^2)$, desempenham papel fundamental na determinação das correções ao momento magnético do múon. A relação entre g_μ e F_2 é dada por [10]

$$g_\mu = 2[1 + F_2(0)], \quad (20)$$

ou seja, podemos fazer a identificação

$$a_\mu \equiv F_2(0). \quad (21)$$

Portanto, a determinação das almejadas correções a $g_\mu - 2$ fica resumida a determinar qual é a expressão de $F_2(q^2)$ para o caso em que $q^2 = 0$. Agora que expusemos as regras de Feynman e a relação matemática entre o momento magnético anômalo e os fatores de forma, podemos proceder propriamente à determinação dessas correções.

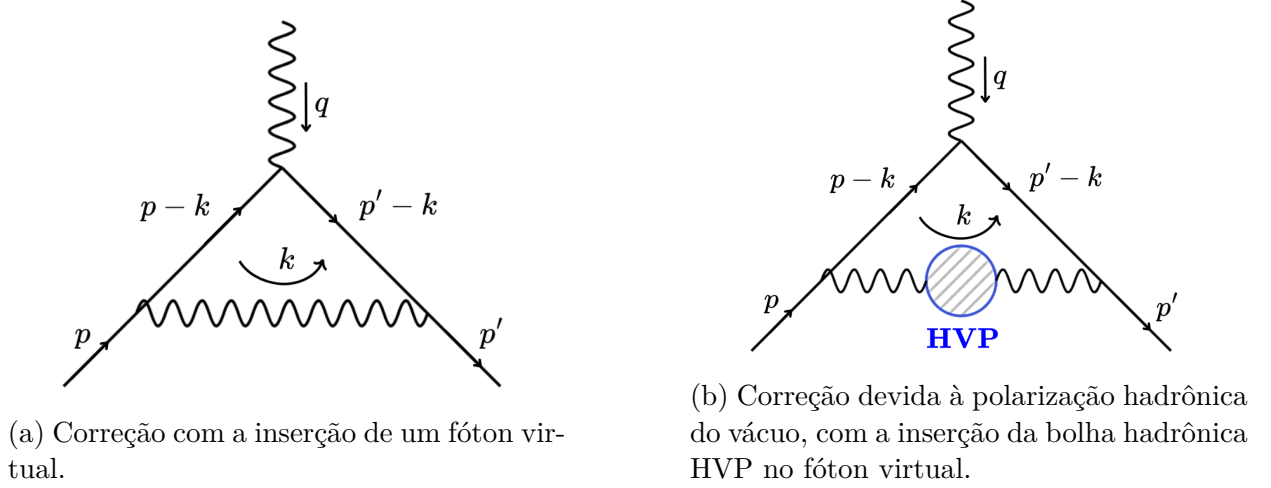


Figura 4: Diagramas de Feynman utilizados no cálculo da contribuição de HVP ao $g - 2$ do múon.

Fonte: Elaborado pelo autor.

3 Contribuição da polarização hadrônica do vácuo ao $g - 2$ do múon

Nesta seção, será deduzida a fórmula seminal, obtida pela primeira vez em 1968 por Brodsky e de Rafael [7, 8], que serve como base para a determinação de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ na abordagem guiada por dados. Nela, associa-se tal observável a um outro, denominado $R(s)$, que é medido com elevada precisão experimental. Isso possibilita estabelecer uma relação entre $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ e uma integral dispersiva sobre os dados de $R(s)$, o que permite fazer previsões usando dados experimentais ao invés de cálculos puramente teóricos, os quais não são factíveis, através de primeiros princípios, na região de baixas energias. Sendo assim, define-se

$$R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hádrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|_{\text{LO}, m_\mu=0}} = \frac{3s}{4\pi\alpha^2} \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hádrons}), \quad (22)$$

onde $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|_{\text{LO}, m_\mu=0}$ representa a seção de choque do processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ em ordem dominante para o caso em que $m_\mu = 0$, e vale $4\pi\alpha^2/3s$, com s representando o quadrado do momento transferido pelo fóton virtual nos diagramas da Figura 4 — ou seja, representa $k^2 > 0$.

Para chegarmos na almejada relação entre $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ e uma integral dispersiva de $R(s)$, o procedimento será o seguinte: primeiro, calcularemos a correção representada no diagrama da Figura 4a, que dá a contribuição de $\mathcal{O}(\alpha)$ em QED devida à troca de um fóton virtual, calculada em 1948 por Schwinger [3]. Na sequência, utilizando tal resultado como base, iremos calcular a contribuição do diagrama dado na Figura 4b, onde uma bolha hadrônica, representando o fenômeno de polarização hadrônica do vácuo, é inserida na linha do fóton, de maneira que seu propagador é corrigido pela HVP.

3.1 Contribuição em ordem dominante da QED ao $g - 2$ do múon

Antes de mais nada, é preciso diferenciar a natureza matemática dos objetos \mathcal{M} e \mathcal{M}^μ : o primeiro representa a amplitude de espalhamento escalar propriamente dita, enquanto que o segundo representa um objeto quadrivetorial a ser contraído, por exemplo, com o vetor de polarização do fóton externo (de quadrimomento indexado por q), ϵ_μ . É importante dizer que o que obteremos dos dois diagramas da Figura 4 será \mathcal{M}^μ .

Por conveniência, introduzimos a relação

$$i\mathcal{M}^\mu = -ie\bar{u}(p')\Gamma^\mu(p, p')u(p), \quad (23)$$

onde $u(p)$ e $\bar{u}(p')$ são os spinores associados respectivamente ao férmion de entrada, com momento p , e de saída, com momento p' — vide Figura 4 —, enquanto que Γ^μ é uma estrutura geral que parametriza toda a informação das correções de vértice ligadas ao diagrama que estamos analisando.

Conforme mencionado mais acima, vamos começar analisando o diagrama que dá a correção a $g_\mu - 2$ devida à troca de um fóton virtual, representada na Figura 4a. Utilizando regras de Feynman, tem-se que

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p, p')u(p) &= \\ &= - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p')(-ie\gamma^\rho)(\not{p}' - \not{k} + m)(-ie\gamma^\mu)(\not{p} - \not{k} + m)(-ig_{\rho\nu})\gamma^\nu u(p)}{(k^2 + i\epsilon)[(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \\ &= -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p')\gamma^\rho(\not{p}' - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p} - \not{k} + m)\gamma_\rho u(p)}{(k^2 + i\epsilon)[(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon]}, \end{aligned} \quad (24)$$

em que m representa a massa do férmion (no caso, o múon). Agora, precisamos solucionar a integral dada na Eq. (24). Para isso, vamos dividir a nossa análise entre o numerador e o denominador de seu integrando.

Aqui, vamos aplicar um truque matemático muito comum em cálculos de integrais de loop, a parametrização de Feynman. Tal truque consiste em reescrever o denominador da Eq. (24) como uma integral — cujas variáveis de integração são os chamados parâmetros de Feynman — do inverso de um polinômio quadrático em k , utilizando para isso [10]

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2 A_3} &= \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \frac{2}{(xA_1 + yA_2 + zA_3)^3} = \\ &= \int_0^1 dx dy \frac{2}{[xA_1 + yA_2 + (1 - x - y)A_3]^3}. \end{aligned} \quad (25)$$

Temos então que

$$\frac{1}{(k^2 + i\epsilon)[(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon]} = \int_0^1 dx dy \frac{2}{D^3}, \quad (26)$$

com

$$D := x(k^2 + i\epsilon) + y((p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon) + (1 - x - y)((p - k)^2 - m^2 + i\epsilon). \quad (27)$$

Precisamos agora manipular um pouco a Eq. (27), considerando que, por construção, $x + y + z = 1$, além de $p^2 = p'^2 = m^2$, que vem do fato de os férmions estarem na camada de massa. Fazendo a manipulação em D ,

$$\begin{aligned} D &= k^2 + yp'^2 - 2yp' \cdot k - ym^2 + (1 - x - y)p^2 - 2(1 - x - y)p \cdot k - zm^2 + i\epsilon \\ &= k^2 - 2k \cdot (y(p' - p) + (1 - x)p) + (1 - x)p^2 + i\epsilon, \end{aligned} \quad (28)$$

definindo a variável $l := k - (y(p' - p) + (1 - x)p)$ como o quadrimomento deslocado (perceba que $d^4k = d^4l$) e lembrando a relação $p + q = p'$, temos a Eq. (28) reescrita como

$$D = l^2 - m^2(1 - x)^2 + y(1 - x - y)q^2 + i\epsilon. \quad (29)$$

Vamos usar que $q^2 = 0$, afinal q é o momento do fóton externo do vértice nos dois diagramas da Figura 4. Fazendo isso, temos

$$D = l^2 - \Delta + i\epsilon, \quad (30)$$

onde $\Delta = m^2(1 - x)^2$. Finalmente, o resultado final de nossa parametrização é obtido levando a Eq. (30) na Eq. (26).

Agora, vamos proceder à manipulação do numerador do integrando da Eq. (24). Para isso, utilizaremos a identidade de Gordon, dada na Eq. (18), e a relação $\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma_\rho = -2\gamma^\mu$, uma identidade da álgebra de Dirac, além dos resultados

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l^\mu}{D^3} = 0, \quad (31)$$

justificado por argumentos de simetria, e

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l^\mu l^\nu}{D^3} = \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{4}g^{\mu\nu}l^2}{D^3}, \quad (32)$$

facilmente demonstrável utilizando que, em quatro dimensões, $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$. Com isso, temos que o numerador é dado por

$$\begin{aligned} \text{Num.} &= -2\bar{u}(p')[-\frac{1}{2}\gamma^\mu l^2 + (-y\not{q} + x\not{p})\gamma^\mu((1 - y)\not{q} + x\not{p}) + \\ &\quad + m^2\gamma^\mu - 2m((1 - 2y)q^\mu + 2xp^\mu)]u(p). \end{aligned} \quad (33)$$

A Eq. (33) pode ser reescrita numa forma que fique mais conveniente para nossos cálculos.

Para tanto, usaremos os resultados da equação de Dirac para os spinors $u(p)$ e $\bar{u}(p')$,

$$\not{p}u(p) = mu(p), \quad \bar{u}(p')\not{p}' = m\bar{u}(p'), \quad \bar{u}(p')\not{q}u(p) = 0, \quad (34)$$

além das identidades de Ward, definida na Eq. (17), e de Gordon, dada na Eq. (18), para termos finalmente o numerador expresso da seguinte forma:

$$-2\bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \left(-\frac{1}{2}l^2 + (1 - 4x + x^2)m^2 \right) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} (2m^2x(1-x)) \right] u(p). \quad (35)$$

Considerando todas as manipulações que fizemos até aqui, podemos reescrever a Eq. (24) como

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu u(p) &= 2ie^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy \frac{2}{(l^2 - \Delta + i\epsilon)^3} \times \\ &\times \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \left(-\frac{1}{2}l^2 + (1 - 4x + x^2)m^2 \right) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} (2m^2x(1-x)) \right] u(p). \end{aligned} \quad (36)$$

Repare que, no interior dos colchetes da Eq. (36), existem termos proporcionais a γ^μ e a $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu/2m$. Como estamos interessados na contribuição que a troca de um fóton virtual gera para o momento magnético anômalo do múon (diagrama da Figura 4a), precisamos do fator de forma $F_2(q^2 = 0)$, que é — conforme discutido na Seção 2 — justamente o termo da Eq. (36) proporcional a $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu/2m$,

$$F_2(q^2 = 0) = 8im^2e^2 \int_0^1 dx dy (1-x)x \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \Delta + i\epsilon)^3}. \quad (37)$$

O resultado da segunda integral na Eq. (37) é bem conhecido e é finito em 4 dimensões. Isto é, para $\epsilon \rightarrow 0$, temos [10]

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \Delta + i\epsilon)^3} \stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{=} \frac{-i}{2(4\pi)^2\Delta}. \quad (38)$$

Colocando o resultado da Eq. (38) na Eq. (37) e já substituindo Δ pela sua definição em termos de parâmetros de Feynman, tem-se, com $e^2 = 4\pi\alpha$, sendo α a constante de estrutura fina,

$$F_2(q^2 = 0) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx dy x = \left[\frac{\alpha}{2\pi} \right]. \quad (39)$$

Portanto, devido à identificação dada na Eq. (21), concluímos que $a_\mu = \alpha/2\pi \approx 0.0011614$ em $\mathcal{O}(\alpha)$ de QED, resultado³ encontrado por Schwinger em 1948 [3].

Agora que expusemos o cálculo da correção ao momento magnético do múon devido à troca de um fóton virtual, podemos partir propriamente à determinação da correção que a

³Repare que o resultado encontrado independe de qualquer propriedade intrínseca ao múon, ou seja, a contribuição é a mesma não importa qual seja o lépton analisado.

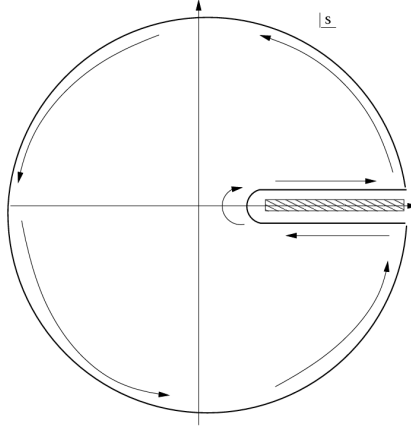


Figura 5: Contorno de integração utilizado para se chegar à Eq. (50). O corte é feito no eixo real do plano de s a partir de $s_{th} = 4m_{\pi^\pm}^2$.
Fonte: [11].

Tendo obtido o resultado da Eq. (44), estamos em condições de escrever a amplitude do diagrama da Figura 4b,

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(p')\delta\Gamma_{\text{HVP}}^\mu(p, p')u(p) &= \\
 &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p')(-ie\gamma^\rho)(\not{p}' - \not{k} + m)(-ie\gamma^\mu)(\not{p} - \not{k} + m)\gamma^\nu u(p)}{((p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon)((p - k)^2 - m^2 + i\epsilon)} \times \\
 &\times \left(\frac{-ig_{\rho\nu}}{(k^2 + i\epsilon)} \Pi_{\text{HVP}}(k^2) \right) \\
 &= ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p')\gamma^\rho(\not{p}' - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p} - \not{k} + m)\gamma_\rho \Pi_{\text{HVP}}(k^2)u(p)}{(k^2 + i\epsilon)((p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon)((p - k)^2 - m^2 + i\epsilon)}, \quad (45)
 \end{aligned}$$

analogamente ao feito na Eq. (24) para o diagrama da Figura 4a.

Neste ponto do cálculo, já é possível construir a associação que levará à introdução de $R(s)$, observável definido na Eq. (22), na amplitude dada na Eq. (45). Para fazer isso, vamos precisar de uma relação de dispersão para Π_{HVP} . Considerando o fato de que essa função é holomórfica sobre todo o plano complexo, a menos de um corte no eixo real, podemos escrever sua representação integral de Cauchy,

$$\Pi_{\text{HVP}}(k^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds \frac{\Pi_{\text{HVP}}(s)}{s - k^2}, \quad (46)$$

e considerar o princípio de reflexão de Schwartz,

$$\Pi_{\text{HVP}}(s^*) = \Pi_{\text{HVP}}^*(s). \quad (47)$$

Podemos, da Eq. (47), dizer que, para pontos logo acima e abaixo do corte, vale a relação

$$\Pi_{\text{HVP}}(s - i\epsilon) = \Pi_{\text{HVP}}^*(s + i\epsilon) = \text{Re} \Pi_{\text{HVP}}(s + i\epsilon) - i\text{Im} \Pi_{\text{HVP}}(s + i\epsilon). \quad (48)$$

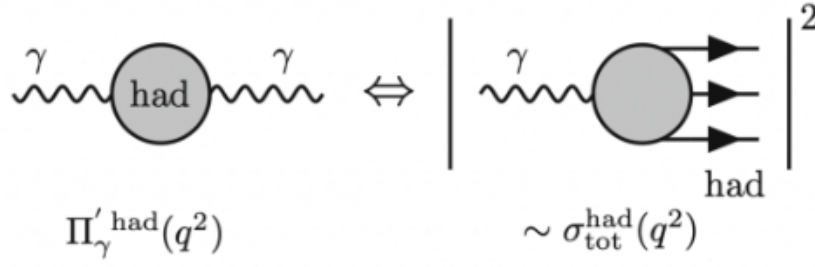


Figura 6: Representação ilustrativa do teorema óptico.
Fonte: [13].

A partir da Eq. (48), conclui-se que a descontinuidade através do corte é

$$\Pi_{\text{HVP}}(s + i\epsilon) - \Pi_{\text{HVP}}(s - i\epsilon) = 2i\text{Im} \Pi_{\text{HVP}}(s + i\epsilon). \quad (49)$$

Podemos então escrever a relação de dispersão como sendo [11, 12]

$$\Pi_{\text{HVP}}(k^2) = \frac{k^2}{\pi} \int_{s_{th}}^{\infty} \frac{ds}{s} \frac{\text{Im} \Pi_{\text{HVP}}(s)}{s - k^2 - i\epsilon}, \quad (50)$$

em que s_{th} é identificado como sendo o limiar cinemático de produção do estado hadrônico de menor energia, dado pelo canal $\pi^+\pi^-$, de maneira que $s_{th} \equiv 4m_{\pi^\pm}^2$. É a partir deste limiar que emana o corte no eixo real do plano s , representado na Figura 5. A introdução dessa relação de dispersão é importante porque existe uma conexão essencial entre $\text{Im} \Pi_{\text{HVP}}$ e $R(s)$.

Além disso, é necessário apresentar uma outra ferramenta, oriunda da teoria quântica de campos: o teorema óptico. Por causa dele, é possível associar a seção de choque do evento $e^+e^- \rightarrow$ hádrons com a função $\text{Im} \Pi_{\text{HVP}}$ através de [13]

$$\text{Im} \Pi_{\text{HVP}}(s) = \frac{s}{4\pi\alpha} \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hádrons}). \quad (51)$$

Juntando as Eqs. (22) e (51), temos

$$\text{Im} \Pi_{\text{HVP}}(s) = \frac{\alpha}{3} R(s), \quad (52)$$

que é justamente a relação desejada. Apresentadas todas essas relações, podemos escrever a Eq. (45) como

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \delta \Gamma_{\text{HVP}}^\mu(p, p') u(p) &= -\frac{ie^2}{\pi} \int_{4m_{\pi^\pm}^2}^{\infty} \frac{ds}{s} \text{Im} \Pi_{\text{HVP}}(s) \times \\ &\times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p') \gamma^\mu (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma^\rho (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\mu u(p)}{(k^2 - s + i\epsilon) ((p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon) ((p - k)^2 - m^2 + i\epsilon)}. \end{aligned} \quad (53)$$

É interessante notar que o denominador da integral em k da Eq. (53) é exatamente o denominador da Eq. (24) no caso em que $k^2 \mapsto (k^2 - s)$, sendo que o que motivou essa diferença foi justamente a introdução da relação de dispersão para Π_{HVP} , dada na Eq. (50).

Vamos agora, à maneira do que foi realizado na Eq. (26), fazer a parametrização de Feynman do denominador da Eq. (53),

$$\frac{1}{(k^2 - s + i\epsilon) [(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon] [(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon]} = \int_0^1 dx dy \frac{2}{D^3}, \quad (54)$$

com

$$D = x(k^2 - s) + y((p' - k)^2 - m^2) + (1 - x - y)((p - k)^2 - m^2) + i\epsilon. \quad (55)$$

Utilizando que $p^2 = p'^2 = m^2$, sendo m a massa do múon, somos capazes de obter

$$D = k^2 - 2k \cdot (y(p' - p) + (1 - x)p) - xs + i\epsilon. \quad (56)$$

Então, com a definição de $l := k - (y(p' - p) + (1 - x)p)$, que representa o quadrimomento k deslocado, conseguimos, a partir de Eq. (56), que

$$D = l^2 - \Delta + i\epsilon, \quad (57)$$

onde $\Delta = xs + m^2(1 - x)^2$ — aqui, já foi feito uso de que $q^2 = 0$, algo que precisa ser feito porque, como antes, buscamos $F_2(q^2 = 0)$.

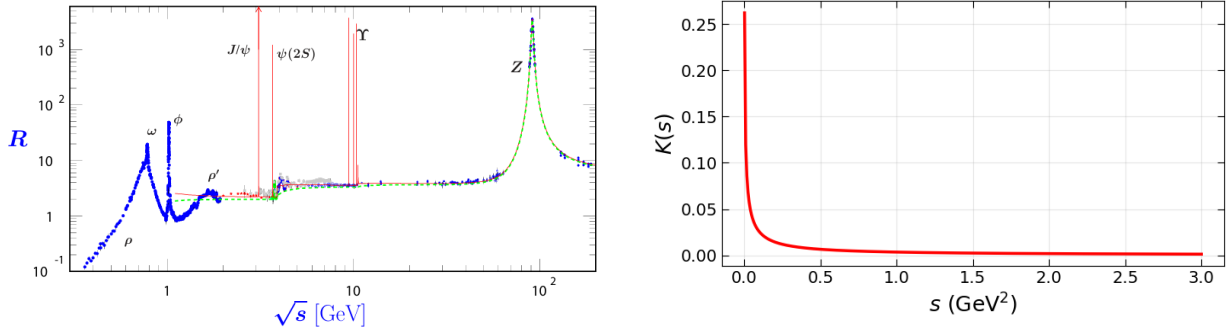
Agora, partimos para analisar o numerador da integral em k da Eq. (53). Como ele é igual ao numerador da Eq. (24), vamos adaptar o resultado dado na Eq. (35) à situação física que estamos considerando aqui. Fazendo isso, e já selecionando o termo proporcional a $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu/2m$, temos que o fator de forma $F_2(q^2 = 0)$ é dado por

$$F_2(q^2 = 0) = \frac{4ie^2}{\pi} \int_{4m_{\pi^\pm}^2}^\infty \frac{ds}{s} \text{Im}\Pi_{\text{HVP}}(s) \int_0^1 dx dy \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{2m^2 x(1 - x)}{(l^2 - \Delta)^3}. \quad (58)$$

Para solucionar a integral em l , faremos uso do resultado dado na Eq. (38). Das integrais em x e em y , resolveremos uma, de modo que, ao final, teremos apenas uma integral em parâmetro de Feynman. Dessa forma, utilizando que $e^2 = 4\pi\alpha$ e já identificando $F_2(q^2 = 0)$ como sendo $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$, conforme a Eq. (21), ficamos com

$$a_\mu^{\text{HVP,LO}} = \frac{\alpha}{\pi^2} \int_{4m_{\pi^\pm}^2}^\infty \frac{ds}{s} \text{Im}\Pi_{\text{HVP}}(s) \int_0^1 dx \frac{m^2 x(1 - x)^2}{xs + (1 - x)^2 m^2}. \quad (59)$$

Utilizando o resultado dado na Eq. (52) — para que consigamos colocar a expressão de a_μ^{HVP} em termos de $R(s)$ —, especificando que m é a massa do múon através do uso do



(a) Dados experimentais (em azul) do observável $R(s)$.
 Fonte: [14].

(b) Gráfico do *kernel* $K(s)$ para valores entre $s = 0$ e $s = 3 \text{ GeV}^2$.
 Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 7: Gráficos importantes para análise de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$.

índice μ e fazendo a substituição $x \mapsto (1-x)$ na integral em x , temos finalmente o resultado

$$a_\mu^{\text{HVP,LO}} = \frac{\alpha^2}{3\pi^2} \int_{4m_{\pi^\pm}^2}^{\infty} \frac{ds}{s} R(s) \underbrace{\int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)}{(1-x)\frac{s}{m_\mu^2} + x^2}}_{K(s)} \Rightarrow a_\mu^{\text{HVP,LO}} = \frac{\alpha^2}{3\pi^2} \int_{4m_{\pi^\pm}^2}^{\infty} \frac{ds}{s} R(s) K(s), \quad (60)$$

com $K(s)$ uma função *kernel* — vide Figura 7b — a partir da qual se constata que a região de baixas energias tem mais peso no contexto desta contribuição hadrônica, o que explica a necessidade da aplicação de QCD não-perturbativa para sua compreensão.

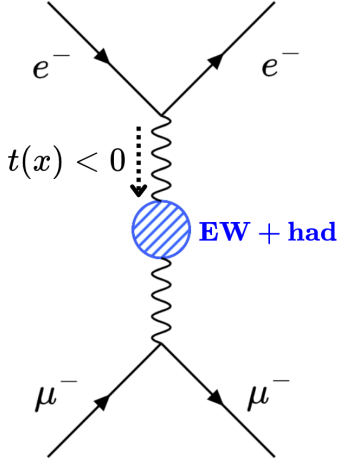
4 O experimento MUonE

Como mencionado no final da Seção 3, o estudo da contribuição da polarização hadrônica do vácuo ao momento magnético do múon exige aplicação de métodos não-perturbativos de QCD, o que faz $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ ter a maior incerteza teórica dentre todas as contribuições a $g_\mu - 2$. Para contornar este problema, o experimento MUonE — atualmente em fase de testes no CERN — almeja obter tal contribuição de forma independente, a partir da análise do espalhamento elétron-múon elástico. Esta seção objetiva expor alguns aspectos importantes no que diz respeito a este experimento.

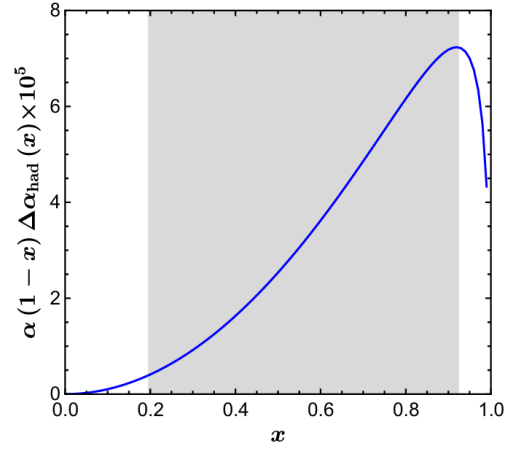
Já que a análise não dependerá mais da seção de choque $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hádrons})$, vamos escrever a Eq. (60) em termos de $\text{Im}\Pi_{\text{HVP}}(s)$, usando para tanto a Eq (52). Teremos então

$$a_\mu^{\text{HVP,LO}} = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx (1-x) \int_{4m_{\pi^\pm}^2}^{\infty} \frac{ds}{s} \frac{\frac{x^2}{(1-x)} m_\mu^2}{\frac{x^2}{(1-x)} m_\mu^2 + s} \frac{\text{Im}\Pi_{\text{HVP}}(s)}{\pi}, \quad (61)$$

onde um rearranjo foi feito para que, com uso da relação de dispersão dada na Eq. (50),



(a) Diagrama de Feynman do espalhamento elétron-múon. O quadrado do momento que flui pela linha do fóton é negativo.
Fonte: Elaborado pelo autor.



(b) Integrando para se obter $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ através da Eq. (63). A área em cinza é a região prevista para que o experimento MUonE cubra.
Fonte: [15].

Figura 8: Figuras importantes para discussão do experimento MUonE.

mas com $k^2 \mapsto t(x) = -x^2 m_\mu^2 / (1-x)$, podemos expressar a Eq. (61) da seguinte maneira:

$$a_\mu^{\text{HVP,LO}} = -\frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx (1-x) \Pi_{\text{HVP}}(t). \quad (62)$$

No domínio euclidiano, ou seja, para $t < 0$, podemos, a partir da Eq. (62), escrever que

$$a_\mu^{\text{HVP,LO}} = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx (1-x) \Delta\alpha_{\text{had}}[t(x)], \quad (63)$$

onde usamos a relação $\Pi_{\text{HVP}}(t) = -\Delta\alpha_{\text{had}}(t)$ [13], sendo $\Delta\alpha_{\text{had}}$ o chamado *running* do acoplamento eletromagnético devido a contribuições hadrônicas.

O objetivo do experimento MUonE é medir a contribuição que HVP-LO dá a $\Delta\alpha_{\text{had}}(t)$ a partir da análise do espalhamento elétron-múon, dado no diagrama da Figura 8a, com incerteza menor do que 1%. Esse grau de precisão é necessário para que os resultados do experimento possam ser capazes de trazer algum esclarecimento no que diz respeito à tensão entre a_μ^{HVP} obtido através do método guiado por dados e os dados de QCD na rede e de experimentos já existentes. Para tanto, medidas precisas dos ângulos de espalhamento do elétron e do múon devem ser feitas para que, a partir delas, possa ser possível construir a forma da seção de choque diferencial do espalhamento $e\mu$. A partir dela, determina-se $\Delta\alpha_{\text{had}}(t)$ através de um ajuste dos dados experimentais seguido da subtração das contribuições eletrofracas (EW na Figura 8a) a $\Delta\alpha(t)$, que são conhecidas com alta precisão.

O experimento planeja fixar a energia do feixe de emissão de múons a 150 GeV, o que limitará superiormente o valor de momento transferido pelo fóton, $t(x)$. Isso faz com que aproximadamente 86% do intervalo de integração da Eq. (63) seja suprido com dados experimentais [15] — vide Figura 8b. Os outros 14% exigirão a aplicação de métodos de

extrapolação, como por exemplo os aproximantes de Padé, explorados na Ref. [15].

5 Conclusão

O objetivo principal deste trabalho foi deduzir a fórmula seminal que dá o comportamento da contribuição da polarização hadrônica do vácuo ao momento magnético anômalo do múon em termos de uma integral dispersiva do observável $R(s)$. Além disso, expusemos alguns detalhes teóricos que fundamentam o experimento MUonE, o qual almeja obter a contribuição $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ de forma independente, medindo o espalhamento $e\mu$ elástico.

Primeiramente, calculamos a correção de QED em $\mathcal{O}(\alpha)$, dada pela troca de um fóton virtual, a $g_\mu - 2$. Para isso, fizemos a aplicação das regras de Feynman ao diagrama da Figura 4a, de onde se obtém uma expressão para \mathcal{M}^μ , dada em termos de uma integral de loop. Através de manipulações que envolveram uso de técnicas e identidades consagradas em teoria quântica de campos — como a parametrização de Feynman e as identidades de Ward e de Gordon —, esse quadrvetor foi colocado em termos de uma combinação linear de γ^μ e de $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu/2m$, para que se extraísse, de acordo com a Eq. (19), a expressão dos fatores de forma $F_1(q^2)$ e $F_2(q^2)$. Este último é de especial importância no contexto desta monografia porque resulta, quando calculado para o fóton em sua camada de massa, no valor de a_μ associado ao diagrama em questão. No caso da troca de um fóton virtual, encontramos $F_2(q^2 = 0) = a_\mu = \alpha/2\pi$, resultado fundamental da Eletrodinâmica Quântica.

Em seguida, com a sequência de procedimentos para obtenção de a_μ já tendo sido apresentada, partimos para a análise da polarização hadrônica do vácuo em ordem dominante. A amplitude do diagrama 4b foi determinada de forma análoga ao feito no caso da troca de um fóton virtual a partir do emprego das regras de Feynman. Na análise deste diagrama, no entanto, surgiu a necessidade de introduzir uma relação de dispersão para a função de polarização Π_{HVP} , visto que queríamos relacioná-la com $R(s)$ — observável experimentalmente conhecido —, a fim de que pudéssemos obter uma fórmula guiada por dados. Com isso, além de termos encontrado a fórmula seminal que dá a determinação de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ na abordagem baseada em dados, determinamos uma importante propriedade da contribuição HVP-LO: sua contribuição tem um peso maior na região de baixas energias, e isso obriga a análise a ser feita com métodos não-perturbativos de QCD.

Por fim, expôs-se um pouco da fundamentação teórica que envolve o experimento MUonE, atualmente em fase de testes no CERN. Vimos que é possível colocar o resultado da Eq. (60) em termos de $\Delta\alpha_{\text{had}}[t(x)]$, o qual é obtido com um ajuste da seção de choque diferencial do espalhamento $e\mu$ elástico. Espera-se que nos próximos anos, os dados obtidos de forma independente pelo experimento MUonE possam melhorar a precisão teórica no que diz respeito às contribuições hadrônicas — a HVP-LO, em particular —, e, portanto, ajudem a esclarecer questões relativas à tensão existente entre o método guiado por dados

e os atuais experimentos e resultados de QCD na rede no contexto do $g_\mu - 2$.

Referências

- [1] P. A. M. Dirac, *The quantum theory of the electron*, *Proceedings of the Royal Society A* **117** (1928) 610.
- [2] P. Kusch and H. M. Foley, *The magnetic moment of the electron*, *Physical Review* **74** (1948) 250.
- [3] J. Schwinger, *On quantum-electrodynamics and the magnetic moment of the electron and the proton*, *Physical Review* **73** (1948) 416.
- [4] R. Aliberti et al., *The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model: an update*, *Phys. Rept.* **1143** (2025) 1 [2505.21476].
- [5] T. Aoyama et al., *The anomalous magnetic moment of the muon in the standard model*, *Phys. Rep.* **887** (2020) 1.
- [6] F. Ignatov and others (CMD-3 Collaboration), *Measurement of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ cross section from threshold to 1.2 gev with the cmd-3 detector*, *Phys. Rev. D* **109** (2024) 112002.
- [7] S. J. Brodsky and E. de Rafael, *Suggested boson-lepton pair couplings and the anomalous magnetic moment of the muon*, *Phys. Rev.* **168** (1968) 1620.
- [8] B. E. Lautrup and E. de Rafael, *Calculation of the sixth-order contribution from the fourth-order vacuum polarization to the difference of the anomalous magnetic moments of muon and electron*, *Phys. Rev.* **174** (1968) 1835.
- [9] D. J. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*. Wiley-VCH, 2nd ed., 2008.
- [10] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. CRC Press, Taylor & Francis Group, 1995.
- [11] D. Boito, *$K\pi$ vector form factor, dispersive constraints and $\tau \rightarrow \nu_\tau K\pi$ decays*, Master's thesis, Universitat Autònoma de Barcelona, IFAE - Institut de Física d'Altes Energies, July, 2008.
- [12] B. Kubis, *Dispersion relations: foundations*, *arXiv preprint* (2025) [2510.01962].
- [13] E. Spedicato, *Event reconstruction and analysis in the MUonE experiment*, Ph.D. thesis, Università di Bologna, 2025.
- [14] PARTICLE DATA GROUP collaboration, *Review of Particle Physics (RPP)*, *Phys. Rev. D* **86** (2012) 010001.
- [15] D. Boito, C. Y. London, P. Masjuan and C. Rojas, *Model-independent extrapolation of MUonE data with Padé and D-Log approximants*, *Phys. Rev. D* **110** (2024) 074012 [2405.13638].