

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

TRABALHO DE FORMATURA

**MODELOS PARA ESTIMATIVA DO RISCO DE MERCADO
EM CARTEIRAS DE DERIVATIVOS**

OSCAR INOUE

ORIENTADORA: PROF^A. CELMA DE OLIVEIRA RIBEIRO

1998

HF 1998
Int 7m

Aos meus pais

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer à professora Celma de Oliveira Ribeiro pela excelente orientação dada e pelo nível de atenção dispensado que realmente me impressionou e ao *risk manager* Heitor Katsuda – que me introduziu ao tema da gestão de riscos – pela atenção dada, pela ajuda na elucidação de vários problemas relacionados à execução desse trabalho e por ter confiado no meu potencial.

Ao professor Alexandre Kawano, pela orientação dada durante meu período como bolsista de iniciação científica, cujos conceitos ajudaram-me muito na elaboração deste trabalho.

Também agradeço à analista e matemática Flávia Carpinetti Pinto pela ajuda na resolução de muitos problemas conceituais matemáticos.

Finalmente, agradeço a toda a turma da produção de 1998: foi uma grande alegria ter podido estudar em uma turma tão LEGAL como a nossa!

Sumário

Este trabalho de formatura, realizado junto à área de Gestão de Riscos de um Banco de Investimento de São Paulo, tem como objetivo estudar formas para medir o risco envolvido nas operações financeiras do seu departamento de Tesouraria através do conceito do *valor em risco* (VaR). Para isso, estaremos neste Trabalho de Formatura, apresentando e analisando metodologias estatísticas através das quais o VaR pode ser calculado. Uma delas é a utilizada atualmente no Banco e as outras duas foram pesquisadas na bibliografia especializada. Cada um dos modelos apresenta uma série de vantagens e desvantagens as quais discutiremos ao longo do trabalho com a ajuda dos testes empíricos que realizaremos mais ao final do trabalho.

Índice

1. Trabalho de Formatura.....	1
1.1 Introdução.....	1
1.2 Motivação.....	2
1.3 Risco: uma constante.....	4
1.4 Aplicações do VaR.....	5
1.5 Objetivos e Estrutura do Trabalho	6
2. Conceitos Básicos de Mercado.....	9
2.1 Carteira (ou portfolio).....	9
2.2 Alguns produtos de investimento do mercado financeiro.....	9
3. Conceitos para o cálculo de VaR	20
3.1 O conceito do VaR.....	20
3.2 Valor de Mercado da Carteira.....	22
3.3 Retornos Diários	26
3.4 Volatilidade.....	27
3.5 Correlações entre os retornos.....	32
3.6 Sensibilidade do valor de mercado com relação aos fatores de mercado	34
4. Cálculo do VaR: O modelo analítico paramétrico.....	36
4.1 Estimativa do VaR	41
4.2 Cálculo do VaR global da carteira.....	41
4.3 Exemplo Numérico: VaR pelo modelo analítico paramétrico	44
5. Cálculo do VaR: Simulação de Monte Carlo	48
5.1 Os efeitos da não linearidade dos contratos	49

5.2 Simulação de Monte Carlo.....	52
5.3 Exemplo numérico	60
6. Cálculo do VaR: Modelo de Valores Extremos.....	66
6.1 Introdução	66
6.2 Aplicação da Teoria dos Valores Extremos ao VaR.....	70
6.3 Estimação da distribuição de probabilidade condicional das caudas.....	72
6.4 Exemplo numérico	76
7. Análise e comparação dos modelos apresentados	82
7.1 Cálculo retroativo do VaR e do Resultado da carteira.....	84
8. Conclusão.....	93
9. Referência Bibliográfica.....	95
I. Anexo – Explicações de alguns conceitos utilizados.....	97
I.1 Considerações sobre formas de apropriação de taxas de juros	97
I.2 Retornos logarítmicos.....	98
I.3 Agregação do tempo na estimativa do VaR.....	100
I.4 Interpolação linear de uma função bidimensional	101
I.5 Modelo estatístico para extremos	102
I.6 Método de decomposição por Cholesky.....	105

1

Trabalho de Formatura

1.1 Introdução

Desde que o homem começou a atuar como negociante, investidores e especuladores sempre tiveram a mesma intuição de que existe uma relação oposta entre o risco do investimento e seu potencial de ganho, e dividiam uma mesma preocupação em quantificar o risco de perda.

Durante um longo período, os profissionais apenas tentavam adivinhar os riscos. Afinal, prever com certeza aquilo que vai acontecer no futuro é simplesmente impossível!

Somente quando profissionais envolvidos com o mercado financeiro começaram a aplicar metodologias até então utilizadas cientificamente, como a previsão do futuro utilizando leis da probabilidade e estatística, é que uma medida de risco de mercado pôde ser satisfatoriamente desenvolvida.

Uma vez que era impossível responder com certeza a pergunta “quanto eu posso perder”, os profissionais do mercado passaram então a procurar uma resposta a uma nova pergunta, semelhante à anterior: “com um certo nível de confiança por mim escolhido, qual é o potencial mais alto de perda que estou exposto?”.

Este trabalho de formatura, realizado junto à área de Gestão de Riscos de um Banco de Investimento de São Paulo, dispõe-se a exatamente responder à questão acima, ou seja, medir riscos. Neste particular caso, o risco que se deseja quantificar é aquele envolvido nas operações financeiras da área de Tesouraria do Banco. Através disso, objetivamos manter tanto a Tesouraria quanto a Diretoria à par do nível de risco que o Banco está exposto, auxiliando-os na manutenção desse nível em patamares adequados aos interesses da instituição.

Apesar da prévia existência de um sistema de risco no Banco, desde a sua implementação, a gestão de riscos vêm sendo objeto de estudo em um número enorme

de publicações, aumentando com isso, a divulgação novas técnicas para a sua avaliação. Ao mesmo tempo, os avanços tecnológicos na área de computação possibilitaram que muitos modelos, antes considerados inviáveis por dispensarem uma grande quantidade de tempo para o seu processamento, tornassem-se de implementação possível.

Assim, com o objetivo de mensurar os riscos de forma mais precisa, nasceu o tema desse trabalho: analisar e comparar empiricamente a técnica atual utilizada para o cálculo do risco com outras que foram pesquisadas na literatura especializada.

A partir disso, buscaremos encontrar recomendações quanto a implementações ou aperfeiçoamentos que podem ser feitos com relação ao sistema atual de gerenciamento de risco utilizado no Banco.

1.2 Motivação

Nos últimos anos, a imprensa tem noticiado inúmeros casos de perdas de milhões ou mesmo bilhões de dólares que algumas instituições tiveram que amargar em operações no mercado financeiro. A queda do Barings é um exemplo clássico. Devido a operações altamente alavancadas e mal administradas nos mercados de derivativos no Sudeste Asiático, o mais antigo banco da Grã Bretanha acabou sendo vendido ao grupo ING pela bagatela de uma libra esterlina (aproximadamente 1,50 dólares).

Perdas desse tipo não são exclusividade de instituições financeiras. O Metallgesellschaft, o 14º maior conglomerado industrial alemão que empregava 58.000 trabalhadores, quase chegou a falência devido a perdas de cerca de 1,3 bilhões de dólares em sua subsidiária norte-americana, a MG Refining & Marketing (MGRM), em contratos nos mercados futuros de óleo combustível.

Essas e muito de outras gigantescas perdas observadas, como as do Daiwa Bank, Bank Negara, Bank of Spain e do Savings and Loans têm como uma de suas causas principais a má administração dos riscos assumido em suas das posições nos mercados financeiros.

Um agravamento adicional, ou mesmo uma razão do aumento do número de perdas é ao aumento da instabilidade (ou utilizando um termo comum no mercado financeiro, da volatilidade) dos mercados. Em virtude das mudanças políticas que guiaram as maiores nações do mundo a partir da década de 70, quando os Estados passaram a intervir menos nas economias, ocorreu a diminuição da regulamentação nos

mercados financeiros mundiais e consequentemente, houve uma volatilidade dos mercados financeiros aumentasse. Como exemplo podemos citar o fim do acordo de Bretton Woods, que estabelecia a paridade entre as moedas fixas, levando-as a variar livremente a partir de 1971 e acarretando em um aumento da volatilidade das taxas de câmbio.

Além disso, o processo de globalização fez que as empresas ficassem expostas a uma variedade muito maior de fontes de riscos financeiros. Isso tudo, aliado ao surgimento de instrumentos cada vez mais sofisticados nos mercados como os derivativos, os quais permitiam as instituições alavancar suas posições a níveis elevadíssimos, fez com que a necessidade da gestão de risco se tornasse essencial para a sobrevivência das empresas expostas nos mercados financeiros.

Em virtude da necessidade de gerir melhor os riscos, grande parte das instituições vêm aderindo ao VaR (valor em risco, ou do inglês, *value at risk*), uma metodologia para a estimativa e controle dos riscos de mercado¹.

O VaR pode ser entendido como uma metodologia para a avaliação do risco através da utilização de técnicas estatísticas usualmente utilizadas em áreas técnicas e científicas. JORION (1997) estabelece uma definição mais formal: “o VaR mede a pior expectativa de perda durante um certo período de tempo, sob condições normais de mercado e com um dado nível de confiança”.

Deste modo, se o VaR estima que o risco diário da empresa é de 1 milhão de dólares utilizando um intervalo de confiança de 99%, isso significa que existe a chance de 1 em 100 de que haja uma perda superior a 1 milhão de dólares, nas próximas 24 horas, em condições normais de mercado.

A grande vantagem da estimativa do risco através do VaR, é que ele, baseado em fundamentos científicos, sintetiza todo o risco da instituição em um único número. Além disso, essa medida é feita na unidade base das instituições, ou seja, o monetário. Isso torna a compreensão do nível de risco da empresa muito mais fácil para seus diretores e acionistas.

¹ O conceito de risco de mercado será abordado ainda neste capítulo.

1.3 Risco: uma constante

Nos negócios, todas empresas têm que administrar seus riscos. Seja qual for a natureza do empreendimento, o risco sempre existirá simplesmente porque o futuro não é previsível. Por isso, é importante a especificação dos vários tipos de risco que as empresas estão expostas para possibilitar estruturação de políticas de gestão e ferramentas de controle para cada variante dele.

Segundo JORION (1997) os riscos que as empresas estão expostas podem ser classificados da seguinte forma:

Riscos dos negócios: são aqueles que as empresas se submetem na expectativa de obter vantagens competitivas e aumentar suas lucratividades. A esse nível risco interferem o mercado em que a empresa se situa, tecnologia utilizada, projeto dos produtos e forma em que a empresa é administrada.

Riscos estratégicos: são aqueles devidos aos fundamentos do ambiente econômico e da político. Como exemplos desses tipo de riscos, podemos citar a crise das empresas brasileiras de informática com o fim da Lei de Informática que as protegia da concorrência externa, ou a queda da demanda das indústrias bélicas devido ao fim da Guerra Fria.

Riscos Financeiros: são aqueles devido às perdas no mercado financeiro. A grande maioria das empresas estão expostas a perdas advindas das variações de taxas de mercado como taxa de juros e taxas de câmbio. As instituições não financeiras buscam minimizar esses tipos de riscos de modo a se concentrar na modalidade que melhor administram: os riscos de negócios. As instituições financeiras, por sua vez, têm como a administração dos riscos financeiros como a essência de seus negócios, e por isso, estão buscando cada vez mais controlar e medir melhor as fontes desses tipos de riscos.

Através do VaR, buscamos estimar um aspecto do risco financeiro que é o risco de mercado. Genericamente, o risco financeiro pode ser dividido em cinco categorias, conforme MORGAN (1994):

- *Risco de Crédito:* aquele devido à incapacidade do devedor saldar sua dívida;
- *Risco de Liquidez:* aquele devido à incapacidade de vender ativos com pouca liquidez no mercado;
- *Risco Operacional:* aquele devido à execução de um erro operacional;
- *Risco Legal:* aquele devido à realização de operações não condizentes com as determinações das entidades reguladoras;

- *Risco de Mercado*: aquele devido à queda do valor de mercado dos ativos e passivos que a instituição possui. O risco de mercado pode ser definido como a incerteza com relação ao resultado oriundo de mudanças das condições do mercado, tais como preço dos ativos, taxas de juros, volatilidade do mercado e liquidez do mercado. Essa incerteza pode ser medida tanto em horizontes de períodos pequenos como o de um dia como em longos períodos de um ano.

1.4 Aplicações do VaR

As utilidades do VaR como ferramenta para a gestão de risco são muitas. A seguir apresentamos algumas delas.

Ferramenta de informação: como o VaR consegue sintetizar os riscos das operações financeiras da instituição em termos financeiros e não técnicos, sua interpretação é muito mais fácil para os membros da diretoria e acionistas.

Controle de alocação de recursos: VaR pode ser utilizado como limitador de posições entre os operadores das mesas das tesourarias das instituições. Além disso, ele pode ser decomposto em outros VaR incrementais, ajudando a instituição a descobrir quais posições estão contribuindo de maior forma para o risco total da empresa.

Estratégia de investimento: A mensuração dos riscos é uma importante ferramenta na decisão da alocação de recursos de capital, pois através das medidas fornecidas pelo VaR, pode-se compor uma carteira de tal forma que as expectativas de retorno sejam maximizadas a um determinado nível de risco.

Análise de performance: o VaR pode ser utilizado para que a performance possa ser analisada não somente em função dos resultados, mas também em função dos riscos assumidos. Isso incentivaria os operadores a levar mais em consideração os riscos de seus negócios, evitando-se assim, a sua tendência natural de assumir grandes riscos.

O VaR vem sendo implementado em um número cada vez maior de empresas. Entre os principais interessados na aplicação dos modelos de estimativa do VaR podemos destacar:

Instituições Financeiras: por lidarem com uma grande variedade de fontes de risco de mercado e possuírem em suas carteiras instrumentos sofisticados dos mercados financeiros, os bancos estão na vanguarda na pesquisa e implementação de sistemas de

risco com o objetivo entender melhor as suas fontes de exposição. Assim, elas podem planejar e se preparar de forma racional e consciente, para os possíveis movimentos adversos dos mercados. Consequentemente, eles podem oferecer melhores preços para administrar os riscos financeiros e ao mesmo tempo, dar maior segurança aos seus clientes, credores e acionistas.

Organismos reguladores: Preocupados com casos passados de grandes perdas no mercado financeiro, o Comitê da Basiléia de Supervisão Bancária (*Basle Committee on Banking Supervision*), o Banco Central norte-americano (*U.S. Federal Reserve Bank*), outros organismos reguladores da União Européia e, aqui no Brasil, o Banco Central convergiram no entendimento do VaR como medida aceitável de risco de mercado. Assim, a partir das estimativas obtidas através do VaR, as entidades reguladoras estabelecerão requerimentos mínimos de capital para o posicionamento em instrumentos dos mercados financeiros.

No Brasil, o Banco Central publicou recentemente, em 24 de setembro de 1998, a resolução 2.554 que dispõe sobre a implantação e implementação de sistema de controle internos de risco. De acordo com essa resolução, as instituições financeiras serão obrigadas a implementar controles internos de risco de suas operações até o final do ano de 1999, devendo os seus resultados estar à disposição de todos os funcionários e o sistema, sujeito à fiscalização e auditoria externa.

Instituições não financeiras: Apesar da metodologia do VaR ter nascido visando a aplicação em instituições financeiras, ela também pode ser utilizada em outros tipos de empresas para medir os seus riscos em uma larga variedade de casos:

- para medir os riscos das empresas devido às flutuações das taxas de custo de oportunidade;
- para medir a exposição ao risco cambial de empresas que, por terem fornecedores, clientes ou subsidiárias em outros países, possuem fluxo de caixa em diversos tipos de moeda;

Muitas empresas industriais e.g. Siemens (PRIEST[1], 1997) e Veba (PRIEST[2], 1997) vêm aplicando o conceito do VaR para monitorar os riscos em suas obrigações financeiras e aplicações em derivativos de proteção em função das variações das taxas cambiais e das taxas de juros praticas no mercado. Outras empresas, já vêm utilizando a metodologia do VaR para calcular o risco global da empresa. Neste caso, a empresa é considerada como se fosse uma grande carteira, cujos contratos e produtos são todas as suas unidades operacionais (ou ao menos, aquelas mais importantes), que

estão expostas ao risco devido a uma série de fatores financeiros como os preços de matérias-primas, da taxas de juros e das taxas cambiais das moedas estrangeiras em que lida, para então se calcular o VaR.

Com a ajuda do VaR, as empresas não financeiras podem minimizar os seus riscos financeiros, através da identificação dos pontos que introduzem maior exposição ao risco e então protegendo-se através da utilização de derivativos ou outros mecanismos. Assim, elas podem se concentrar na administração da essência dos seus negócios que são os produtos e serviços oferecidos aos seus clientes.

1.5 Objetivos e Estrutura do Trabalho

Neste trabalho de formatura estaremos apresentado o conceito do VaR e algumas metodologias estatísticas através das quais ele pode ser calculado. Uma delas é a utilizada atualmente no Banco e as outras duas foram pesquisadas na bibliografia especializada. Cada um dos modelos apresenta uma série de vantagens e desvantagens as quais discutiremos ao longo do trabalho com a ajuda dos testes empíricos que realizaremos mais ao final do trabalho.

Nos capítulos iniciais, apresentaremos conceitos necessários para o melhor entendimento e para o cálculo de qualquer modelo do VaR. Neles discutiremos os produtos financeiros que serão utilizados a composição da carteira, como o valor de mercado desses produtos podem ser calculados, quais são as suas fontes de risco financeiro e como calcular um parâmetro que mede a incerteza com relação a essas fontes: a volatilidade.

No capítulo 4 apresentaremos o modelo atualmente utilizado para o cálculo do VaR no Banco, conhecido como analítico paramétrico, mostrando seus pontos fortes e fracos.

No capítulo 5 mostraremos como o VaR pode ser calculado através da realização de simulações e explicar o que esse modelo melhoraria a estimativa do VaR calculado pelo modelo atual do Banco.

No capítulo 6 apresentaremos o modelo para o cálculo do VaR utilizando a Teoria dos Valores Extremos, mostrando suas vantagens e desvantagens.

No capítulo 7 realizaremos um estudo de caso, aplicando os vários modelos a uma carteira de investimentos fictícia e efetuando testes empíricos para analisar

comparativamente a performance dos vários modelos apresentados nos capítulos 4, 5 e 6 e verificar a viabilidade de implementação ou não de algum dos novos modelos apresentados, para o caso específico do Banco.

Finalmente, no último capítulo concluiremos o trabalho, apresentando uma reflexão sobre os resultados obtidos com a execução desse trabalho e recomendando novas abordagens para estudos futuros sobre o tema.

2

Conceitos de mercado

Neste capítulo, faremos uma breve introdução sobre produtos e conceitos básicos de mercado financeiro necessários para o melhor entendimento dos modelos de estimação do valor em risco que iremos expor neste trabalho de formatura.

2.1 Carteira (ou portfolio)

Uma carteira de investimento pode ser considerada como uma cesta contendo vários produtos de investimento financeiros em que uma determinada instituição ou pessoa detém posições (ativas ou passivas). Seu valor de mercado varia em função dos preços dos produtos que a compõem, que por sua vez variam em função da conjuntura econômica do país, dos índices econômicos, das situações de setores e empresas.

2.2 Alguns produtos de investimento do mercado financeiro

A seguir apresentaremos alguns produtos de investimento que podem compor uma carteira de uma instituição financeira.

2.2.1 CDB – Certificado de Depósito Bancário

Trata-se de um dos mais antigos e utilizados meios de captação de recursos pelas instituições financeiras e é oficialmente conhecido como depósito a prazo. Nesse tipo de aplicação financeira, o cliente deposita, por um determinado período de tempo, uma certa quantia de dinheiro que deve ser corrigida segundo algum tipo indexador ou taxa acordado.

No caso dos CDBs prefixados, a taxa em que o depósito deverá ser corrigido é definida no momento da aplicação, ou seja, o valor de resgate na data do vencimento do título já é conhecido pelo aplicador.

Já os CDBs pós fixados são corrigidos segundo algum tipo indicador a partir da data da sua emissão, como por exemplo, a TR ou a TJLP. Neste caso, o aplicador saberá, somente na data do resgate, quanto a aplicação efetivamente rendeu.

2.2.2 CDI – Certificado de Depósito Interbancário

Os Certificados de Depósito Interbancário são títulos de características idênticas aos CDB, só que a sua negociação é restrita ao mercado interbancário. Sua função é de fornecer ao mercado financeiro mais um instrumento de troca de dinheiro entre as instituições financeiras, sem que o lastro seja necessariamente um título público.

Os CDI podem ser negociados por um dia ou para prazos mais longos como 30 dias. Os CDI de um dia, também conhecidos como DI (Depósitos Interfinanceiros), estabelecem um padrão para a taxa de juros diária de curto prazo, o CDI *over*.

2.2.3 Títulos Públicos Federais

Títulos públicos são papéis que o governo emite com o objetivo de executar e financiar suas dívidas internas, assim como controlar a política monetária do país.

Existem no mercado uma série de títulos emitidos pelo governo, com diversos nomes, prazos e tipos de remuneração. A seguir, apresentaremos alguns tipos de títulos públicos mais negociados no mercado financeiro:

BBC – Bônus do Banco Central

É um título público de renda fixa e de curto prazo, emitido em leilões primários do Banco Central.

Por se tratar de um título prefixado, as taxas em que os BBC são emitidos servem como um indicador da tendência dos juros do mercado interno.

O valor nominal de resgate dos BBC é feito em múltiplos de R\$1.000,00 e com o preço unitário (valor monetário de uma unidade de título) desagiado com relação ao valor nominal pela taxa em que é negociado.

NTN – Notas do Tesouro Nacional

São títulos pós fixados, emitidos pelo Tesouro Nacional e com valor nominal de emissão em múltiplos de R\$ 1,00. Existe uma série de tipos de NTN, com diversas características dentre as quais podemos citar:

NTN-D: São títulos atrelados a variação cambial do real contra o dólar mais uma taxa de juros de 6% ao ano.

NTN-H: São títulos com prazo mínimo de 90 dias e sua remuneração é feita pela TR, sendo o principal resgatado, de forma única, na data do vencimento do papel.

2.2.4 Ações

Ações são títulos representativos do capital social de uma empresa, que os emite com o objetivo de captar recursos financeiros de terceiros. Ao emitir ações no mercado, a empresa torna-se aberta e passa a se sujeitar a uma série de exigências quanto ao fornecimento de informações ao público.

As ações são negociadas em dois tipos de mercados. O *mercado primário* é o segmento de mercado onde as empresas emitem suas ações que são ofertadas através de um banco. No *mercado secundário* são negociadas as ações entre os investidores, gerando liquidez ao sistema e permitindo a circulação dos títulos.

As ações do mercado secundário são negociadas nas Bolsas de Valores. As Bolsas de Valores são instituições autônomas e não financeiras, compostas por corretoras de valores e que têm como objetivo fornecer infra-estrutura para o mercado de ações.

O preço de mercado das ações variam em função das condições de mercado (oferta e procura), da situação da empresa e seu setor econômico, assim como fatores macroeconômicos e políticos.

2.2.5 Índice Bovespa

O Índice Bovespa pode ser entendido como o valor de mercado de uma carteira contendo as ações mais representativas do mercado. Sua composição aproxima-se da quase totalidade das operações representativas do mercado. Logo, ele serve como indicador médio do comportamento do mercado de ações.

2.2.6 Mercado de Derivativos

O mercado de derivativos é o mercado em que a formação dos preços dos seus negócios derivam dos preços dos ativos correspondentes do mercado à vista. Neste mercado podemos destacar os mercados de *swaps*, futuros e de opções. A seguir, detalharemos os principais produtos que compõem este mercado.

2.2.6.1 Swap

O *swap* é uma estratégia financeira realizada entre duas empresas que resolvem trocar seus fluxos de pagamentos futuros referentes a um certo valor principal de referência. Em outras palavras, o *swap* pode ser entendido como uma troca de indexadores por duas partes por um período de tempo e sobre um montante previamente acordado. Assim, é possível que uma empresa que tem um passivo corrigido por um determinado indexador troque-o com uma outra empresa por um que mais lhe interesse.

Nesta modalidade de operação, não existe a troca de principal entre as partes. O que ocorre é somente o pagamento, no vencimento, da diferença entre os principais corrigidos pela parte que teve menor rendimento com seu indexador.

Os tipos de indexadores trocados nas operações de swap podem ser os mais variados possíveis. Entretanto existem algumas modalidades de *swaps* mais realizados no mercado:

Swap de taxa de juros:

Troca de taxas de juros prefixadas por pós fixadas, em sua maioria corrigidas pelo CDI.

Swap de dólar:

Troca de taxas de juros prefixadas mais variação cambial do dólar por taxas de juros pós fixada em real, corrigida pelo CDI.

2.2.6.2 Mercado de Futuros

Nos mercados de futuros são negociados compromissos de compra ou venda de mercadorias ou instrumentos financeiros, por um preço acordado entre o comprador e o vendedor, para uma determinada data de liquidação futura.

Os mercados de futuros foram criados com o objetivo de fornecer instrumento de proteção aos agentes econômicos (produtores primários, industriais, comerciantes, instituições financeiras e investidores) contra as oscilações dos preços de seus produtos e de seus investimentos em ativos financeiros.

Através deste mercado, é possível que seja feita a transferência de riscos entre os agentes econômicos e, ao mesmo tempo, seus negócios passam a influir na formação de preços futuros das mercadorias e ativos financeiros deste mercado.

A negociação dos contratos do mercado de futuros é feita na Bolsa de Mercadoria e Futuros (BM&F). Esta, objetivando dar maior liquidez e transparência aos negócios, padronizou uma série de variáveis dos contratos de futuros, como as especificações das mercadorias ou instrumentos financeiros negociados, dos tamanhos dos lotes para a negociação, das formas de cotação, das datas de vencimento dos contratos, das condições de liquidação das operações, etc..

Devido à essa padronização, os participantes do mercado podem encerrar antecipadamente suas posições através de operações de natureza inversa. Por exemplo, um investidor que comprou 100 contratos de dólar futuro pode encerrar sua operação simplesmente vendendo 100 contratos de dólar futuro do mesmo vencimento, independente de quem ele comprara ou para quem está vendendo os contratos. Isso se chama intercambiabilidade dos contratos, já que ambos os contratos estão negociando o mesmo bem, para a mesma data de liquidação e em mesma quantidade.

A seguir, apresentaremos alguns ativos/ mercadorias que são negociados no mercado de futuros:

DI1 futuro – Mercado Futuro de Depósito Interbancários de 1 dia

É o ativo do mercado de futuros mais negociado tanto em termos de movimentação quanto em termos de volume financeiro. Neste contrato, o que está sendo negociando é a expectativa de juros acumulados do CDI de um dia da data da negociação até a data do vencimento do contrato.

Nos contratos de DI1 futuro, o valor do futuro está predeterminado contratualmente em R\$ 100.000,00. Como o preço do futuro é fixo, a negociação da taxa de juros do período é feita através da negociação do valor presente dos R\$ 100.000,00. A diferença entre o valor presente e o valor futuro é a taxa de juro

esperada para o período compreendido entre a data de negociação e a data de vencimento do contrato:

$$i = \frac{VF}{VP} - 1 \quad (2.1)$$

onde VF é o valor futuro (R\$ 100.00,00)

VP é o valor presente do contrato

i é a taxa efetiva de juros do período.

Dólar futuro – Mercado Futuro de taxa de Câmbio de Reais por Dólar Comercial

Neste mercado, é negociado o preço de conversão da moeda nacional para o dólar comercial americano (PTAX800) na data de liquidação futura do contrato.

Índice futuro- Mercado Futuro de Índice Bovespa

Neste mercado, é negociado o preço da cesta de ações que compõe o Índice Bovespa na data de liquidação futura do contrato.

2.2.6.3 Mercado de Opções

Opção é um ativo que dá o direito ao seu titular de, se assim desejar, comprar ou vender um outro ativo, até ou em uma determinada data, por um preço previamente conhecido.

Um exemplo semelhante a uma opção é uma apólice de seguro de um carro. Neste tipo de contrato, o segurado (ou titular da opção), com o objetivo de não correr o risco de arcar com os custos de um roubo ou uma batida, adquire um contrato de uma empresa seguradora. Ele passa então a ter o direito de ser ressarcido caso haja um sinistro, mas não tem nenhuma obrigação futura. Já a seguradora (ou vendedora da opção) tem a obrigação de pagá-lo se o sinistro for ocorrer e assim lhe for solicitado. Por assumir esta obrigação, a seguradora recebe um pagamento (ou prêmio).

No mercado existem dois tipos de opções: as de compra e as de venda. Nas opções de compra (também conhecidas como *call*), o seu titular tem o direito de comprar um determinado ativo. Nas opções de venda (conhecidas como *put*), seu titular tem o direito de vender um determinado ativo.

De forma geral, as opções são caracterizadas pelos seguintes elementos:

Titular: é o proprietário da opção. Ele tem o direito de comprar ou vender.

Lançador: é quem vende a opção. Ele tem a obrigação de vender ou comprar o ativo pelo preço preestabelecido, caso o titular desejar.

Ativo objeto: é o ativo que a opção dá ao seu titular o direito de comprar ou vender.

Prêmio: é o preço pago pelo titular da opção.

Opção de compra: também conhecida como call, dá o direito ao seu titular de comprar o ativo objeto da opção.

Opção de venda: também conhecida como put, dá o direito ao seu titular de vender o ativo objeto da opção.

Preço de exercício: é o preço preestabelecido em que o titular da opção tem o direito de comprar ou vender o ativo objeto.

Opção americana: é opção que dá ao seu titular o direito de exercê-la a qualquer momento, desde a data da sua compra até a data seu vencimento.

Opção européia: é a opção que dá ao seu titular o direito de exercê-la somente na data do seu vencimento.

O titular de uma opção somente irá exercê-la quando a operação lhe apresentar lucro, caso contrário, a opção deixará de ser exercida (virará pó) e ele perderá o prêmio pago por ela. Um titular de uma opção de compra somente lucrá com ela quando puder comprar do lançador o ativo objeto por um preço menor daquele praticado no mercado. De forma idêntica, o titular de uma opção de venda somente lucrá com ela caso puder vender o ativo objeto ao lançador por um preço superior àquele praticado no mercado.

O lançador da opção irá lucrar o valor do prêmio recebido pela venda caso a opção não seja exercida, caso contrário, terá seu lucro reduzido ou até prejuízo.

Assim como ocorre no mercado de futuros, as Bolsas também estabelecem padrões para as opções nelas negociadas no que se refere a tamanho dos contratos, preços de exercício e datas de vencimento. Desta forma, os seus participantes podem encerrar suas posições (lançadora ou compradora) através de operações de natureza inversa a elas, independentemente de quem ou para quem vendem ou compram as opções.

Opção de dólar

Nesta tipo de opção européia, o ativo objeto negociado é o preço de conversão da moeda nacional para o dólar comercial americano (PTAX800). Sua negociação é feita na BM&F.

Opção de IDI

Trata-se de uma opção européia negociada na BM&F, cujo ativo objeto é a projeção da taxa de juros para o período, dado pelo IDI, um índice corrigido diariamente pelo CDI de 1 dia.

Opção de ações

Neste mercado, são negociadas opções do tipo européia, cujos ativos objetos são as ações de empresas negociadas na Bolsa de Valores. Sua negociação é feita na BOVESPA e as opções mais negociadas são as de compra de TELEBRÁS.

Prêmio de opções

Prêmio é preço pelo qual as opções são negociadas no mercado. Quando um participante do mercado decide lançar uma opção no mercado, ele passa a assumir o risco dela ser exercida, e em troca, ele cobra um certo valor que chamamos prêmio. Este prêmio é determinado pelas condições de mercado e pelas expectativas de cada um de seus participantes quanto ao comportamento futuro de uma série de variáveis que discutiremos a seguir.

Voltando ao exemplo da apólice de seguro de um carro, imagine quais fatores levam uma seguradora a estabelecer os preços de suas apólices. Certamente, fatores óbvios como o valor do bem segurado (montante exposto), o período de vigência do seguro e condições de mercado como demanda e procura devem ser levados em conta pela seguradora. Além disso, seria interessante se ela também considerasse fatores que influenciam na probabilidade da ocorrência do sinistro, como o perfil do segurado (se ele anda muito de carro, sua idade, onde mora, se ele já bateu com o carro antes) e os níveis atuais de roubos de carros. Um outro fator relevante também seria o fluxo de caixa da operação, uma vez que os desembolsos financeiros não ocorrem simultaneamente (o desembolso do prêmio é feito na data do contrato e o desembolso sinistro, caso ocorra, é feito em alguma data no futuro).

A seguir, apresentaremos as principais variáveis que influenciam nos preços dos prêmios das opções.

Preço do ativo objeto (S)

O preço do ativo que a opção dá o direito de comprar ou vender é o fator mais direto que influencia nos preços das opções.

Para opções de compra, quanto maior for o preço do ativo objeto, maiores serão as possibilidades de que a opção seja exercida e portanto maior é o seu prêmio (lembre-se de que uma opção de compra somente será exercida caso seu titular possa comprar o ativo objeto do seu lançador por um preço inferior ao praticado no mercado).

No caso de opções de venda, ocorre o inverso. Quanto maior for o preço do ativo objeto da opção, menores são as chances da opção ser exercida e portanto, menor é o seu prêmio.

Preço de exercício da opção (K)

O preço de exercício é o valor em que a opção dá o direito ao seu titular de comprar ou vender o ativo objeto do seu lançador. Para opções de compra, quanto menor for o preço de exercício preestabelecido, maiores serão as chances do preço de mercado do ativo objeto ultrapassá-lo, e portanto, da opção ser exercida. Consequentemente, maior é o prêmio da opção.

O efeito inverso ocorre para as opções de venda. Quanto maior for o preço de exercício, menores serão as possibilidades dela ser exercida, e portanto, menor é o seu prêmio.

Taxa de juros (i)

Nas operações com opções, os desembolsos de caixa não ocorrem na mesma data. Enquanto o prêmio é pago no ato da compra da opção, o ganho (caso ocorra) com o seu exercício somente ocorrerá em uma data no futuro.

Para o melhor entendimento, observe esse exemplo:

Caso soubesse com total segurança que o preço de uma determinada mercadoria seja R\$ 110,00 daqui a três meses e que a taxa de juros deste período será de 5%, qual seria o prêmio justo que um investidor deveria pagar por uma opção de compra com preço de exercício de R\$ 100,00 e vencimento para daqui a três meses?

Resposta: Na data do vencimento, como o preço da mercadoria praticado no mercado será de R\$ 110,00, o investidor irá exercer a opção e comprar a mercadoria do seu lançador por um preço mais barato (R\$ 100,00) e ganhar R\$ 10,00 na operação. Entretanto, como o investidor vai pagar o prêmio três meses antes do exercício da opção, os R\$ 10,00 que irá ganhar devem ser trazidos a valor presente pela taxa de juros do período, ou seja:

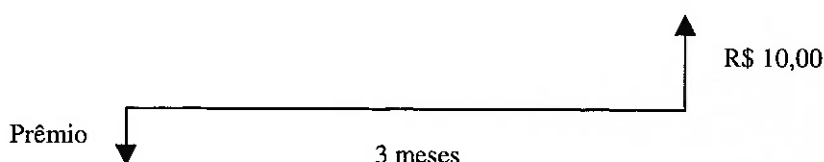


Figura 2.1: Exemplo do fluxo de caixa de um contrato de opção

$$\text{Prêmio justo} = 10 / (1 + 5/100) = \text{R\$ } 9,52$$

Volatilidade (σ)

Um outro fator que influencia nos prêmios das opções é a medida da variação do preço do ativo objeto, ou seja a sua volatilidade. Quanto mais o preço do ativo variar, maior será a sua volatilidade.

Com base na volatilidade, é possível se estimar a probabilidade da opção ser exercida na data do vencimento.

Um ativo que possui uma volatilidade muito baixa não deverá sofrer grandes alterações de preço no futuro, implicando em um baixo risco na sua negociação. Por outro lado, um ativo que tenha alta volatilidade, ou seja, grande probabilidade de sofrer significativas altas e quedas de preço, apresenta um fator de risco muito maior.

Logo, um participante do mercado que decide lançar uma opção de um ativo muito volátil está assumindo um risco muito maior do que a de um ativo de volatilidade baixa, já que o ativo pode sofrer grandes alterações no futuro e implicando no exercício da opção. Consequentemente, ele cobrará um prêmio maior para assumir esses riscos.

Nos capítulos seguintes, abordaremos de forma mais detalhada o conceito de volatilidade.

Prazo para o vencimento (T)

O último fator que influencia o prêmio das opções é o tempo em que o lançador fica exposto ao risco sua opção ser exercida. Quanto maior for o tempo, maiores são as incertezas quanto ao preço futuro do ativo e maior é o efeito da taxa de juros no fluxo de caixa da operação.

Ainda que não possamos precisar exatamente o efeito de cada uma das variáveis no valor dos prêmios das opções, podemos afirmar que a o prêmio de uma opção é uma função dos seguintes elementos:

$$P = f(S, T, K, i, \sigma) \quad (2.2)$$

onde:

P é o prêmio da opção;

S é o preço do ativo objeto no mercado à vista;

T é o prazo até o vencimento da opção;

K é o preço de exercício da opção;

i é a taxa de juros;

σ é a volatilidade do preço do ativo objeto.

3

Conceitos para o cálculo do VaR

Neste capítulo, descreveremos o conceito do VaR e discutiremos alguns conceitos e instrumentos matemáticos necessários para que possamos chegar na sua estimativa.

3.1 O conceito de VaR

O conceito por trás do VaR (ou valor em risco) é bastante simples: ele representa uma estimativa da perda potencial máxima, em termos monetários, de uma determinada carteira de investimentos, por um determinado período de tempo e com um determinado grau de confiança.

Como exemplo, imagine um investidor que deseja comprar US\$ 1 milhão em papéis de ações da PETROBRÁS, achando que, devido às perspectivas de lucro da empresa, os seus preços subirão de preço no período próximo de um mês.

Porém antes investir, ele deseja saber qual é a perda potencial deste negócio, uma vez que, caso ela seja muito grande, ele não poderá cumprir suas obrigações com os seus credores. Assim, como não faz a mínima idéia deste valor, o investidor dirige-se ao analista da sua empresa e pede uma estimativa desta perda. O analista, por sua vez, responde que não pode prever com exatidão o futuro, mas que, baseado em modelos estatísticos, sabe com 97,5% de confiança que o preço das ações da PETROBRÁS não cairá mais do que 10% no período de um mês de aplicação. Logo, a perda desta aplicação, ou o VaR, não ultrapassaria US\$ 100 mil ($= 1 \text{ milhão} \times 10\%$), em 97,5% dos casos.

Para realizar essa estimativa, o analista teve que levantar a distribuição de probabilidade do valor da carteira daqui a um mês, baseado em algum modelo

estatístico. A partir disso, ele definiu um determinado intervalo de confiança e pôde então encontrar a perda máxima do valor de mercado da carteira (veja a Figura 3.1).

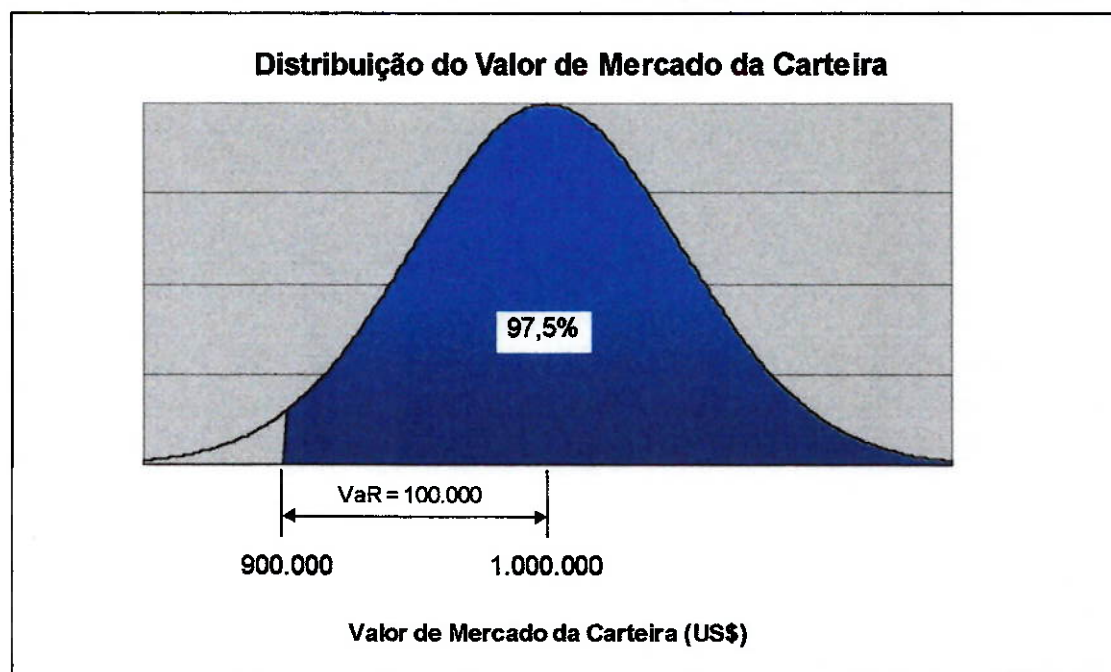


Figura 3.1: Distribuição do Valor de Mercado da Carteira

A curva de probabilidade do valor de mercado de uma carteira de investimento é encontrada a partir da análise dos fatores de risco que influenciam a formação dos preços de cada um dos produtos que a compõem. Como exemplo de fatores de risco, podemos citar taxas de juros, índices de inflação, preços das ações, preços de mercadorias, taxas de câmbio, etc..

Esta análise é, em geral, feita através do estudo de séries históricas com comportamento dos fatores de risco. A partir dela, levanta-se as curvas de distribuição de probabilidade dos fatores de mercado, que por sua vez são utilizadas para o levantamento da curva de distribuição de probabilidade do valor de mercado da carteira daqui a um determinado período de tempo (veja a figura 3.2).

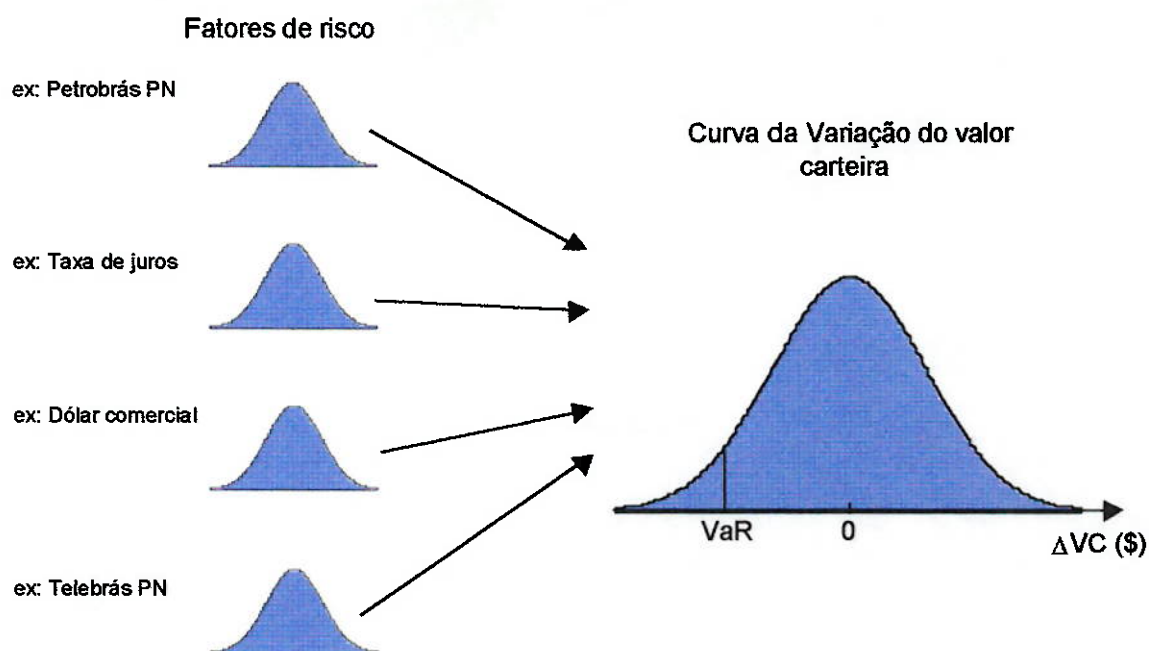


Figura 3.2: Levantamento da Distribuição do Valor da Carteira

3.2 Valor de Mercado da Carteira

O primeiro item necessário para o cálculo do VaR é a avaliação do montante exposto ao risco. Para tal, utilizamos a metodologia chamada *marcação a mercado*.

Nesta metodologia, o cálculo do valor econômico da carteira é feito através cotação dos preços de mercado de cada um dos produtos que a compõe. Para produtos negociados no mercado à vista e que possuam grande liquidez, o valor de mercado é facilmente calculado através da simples multiplicação da cotação unitária pela quantidade de produto disponível na carteira (veja equação 3.1).

$$VC_i = Q_i \cdot S_i \quad (3.1)$$

onde VC_i é o valor de mercado do contato contendo produto i ;

Q_i é a quantidade do produto i possuído pela empresa;

S_i é o preço unitário de mercado do produto i .

Como exemplos de produtos e instrumentos desse tipo podemos citar as ações e taxas de câmbio do mercado à vista (como dólar, marco alemão, iene, etc.). Os contratos cujos preços de mercado sejam do tipo dado pela equação 3.1 são também conhecidos

como *lineares*, pois os seus valores de mercado são uma *função linear* das variáveis de mercado.

As variáveis de mercado, também denominadas nesse trabalho como fatores de risco, são taxas e preços que influenciam o valor monetário dos contratos que compõem a carteira da instituição. Eles podem ser de natureza genérica, isto é, afetam os preços de vários ativos simultaneamente, uma vez que refletem expectativas presentes e futuras com relação às condições macroeconômicas, como nível de crescimento da economia, inflação, desemprego, aquecimento da economia, etc.. Como exemplos de fatores de risco genéricos, podemos citar a estrutura de taxa de juros, as taxas de câmbio de moedas estrangeiras e os índices de ações.

Quando os fatores de risco refletem tanto as expectativas macroeconômicas quanto as condições específicas a uma determinada empresa ou setor da economia, eles são denominados de natureza específica. Como exemplo, podemos citar os preços das ações das empresas negociadas na Bolsa de Valores.

Para o caso de alguns derivativos, como opções, a suposição da linearidade dos contratos não pode ser feita. Isso se deve ao fato de que, devido à complexidade de seus contratos, as opções têm seus preços formados não somente em função dos valores variáveis de mercado, mas também em função das expectativas de fluxos futuros de caixas. Estas por sua vez, são influenciadas por uma série de fatores como forma do contrato e suas condições, o tempo para a expiração do contrato, os valores atuais de diversas variáveis de mercado, etc..

Os contratos com esse tipo de natureza também são conhecidos como *não-lineares*, pois os seus valores de mercado podem ser representados por uma função não-linear das variáveis de mercado que formam seus preços.

Com o objetivo de ilustrar como o valor de um contrato pode ser representado por uma função não-linear, apresentaremos a seguir metodologias para o cálculo do valor de mercado de alguns produtos do mercado desse tipo.

3.2.1 Valor de Mercado de Contratos de Opção

O valor de mercado de contratos de opções é calculado a partir do preço de seus prêmios. Logo, o valor de uma carteira que contenha Q contratos de opções poderia ser calculado a partir da seguinte expressão:

$$VC = Q \cdot \text{Prêmio} \quad (3.2)$$

onde Q é quantidade de contratos de opção;

Prêmio é o prêmio da opção;

O valor do prêmio reflete as expectativas de exercício ou não da opção e leva também em conta também o aspecto de fluxo de caixa de como o contrato é estruturado. A seguir apresentaremos um dos modelos existentes para a avaliação dos prêmios de contratos de opção.

Modelo de cálculo de prêmios de opções por Black & Scholes

Existe uma série de modelos matemáticos para o cálculo dos prêmios de opções. Entretanto, a apresentação detalhada destes modelos está fora do escopo deste trabalho.

A seguir, faremos uma breve introdução de um dos modelos existentes que será utilizado para a determinação dos preços dos prêmios das opções neste trabalho de formatura.

Publicado em 1973, o modelo de Black & Scholes foi o primeira solução para a fórmula de equilíbrio geral na avaliação do prêmio de opções.

Para o caso de opções do tipo européia sobre ativos que não distribuam dividendos, Black & Scholes apresentaram as seguintes fórmulas para a avaliação dos seus prêmios:

Para opção de compra:

$$C = S \cdot N(h) - K \cdot e^{-R \cdot t} \cdot N(h - \sigma \sqrt{t}) \quad (3.3)$$

Para opção de venda:

$$P = S \cdot N(-h) + K \cdot e^{-R \cdot t} \cdot N(\sigma \sqrt{t} - h) \quad (3.4)$$

onde:

$$h = \frac{\ln\left(\frac{S}{K \cdot e^{-R \cdot t}}\right)}{\sigma \cdot \sqrt{t}} + \frac{\sigma \cdot \sqrt{t}}{2} \quad (3.5)$$

C é o valor teórico de uma opção de compra;

P é o valor teórico de uma opção de venda;

S é o preço do ativo objeto à vista;

K é o preço de exercício da opção;

T é o tempo até o vencimento;

σ é a volatilidade expressa da forma decimal;

R é a taxa de juros livre de risco na forma de capitalização contínua¹;

$N(\cdot)$ é a função cumulativa normal.

3.2.2 Valor de Mercado de Instrumentos de Renda Fixa

O valor de mercado de contratos de instrumentos de renda fixa como CDB e Títulos Públicos pré-fixados podem ser expressos pela seguinte equação:

$$VC = Q \cdot VP \quad (3.6)$$

onde Q é a quantidade de contratos do produto de renda fixa e

$$VP = \frac{VF}{(1+i)^t} \quad (3.7)$$

onde VF é o valor da unidade de contrato na data do vencimento a ser resgatado;

VP é o valor presente do valor a ser resgatado no futuro;

i é a taxa de juros diária esperada para o período, vista pelo mercado no dia em que é calculado o VC ;

t é o número de dia úteis para o vencimento do contrato;

3.2.3 Valor de mercado de um contrato futuro

O valor de mercado de um contrato de futuros pode ser dado pela seguinte expressão:

$$VC = Q \cdot Fut_t \quad (3.8)$$

onde Q é a quantidade de contratos de futuros;

Fut_t é o valor futuro unitário de cada contrato.

Segundo HULL (1993), a relação entre o preço futuro e preço à vista de um produto pode ser representado pela seguinte expressão:

¹ Veja em anexo a discussão sobre a forma contínua de capitalização

$$Fut_t \cdot e^{-R \cdot t} = S_t \cdot e^{-y \cdot t} \quad (3.9)$$

onde S_t é o preço do produto no mercado à vista;

R é a taxa de juros livre de risco na forma de capitalização contínua;

y é taxa de rentabilidade do produto em questão na forma de capitalização contínua;

t é o tempo restante para o vencimento do contrato futuro;

3.3 Retornos diários

Os fatores de risco são taxas e preços que influenciam a formação do valor de mercado dos produtos que compõem a carteira. Através do estudo do comportamento passado desses fatores, podemos estimar suas distribuições de probabilidade e aplicando os seus efeitos sobre o valor da carteira, estimar a sua distribuição de probabilidade

O material base para essa análise são os *retornos diários* observados em séries históricas dos fatores de risco. Retorno é uma forma de medir a mudança no valor de uma variável entre dois instantes de tempo.

Existem basicamente duas formas de se calcular o retorno de uma variável. A primeira forma é dada pelo retorno percentual, ou seja:

$$RA = \frac{F_t - F_{t-1}}{F_{t-1}} \quad (3.10)$$

onde RA é o retorno percentual (ou aritmético) do fator de risco F ;

F_t é o valor do fator de risco no instante t ;

F_{t-1} é o valor do fator de risco no instante $t - 1$.

A segunda forma é dada pelo retorno logarítmico:

$$r_t = \ln \left(\frac{F_t}{F_{t-1}} \right) \quad (3.11)$$

onde r_t é o retorno logarítmico do fator de risco F ;

F_t é o valor do fator de risco no instante t ;

F_{t-1} é o valor do fator de risco no instante $t - 1$.

Devido a vantagens práticas e estatísticas, e como o retorno logarítmico é aproximadamente igual ao percentual para pequenas mudanças de F_t , MORGAN (1994) e JORION (1997) optaram pelo uso do retorno logarítmico ao invés do percentual². Pelo mesmo motivo, também o utilizaremos durante todo esse trabalho de formatura, e a partir de agora, quando utilizarmos o termo retorno, estaremos nos referindo ao retorno logarítmico.

3.4 Volatilidade

Com o objetivo de estimar o VaR, necessitamos de alguma forma prever o comportamento dos fatores de risco. Uma maneira em que isso pode ser feito é através da medida da variabilidade desses fatores, ou seja da volatilidade.

Volatilidade é uma forma de medir a incerteza com relação ao comportamento dos fatores de risco. Quanto maior for a volatilidade de algum parâmetro ou variável, maior é a sua variabilidade e conseqüentemente, a incerteza com ao seu comportamento futuro. Assim, quando se diz que os preços das ações estão em um período de alta volatilidade, entende-se que o comportamento dos preços estão variando muito (tanto para cima, quanto para baixo) e difícil é acertar o que acontecerá com eles.

Neste trabalho de formatura, o conceito de volatilidade será aplicado tanto para o cálculo dos prêmios de opções quanto para a estimativa do valor em risco de uma carteira.

Antes de prosseguirmos à exposição de métodos para sua estimativa, é importante esclarecer os diversos usos do termo volatilidade no mercado.

Volatilidade futura

A volatilidade futura descreve a variação futura dos preços. Caso seu cálculo fosse possível, estimativas dos preços teóricos das opções e de valor em risco se aproximariam do ideal.

Volatilidade histórica

Como a volatilidade futura é impossível de ser calculada, o que se faz é uma estimativa dela. Uma das maneiras para isso é através do cálculo da volatilidade

² A justificativa mais detalhada dessa escolha encontra-se em anexo

histórica, feita através da análise de uma série temporal com o comportamento dos preços do ativo o qual se deseja avaliar a volatilidade.

Nesse tipo de estimativa, parte-se do princípio de que o futuro pode ser representado de forma satisfatória pelo comportamento passado das variáveis.

Volatilidade projetada

Neste tipo de volatilidade, também é feita uma estimativa da volatilidade futura através de uma análise de séries temporais. Apesar de também utilizar séries históricas, a volatilidade projetada difere da histórica por aplicar técnicas de projeção a ela.

Volatilidade implícita

Este tipo de volatilidade se refere especificamente às opções, pois ela é obtida através do uso de um modelo de determinação de prêmios de opções (veja o termo σ nas equações 3.3 e 3.4 de avaliação de prêmios de opções).

A volatilidade implícita é aquela que, aplicada nos modelos de determinação dos prêmios de opções, gera um prêmio teórico exatamente igual àquele praticado no mercado.

3.4.1 Métodos para a estimativa da volatilidade

A seguir apresentaremos metodologias utilizadas para o cálculo da volatilidade.

3.4.1.1 Janela móvel

Uma primeira forma com a qual poderíamos mensurar a volatilidade de um certo fator de risco seria através do cálculo desvio-padrão dos seus retornos diários. Segundo o método da janela móvel, a medida da volatilidade como desvio padrão pode ser estimada através da seguinte expressão:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(r_i - \bar{r})^2}{N-1}} \quad (3.12)$$

onde $\hat{\sigma}$ é o desvio-padrão amostral dos retornos diários;

r_i é a leitura de r observada;

$\bar{r}$ é a média amostral de r (aproximadamente igual a zero);

N é o tamanho da amostra.

Segundo PAYANT (1997), o tamanho da amostra (também conhecido como janela) utilizada da série histórica afeta a validade da distribuição de probabilidade encontrada. Amostras de tamanho pequeno (segundo COSTA NETO (1977), inferiores a 30) não são representativas e amostras muito grandes, apesar de enriquecerem a amostra, tendem a ocultar tendências de mudança do valor da volatilidade.

Como exemplo, observe na figura 3.3 a volatilidade calculada a partir da expressão do desvio padrão amostral, utilizando-se janelas de tamanhos 50, 200 e 500 para o valor do índice IBOVESPA. Pode-se notar, através da observação do comportamento das três curvas, que a medida da volatilidade utilizando uma janela de 50 dias é a mais instável, captando de forma mais intensa os efeitos dos períodos de maior e menor instabilidade do mercado. Ao contrário, a medida de volatilidade utilizando janela de 500 dias tende a ser mais estável, tendo os efeitos imediatos de maior ou menor instabilidade no mercado, menor impacto na estimativa encontrada.

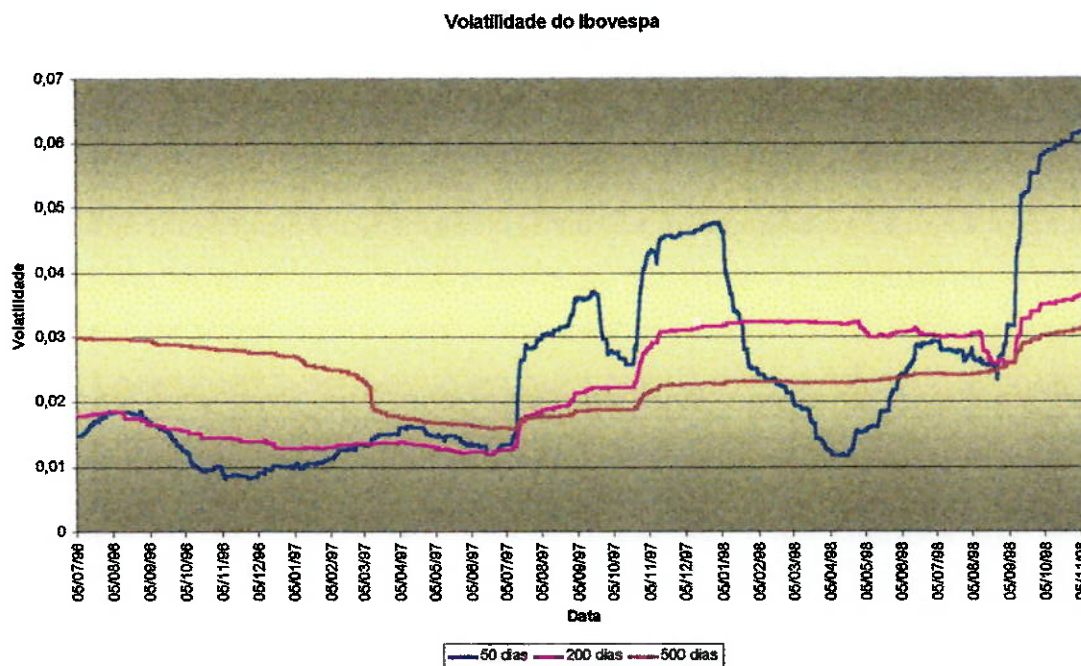


Figura 3.3: Volatilidade diária do Ibovespa vs. Tempo – Método da Janela móvel

3.4.1.2 Cálculo da volatilidade através de suavizamento exponencial (*exponentially weighted moving average approach – EWMA*)

No cálculo da volatilidade pelo método da janela móvel, são atribuídos mesmos pesos para todos os retornos da série histórica que compõem a amostra. Segundo PAYANT (1997), a estimativa dada pela expressão 3.12 falha em detectar mudanças de tendência de comportamento da volatilidade, uma vez que atribui mesma importância tanto para os retornos mais recentes quanto para os mais antigos.

Uma melhor estimativa seria encontrada através da atribuição de pesos maiores aos retornos mais recentes da amostra, resultando em uma detecção mais rápida das mudanças nas condições do mercado. Isso é feito no cálculo da volatilidade através de EWMA.

Ao invés de aplicar o mesmo peso para todos os dados observados da amostra como é feito no método da janela móvel, no EWMA são atribuídos pesos relativamente maiores às observações mais recentes. O peso alocado para cada um dos dados da amostra é uma função de uma variável que chamaremos de fator de decaimento.

A expressão para o cálculo da volatilidade utilizando o suavizamento exponencial pode ser representada na forma recursiva, ou seja, a estimativa da

volatilidade no instante t pode ser obtida através da última estimativa em $t-1$ ajustado pela última observação do retorno:

$$\hat{\sigma}_t = \sqrt{\lambda \cdot \hat{\sigma}_{t-1}^2 + (1 - \lambda) \cdot (r_{t-1} - \bar{r})^2} \quad (3.13)$$

onde $\hat{\sigma}_t$ é a estimativa da volatilidade para o instante t ;

r_{t-1} é o valor do retorno no instante $t-1$;

$\bar{r}$ é a média amostral de r (aproximadamente igual a zero);

λ é o fator de decaimento.

Na equação 3.13, o fator λ determina a taxa em que os pesos das observações passadas decaem conforme tornam-se mais distantes.

Como podemos observar na equação 3.13, o cálculo da volatilidade através do suavizamento exponencial se dá através da simples combinação de dois elementos: a estimativa da variância do dia anterior, que recebe o peso igual a λ ; e a último desvio quadrado observado, que recebe o peso igual a $(1 - \lambda)$. Logo, podemos concluir que quanto menor for o parâmetro de decaimento λ , maior importância é dada às observações mais recentes.

Segundo MORGAN (1994), o cálculo da volatilidade através de EWMA apresenta duas vantagens com relação ao método da janela móvel. A primeira é que a volatilidade estimada através do EWMA reage mais rapidamente aos movimentos extremos dos mercados, uma vez que as observações mais recentes recebem maior peso. A segunda é de que, após a ocorrência desses movimentos, a volatilidade diminui gradualmente à medida que os pesos atribuídos a esses movimentos decaem.

Ao contrário, na estimativa feita pela através da janela móvel, a volatilidade tende a aumentar de maneira abrupta (mas não tão intensamente quanto na estimativa pelo EWMA) na ocorrência de um movimento extremo no mercado, declinando também de forma abrupta quando esses movimentos saem da amostra. Consequentemente, a estimativa da volatilidade por esse método tende a comportar-se na forma de platôs.

Como exemplo, observe a figura 3.4 com o comportamento da volatilidade do dólar comercial de venda (PTAX800) calculada pelo método da janela móvel e EWMA. No final de outubro de 1.997, ocorreu a crise nos mercados asiáticos, fazendo com que houvesse uma procura maior pelo dólar, ocasionando o seu fortalecimento perante ao

real. A volatilidade estimada segundo o EWMA rapidamente detectou esse evento, levando a um aumento de sua estimativa. Entretanto, com o passar do tempo, esta estimativa caiu lentamente, pois passou a assimilar de forma gradual a queda de volatilidade nos meses seguintes. Por outro lado, a estimativa da volatilidade utilizando o método da janela móvel com uma janela de 60 dias demorou mais tempo para registrar os movimentos extremos ocorridos e manteve-se alta por cerca de três meses (apesar do mercado ter se estabilizado) quando finalmente caiu abruptamente no instante em que os retornos extremos saíram da amostra.

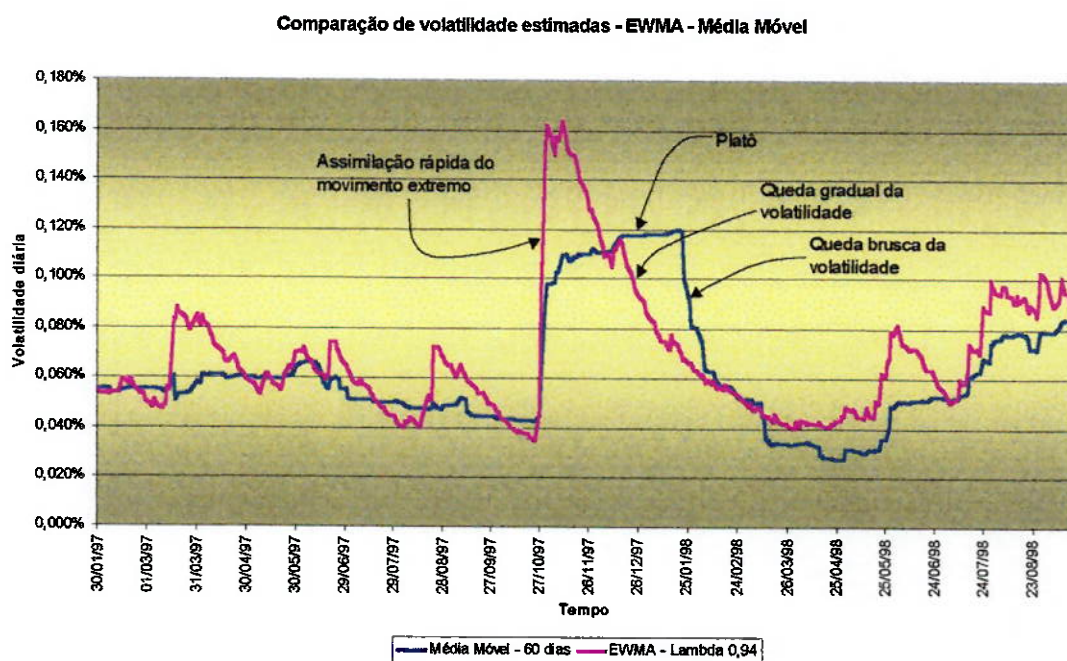


Figura 3.4: Comparação entre volatilidades do dólar comercial calculadas por janela móvel e EWMA

3.5 Correlações entre os retornos

Como em geral existem vários fatores de riscos que influenciam o valor de mercado de uma carteira, uma outra medida necessária para o cálculo do VaR é a correlação entre os movimentos desses fatores. Segundo COSTA NETO (1973), temos:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad (3.14)$$

onde

ρ_{xy} é o coeficiente de correlação entre as variáveis x e y ;

σ_{xy}^2 é a covariância entre as variáveis x e y ;

σ_x e σ_y são respectivamente os desvios padrões de x e y .

A covariância amostral ($\hat{\sigma}_{xy}^2$) pode ser estimada segundo o método da janela móvel por:

$$\hat{\sigma}_{xy}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{N-1} \quad (3.15)$$

onde

x_i é a leitura de x observada;

$\bar{x}$ é a média amostral de x (aproximadamente igual a zero);

y_i é a leitura de y observada;

$\bar{y}$ é a média amostral de y (aproximadamente igual a zero);

N é o tamanho da amostra.

De forma semelhante ao caso da volatilidade, para o cálculo da covariância através do suavizamento exponencial temos:

$$\hat{\sigma}_{xy,t}^2 = \lambda \cdot \hat{\sigma}_{xy,t-1}^2 + (1-\lambda) \cdot x_{t-1} \cdot y_{t-1} \quad (3.16)$$

onde $\hat{\sigma}_{xy,t}^2$ é a estimativa da covariância entre x e y para o instante t ;

$\hat{\sigma}_{xy,t-1}^2$ é a estimativa da covariância entre x e y para o instante $t-1$;

x_{t-1} é o valor da variável x no instante $t-1$;

y_{t-1} é o valor da variável y no instante $t-1$;

λ é o fator de decaimento.

A estimativa da correlação entre x e y pode ser obtida por:

$$\hat{\rho}_{xy,t} = \frac{\hat{\sigma}_{xy,t}^2}{\hat{\sigma}_{x,t} \cdot \hat{\sigma}_{y,t}} \quad (3.17)$$

onde $\hat{\rho}_{xy,t}$ é a estimativa do coeficiente de correlação entre x e y para o instante t;

$\hat{\sigma}_{xy,t}$ é a estimativa da covariância entre x e y para o instante t;

$\hat{\sigma}_{x,t}$ e $\hat{\sigma}_{y,t}$ são respectivamente as estimativas das volatilidades entre x e y, calculadas pela equação 3.13.

3.6 Sensibilidade do valor de mercado com relação aos fatores de risco

Através da sensibilidade procuraremos explicar os efeitos que alterações do valor dos fatores de risco provocam no valor de mercado da carteira. Isso pode ser feito através da expansão em série de Taylor, que detalharemos a seguir.

Expansão em série de Taylor

Na expansão em série de Taylor, a variação do valor de uma função com várias variáveis independentes pode ser representada por uma série polinomial infinita cujos parâmetros são as derivadas parciais da função com relação às variáveis.

O valor de mercado da carteira (VC_{total}) pode ser considerado como a somatória dos valores de cada um dos contratos que a compõem. Sabendo-se a fórmula para a avaliação do valor de mercado de um contrato m (VC_m), então temos:

$$VC_{total} = \sum VC_m(T \& C, X_j(t), t) \quad (3.18)$$

onde T&C são os termos e condições de cada contrato m;

$X_j(t)$ são os valores de mercado de cada um dos parâmetros de risco no instante t;

Logo, a expansão em série de Taylor de VC_{total} , com respeito as suas variáveis independentes $X_j(t)$ é:

$$\begin{aligned}
\Delta VC_{\text{total}} = & \sum_j \left(\frac{\partial VC}{\partial X_j} \right) \cdot \Delta X_j + \frac{1}{2} \cdot \sum_j \left(\frac{\partial^2 VC}{\partial X_j^2} \right) \cdot \Delta X_j^2 + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j \neq k} \left(\frac{\partial^2 VC}{\partial X_j \cdot \partial X_k} \right) \cdot \Delta X_j \cdot \Delta X_k + \frac{1}{6} \cdot \sum_j \left(\frac{\partial^3 VC}{\partial X_j^3} \right) \cdot \Delta X_j^3 + \\
& + \frac{1}{6} \cdot \sum_{j \neq k} \left(\frac{\partial^3 VC}{\partial X_j^2 \cdot \partial X_k} \right) \cdot \Delta X_j^2 \cdot \Delta X_k + \\
& + \frac{1}{6} \cdot \sum_{j \neq k \neq l} \left(\frac{\partial^3 VC}{\partial X_j \cdot \partial X_k \cdot \partial X_l} \right) \cdot \Delta X_j \cdot \Delta X_k \cdot \Delta X_l + \dots
\end{aligned} \tag{3.19}$$

onde j, k, l , etc. são todos os fatores de risco que influenciam o valor da carteira (VC). Na equação acima, as derivadas parciais da carteira são as somatórias das derivadas parciais de cada um de seus contratos.

Os termos utilizados nos polinômios são as derivadas parciais do valor da carteira com relação às variações dos fatores de risco. Esses termos são calculados a partir da expressão de cálculo do valor de mercado de cada um dos contratos que compõem carteira e então somados para toda ela.

Quanto a ordem das derivadas, as de primeira ordem são conhecidas como deltas, as de segunda ordem como gamas e as de terceira ordem como cross-gamas. Quanto a dimensão dos termos, eles podem ser unidimensionais (derivadas parciais com relação a apenas um fator de risco), bidimensionais (derivadas parciais com relação a dois fatores de risco), tridimensionais e assim por diante.

Potencialmente, a expansão de Taylor pode ser feita para um número infinito de termos polinomiais, cada um representando derivadas parciais de maiores ordens da função do valor de mercado carteira. Entretanto, o número de termos realmente necessários para alcançar o nível de precisão do VaR desejado depende da composição da carteira, do intervalo de confiança selecionado pela empresa e da relação entre os fatores de risco com o valor da carteira.

4

Cálculo do VaR: O modelo analítico paramétrico

O sistema atual de gestão de risco implementado no Banco segue o modelo que será apresentado neste capítulo. Este modelo utiliza distribuições paramétricas conhecidas para estimar a distribuição de probabilidade do valor de mercado da carteira, e por causa disso, é o mais simples, rápido e o mais utilizado no mercado financeiro.

Inicialmente, neste modelo é realizada a suposição, também feita por MORGAN (1994) e JORION (1997), de que a distribuição dos retornos dos fatores de risco possam ser suficientemente bem aproximados pela distribuição normal, com desvio padrão σ e média μ .

A distribuição normal é amplamente utilizada para descrever movimentos aleatórios. Ela é caracterizada por dois parâmetros: um de posição, a sua média (μ) e um de dispersão, o seu desvio-padrão (σ). A função de densidade de probabilidade da distribuição normal é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot \sigma^2} (x - \mu)^2} \quad (4.1)$$

que é graficamente representada por:

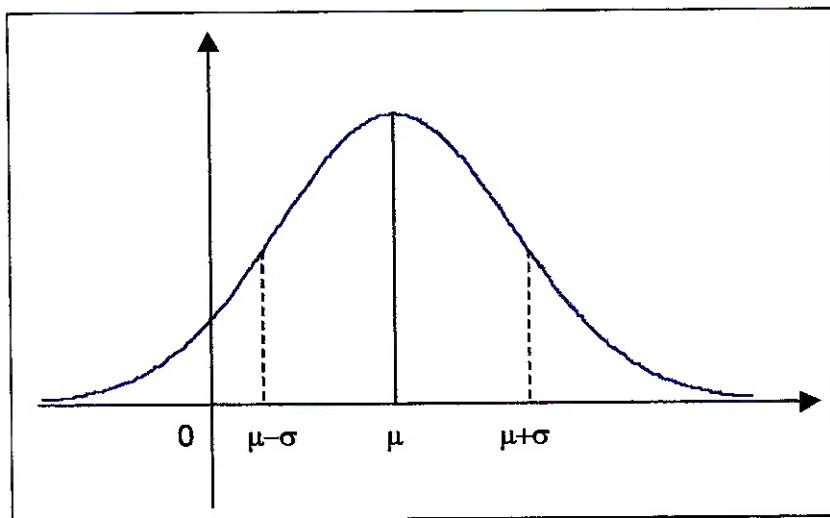


Figura 4.1: Curva da Distribuição Normal

A função $f(x)$ da equação 4.1 indica a probabilidade de um intervalo infinitesimal ao redor de x conter a variável aleatória. Na distribuição normal, a probabilidade de um intervalo ao redor da média com a largura de dois desvios-padrões conter uma variável aleatória é de 68%, ou seja:

$$\text{Prob}(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = 0,68 \quad (4.2)$$

Para a análise do risco, estamos interessados em encontrar o intervalo de confiança¹ dos retornos dos fatores de risco que geram prejuízo inferior ao que ocorre em $\alpha\%$ das vezes. Assumindo-se que esses retornos se distribuam segundo uma distribuição normal e arbitrariamente, estabelecendo os que geram perda localizam-se no canto esquerdo da curva, podemos estabelecer o intervalo de confiança que desejamos:

$$\text{Prob}(r_a < r < \infty) = \alpha\% \quad (4.3)$$

onde r_a (que chamaremos de retorno adverso) é o limiar que separa os retornos que geram prejuízo maior ao que ocorre em $\alpha\%$ das vezes dos demais. O intervalo de confiança dado por 4.3 pode ser graficamente representado pela figura 4.2

¹ Como no cálculo do risco estamos interessados somente nas perdas, o intervalo de confiança é feito somente usando a cauda inferior.

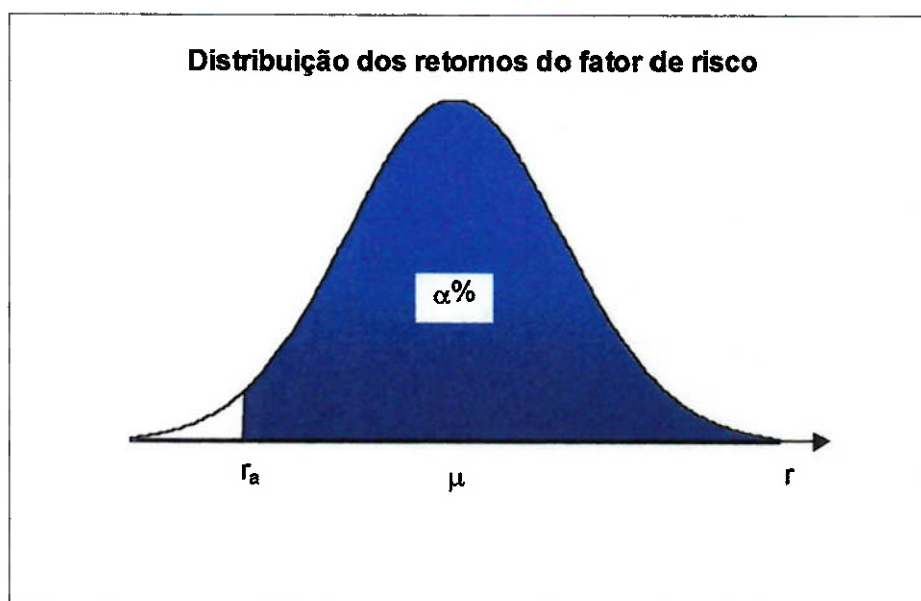


Figura 4.2: Intervalo de confiança dos retornos do fator de risco

No caso específico do Banco, o VaR é definido como o valor da perda máxima do valor do contrato em 97,5% dos casos, então utilizaremos o mesmo percentual de confiabilidade para o intervalo de confiança do retorno do fator de risco:

$$\text{Prob}(r_a < r < \infty) = 97,5\% \quad (4.4)$$

Utilizando a distribuição normal, podemos encontrar o valor de r_a , em termos de σ e μ :

$$r_a = -1,96 \cdot \sigma + \mu \quad (4.5)$$

Os parâmetros σ e μ devem ser estimados a partir das séries históricas dos retornos. Como na prática o parâmetro μ é praticamente nulo, MORGAN (1994) adotou a simplificação de μ igual a zero, o que também faremos neste trabalho. Então da equação 4.5 teríamos:

$$r_a = -1,96 \cdot \sigma \quad (4.6)$$

De forma análoga, caso o retorno que causasse prejuízo no valor do contrato se localizasse na cauda direita da curva, teríamos:

$$r_a = 1,96 \cdot \sigma \quad (4.7)$$

4.1 Estimativa do VaR

Uma vez determinados os movimentos adversos dos fatores de risco, para o cálculo do VaR analítico paramétrico, resta ainda transformar esses movimentos em variação monetária no valor da carteira (ΔVC). Para isso utilizaremos as medidas de sensibilidade expostas no capítulo 3 da expansão de Taylor (equação 3.19).

Caso a carteira possua apenas contratos do tipo linear (veja equação 3.1), serão necessários apenas os termos da expansão de Taylor de primeira ordem para o cálculo de ΔVC , pois as derivadas parciais de ordem maior ou igual a dois serão iguais a zero.

Para derivativos, em especial opções, quando as variações dos fatores forem pequenas e elas estiverem longe da data do vencimento, as variações dos valores de seus contratos podem ser razoavelmente bem aproximadas somente pelos termos de primeira ordem (ou deltas). Entretanto, caso se queira calcular o VaR utilizando um nível de confiança muito grande, ou caso haja na carteira diferentes tipos de contratos de opções, com diferentes posições e diferentes datas de vencimento, os outros termos da expansão de Taylor podem não ser desprezíveis, sendo sua utilização necessária.

No modelo paramétrico proposto por MORGAN (1994), apenas os efeitos de primeira ordem (deltas) são levados em conta, sendo os demais desprezados para efeitos de simplificação.

Da equação 3.19, considerando apenas os termos de primeira ordem podemos, podemos estimar o VaR diário para um tipo de contrato por:

$$\text{VaR} \approx \left(\frac{\partial VC}{\partial X} \right) \cdot \Delta X_a \quad (4.8)$$

onde VaR é o valor em risco do contrato para o período de um dia;

$\left(\frac{\partial VC}{\partial X} \right)$ é a sensibilidade com que a variação do fator de mercado X influi no valor de mercado do contrato;

ΔX_a é a variação diária considerada adversa do fator de risco X.

Fazendo

$$\Delta X_a = X \cdot RA_a \quad (4.9)$$

e aproximando

$$r_a \approx RA_a \quad (4.10)$$

então

$$\Delta X_a \approx X \cdot r_a \quad (4.11)$$

onde RA_a é o retorno percentual diário adverso;
 r_a é o retorno logarítmico diário adverso;
 X é a cotação de mercado do fator de risco.

De 4.8 e 4.11 temos:

$$VaR \approx \left(\frac{\partial VC}{\partial X} \right) \cdot X \cdot r_a \quad (4.12)$$

Se considerarmos δ a sensibilidade do valor monetário de uma unidade de contrato com relação a uma variação infinitesimal de X como:

$$\delta = \left(\frac{\partial VC}{\partial X} \right) \cdot \frac{X}{PMM} \quad (4.13)$$

onde PMM é o valor monetário da posição marcada a mercado do contrato.

Substituindo 4.13 em 4.12 temos:

$$VaR \approx PMM \cdot \delta \cdot r_a \quad (4.14)$$

Substituindo a equação 4.6 em 4.14 e assumindo-se $\mu = 0$, temos:

$$VaR \approx -PMM \cdot \delta \cdot 1,96 \cdot \sigma \quad (4.15)$$

Como não sabemos o exato valor de σ , utilizamos o seu estimador $\hat{\sigma}$, calculado a partir de uma amostra de tamanho grande o suficiente para que possamos fazer a aproximação pela curva normal:

$$VaR \approx -PMM \cdot \delta \cdot 1,96 \cdot \hat{\sigma} \quad (4.16)$$

Antes de prosseguirmos com o cálculo do VaR para a carteira inteira do Banco, discutiremos a escolha feita para alguns parâmetros no cálculo do risco:

A primeira variável é o período para o qual desejamos calcular o VaR. Os operadores do mercado financeiro estão freqüentemente mais interessados em calcular o valor monetário que eles podem perder durante o período de um dia devido ao fato de que a composição da carteira, em geral, modifica-se diariamente. Entretanto, entidades reguladoras de mercado e participantes de mercados com pouca liquidez podem querer uma estimativa do risco de mercado para tempo de exposição maiores de que um dia. Qualquer que seja o caso, o horizonte de tempo é definido segundo os interesses da empresa. Para o cálculo do VaR para períodos maiores de tempo, deve-se multiplicar o

VaR diário pela raiz quadrada do período de tempo (em dias) ao qual se deseja fazer a estimativa². Entretanto, na estimativa do VaR para períodos maiores, não se está levando em conta a possibilidade de mudanças na composição da carteira, o que é muito comum.

A segunda variável é a escolha do intervalo de confiança e suas implicações. Caso o VaR esteja sendo utilizado como limitador de posição das carteiras da empresa, a utilização de um alto nível de confiabilidade leva a níveis de VaR extremamente altos, limitando em muito a flexibilidade das operações financeiras e o potencial de ganhos. Níveis baixos de intervalos de confiança, entretanto, levam a uma subestimação do potencial de perda da carteira. Além disso, quanto maior for o intervalo de confiança utilizado, mais importante torna-se a necessidade do modelo estimar de forma mais precisa os movimentos dos mercados, assim como a forma com que influenciam a formação dos preços de mercado dos contratos. Como já comentamos anteriormente, utilizaremos o intervalo de confiança de 97,5%, que é o utilizado no Banco aonde é realizado este trabalho.

4.2 Cálculo do VaR global da carteira

Ao contrário do que pode-se pensar, o VaR global da carteira não é simplesmente a soma algébrica dos riscos de cada um dos seus contratos. O risco global (também conhecido como diversificado) leva em conta as correlações entre os retornos dos fatores de risco que influenciam o valor de cada um dos contratos que compõem a carteira.

O VaR calculado para cada contrato considera a perda devido ao movimento adverso do fator de risco que forma o seu valor de mercado. Entretanto, a probabilidade de que ocorram movimentos adversos em todos os fatores de mercados, gerando prejuízo para todos os contratos da carteira ao mesmo tempo é pequena.

Por exemplo, imagine uma instituição que tenha em sua carteira, ações que compõem o IBOVESPA (índice médio das ações do mercado à vista) e ao mesmo tempo, esteja vendido no mercado futuro do índice. Essa instituição somente lucrará com suas ações caso o valor de mercado delas subirem, ou seja, caso o IBOVESPA

² A explicação dessa aproximação encontra-se em anexo.

suba de valor. Por outro lado, ela somente terá lucro com seus contratos de índice futuro caso o IBOVESPA projetado para a data do vencimento do contrato caia de valor.

Normalmente, quando o valor do IBOVESPA sobe, o preço futuro dele, negociado na BM&F também sobe. Assim, caso ocorra um movimento adverso dos preços das ações, dificilmente a instituição perderá dinheiro com os seus dois investimentos ao mesmo tempo. Caso ela perca dinheiro devido à baixa do IBOVESPA, ela provavelmente ganhará dinheiro com seus contratos futuros, pois o índice futuro provavelmente também se desvalorizará.

A seguir, apresentaremos a metodologia utilizada para levar em conta as correlações entre os movimentos dos fatores de risco, de forma que possamos sintetizar a estimativa do VaR para toda a carteira.

A variância da carteira, levando-se em conta as correlações entre os fatores de risco pode ser calculado pela equação 4.17, caso a suposição da aproximação da relação entre o valor de mercado de cada um dos contratos e os fatores de risco por uma função linear seja verdadeira.

$$\begin{aligned} \text{Variância}(\Delta VC) = & \sum_{k=1}^N FS_k^2 \cdot \sigma_k^2 + \\ & + \sum_{j \neq k} FS_j \cdot FS_k \cdot \rho_{j,k} \cdot \sigma_k \cdot \sigma_j \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde σ_k é a volatilidade do fator de risco k ;

$\rho_{j,k}$ é a correlação estimada entre os fatores de risco j e k ;

$$FS_k = \sum_i PMM_i \cdot \delta_{k,i} \quad (4.18)$$

e PMM_i é a posição de cada um dos contratos que compõem a carteira;

$\delta_{k,i}$ é a sensibilidade unitária do valor de cada um dos contratos que compõem a carteira com relação a variação do fator de risco k ;

A equação 4.17 pode ser rescrita na forma de multiplicação matricial:

$$\text{Variância}(\Delta VC) = FS^T \times \Sigma \times FS \quad (4.19)$$

onde:

$$FS = \begin{bmatrix} FS_1 \\ FS_2 \\ \vdots \\ FS_N \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{1,2} & \cdots & \sigma_1 \cdot \sigma_N \cdot \rho_{1,N} \\ \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{1,2} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_2 \cdot \sigma_N \cdot \rho_{2,N} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1 \cdot \sigma_N \cdot \rho_{1,N} & \sigma_2 \cdot \sigma_N \cdot \rho_{2,N} & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Nas equações acima, FS é o vetor de dimensão N composto por elementos de valor FS_k dado pela equação 4.18 e Σ é a matriz $N \times N$ de variância-covariância.

Tendo a variância da carteira, o VaR global da carteira é calculado, para um intervalo de confiança de 97,5% por:

$$VaR_{carteira} = -1,96 \cdot \sqrt{\text{Variância}(\Delta VC)} \quad (4.22)$$

Uma outra forma para o cálculo do VaR da carteira é descrito a seguir:

Inicialmente, calcula-se o valor em risco incremental oriundo das oscilações de cada um dos fatores de risco que influenciam o seu valor de mercado. De forma análoga ao VaR calculado para um único contrato (equação 4.16), o VaR incremental devido ao fator de risco k para toda a carteira pode ser estimado por:

$$VaR_k = -1,96 \cdot FS_k \cdot \sigma_k \quad (4.23)$$

A fórmula matricial para o cálculo de VaR diversificado pode ser rescrita em função do VaR associado a cada um dos fatores de mercado, ou seja:

$$(VaR_{carteira})^2 = VaR^T \times C \times VaR \quad (4.24)$$

onde

$$VaR = \begin{bmatrix} VaR_1 \\ VaR_2 \\ \vdots \\ VaR_N \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

e

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \cdots & \rho_{1,N} \\ \rho_{1,2} & 1 & \cdots & \rho_{2,N} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1,N} & \rho_{2,N} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

A somatória de todos os VaR_k será sempre menor $\text{VaR}_{\text{carteira}}$, a menos que todos os fatores de risco sejam perfeitamente correlacionados, onde os dois serão iguais.

Nas equações anteriores, como os parâmetros de volatilidade, covariância e correlação não são conhecidos, adotaremos a sua aproximação obtida através da estimativa³ em séries temporais.

Observe que o cálculo do $\text{VaR}_{\text{carteira}}$ a partir da multiplicação matricial só foi possível porque consideramos as variações no valor da carteira podem ser suficientemente bem explicadas pelos termos de primeira ordem da série de Taylor (delta), ou seja, que os efeitos no valor da carteira dos movimentos dos fatores de risco é aproximadamente uma função linear. Caso os efeitos devido à não linearidade sejam expressivos, algum outro tipo de método para o cálculo do VaR deve ser utilizado. Nos capítulos seguintes apresentaremos outros modelos que, entre outras coisas, conseguem captar os efeitos da não linearidade do valor da carteira com relação aos retornos dos fatores de risco.

4.3 Exemplo Numérico: VaR pelo modelo analítico paramétrico

A seguir, apresentaremos um exemplo numérico do cálculo do VaR através do modelo analítico paramétrico.

Dada uma carteira fictícia composta pelos seguintes produtos no dia 14/09/1998:

1. Contratos de ação de Banespa PN (BESP4) no mercado à vista;

Item	Valor
Quantidade na carteira	10.000.000 (comprado)

Tabela 4.1: Características das ações BESP4

³ As fórmulas para estimativa desses parâmetros foram apresentadas no capítulo 3.

2. Contratos de opção de compra (*call*) de Telebrás, código TCJ41, com as seguintes características:

Item	Valor
Ativo objeto	Ação de Telebrás PN
Preço de Exercício	R\$ 80,00
Data do Exercício	19/10/1998
Dias úteis até o vencimento	24
Quantidade na carteira	-50.000.000 (vendido)

Tabela 4.2: Características da opção TCJ41

Outros dados

Neste dia, o mercado fechou com as seguintes taxas:

Fator de risco	Valor de fechamento
Ação Telebrás (S_{TELB4})*	R\$ 69,00
Ação Banespa PN (S_{BESP4})*	R\$ 35,50
Prêmio da opção TCJ41 (C_{TCJ41})*	R\$ 4,05
Taxa de juros média diária do período (i)	0,121%

*Cotação por lote de 1.000 ações.

Tabela 4.3: Parâmetros de fechamento de mercado em 14/09/98

Volatilidade histórica estimada:

Através do modelo EWMA (veja capítulo 3) de estimação de volatilidade, podemos calcular as volatilidades e a correlação dos preços das ações de Telebrás e Banespa:

Parâmetro	Valor estimado
Volatilidade Telebrás	7,04%
Volatilidade Banespa	8,27%
Correlação Telebrás/Banespa	84,44%

Tabela 4.4: Volatilidades e covariâncias estimadas dos fatores de risco

Cálculos das Sensibilidades dos produtos

1. Para a opção TCJ41, temos:

Para a opção, segundo o modelo de Black & Scholes temos

$$C = S \cdot N(h) - K \cdot e^{-R \cdot t} \cdot N(h - \sigma \sqrt{t}) \quad (4.27)$$

$$h = \frac{\ln\left(\frac{S}{K \cdot e^{-R \cdot t}}\right)}{\sigma \cdot \sqrt{t}} + \frac{\sigma \cdot \sqrt{t}}{2} \quad (4.28)$$

logo:

$$\delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(h) \quad (4.29)$$

- e
- C é o valor teórico de uma opção de compra;
 - P é o valor teórico de uma opção de venda;
 - S é o preço do ativo objeto à vista;
 - K é o preço de exercício da opção;
 - T é o tempo até o vencimento;
 - σ é a volatilidade expressa da forma decimal;
 - R é a taxa de juros livre de risco na forma de capitalização contínua;
 - $N(.)$ é a função cumulativa normal.

Para poder calcular o valor do delta dessa opção, precisamos dos valores de R e de σ .

O valor de R é facilmente obtido transformando a taxa diária (discreta) em taxa de capitalização contínua (vide anexo I, equação I.8)

$$R = \ln(1 + \text{taxa_discreta}) = \ln(1 + 0,00121) = 0,1209\%$$

O valor da volatilidade implícita é aquela que aplicada à função de cálculo do prêmio da opção por Black & Scholes, retorna o valor do prêmio praticado no mercado. Através de um processo iterativo, podemos encontrar o valor dessa volatilidade. Utilizando a função *Goal Seek* (Atingir Meta) do Excel, para atingir o valor de mercado da opção (R\$ 4,05), chegamos a volatilidade implícita desta opção:

$$\sigma_{TCJ41} = 5,34\%$$

Agora, podemos calcular o delta da opção:

$$\delta_{TCJ41} = N(h) = 37,31\%$$

2. Para a ação Banespa PN:

Como o valor de mercado de uma ação é diretamente o seu preço de mercado, então temos que:

$$\delta_{BES4} = 1$$

Cálculo do VaR

Dados os parâmetros acima, podemos agora calcular o VaR de cada um dos papéis.

1. Para a opção TCJ41 temos:

Posição:

$$PMM_{TCJ41} = Q \cdot S_{TELB4} = -50.000.000 \times 69 / 1.000 = -3.450.000$$

Utilizando a equação 4.16 temos

$$VaR_{TCJ41} \approx -PMM_{TCJ41} \times \delta_{TCJ41} \times 1,96 \times \sigma_{TCJ41}$$

$$VaR_{TCJ41} \approx 3.450.000 \times 37,31\% \times 1,96 \times 7,04\% = 177.612,31$$

2. Para a ação de BESP4 temos:

Posição:

$$PMM_{BESP4} = Q \cdot S_{BESP4} = 10.000.000 \times 35,50 / 1.000 = 355.000$$

$$VaR_{TCJ41} \approx -PMM_{BESP4} \times \delta_{BESP4} \times 1,96 \times \sigma_{BESP4}$$

$$VaR_{TCJ41} \approx -355.000 \times 1 \times 1,96 \times 8,27\% = -57.542,66$$

Cálculo do VaR diversificado da carteira

A matriz de correlação C entre os fatores de risco S_{TELB4} e S_{BESP4} é

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{TELB4,BESP4} \\ \rho_{TELB4,BESP4} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100\% & 84,44\% \\ 84,44\% & 100\% \end{bmatrix}$$

Fazendo

$$VaR = \begin{bmatrix} VaR_{TELB4} \\ VaR_{BESP4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 177.612,31 \\ -57.542,66 \end{bmatrix}$$

Então utilizando a equação 4.24, encontramos o VaR_{cart} :

$$VaR_{cart} = 132.654,72$$

5

Cálculo do VaR: Simulação de Monte Carlo

Neste capítulo abordaremos um modelo de avaliação do VaR através de simulações de Monte Carlo.

Como foi exposto anteriormente, o VaR é uma estimativa da perda potencial do valor da carteira do banco devido a oscilações dos fatores de risco, por um certo período de tempo e com um certo nível de confiança.

No capítulo anterior, apresentamos o modelo paramétrico para o cálculo do VaR da carteira. Por utilizar distribuições paramétricas e ao adotar uma série de simplificações, esse modelo torna-se extremamente vantajoso em termos de dificuldade de implementação e tempo computacional gasto para o seu processamento. Entretanto, ele vem sendo muito criticado pela literatura especializada, e.g. SHAW (1997), PICOULT (1997), PAUL-CHOUNDHURY (1997), devido exatamente a essas simplificações feitas.

Basicamente, são feitas as seguintes suposições pelo modelo paramétrico:

- a) Os retornos dos fatores de risco seguem uma distribuição normal;
- b) Os efeitos das variações dos fatores de risco sobre os retornos do valor da carteira podem ser explicados por uma função linear.

Neste capítulo, procuraremos mostrar em que condições os erros advindos da suposição (b) tornam-se significativos e apresentar um modelo (o de Simulação de Monte Carlo) que melhor consegue captar os efeitos da não linearidade dos contratos.

5.1 Os efeitos da não linearidade dos contratos

No cálculo do VaR de uma carteira, procuramos encontrar a distribuição da variação do valor financeiro da carteira. Para isso, utilizamos uma análise de séries históricas. Como não possuímos uma série com o comportamento passado de uma singular carteira, o que fazemos é analisar o que dispomos, que são as séries dos movimentos dos fatores de risco que formam o seu valor de mercado.

A partir dessa análise, podemos montar uma estimativa da distribuição de probabilidade dos movimentos dos fatores de risco, os quais então serão utilizados para montar a distribuição dos possíveis retornos da carteira em análise.

No modelo paramétrico exposto no capítulo anterior, a transformação das variações dos fatores de risco em variações do valor de mercado da carteira em questão é feita através da seguinte expressão:

$$\Delta VC \cong \sum \left(\frac{\partial VC}{\partial X_k} \right) \cdot \Delta X_k \quad (5.1)$$

onde ΔVC é a variação do valor da carteira;

ΔX_k é a variação do valor do fator de risco k ;

$\left(\frac{\partial VC}{\partial X_k} \right)$ é a sensibilidade de ΔVC_k com relação a variação infinitesimal de X_k ,

também conhecido como delta.

A equação 5.1 é apenas uma aproximação utilizando a expansão em séries de Taylor (veja equação 3.19), levando-se em conta somente os termos de primeira ordem, ou deltas.

Para contratos do tipo linear (veja equação 3.1), como é o caso de ações no mercado à vista, taxas de câmbio à vista e *commodities*, as suas variações de valor podem ser totalmente explicadas pelos termos de primeira ordem, já que os de maiores serão todos iguais a zero.

Entretanto, para contratos não lineares como os derivativos e em especial as opções, a equação 5.1 é apenas uma aproximação. Essa aproximação é boa somente para pequenas variações dos fatores de risco, entretanto, é bastante pobre para grandes variações dos fatores.

Como exemplo, observe a figura 5.1, em que levantamos a curva da variação de uma carteira que contém opções de TELEBRÁS (ΔVC) em função do preço à vista do

ativo objeto (S). Ao analisarmos as curvas podemos notar que para pequenas variações do preço do ativo objeto, a aproximação de primeira ordem¹ (delta) é boa, entretanto para maiores variações de S, nem mesmo a aproximação de segunda ordem (delta + gama) é satisfatória.

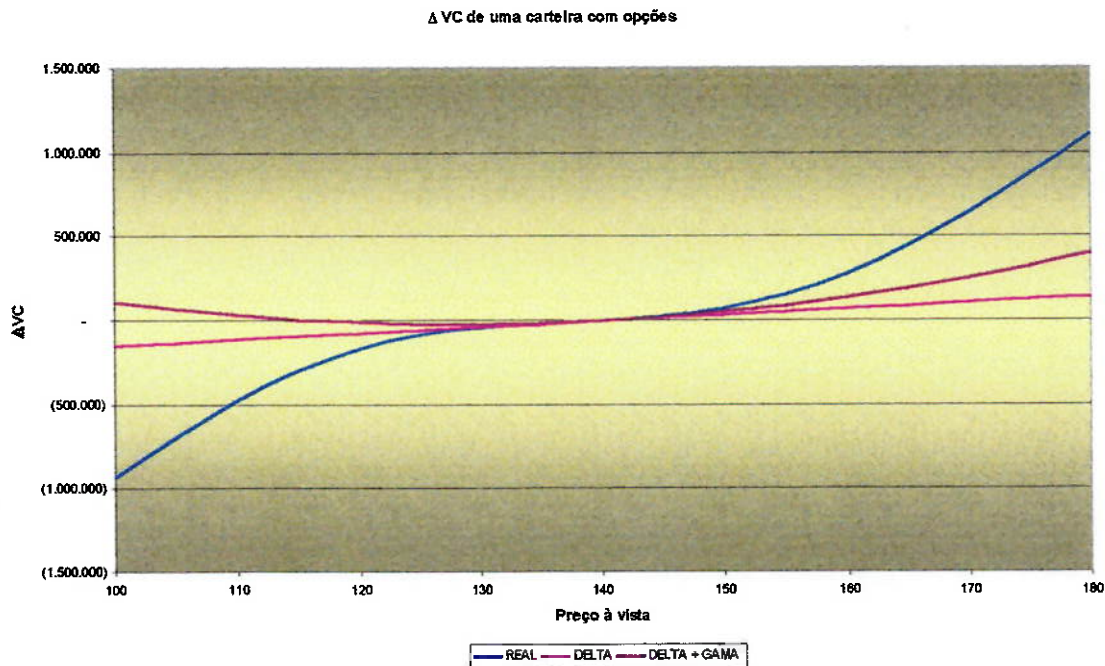


Figura 5.1: Aproximações para ΔVC para uma carteira com opções

Como consequência, mesmo se as variações das taxas dos fatores de risco que influenciam o valor da carteira com opções obedecessem uma distribuição normal, a distribuição dos retornos da carteira não necessariamente seria a mesma, podendo tornar-se assimétrica conforme pode ser observado na figura 5.2.

¹ A explicação sobre as ordens de aproximação (delta, gama, etc.) foi feita no capítulo 3.

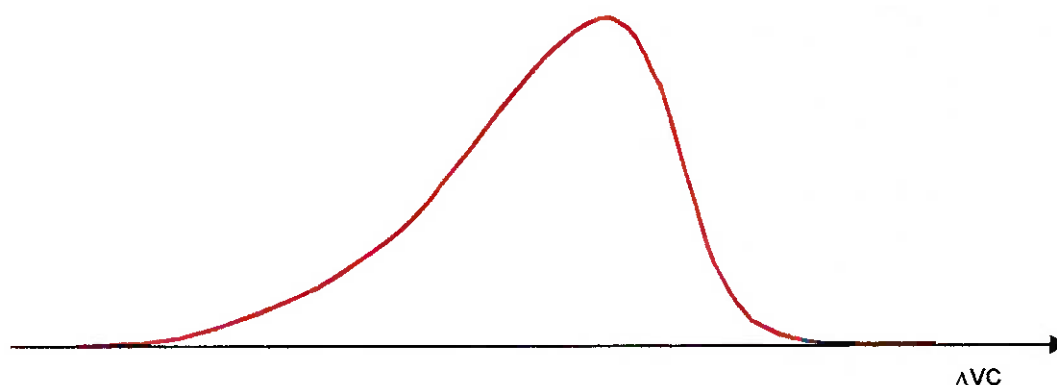


Figura 5.2: Distribuição de probabilidade de ΔVC de uma carteira com opções

Assim, aproximações para o cálculo do VaR baseadas na distribuição normal dos retornos da carteira podem levar a grandes erros de estimativa.

Segundo SHAW (1997), os modelos analíticos podem ser melhorados a fim de resolver os problemas com opções através da inclusão de termos da expansão de Taylor de ordem maior que o delta, tal como o gama, podendo o VaR ser calculado através de algum tipo de distribuição assimétrica. Entretanto, erros de aproximação sempre estarão sendo incorridos devido ao fato de termos de ordens maiores que o gama estarem sendo desprezados.

Outra complicação devido aos contratos não lineares se dá no cálculo do VaR diversificado. A expressão matricial de diversificação do VaR global da carteira (equação 4.24) levando-se em conta as correlações entre os movimentos dos fatores de risco só é válida para carteiras com contratos lineares. Segundo PICOULT (1997), apesar da existência de estudos tentando levar em conta os termos de segunda ordem (gamas) no cálculo do VaR diversificado, eles em geral tratam-se de exercícios ineficazes quando aplicados em carteiras com muitas opções, uma vez que nesses casos, o cálculo do VaR requer a expansão dos termos de Taylor a ordens maiores do que a segunda. Isso se torna pior no caso em que a instituição adota elevados níveis de confiança.

Segundo SHAW (1997), PICOULT (1997) e PAUL-CHOUNDHURRY (1997), a forma mais precisa de capturar todos os efeitos devido a não linearidade dos contratos se dá através do uso de técnicas de simulações como a de Monte Carlo.

5.2 Simulação por Monte Carlo

Neste modelo, variações aleatórias dos fatores de risco são simuladas para um determinado horizonte de tempo e depois transformadas em variações do valor da carteira do banco. A partir da simulação de uma série de amostras, pode-se construir a curva de probabilidade da variação do valor da carteira e assim estimar o seu VaR a partir do nível de confiança escolhido.

A figura 5.3 abaixo, extraída de PICOULT (1997) apresenta uma representação da metodologia do cálculo do VaR através da simulação de Monte Carlo:

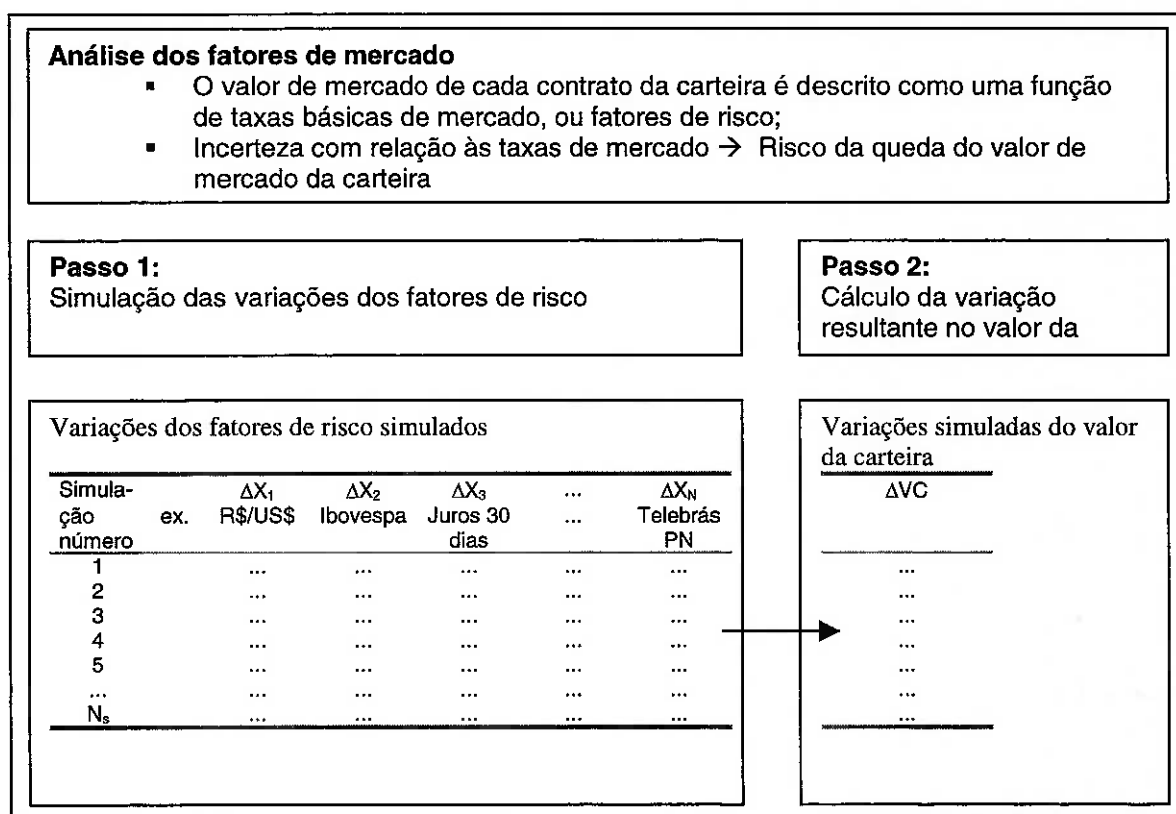


Figura 5.3: Passos para o cálculo do VaR por simulação de Monte Carlo

Na figura 5.3, cada linha (i) representa um valor simulado de variações para cada um dos fatores de risco (ΔX_j) que influem no valor da carteira analisada (VC). A partir da simulação de todos os ΔX_j , a variação resultante no valor da carteira (ΔVC_i) é calculada.

Assim, são realizadas várias simulações de forma a obter um número suficiente de possíveis variações do valor da carteira para se construir um histograma e uma curva de probabilidade característica da carteira. A partir do nível de confiança estabelecido

pelo banco, pode-se estimar a perda potencial do valor da carteira devido às variações dos preços e taxas dos fatores de risco, ou seja, o VaR.

5.2.1 Simulação das oscilações das taxas dos fatores de risco

Existem duas formas básicas para simular as variações dos fatores de risco.

Uma delas é através simulação histórica. Neste caso, cada valor simulado é composto pelas variações reais observadas no passado dos fatores de risco de um dia para o outro.

A outra forma é através simulação estatística paramétrica. Neste caso são utilizadas distribuições estatísticas paramétricas para simular as futuras mudanças dos fatores de risco.

A forma mais simples de simulação paramétrica é aquela que assume que as variações diárias dos valores dos fatores de risco são normalmente distribuídas e que tanto suas correlações quanto suas volatilidades são constantes para o período de tempo em que se deseja estimar o VaR.

Segundo PICOULT (1997), a vantagem da simulação histórica é que nela não são feitas suposições quanto à distribuição de probabilidade das variações dos fatores de risco, nem quanto à estabilidade das correlações no tempo. Entretanto, o seu grande inconveniente é a obtenção de uma amostra grande o suficiente para a simulação. Por exemplo, para a realização de 1000 simulações seria necessária uma amostra com variações dos últimos 4 anos ($4 \text{ anos} \times 250 \text{ dias úteis / ano} = 1000 \text{ dias úteis}$). Além disso, como esses dados são muito antigos, eles podem não refletir mais o cenário político-econômico atual em que se deseja calcular o risco.

5.2.2 Simulação paramétrica das variações das taxas de mercado

No nosso modelo, as variações dos fatores de risco serão simuladas supondo-se que seguem uma distribuição normal. Logo, para a realização da simulação, são necessários os cálculos das volatilidades e das correlações de todos os fatores de risco que influenciam o valor de mercado da carteira.

Uma boa simulação começa antes de mais nada com um bom gerador de números aleatórios. A forma com que esses números incorporarão uma distribuição normal, com a volatilidade e correlação desejadas será explicada a seguir.

Seja uma carteira composta por várias posições em diversos contratos que apresentam diferentes naturezas e mercados. Suponha que o valor global de mercado dessa carteira varia em função de uma série de N fatores de risco, logo é necessário para a simulação um total de N volatilidades e $N(N-1)/2$ correlações.

Uma simplificação do modelo poderia ser feita através da identificação dos fatores de risco que apresentem correlações próximas de zero. Mesmo assim, ainda permanece a necessidade da geração de números aleatórios obedecendo às correlações que não podem ser aproximadas por zero.

Uma simulação paramétrica completa de N fatores de risco (X_j) sem nenhuma simplificação quanto as correlações pode ser realizada através da decomposição de Cholesky² da matriz de variância-covariância composta pelas N volatilidades e $N(N-1)/2$ covariâncias dos fatores de risco, caso esta seja positiva definida³. A seguir apresentamos o algoritmo para a simulação:

Algoritmo para a simulação das variações dos fatores de risco através da decomposição de Cholesky

1. Construa a matriz V , $N \times N$, de variância-covariância:

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_1\sigma_N\rho_{1,N} \\ \sigma_1\sigma_2\rho_{1,2} & \sigma_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_2\sigma_N\rho_{2,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_i\sigma_j\rho_{i,j} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sigma_i\sigma_j\rho_{i,j} & \sigma_i^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{N-1}\sigma_N\rho_{N-1,N} \\ \sigma_1\sigma_N\rho_{1,N} & \sigma_2\sigma_N\rho_{2,N} & \cdot & \cdot & \sigma_{N-1}\sigma_N\rho_{N-1,N} & \sigma_N^2 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

² A decomposição de Cholesky é explicada no Anexo I

³ Uma matriz é dita positiva definida se todos os seus autovalores forem maiores que zero, ou seja, uma matriz V , $N \times N$, pode ser decomposta por Cholesky se uma matriz C , $N \times N$, possa ser encontrada tal que a matriz diagonal $C.V.C^{-1}$, $N \times N$, tenha todos os elementos de sua diagonal positivos.

onde σ_i é a volatilidade (desvio padrão) da variação dos retornos diários do fator de risco ΔX_i ;

ρ_{ij} é a correlação entre as variações diárias fatores de mercado X_i e X_j .

2. Faça a decomposição de Cholesky para construir a matriz diagonal inferior

A , $N \times N$ a partir de V :

$A \cdot A^T = V$, onde A^T é a matriz transposta de A e $A_{ij} = 0$, para $j > i$:

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N,1} & A_{N,2} & \dots & A_{N,N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \dots & A_{N,1} \\ 0 & A_{2,2} & \dots & A_{N,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{N,N} \end{bmatrix} = V \quad (5.3)$$

3. Use a matriz A encontrada para fazer a transformação linear um conjunto de N números aleatórios independentes normalmente distribuídos (Z_i) em um conjunto de variações correlacionadas dos fatores de risco (ΔX_i). Assumindo que a média das variações seja igual a zero, a transformação linear pode ser obtido através do seguinte produto matricial:

$$\begin{bmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta X_2 \\ \vdots \\ \Delta X_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N,1} & A_{N,2} & \dots & A_{N,N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_N \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Para a melhor compreensão do uso da decomposição de Cholesky para a simulação das variações dos fatores de risco, descreveremos uma simulação com um e depois com dois fatores.

5.2.2.1 Simulação de variações de um fator de risco

Caso as variações das taxas de mercado de um único fator X possam ser aproximadas por uma distribuição normal, sua simulação pode ser feita a partir da seguinte expressão:

$$\Delta X = \overline{\Delta X} + \sigma \cdot Z \quad (5.5)$$

onde $\overline{\Delta X}$ é a média histórica da variação diária do fator de risco X e Z é um número aleatório que segue a distribuição normal padronizada.

Assumindo que a média das variações seja igual a zero, temos:

$$\Delta X = \sigma \cdot Z \quad (5.6)$$

5.2.2.2 Simulação de variações de dois fatores de risco

Neste caso, a situação mais simples ocorreria quando a correlação entre as variações dos dois fatores de mercado (ΔX_1 e ΔX_2) fosse igual a zero, teríamos:

$$\Delta X_1 = \sigma_1 \cdot Z_1 \quad (5.7)$$

e

$$\Delta X_2 = \sigma_2 \cdot Z_2 \quad (5.8)$$

que poderia ser representado pela seguinte operação matricial:

$$\begin{bmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

que é análoga à simulação com um fator, já que a simulação das variações das duas taxas de mercado é feita de forma independente.

No caso em que a correlação histórica observada entre os dois fatores de mercado ($\rho_{1,2}$) é diferente de zero, ela é incorporada no modelo através das seguintes expressões matriciais:

$$\begin{bmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

onde a matriz A transforma as variáveis aleatórias Z_1 e Z_2 , que seguem a distribuição normal padronizada, em variações correlacionadas dos fatores de risco ΔX_1 e ΔX_2 .

A matriz A pode ser obtida através da decomposição de Cholesky da matriz de variância-covariância dos fatores de risco 1 e 2, isto é:

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} \\ 0 & A_{2,2} \end{bmatrix} = V \quad (5.11)$$

onde
$$V = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{1,2} \\ \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{1,2} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Resolvendo a equação 5.11, temos que:

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2 \cdot \rho_{1,2} & \sigma_2 \cdot \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

que pode ser rescrita pelas seguintes equações:

$$\Delta X_1 = \sigma_1 \cdot Z_1 \quad (5.13)$$

$$\Delta X_2 = \sigma_2 \cdot \rho_{1,2} \cdot Z_1 + \sigma_2 \cdot \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2} \cdot Z_2 \quad (5.14)$$

Podemos interpretar as equações 5.13 e 5.14 da seguinte forma: a variação do fator de mercado 1 é simulada independentemente, como se estivesse sozinho, a partir da variável aleatória Z_1 . Já a variação do segundo fator de mercado é simulada a partir de dois componentes: o primeiro componente, dependente de Z_1 , é perfeitamente correlacionado com as variações do fator de mercado 1, enquanto o segundo componente é totalmente independente das variações do fator de mercado 1, simulado portanto a partir de Z_2 .

Este processo independe da ordem em que os fatores de mercado são arranjados dentro da matriz, isto é, obteríamos uma distribuição semelhante de variações dos fatores de risco, caso invertêssemos a ordem dos fatores de mercado 1 e 2.

Novamente, cabe ressaltar que a decomposição da matriz de variância-covariância V por Cholesky é possível somente se esta for positiva definida.

Variações de fatores de mercado que sejam combinação linear de outros, erros de arredondamento e amostras históricas de diferentes tamanhos para os cálculos das volatilidades e das correlações são algumas das possíveis causas para que as matrizes de variância-covariância tenham autovalores menores ou iguais a zero. Por isso, recomenda-se sempre que se verifique se os autovalores da matriz de variância-covariância são positivos antes da realização das simulações, caso contrário, a simulação pode trazer resultados totalmente sem sentido.

O caso para simulação de N fatores de risco é feito de forma análoga, utilizando as equações mostradas no item 5.2.2 desse trabalho.

5.2.3 Simulação de variações no valor da carteira

Com as variações diárias dos valores dos fatores de risco simuladas, o próximo passo é transformá-las em variações do valor de mercado da carteira e, com isso, calcular o VaR.

Uma maneira de fazer isso seria através da reavaliação do valor de mercado dos contratos para cada valor simulado. Entretanto, essa maneira em geral demanda grande quantidade de tempo para o seu processamento, principalmente quando a carteira é composta por vários contratos não lineares.

Como exemplo, imagine que após a realização de 10.000 simulações dos fatores de mercado do fator de risco X estejamos querendo calcular a distribuição das variações do valor de mercado da carteira. Agora imagine que a carteira da instituição contenha 500 contratos cujo valor depende do valor do fator de risco X. Então para calcular os 10.000 ΔVCs simulados, cada um dos contratos deveriam ser reavaliados 10.001 vezes: uma para o valor atual do fator mais 10.000 para as suas simulações. Consequentemente, seriam necessários 5.000.500 ($= 10.001 \times 500$) cálculos de reavaliação para podermos montar a distribuição de ΔVC . Certamente, grande parte do tempo gasto para a realização das simulações seria expandido na reavaliação dos preços de mercado dos contratos.

Uma solução para este problema é construção de “grades de fatores de sensibilidade” para os contratos. Essas grades não passam de tabelas contendo os conjuntos de possíveis variações do valor de mercado dos contratos correspondentes a uma série limitada de variações dos fatores de risco que o influenciam. Como exemplo, poderíamos criar uma grade das possíveis variações no valor de mercado de uma carteira de um tipo de opções, correspondente a variações da cotação do ativo objeto (de -10% a +10%) e da taxa de juros (de -16% a +16%) em intervalos de 1% (veja a figura 5.4).

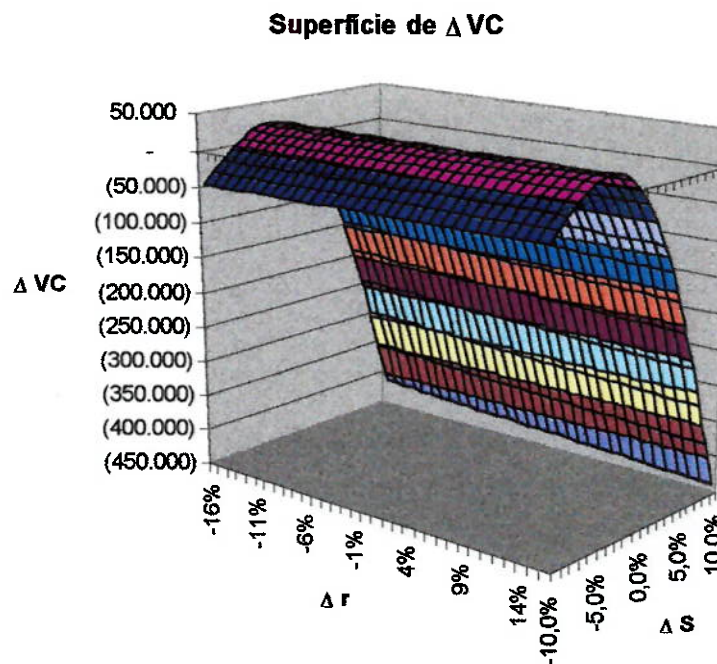


Figura 5.4: Valores de ΔVC para variações do preço à vista (ΔS) e da taxa de juros (Δr)

A grade pode adquirir várias dimensões. Uma grade unidimensional não passa de uma tabela com variações com relação a um determinado fator de risco com os demais colocados como constantes. Uma grade bidimensional é uma série de variações do valor de uma dada carteira correspondente a variações de dois fatores de risco, como é o caso da figura 5.4. O mesmo se aplica para uma grade de dimensão n . Entretanto, devemos ressaltar que o número de reavaliações necessárias do valor da carteira para a construção da grade cresce exponencialmente à medida aumentamos o número de dimensões.

Através dessas grades, um melhor desempenho computacional pode ser alcançado, já que elas são criadas a partir de um número limitado reavaliações dos valores de mercado de cada contrato. Uma vez que elas estiverem sido elaboradas, um número ilimitado de simulações podem ser feitas através de simples interpolações dos valores contidos nas grades. Como a interpolação é um processo muito mais rápido do que a reavaliação do valor de mercado da carteira, um grande número de simulações podem ser feitas com um tempo de processamento muito menor. Nas simulações feitas no capítulo 7 desse trabalho, utilizamos interpolações bidimensionais, cuja fórmula é mostrada em anexo.

5.3 Exemplo numérico

A seguir realizaremos um exemplo numérico do cálculo do VaR a partir da simulação de Monte Carlo.

Dada uma carteira fictícia composta pelos seguintes produtos no dia 14/09/1998:

1. Contratos de opção de compra (*call*) de Telebrás, código TCJ41, com as seguintes características:

Item	Valor
Ativo objeto	Ação de Telebrás PN
Preço de Exercício	R\$ 80,00
Data do Exercício	19/10/1998
Dias úteis até o vencimento	24
Quantidade na carteira	-1.000.000.000 (vendido)

Tabela 5.1: Características da opção TCJ41

2. Contratos de opção de compra (*call*) de Telebrás, código TCJ43, com as seguintes características:

Item	Valor
Ativo objeto	Ação de Telebrás PN
Preço de Exercício	R\$ 100,00
Data do Exercício	19/10/1998
Dias úteis até o vencimento	24
Quantidade na carteira	500.000.000 (comprado)

Tabela 5.2: Características da opção TCJ43

Outros dados

Neste dia, o mercado fechou com as seguintes taxas:

Fator de risco	Valor de fechamento
Ação Telebrás (S_{TELB4})*	R\$ 69,00
Volatilidade Telebrás	7,04%
Prêmio da opção TCJ41 (C_{TCJ41})*	R\$ 4,05
Prêmio da opção TCJ43 (C_{TCJ43})*	R\$ 0,77
Taxa de juros média diária do período (i)	0,121%

*Cotação por lote de 1.000 ações.

Tabela 5.3: Parâmetros de fechamento do mercado no dia 14/09/98

Volatilidade histórica estimada:

Através do modelo EWMA (veja capítulo 3) de estimação de volatilidade, podemos calcular as volatilidades e a correlação da taxa de juros do período e do preço do ativo objeto da opção (TELB4) e da sua volatilidade implícita:

Parâmetro	Valor estimado
Volatilidade Telebrás	7,04%
Volatilidade da Volatilidade implícita da opção de Telebrás	13,28%
Volatilidade da taxa de juros	0,00864%
Covariância Telebrás/Volat. Implícita da opção de Telebrás	$-5,03 \cdot 10^{-3}$
Covariância Telebrás/Taxa de juros	$-4,26 \cdot 10^{-6}$
Covariância Volat. implícita da opção de Telebrás/Taxa de juros	$3,65 \cdot 10^{-6}$

Tabela 5.4: Volatilidades e covariâncias estimadas dos fatores de risco

Volatilidade Implícita

O valor da volatilidade implícita é aquela que aplicada à função de cálculo do prêmio da opção por Black & Scholes, retorna o valor do prêmio praticado no mercado. Através de um processo iterativo, podemos encontrar o valor dessa volatilidade. Utilizando a função *Goal Seek* (Atingir Meta) do Excel, para atingir o valor de mercado da opção, chegamos a:

1. TCJ41:

$$\sigma_{\text{TCJ41}} = 5,34\%$$

2. TCJ43:

$$\sigma_{TCJ43} = 5,05\%$$

Matriz de Variância-covariância

A partir da tabela 5.4, podemos montar a matriz de variância-covariância (V) da taxa de juros e do preço da ação TELB4:

$$V = \begin{bmatrix} 4,95.10^{-3} & -5,03.10^{-3} & -4,26.10^{-6} \\ -5,03.10^{-3} & 1,13.10^{-2} & 3,65.10^{-6} \\ -4,26.10^{-6} & 3,65.10^{-6} & 7,46.10^{-9} \end{bmatrix}$$

Fazendo a decomposição da matriz V por Cholesky, obtemos a matriz A de mudança de base:

$$A = \begin{bmatrix} 7,04.10^{-2} & 0 & 0 \\ -7,14.10^{-2} & 7,87.10^{-2} & 0 \\ -6,05.10^{-5} & -8,53.10^{-6} & 6,11.10^{-5} \end{bmatrix}$$

As variações simuladas da taxa de juros e do preço da TELB4 e da volatilidade implícita, podem ser calculadas através da transformação dos números aleatórios Z1 e Z2, Z3, distribuídos segundo uma distribuição normal reduzida, utilizando-se o seguinte produto matricial:

$$\begin{bmatrix} \Delta S \\ \Delta \sigma \\ \Delta R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,04.10^{-2} & 0 & 0 \\ -7,14.10^{-2} & 7,87.10^{-2} & 0 \\ -6,05.10^{-5} & -8,53.10^{-6} & 6,11.10^{-5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}$$

A partir da expressão matricial acima, geramos 5.000 dados simulados para ΔS , $\Delta \sigma$ e ΔR , conforme ilustra a tabela abaixo:

Vetor simulado	Z1	Z2	Z3	ΔS	$\Delta \sigma$	ΔR
1	0,84	1,01	(0,37)	5,9%	1,9%	-0,008%
2	(0,13)	0,30	(0,17)	-0,9%	3,3%	0,000%
3	1,59	(0,13)	0,74	11,2%	-12,4%	-0,005%
4	(2,37)	0,85	0,01	-16,7%	23,7%	0,014%
5	(1,34)	0,28	(0,87)	-9,4%	11,8%	0,003%
6	0,65	(0,19)	(0,17)	4,6%	-6,1%	-0,005%
7	(1,60)	(1,13)	2,15	-11,3%	2,6%	0,024%
8	(0,66)	(2,51)	(1,09)	-4,6%	-15,0%	-0,001%
9	(0,66)	1,36	(0,05)	-4,7%	15,4%	0,003%
10	0,51	(0,78)	0,66	3,6%	-9,8%	0,002%
...	...	...	...	...	...	...
5.000	(0,79)	0,19	(0,13)	-5,5%	7,1%	0,004%

Tabela 5.5: Simulação dos retornos

A partir dos valores encontrados ao fechamento do mercado do dia 14/09/98 da taxa de juros, do preço da Telebrás e da volatilidade implícita, podemos transformar as variações simuladas em preços simulados para o fechamento do pregão do dia seguinte (tabela 5.6). Para isso, utilizaremos as seguintes expressões:

$$S = S_0 \cdot e^{\Delta S} \quad (5.15)$$

$$\sigma = \sigma_0 \cdot e^{\Delta \sigma} \quad (5.16)$$

$$R = (1 + R_0) \cdot e^{\Delta R} - 1 \quad (5.17)$$

onde S_0 é o preço da ação da Telebrás à vista do pregão do dia 14/09/98;

S é o valor simulado do preço da ação da Telebrás para o pregão do dia seguinte;

ΔS é o retorno simulado de S ;

σ_0 é o valor da volatilidade implícita da opção de Telebrás no pregão do dia 14/09/98;

σ é o valor simulado do valor da volatilidade implícita da opção de Telebrás para o pregão do dia seguinte;

$\Delta \sigma$ é o retorno simulado de σ ;

R_0 é o taxa de juros diária no mercado do dia 14/09/98;

R é o valor simulado da taxa de juros diária para o fechamento do mercado no dia seguinte;

ΔR é o retorno simulado de R ;

Vetor simulado	ΔS	$\Delta \sigma$	ΔR	S	σ_{TCJ41}	σ_{TCJ43}	R
1	5,9%	1,9%	-0,008%	73,19	5,15%	5,44%	0,113%
2	-0,9%	3,3%	0,000%	68,35	5,22%	5,52%	0,120%
3	11,2%	-12,4%	-0,005%	77,17	4,46%	4,72%	0,116%
4	-16,7%	23,7%	0,014%	58,40	6,40%	6,77%	0,135%
5	-9,4%	11,8%	0,003%	62,80	5,68%	6,01%	0,124%
6	4,6%	-6,1%	-0,005%	72,25	4,75%	5,02%	0,116%
7	-11,3%	2,6%	0,024%	61,64	5,18%	5,48%	0,145%
8	-4,6%	-15,0%	-0,001%	65,88	4,34%	4,59%	0,120%
9	-4,7%	15,4%	0,003%	65,85	5,89%	6,23%	0,124%
10	3,6%	-9,8%	0,002%	71,51	4,58%	4,84%	0,123%
...	...	...	...	...	...	...	...
5.000	-5,5%	7,1%	0,004%	65,28	5,42%	5,73%	0,125%

Tabela 5.6: Cálculo dos fatores de risco baseado nos retornos simulados

A partir dos juros, preços da TELB4 e volatilidade implícita simulados para o dia seguinte, podemos calcular, a partir do modelo de Black and Scholes, os preços das opções de compra TCJ41 e TCJ43 no fechamento do dia seguinte.

Vetor simulado	S	σ_{TCJ41}	σ_{TCJ43}	R	C_{TCJ41}	C_{TCJ43}
1	73,19	5,15%	5,44%	0,113%	5,70	1,27
2	68,35	5,22%	5,52%	0,120%	3,86	0,73
3	77,17	4,46%	4,72%	0,116%	6,63	1,31
4	58,40	6,40%	6,77%	0,135%	2,28	0,47
5	62,80	5,68%	6,01%	0,124%	2,66	0,49
6	72,25	4,75%	5,02%	0,116%	4,72	0,85
7	61,64	5,18%	5,48%	0,145%	1,93	0,26
8	65,88	4,34%	4,59%	0,120%	2,04	0,20
9	65,85	5,89%	6,23%	0,124%	3,85	0,87
10	71,51	4,58%	4,84%	0,123%	4,21	0,67
...	...	...	...	...	...	...
5.000	65,28	5,42%	5,73%	0,125%	3,11	0,57

Tabela 5.7: Cálculos dos prêmios das opções baseado nos fatores de riscos simulados

Com os preços de fechamento simulados das opções de compra, podemos avaliar a variação do valor da carteira:

$$VC = 500.000.000 \times (C_{S,TCJ43} - C_{0,TCJ43}) / 1.000 + \\ - 1.000.000.000 \times (C_{S,TCJ41} - C_{0,TCJ41}) / 1.000$$

Vetor simulado	C_{TCJ41}	C_{TCJ43}	ΔVC
1	5,70	1,27	(1.398.168,36)
2	3,86	0,73	167.443,14
3	6,63	1,31	(2.312.611,93)
4	2,28	0,47	1.621.068,36
5	2,66	0,49	1.245.442,28
6	4,72	0,85	(631.956,60)
7	1,93	0,26	1.865.785,05
8	2,04	0,20	1.721.340,80
9	3,85	0,87	247.731,87
10	4,21	0,67	(210.617,31)
...	...	...	...
5.000	3,11	0,57	841.335,08

Tabela 5.8: Simulação das variações do valor de mercado da carteira

A partir dos dados simulados, podemos então montar o histograma de VC:

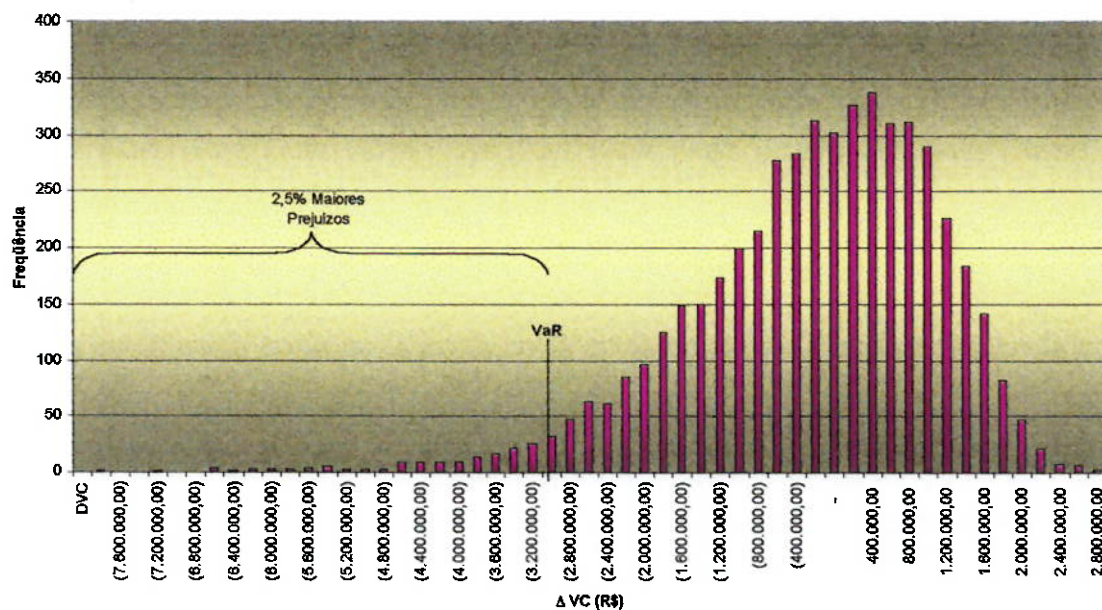


Figura 5.5: Histograma de ΔVC deste exemplo numérico

E calcular o VaR para uma um intervalo de confiança de 97,5% que será:
R\$ 3.115.011,15

6

Cálculo do VaR: Modelo de Valores Extremos

6.1 Introdução

Neste capítulo, utilizaremos a teoria estatística dos valores extremos (PICKANDS, 1975 e DAVISON *et al.*, 1990), aplicado ao cálculo do VaR de uma carteira de investimentos.

A Teoria dos Valores Extremos é um modelamento que busca encontrar conclusões estatísticas com relação aos valores extremos de populações ou processos aleatórios. Para isso, ela lida exclusivamente com os excedentes de limiares de alto nível, ou seja, os eventos localizados nas extremidades das curvas de distribuição de probabilidade. Segundo DAVISON *et al.* (1990), existe uma vasta literatura sobre aplicações dessa teoria em processos aleatórios de variáveis ambientais como altura de rios, nível dos mares, níveis de precipitação e de poluição, ou também aplicado em modelos para prever fadigas, tempo para falhas, resistência mecânicas, etc.. De forma análoga a essas aplicações, o que faremos nesse modelo aplicado ao VaR é tratar apenas dos movimentos que provocam prejuízo de alto nível, ou seja, localizados na cauda esquerda da curva de distribuição probabilidade do valor da carteira, objetivando encontrar uma boa estimativa da área sob ela e assim, conseguir calcular o VaR.

Na figura 6.1, procuramos esquematizar como podemos chegar à estimativa do VaR através da Teoria dos Valores Extremos:

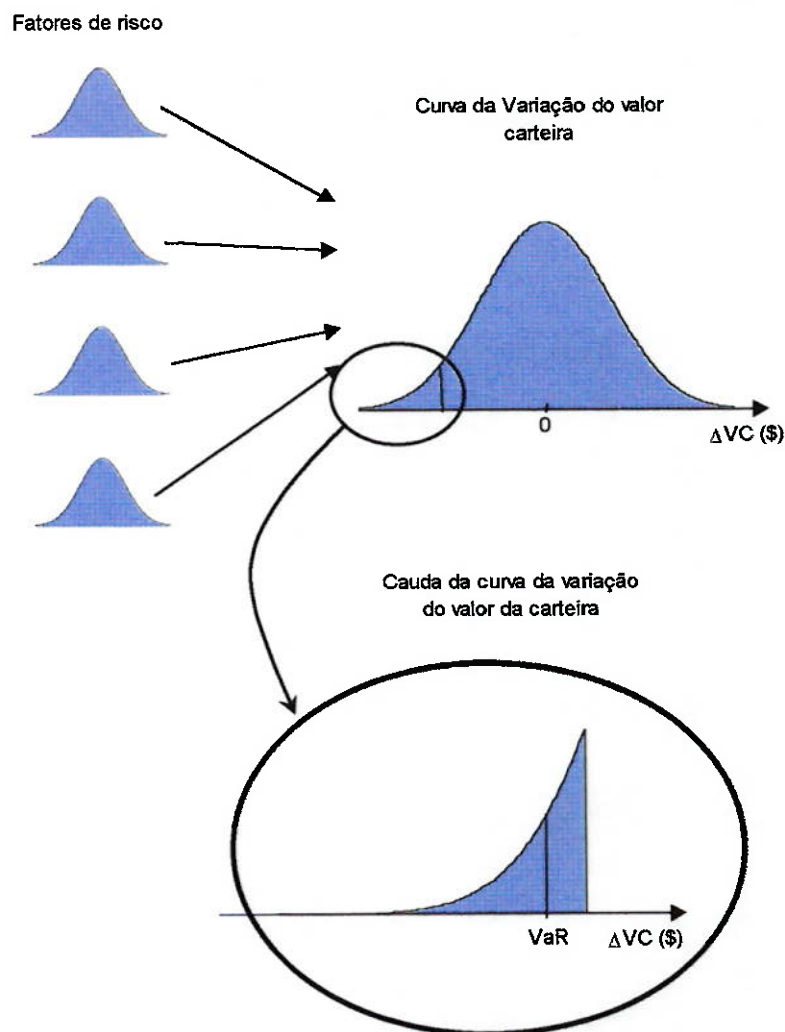


Figura 6.1: Estimativa do VaR pela análise da distribuição da cauda

Na figura 6.1, ao invés de estimarmos a curva de distribuição inteira, o que fazemos com o modelamento dos extremos é analisar somente as caudas, estimando uma distribuição mais precisa, na parte em que nos interessa: aquela aonde se localiza o VaR.

Como foi explicado nos capítulos anteriores, o cálculo do VaR é feito a partir da estimativa da curva de probabilidade do valor financeiro da carteira, a partir do qual atribui-se um intervalo de confiança e estima-se a perda máxima. Por utilizar elevados níveis de confiabilidade na montagem dos intervalos de confiança (no Banco utilizamos 97,5%, o Comitê da Basileia sugere a utilização de 99% e MORGAN (1994) defende 95%), as estimativas do VaR são feitas para limiares muito próximos às caudas da curva de distribuição dos retornos. Consequentemente, o cálculo correto ou não do VaR depende profundamente do cálculo correto das áreas sob as caudas das distribuições de probabilidade.

NEFTCI (1998) apresenta as seguintes justificativas para a utilização da Teoria dos Valores Extremos no cálculo do VaR ao invés do demais modelos atualmente aplicados no mercado:

- Estimativa somente das caudas: menores erros de ajuste

Na maioria dos modelos estatísticos utilizados, a estimativa do VaR é feita através da análise do comportamento histórico das taxas e preços de ativos de mercado que influenciam no valor da carteira em questão. Por exemplo, para o cálculo da volatilidade dos fatores de risco (utilizada no modelo analítico paramétrico ou nas simulações de Monte Carlo), alguns modelos tentam dar uma maior importância aos eventos mais recentes através da utilização de janela móvel ou atribuição de pesos maiores os retornos mais recentes¹. Entretanto, em nenhum deles é feita uma distinção levando-se em conta o quão extremos os retornos observados foram.

Como consequência, esses modelos perdem eficiência, pois tentam estimar toda a distribuição de probabilidade da carteira, ao invés focar somente nas caudas. Como se sabe, toda e qualquer estimativa de uma curva se trata de uma tentativa de ajustar *simultaneamente* diferentes setores dela. Ao estimarmos toda a distribuição ao mesmo tempo, estamos dando a mesma importância ao ajuste de tanto às partes centrais, quanto às caudas da curva. Deste modo, um ajuste mais preciso das partes centrais da curva está sendo feito em detrimento de um maior erro nas caudas.

Em contraste, se tentássemos aproximar somente as caudas, este erro estaria sendo minimizado e consequentemente, conseguiríamos obter uma melhor estimativa do setor da curva que realmente nos interessa, quando nosso objetivo é o cálculo do VaR. Isso é particularmente válido quando o resto da distribuição de probabilidade não é necessária, como ocorre no caso do cálculo do VaR.

- Não é feita suposição sobre as distribuições dos retornos

Uma outra justificativa para a utilização da teoria de valores extremos, é que as distribuições dos retornos das taxas e preços de ativos de mercado são em sua maioria

¹ Vide capítulo 3 deste trabalho, os métodos para estimativa da volatilidade pela janela móvel e pelo EWMA.

de *caudas pesadas*², não seguindo satisfatoriamente uma distribuição gaussiana. Por outro lado, um método que aproxima as caudas assintoticamente, como é feito no modelamento dos extremos, pode ser mais apropriado, uma vez que não impõe que os retornos sejam normalmente distribuídos, como foi feito nos modelos analítico paramétrico e de Monte Carlo.

- *Comportamento distinto do mercado em momentos de crises*

A terceira justificativa dada é a de que existe sempre a possibilidade de que os movimentos extremos das taxas e preços serem causados por mecanismos estruturalmente diferentes do funcionamento normal dos mercados. Como exemplo, SHAW (1997) cita o caso dos diversos índices das bolsas de valores de todo o mundo: em condições normais de mercado, a correlação entre eles é apenas moderada, entretanto, em momentos de crise ou de euforia, quando ocorrem os grandes movimentos extremos de seus valores, esta correlação cresce profundamente. Consequentemente, mecanismos de proteção contra perdas e travas de posições podem não funcionar de forma eficaz, já que foram feitos utilizando correlações entre os fatores de risco calculadas em períodos normais do mercado, mas que podem mudar em tempos de crise.

Em razão das justificativas dadas acima, NEFTCI (1998) argumenta que a teoria estatística dos extremos consegue satisfazer às principais críticas apresentadas à maioria dos modelos utilizados no mercado para a estimativa do VaR. Visto que é possível que seja dada uma maior ênfase nas caudas das distribuições de probabilidade dos retornos da carteira, levando a uma estimativa mais precisa dos limiares extremos e, além disso, por se tratar de um modelo não paramétrico (ele é assintótico), ele torna desnecessária a imposição de distribuições de probabilidade aos retornos.

² Distribuições com caudas pesadas apresentam probabilidade maiores de eventos ocorrerem próximos às extremidades de suas caudas do que na distribuição normal.

6.2 Aplicação da Teoria dos Valores Extremos ao VaR

A seguir apresentaremos como a Teoria dos Valores Extremos é aplicada para o cálculo do VaR, entretanto, muitas vezes não entraremos em detalhes sobre as justificativas matemáticas feitas para se chegar às expressões que utilizamos. Caso o leitor se interesse pelo assunto, sugerimos a leitura da Modelo Estatístico de Extremos em anexo, ou a leitura de e.g. PICKANDS (1975), DAVISON *et al.* (1990) e NEFTCI (1998).

6.2.1 Seleção dos eventos extremos

No modelamento de extremos, buscamos estimar a distribuição das caudas para, a partir dela, calcular o VaR da carteira associado ao intervalo de confiança estabelecido.

Como dados para a amostra para o levantamento das distribuições, são utilizados os dados obtidos através de uma “simulação” histórica dos retornos do valor de mercado da carteira em análise.

A chamada simulação histórica é uma metodologia semelhante à feita com Monte Carlo, só que ao invés de gerarmos aleatoriamente os retornos dos fatores de risco baseados em alguma distribuição paramétrica, utilizamos os retornos reais observados no passado. Estes retornos por sua vez são utilizados para calcular as possíveis variações do valor de mercado da carteira (veja a figura 6.2). Consequentemente, não é necessária a realização de nenhuma suposição quanto à distribuição dos retornos dos fatores de risco, muito menos quanto às suas correlações. A única suposição feita é de que os retornos futuros sigam o mesmo comportamento do passado.

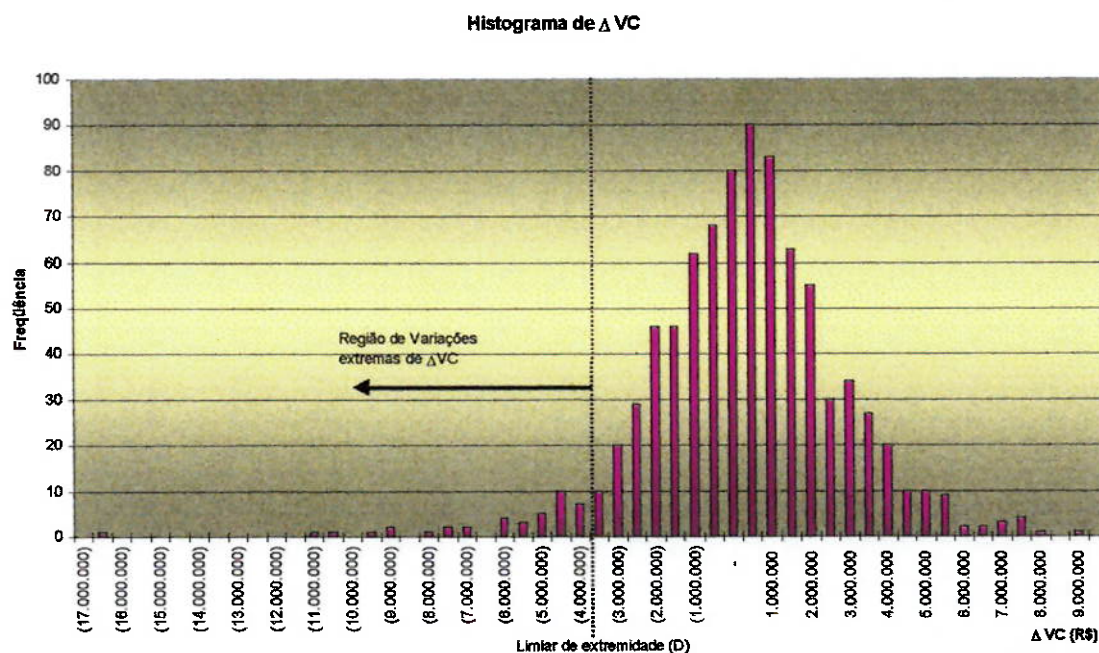


Figura 6.2: Histograma das variações do valor de mercado de uma carteira (ΔVC)

A partir desses dados da variação do valor da carteira, é feita a seleção apenas daqueles que provocaram uma perda acima de um certo nível, a este nível denominaremos de limiar de extremidade³. O valor desse limiar é estipulado arbitrariamente, entretanto ele deve ser significativamente menor do que o VaR a que se deseja estimar. No nosso caso, estipularemos o valor do limiar de extremidade como um valor que aproximadamente separa as 5% maiores perdas observadas das demais (veja na figura 6.3, o esquema para a simulação histórica e seleção dos valores extremos).

³ Observe que estamos estimando apenas a cauda inferior da distribuição de Δx , pois para o cálculo do VaR interessam somente os movimentos que causam prejuízo. Uma análise semelhante poderia ser feita, caso quiséssemos estimar a cauda superior.

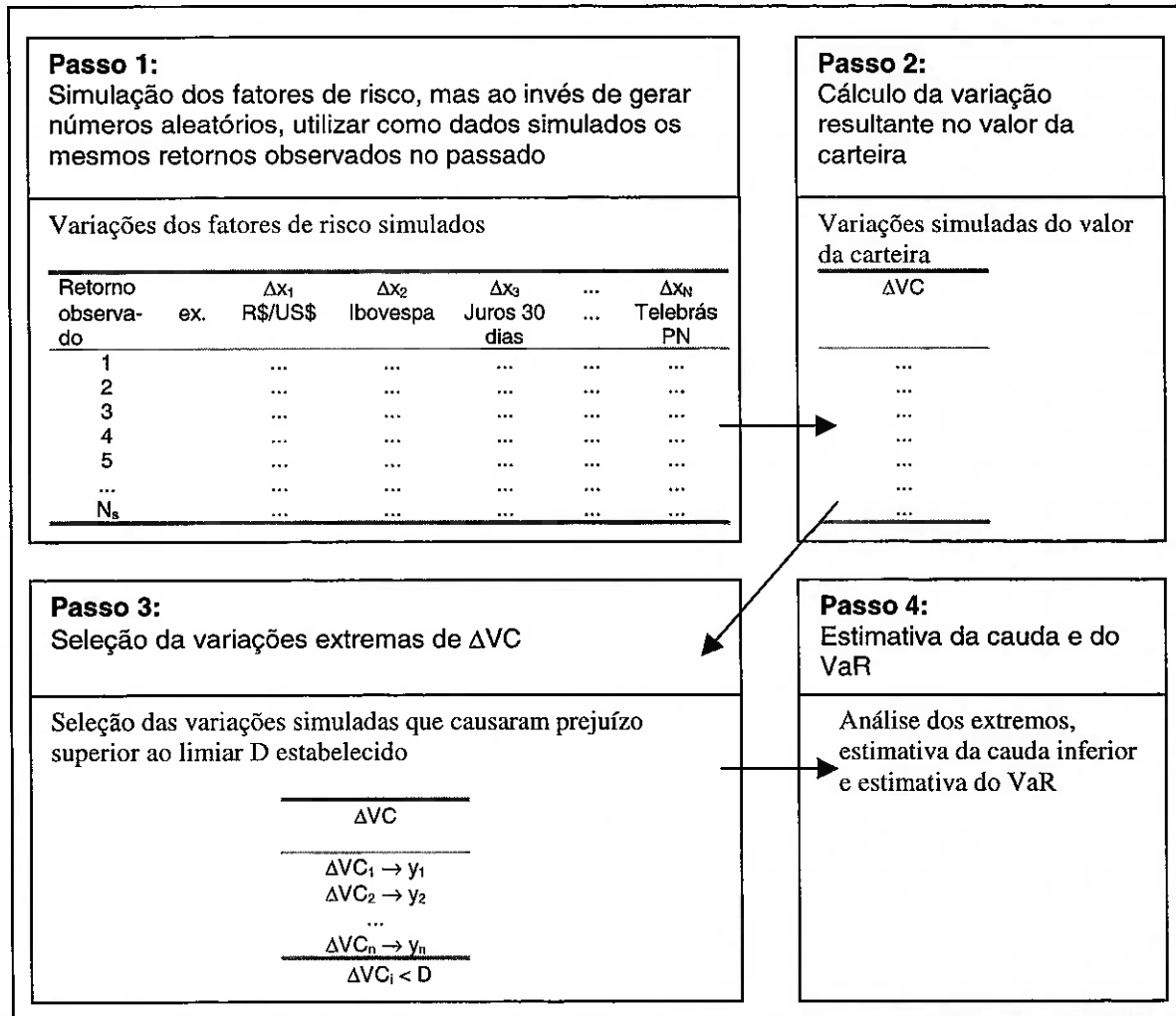


Figura 6.3: Esquema para simulação histórica e análise de extremos

6.3 Estimação da Distribuição de probabilidade condicional das caudas

Uma vez obtidos os eventos extremos da curva da carteira, utilizaremos esses dados para estimar a curva de distribuição da cauda inferior. Para isso, precisamos antes definir algumas variáveis.

Seja Δx uma variável aleatória representando as variações do valor de mercado da carteira e D o limiar de extremidade, tal que $\text{VaR} \ll D$. Então todo Δx que satisfaz $\Delta x < D < 0$ é considerado como evento extremo, e portanto, utilizado para a estimativa da cauda de Δx (veja a figura 6.4).

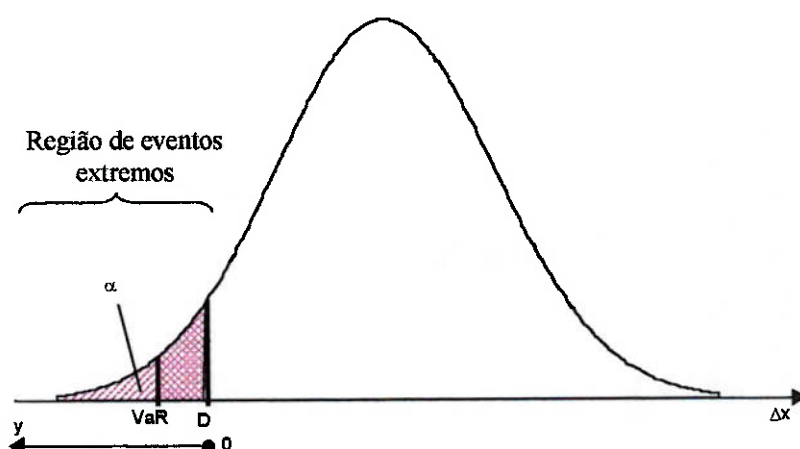
Distribuição de probabilidade de Δx 

Figura 6.4: Distribuição da variação do valor da carteira

Na figura 6.4, expressão que associa o VaR, utilizando um nível de confiança de $1 - \alpha$, é dada por:

$$P(\Delta x \leq \text{VaR}) = \alpha \quad (6.1)$$

Agora, considere $y \in \mathcal{R}^+$, como o valor excedente de Δx com relação ao limiar D , ou seja, $y = D - \Delta x$, apenas para os casos em que $\Delta x < D$ (veja a figura 6.4).

PICKANDS (1975) mostrou que a distribuição acumulada probabilidade de y , $F_d(y)$, condicionada⁴ a $\Delta x < D$, pode ser aproximada pela distribuição generalizada de Pareto $G(y, \sigma^d, k)$:

$$G(y, \sigma^d, k) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{k \cdot y}{\sigma^d}\right)^{1/k}, & k \neq 0, \sigma^d > 0 \\ 1 - e^{-y/\sigma^d}, & k = 0, \sigma^d > 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

onde $0 < y < \infty$, se $k < 0$

e $0 < y < \sigma^d / k$, se $k > 0$

Os parâmetros σ^d e k devem ser estimados. Segundo PICKANDS (1975), $G(\cdot)$ será uma boa aproximação de $F_d(\cdot)$ quando D for grande o suficiente.

⁴ Na distribuição condicionada da cauda, a área sobre ela tem valor igual a 1.

6.3.1 Estimativa dos parâmetros

Considere uma amostra com n retornos excedentes inferiores ao limiar D pré-definido, em termos de y :

$$\{y_1, \dots, y_n\}$$

Segundo, DAVISON (1990), os parâmetros σ^d e k de 6.2 podem ser estimados de forma que maximizem a função log-verossimilhança da função de densidade de probabilidade de y , para cada ponto y_i encontrados na amostra. Esta por sua vez pode ser expressa por:

$$-n \cdot \ln \sigma^d + \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \cdot \sum_{i=1}^n \ln \left(1 - \frac{k \cdot y_i}{\sigma^d} \right) \quad (6.3)$$

onde n é o número de excedentes de D .

Escrevendo-se $\sigma = k / \tau$ e diferenciando com relação a τ e k , DAVISON (1990) mostra que o máximo da função com relação a k será alcançado quando:

$$k = k(\tau) = -\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \ln(1 - \tau \cdot y_i) \quad (6.4)$$

Consequentemente, a estimativa da máxima verossimilhança é reduzida a solução de uma única equação:

$$\frac{n}{\tau} = \left(\frac{1}{k(\tau)} - 1 \right) \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i}{1 - \tau \cdot y_i} \right) \quad (6.5)$$

6.3.2 Estimativa do VaR

Utilizando a aproximação de $F_d(y)$ por $G(y, k, \sigma)$ e avaliando os parâmetros k e y , conseguimos estimar a distribuição da cauda, entretanto, ela está condicionada à ocorrência do evento extremo ($\Delta x < D$). Uma vez encontrada a distribuição condicionada de y , temos que voltar à distribuição não condicionada de x , para que possamos então calcular o VaR. Para isso, utilizaremos as propriedades da probabilidade condicionada para relacionar a distribuição condicionada de $F_d(y)$ com a distribuição de $F(\Delta x)$.

Aplicando para o nosso caso as propriedades da probabilidade condicionada (veja a ilustração na figura 6.5), temos:

$$P(0 \leq y \leq y_0 \mid \Delta x < D) = F_d(y_0) \quad (6.6)$$

$$P(0 \leq y \leq y_0) = F(D) - F(D - y_0) \quad (6.7)$$

$$P(\Delta x \leq D) = F(D) \quad (6.8)$$

Como $P(0 \leq y \leq y_0) \leq P(\Delta x \leq D)$, temos que

$$P[(0 \leq y \leq y_0) \cap (\Delta x \leq D)] = F(D) - F(D - y_0) \quad (6.9)$$

então chegamos a:

$$F_d(y_0) = \frac{F(D) - F(D - y_0)}{F(D)} \quad (6.10)$$

ou

$$F(D - y_0) = F(D) \cdot [1 - F_d(y_0)] \quad (6.11)$$

Distribuição de probabilidade de Δx

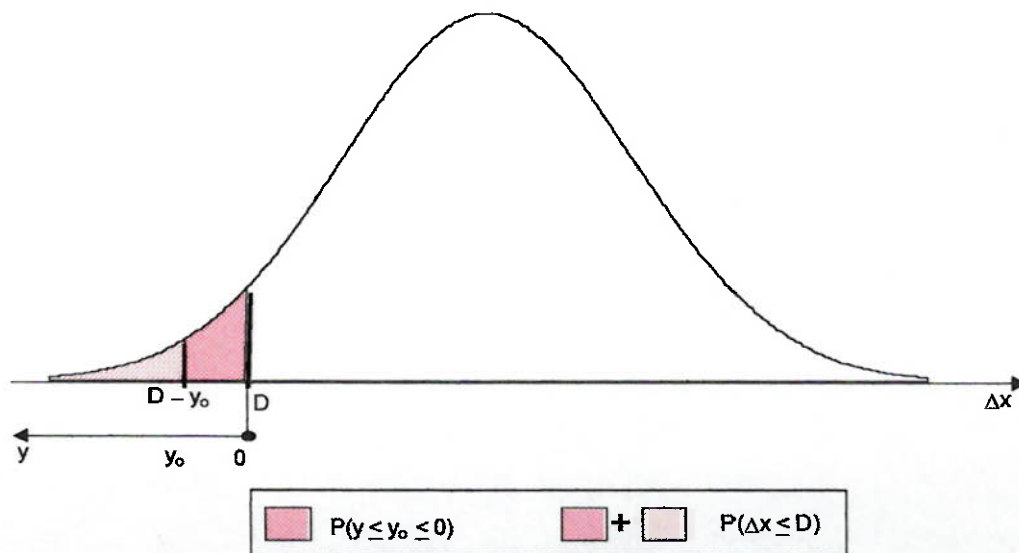


Figura 6.5: Probabilidades nas caudas da distribuição da variação do valor da carteira

Aproximando $F_d(y_0) \cong G(\cdot)$ e utilizando a equação 6.2 então temos que

$$F(D - y_0) \cong F(D) \cdot \left(1 - \frac{k \cdot y_0}{\sigma}\right)^{1/k}, \quad k \neq 0 \quad (6.12)$$

A expressão acima depende de $F(U)$, até então desconhecido, que representa a probabilidade de que a observação irá exceder o limiar D . Uma possível estimativa de $F(D)$ pode ser obtida através da frequência da amostra:

$$\hat{F}(D) = \frac{n}{N} \quad (6.13)$$

onde n é o número de excedentes de D e N é o número total de dados da amostra.

Utilizando as estimativas de $F(D)$, k e $\hat{\sigma}^d$ e aplicando na equação 6.12 temos:

$$\hat{F}(D - y_o) \cong \frac{n}{N} \cdot \left(1 - \frac{\hat{k} \cdot y_o}{\hat{\sigma}} \right)^{\frac{1}{k}} \quad (6.14)$$

Da equação 6.1 temos que

$$F(\text{VaR}) = F(D - y_{\text{VaR}}) = \alpha \quad (6.15)$$

então substituindo em 6.14 temos:

$$\alpha = \frac{n}{N} \cdot \left(1 - \frac{\hat{k} \cdot y_{\text{VaR}}}{\hat{\sigma}} \right)^{\frac{1}{k}} \quad (6.16)$$

Resolvendo a equação acima com relação ao y_{VaR} desconhecido, chegamos a única solução do VaR correspondente ao nível de confiança de $1 - \alpha$:

$$\text{VaR} = D - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{k}} \cdot \left(1 - e^{\ln\left(\frac{\alpha \cdot N}{n}\right)^k} \right) \quad (6.17)$$

6.4 Exemplo numérico

A seguir realizaremos um exemplo numérico do cálculo do VaR a partir da aplicação da Teoria de Extremos.

Dada uma carteira fictícia composta pelos seguintes produtos no dia 14/09/1998:

1. Contratos de opção de compra (*call*) de Telebrás, código TCJ41, com as seguintes características:

Item	Valor
Ativo objeto	Ação de Telebrás PN
Preço de Exercício	R\$ 80,00
Data do Exercício	19/10/1998
Dias úteis até o vencimento	24
Quantidade na carteira	-1.000.000.000 (vendido)

Tabela 6.1: Características da opção TCJ41

2. Contratos de opção de compra (*call*) de Telebrás, código TCJ43, com as seguintes características:

Item	Valor
Ativo objeto	Ação de Telebrás PN
Preço de Exercício	R\$ 100,00
Data do Exercício	19/10/1998
Dias úteis até o vencimento	24
Quantidade na carteira	500.000.000 (comprado)

Tabela 6.2: Características da opção TCJ43

Outros dados

Neste dia, o mercado fechou com as seguintes taxas:

Fator de risco	Valor de fechamento
Ação Telebrás (S_{TELB4})*	R\$ 69,00
Volatilidade Telebrás	7,04%
Prêmio da opção TCJ41 (C_{TCJ41})*	R\$ 4,05
Prêmio da opção TCJ43 (C_{TCJ43})*	R\$ 0,77
Taxa de juros média diária do período (i)	0,121%

*Cotação por lote de 1.000 ações.

Tabela 6.3: Parâmetros de fechamento do mercado no dia 14/09/98

Volatilidade Implícita

O valor da volatilidade implícita é aquela que aplicada à função de cálculo do prêmio da opção por Black & Scholes, retorna o valor do prêmio praticado no mercado. Através de um processo iterativo, podemos encontrar o valor dessa volatilidade. Utilizando a função *Goal Seek* (Atingir Meta) do Excel, para atingir o valor de mercado da opção, chegamos a:

1. *TCJ41*:

$$\sigma_{TCJ41} = 5,34\%$$

2. *TCJ43*:

$$\sigma_{TCJ43} = 5,05\%$$

Análise histórica

A partir de dados históricos dos preços do preço da ação de Telebrás (S), da taxa de juros diária média para o período em análise (R) e assumindo que a volatilidade implícita não mude significativamente de um dia para outro⁵, calculamos as variações diárias observadas no passado de R e S:

Data do retorno	ΔS	ΔR
01/06/95	1,9%	0,00045%
02/06/95	4,6%	0,00111%
05/06/95	1,9%	-0,00007%
06/06/95	-3,7%	-0,00003%
07/06/95	-4,3%	0,00023%
08/06/95	-0,2%	0,00010%
09/06/95	-5,3%	0,00081%
12/06/95	2,3%	0,00020%
13/06/95	4,4%	-0,00107%
14/06/95	-5,4%	-0,00009%
...	...	...
11/09/98	12,6%	0,00028%

Tabela 6.4: Retornos observados

A partir dos valores encontrados ao fechamento do mercado do dia 14/09/98 da taxa de juros, do preço da Telebrás e da volatilidade implícita, podemos encontrar os preços de S e R para o fechamento do pregão do dia seguinte *caso os retornos observados no passado ocorressem novamente hoje*. Para isso, utilizaremos as seguintes expressões:

$$S = S_0 \cdot e^{\Delta S}$$

$$R = (1 + R_0) \cdot e^{\Delta R} - 1$$

onde S_0 é o preço da ação da Telebrás à vista do pregão do dia 14/09/98;

S é o valor calculado do preço da ação da Telebrás para o pregão do dia seguinte;

ΔS é o retorno observado de S na série histórica;

R_0 é o taxa de juros diária no mercado do dia 14/09/98;

R é o valor calculado da taxa de juros diária para o fechamento do mercado no dia seguinte;

ΔR é o retorno observado de R na série histórica;

⁵ Esta suposição devido à não disponibilidade de uma base de dados grande o suficiente para a utilização na análise histórica.

Data do retorno	ΔS	ΔR	S	R
01/06/95	1,9%	0,00045%	70,31	0,121%
02/06/95	4,6%	0,00111%	72,21	0,122%
05/06/95	1,9%	-0,00007%	70,33	0,121%
06/06/95	-3,7%	-0,00003%	66,49	0,121%
07/06/95	-4,3%	0,00023%	66,08	0,121%
08/06/95	-0,2%	0,00010%	68,85	0,121%
09/06/95	-5,3%	0,00081%	65,44	0,122%
12/06/95	2,3%	0,00020%	70,61	0,121%
13/06/95	4,4%	-0,00107%	72,10	0,120%
14/06/95	-5,4%	-0,00009%	65,39	0,121%
...	...	...	...	...
11/09/98	12,6%	0,00028%	78,25	0,121%

Tabela 6.5: Levantamento de S e R com base nos retornos históricos

A partir dos juros, preços da TELB4 levantados para o dia seguinte, podemos calcular, a partir do modelo de Black and Scholes, os preços das opções de compra TCJ41 e TCJ43 no fechamento do dia seguinte.

Data do retorno	S	R	C_{TCJ43}	C_{TCJ41}
01/06/95	70,31	0,121%	0,84	4,38
02/06/95	72,21	0,122%	1,07	5,18
05/06/95	70,33	0,121%	0,84	4,39
06/06/95	66,49	0,121%	0,48	3,03
07/06/95	66,08	0,121%	0,46	2,90
08/06/95	68,85	0,121%	0,68	3,83
09/06/95	65,44	0,122%	0,41	2,71
12/06/95	70,61	0,121%	0,87	4,50
13/06/95	72,10	0,120%	1,05	5,11
14/06/95	65,39	0,121%	0,41	2,69
...	...	...	...	...
11/09/98	78,25	0,121%	2,13	8,18

Tabela 6.6: Prêmios das opções baseadas nos valores de S e R levantados

Com os preços de fechamento levantados das opções de compra, podemos avaliar a variação do valor da carteira:

$$VC = 500.000.000 \times (C_{S,TCJ43} - C_{0,TCJ43}) / 1.000 + \\ - 1.000.000.000 \times (C_{S,TCJ41} - C_{0,TCJ41}) / 1.000$$

Data do retorno	C_{TCJ43}	C_{TCJ41}	ΔVC
01/06/95	0,84	4,38	(298.128,16)
02/06/95	1,07	5,18	(974.924,85)
05/06/95	0,84	4,39	(302.796,32)
06/06/95	0,48	3,03	880.769,53
07/06/95	0,46	2,90	991.286,53
08/06/95	0,68	3,83	181.862,55
09/06/95	0,41	2,71	1.158.164,40
12/06/95	0,87	4,50	(399.304,92)
13/06/95	1,05	5,11	(922.594,93)
14/06/95	0,41	2,69	1.176.088,24
...	...	...	...
11/09/98	2,13	8,18	(3.449.826,89)

Tabela 6.7: Variação do valor de mercado da carteira baseada nos retornos levantados

Uma vez levantados as possíveis variações do valor da carteira caso os retornos observados no passado se repetissem na data de análise (14/09/98), podemos então selecionar os movimentos mais extremos (para os valores negativos)

Do total de 823 dados levantados, utilizamos como o limiar de extremidade o valor do retorno de ΔVC que separava dos 5% maiores prejuízos, ou seja o 41^o maior prejuízo levantado: $D = R\$ (857.259,02)$. Assim podemos calcular os $y_i = \Delta VC - D$ para os eventos extremos selecionados:

Maiores prejuízos (i)	ΔVC (ordem crescente)	$y_i (\Delta VC - D)$
1	(3.449.826,89)	2.592.567,87
2	(3.073.093,94)	2.215.834,92
3	(2.717.200,57)	1.859.941,55
4	(2.499.915,28)	1.642.656,26
5	(2.191.985,52)	1.334.726,50
6	(2.080.959,48)	1.223.700,46
7	(1.955.113,19)	1.097.854,17
8	(1.837.113,79)	979.854,77
9	(1.648.178,28)	790.919,26
10	(1.647.864,25)	790.605,23
...	...	...
39	(894.213,72)	36.954,71
40	(881.940,84)	24.681,82
41	(857.259,02)	-

Tabela 6.8: Maiores prejuízos dentre os ΔVC levantados e cálculo de y_i

Aplicando os valores y_i obtidos nas equação 6.5, obtemos a solução da equação para τ :

$$\tau = -9,07 \cdot 10^{-8}$$

O valor de k pode ser obtido, aplicando τ encontrado na equação 6.4, então:

$$\hat{k}(\tau) = -4,987 \cdot 10^{-2}$$

Então o valor de $\hat{\sigma}$ é:

$$\hat{\sigma} = \hat{k} / \tau = 549.805$$

Obtidas as estimativas de k e de σ , podemos agora calcular o VaR para um nível de confiança de 97,5% utilizando a expressão 6.17:

$$\text{VaR} = 857259,02 - \frac{549805}{-4,987 \cdot 10^{-2}} \cdot \left(1 - e^{\ln\left(\frac{0,025 \cdot 837}{41}\right) \cdot (-4,987 \cdot 10^{-2})} \right)$$

$$\text{VaR} = \text{R\$ } 1.242.940,25$$

7

Análise e comparação dos modelos apresentados

Neste capítulo realizaremos um estudo comparativo entre as estimativas do VaR segundo os três modelos apresentados nos capítulos anteriores: o analítico paramétrico, o de simulação de Monte Carlo e o através da análise dos eventos extremos. A partir dessa análise, procuraremos encontrar os pontos fortes e fracos de cada um dos modelos e chegar em algum tipo de conclusão quanto a aplicabilidade de algum deles com relação ao caso específico do Banco.

Para isso, faremos o seguinte:

1. Para uma carteira hipotética, composta pelos principais produtos financeiros utilizados na carteira do Banco, estimaremos dia a dia o seu VaR.
2. Para esta mesma carteira, calcularemos o resultado efetivo, caso o Banco ficasse posicionado com a mesma carteira durante o período de um dia.
3. Realizaremos a comparação entre o valor estimado da perda máxima com relação ao resultado efetivo da carteira. Caso ao final do dia o resultado da carteira for negativo e de magnitude superior à estimativa do VaR, o modelo falhou, caso contrário, o modelo conseguiu prever a perda.

É de se esperar que, ao compararmos a estimativa do VaR com o subsequente resultado da carteira, a taxa de falha do modelo (número total de falhas da estimativa dividido pela quantidade total de estimativas feitas) seja aproximadamente igual àquela estipulada pelo modelo, ou seja, se o VaR é calculado com um nível de confiança de e.g. 97,5%, espera-se que a sua estimativa seja ultrapassada em cerca de 2,5% das vezes. Entretanto, ao realizar essa contagem, muito provavelmente não encontraremos

exatamente uma taxa de falha de 2,5%. Uma percentagem maior pode ocorrer devido simplesmente à má sorte, como 3 ou 3,5%. Entretanto, se a taxa de falha for muito grande, como 15%, podemos imaginar que essa taxa não se deve somente à má sorte, e que o modelo aplicado provavelmente apresenta algum tipo de problema.

Empiricamente, poderíamos assumir que, o modelo que apresentar uma taxa de falha mais próximo da estipulada, é aquele que apresenta melhor estimativa.

Por outro lado, mesmo que o modelo apresente uma taxa de falha próxima à estipulada, ele pode fazer isso, com um menor ou maior erro. Como exemplo imagine a situação do VaR utilizado como ferramenta de controle e limite de posição da Tesouraria: caso o VaR seja grande demais em relação ao “real”, uma grande quantidade de oportunidades de negócios e portanto, possibilidades de realização de lucros estão sendo desperdiçadas devido ao fato do nível de risco das posições da Tesouraria estar superestimado. Por outro lado, um modelo que apresente uma estimativa do risco subestimada, pode causar prejuízos em excesso, além do níveis que o Banco está disposto a se expor.

Como para a estimativa do VaR estamos interessados somente na análise das perdas poderíamos definir o erro da estimativa da seguinte forma:

$$EQM_{\text{perdas}} = \frac{\sum_{i=1}^N (\Delta VC_i - VaR_i)^2}{N} \quad (7.1)$$

onde ΔVC_i são as observações da variação do valor da carteira de um dia para o outro (resultado) que sejam inferiores a zero ($\Delta VC_i < 0$), VaR_i são as respectivas estimativas do VaR diário e N é o número de vezes em que ΔVC é menor que zero.

Entretanto, cabe ressaltar que o VaR não é um modelo para a estimativa da perda média e sim para estimativa da perda máxima a um determinado nível de confiança. A introduzir a restrição ao VaR de que o seu valor não seja ultrapassado pela perda observada em uma certa porcentagem das vezes, isso faz com que a sua estimativa tenha um erro quadrático médio superior ao erro da estimativa da perda média. Logo, por não se tratar de um modelo de regressão propriamente dito, o seu objeto não é necessariamente que o erro quadrático seja minimizado. O erro quadrático sim, pode ser utilizado como um parâmetro para a análise de quanto a medida do VaR está subestimando ou superestimando o risco real da carteira.

7.1 Cálculo retroativo do VaR e do Resultado da carteira

Para uma dada carteira¹, calculou-se o VaR diário a partir dos três modelos apresentados nesse trabalho de formatura. Esse cálculo foi feito de forma retroativa para um grande número de dias (total de 258 dias úteis) com o objetivo de formar uma base de estimativas do VaR, pelos diversos modelos, grande o suficiente para que pudéssemos realizar uma análise comparativa entre eles.

Ao calcularmos o VaR para uma determinada data do passado, isso foi feito utilizando apenas as informações que teríamos caso estivéssemos estimando-o naquele dia, ou seja, o VaR foi calculado a partir das informações anteriores à data da estimativa.

Uma vez calculado o VaR, procede-se o cálculo do resultado referente a variação diária do valor de mercado da mesma carteira em que foi calculado o VaR. Então é feita a comparação do resultado da carteira com relação ao VaR previamente estimado, ou seja, a análise de falha da estimativa e o cálculo do erro quadrático.

Na tabela abaixo, apresentamos alguns dos valores das estimativas do VaR e o resultado.

Data	Resultado	VaR por Paramétrico	VaR por Monte Carlo	VaR por Extremo
01-09-97	2.782.932	(909.020)	(1.229.574)	(713.862)
02-09-97	(360.080)	(619.283)	(1.794.473)	(652.336)
03-09-97	(818.378)	(235.407)	(1.504.144)	(515.159)
04-09-97	1.473.768	(285.900)	(1.701.333)	(561.908)
05-09-97	211.447	(1.200.044)	(1.683.122)	(1.175.375)
08-09-97	148.812	(213.111)	(1.470.051)	(672.926)
09-09-97	208.858	(388.028)	(1.392.582)	(762.404)
...	...	...	...	...
13-10-98	1.923.072	(8.391.844)	(10.071.654)	(4.494.414)
14-10-98	(5.750.215)	(6.118.682)	(8.616.526)	(3.470.003)
15-10-98	3.116.260	(10.250.244)	(10.942.207)	(5.309.989)

(*) valores em reais

Tabela 7.1 Cálculo do VaR pelos modelos de Extremos, Monte Carlo e Analítico Paramétrico e cálculo do resultado efetivo da carteira

¹ Basicamente a carteira é composta por ações de Telebrás PN (cujo nome mudou após a privatização para Recibos de Telebrás PN), opções de compra de ações de Telebrás PN, contratos futuros de dólar comercial e DI e contratos de opção de compra de dólar comercial.

Abaixo apresentamos graficamente os valores do VaR calculado para a carteira para cada um dos modelos analisados e os respectivos resultados efetivos observados.

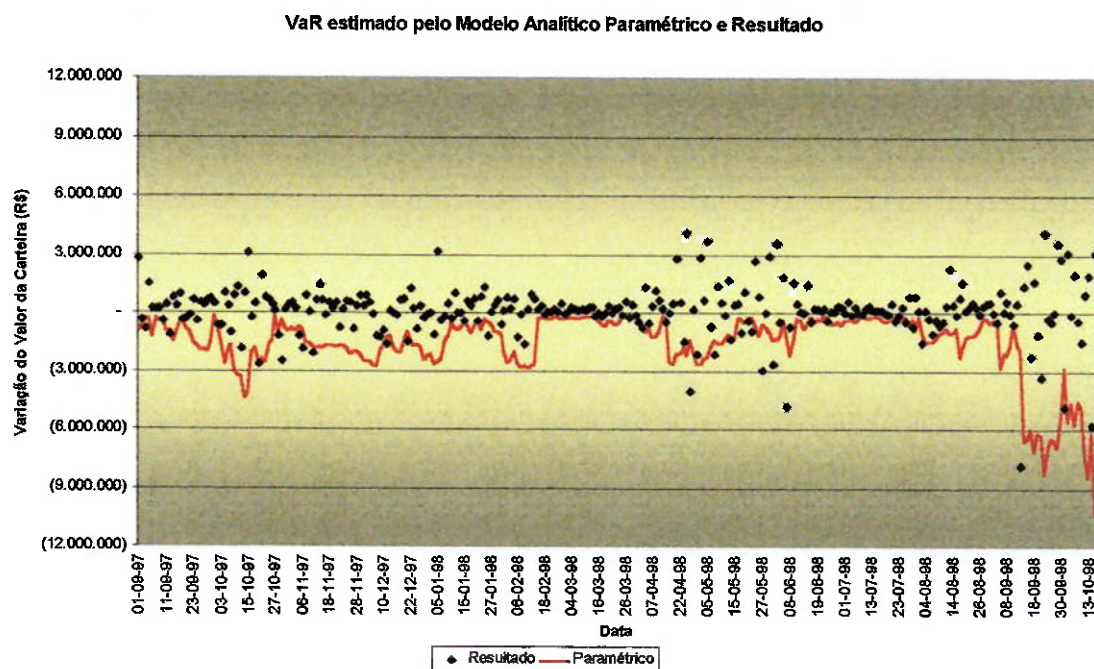


Figura 7.1: Comparação com o modelo analítico paramétrico

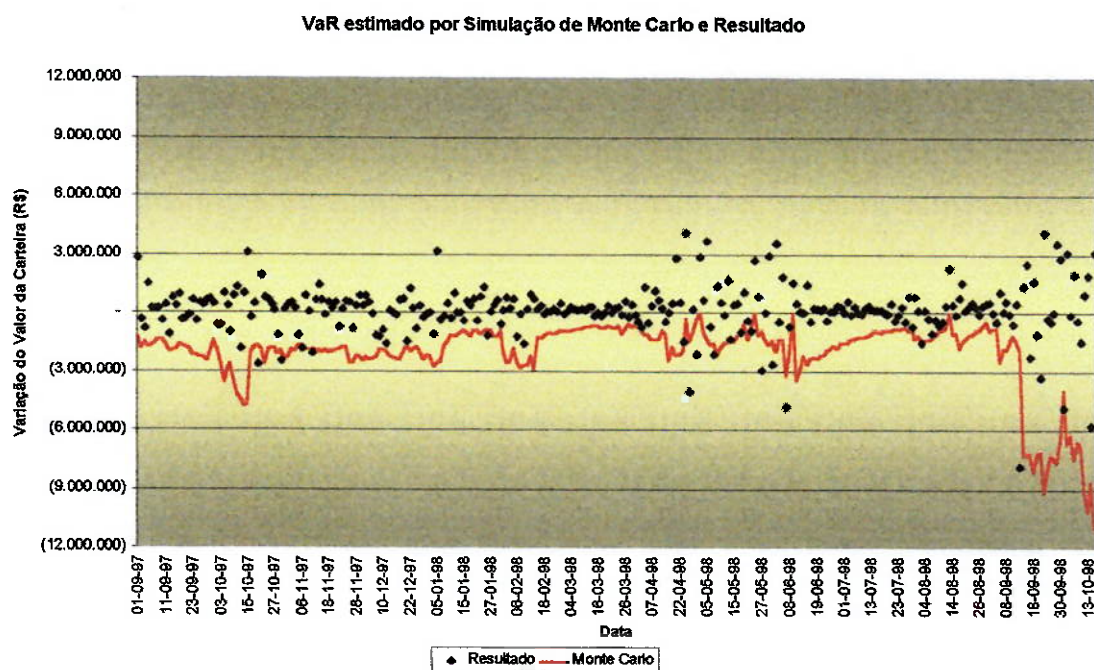


Figura 7.2: Comparação com o modelo de Simulação de Monte Carlo

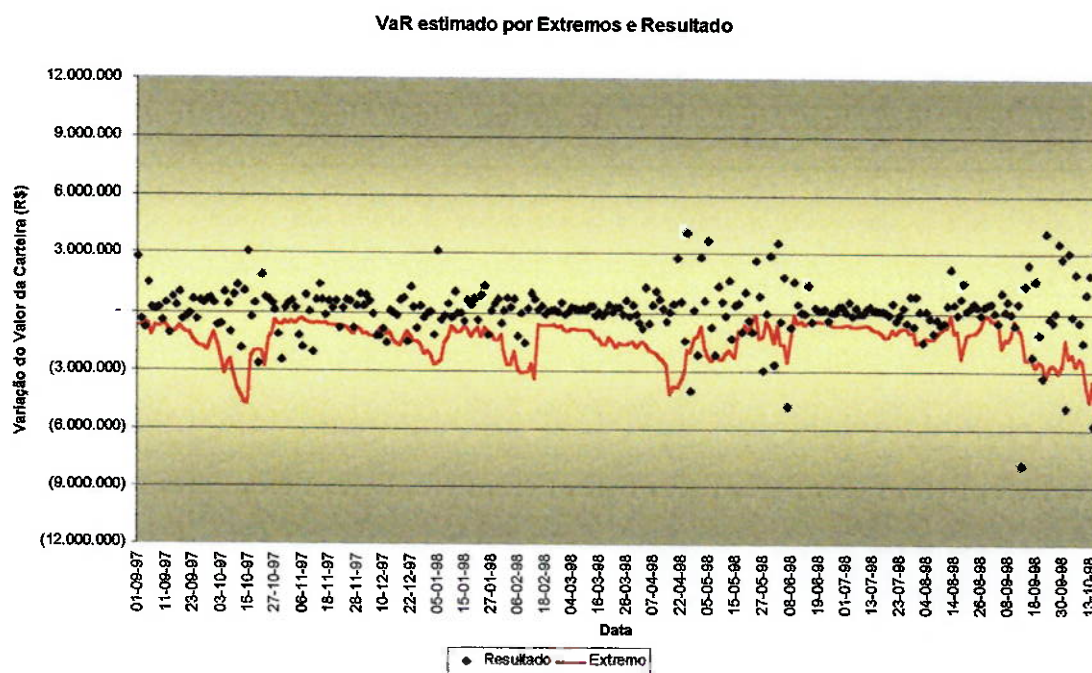


Figura 7.3: Comparação com o modelo por Teoria dos Extremos

A partir dos dados obtidos através da comparação retroativa do VaR com o resultado, podemos calcular as taxas médias de falha para cada um dos modelos:

Parâmetro	Paramétrico	Monte Carlo	Extremo
EQM _{perda}	$3,04E 10^{12}$	$4,41 10^{12}$	$1,95 10^{12}$
Taxa de Falha	12,72%	5,65%	9,89%

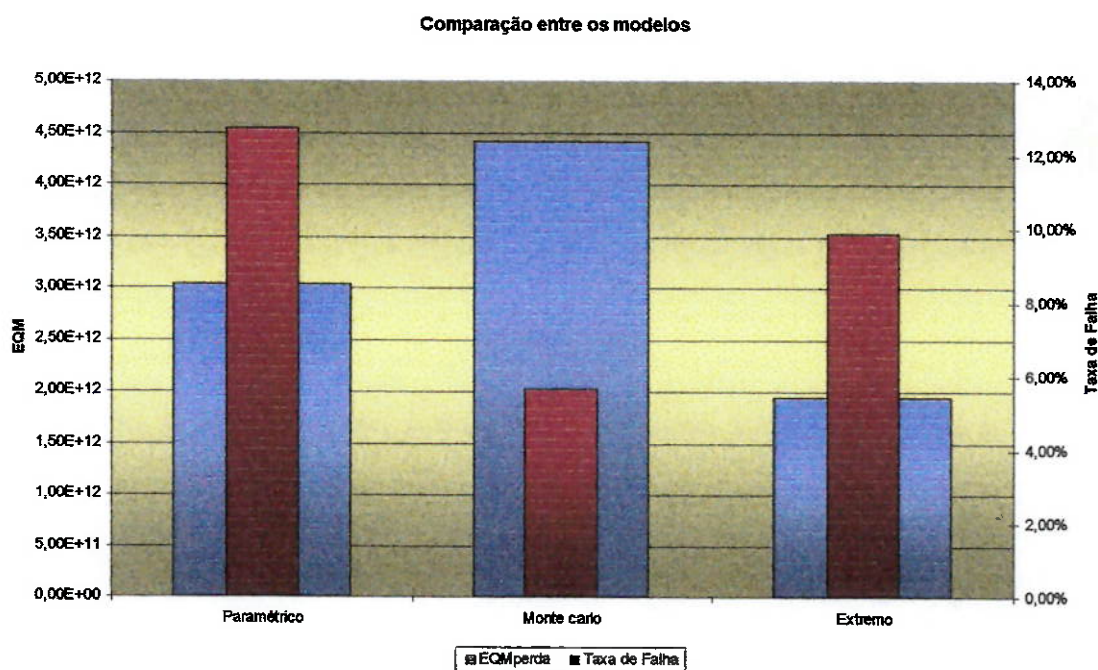


Figura 7.4: Parâmetros para a comparação entre os modelos

Ao analisarmos os dados acima, podemos observar os seguintes fatos:

1. A taxa de falha observada em todos os modelos é significativamente superior ao preestabelecido (2,5%). O modelo que mais se aproxima deste valor é o através de simulações de Monte Carlo (5,65%), os demais apresentam taxas médias de falha excessivamente altas. Uma possível causa deste elevado nível de falhas pode ser explicado pelo período em que testamos o modelo (setembro de 1997 até outubro de 1998), quando houve uma excessiva turbulência nos mercados financeiros devido a uma sucessão anormal de crises (crise nos mercados asiáticos, crise bancária no Japão, crise na Rússia e nos mercados emergentes em geral), comportando-se o mercado de forma distinta do passado e com a distribuição dos retornos dos fatores de risco distinta de uma distribuição normal. Outros motivos serão analisados separadamente para cada um dos modelos testados.
2. Com relação ao erro quadrático médio, o modelo de estimação por extremos apresentou a melhor performance seguido pelo modelo paramétrico e pelo de simulação.
3. Em uma análise geral, o modelo paramétrico foi aquele que apresentou o pior desempenho entre todos os modelos testados. Apesar do erro quadrático médio obtido pelo modelo paramétrico ser de magnitude ligeiramente

inferior ao erro quadrático obtido no modelo de simulação, ele apresentou uma taxa de falha significativamente superior à obtida pelo modelo de Monte Carlo (12,72% do paramétrico contra 5,65% de Monte Carlo). Já a estimativa do VaR através do modelo de extremos, apresentou tanto um erro quadrático médio menor, quanto uma menor taxa de falha do que o modelo paramétrico.

4. A comparação, no entanto, entre os modelos de Monte Carlo e de Extremos é mais acirrada. Enquanto a estimativa obtida por Monte Carlo apresentou uma taxa de falha significativamente menor do que a obtida pelo modelo de Extremos (5,65% contra 12,72%), o modelo de Extremos apresentou um erro quadrático significativamente menor do que o obtido por simulação ($1,95 \cdot 10^{12}$ contra $4,41 \cdot 10^{12}$).

Com relação específico ao desempenho de cada um dos modelos podemos fazer os seguintes comentários:

Modelo Analítico Paramétrico

É o modelo atualmente utilizado no Banco. Entre todos foi aquele de implementação mais fácil e simples em termos de programação em planilhas. Além disso, demandou pouquíssimo tempo, em termos de processamento computacional, para a realização dos cálculos. Como ilustração, para o cálculo retroativo do VaR para os 283 dias examinados, não foi necessário mais de do que 5 segundos para a realização total dos cálculos.

Entretanto, o cálculo do VaR através desse modelo foi o que apresentou o pior desempenho entre todos os demais. Entre as causas mais prováveis disso podemos citar:

1. O comportamento dos retornos dos fatores risco não seguem uma distribuição normal. Como exemplo, verifique o comportamento dos retornos das taxas de juros de 20 dias:

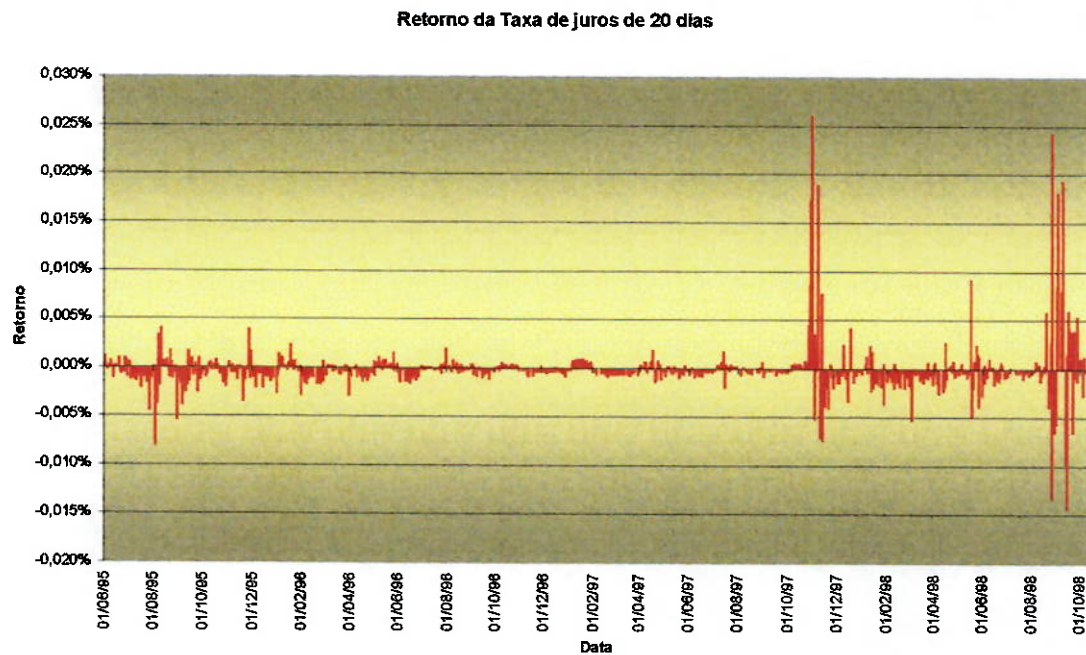


Figura 7.5: Retorno da taxa de juros prefixada de 20 dias

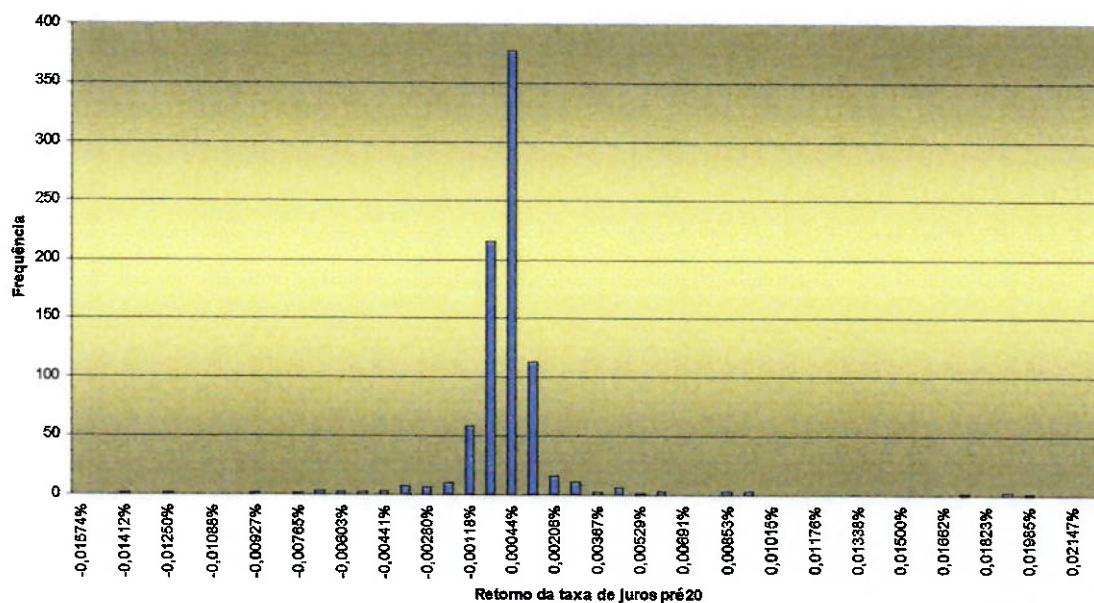


Figura 7.6: Histograma dos retornos da taxa de juros prefixada de 20 dias

Ao analisarmos o comportamento dos retornos, podemos observar o comportamento de uma forma bem distinta da normal a partir de novembro de 1997, quando observações de grandes magnitude passaram a ser

- registradas. Caso os retornos realmente se comportassem segundo a distribuição normal, retornos da magnitude registradas no período após novembro de 1997 teriam probabilidade de ocorrência praticamente nula.
2. Como a carteira analisada em questão possui diversos contratos de opção, os efeitos da não linearidade tornam-se muito grandes (veja capítulo 4, a explicação sobre os efeitos da não linearidade dos contratos com opções).
 3. Nos momentos de crise a estrutura de correlação dos retornos pode não ser mais consistentes. Como já foi explicado no capítulo 6, o comportamento conjunto dos fatores de risco ser de natureza totalmente diferente nos momentos de crise.

Modelo por Simulação de Monte Carlo

Este apresentou um desempenho bem superior ao modelo paramétrico, mas mesmo assim, a sua taxa de erro foi bem alta (5,65%), se consideramos o valor da taxa idealizada pelo modelo (2,5%). A principal causa de sua falha é que, como no modelo analítico paramétrico, esse modelo utiliza a suposição de que os retornos dos fatores de risco seguem uma distribuição normal e tenham com uma certa estrutura de correlação (utilizados na matriz de variância-covariância).

A grande desvantagem do cálculo do VaR através do uso de simulações se refere a sua dificuldade de implementação e o gasto de grande quantidade de tempo de processamento computacional para a realização dos cálculos. Para a realização da simulação para 5.000 pontos, foi necessária a montagem de uma planilha excessivamente grande e complicada (comparada às planilhas necessárias para o cálculo do VaR pelos outros modelos), requerendo grande quantidade de cálculos. A utilização das grades de fator de sensibilidade para a carteira testada não apresentou uma melhoria significativa de resultado em termos de tempo de processamento, uma vez que grande quantidade de tempo de processamento passou a ser gasta em rotinas de procura dos valores dentro das grades de sensibilidade. Entretanto, para carteiras maiores do que a testada, pode ser que a utilização das grades de sensibilidade apresentem resultados mais eficazes.

Para a realização dos cálculos do VaR para os 283 dias testados forma necessários mais de 8 horas de tempo de processamento. Cabe no entanto ressaltar que, uma vez implementado o modelo, o cálculo do VaR para um dia somente (e não retroativo) pode ser feita gastando-se um tempo computacional muito menor, além

disso, grande parte dos cálculos pode ser feita de maneira antecipada, como por exemplo, a geração dos números aleatórios.

Modelo de Extremos

Este modelo apresentou, com relação a taxa média de falha, um resultado intermediário entre o modelo paramétrico e o modelo por simulação de Monte Carlo, entretanto, a taxa de falha registrada foi excessivamente grande comparado à taxa idealizada pelo modelo (9,89% contra 2,5%). Com relação ao erro quadrático médio, foi o modelo que apresentou a melhor performance.

Em termos de facilidade implementação, o modelo situa-se a um nível intermediário entre o paramétrico e o de Monte Carlo. O principal empecilho deste modelo encontra-se na estimativa dos parâmetros da distribuição de Pareto, quando é necessária a maximização da função de log-verossimilhança. A simulação histórica é feita de maneira análoga à de Monte Carlo, no entanto, com a vantagem de não ser necessária a realização de geração de números aleatórios (utiliza-se dados históricos) e pelo fato da simulação ser feita em um menor número de pontos.

A principal fonte de erro do modelo de Extremo reside na necessidade de um grande número de dados históricos para a realização da simulação histórica. Como a análise é feita utilizando dados muito antigos, a estimativa levantada pode não traduzir de forma verdadeira o momento atual do mercado. Na simulação histórica, não é feita uma distinção dos dados com relação ao quão recentes eles são, como é feito no cálculo das volatilidades por EWMA (veja capítulo 3). Deste modo, para a estimativa do VaR, é necessária a utilização de dados com o comportamento dos fatores de risco há até dois ou três anos que podem não mais traduzir a realidade atual do mercado, tão pouco registrar tendências instantâneas de mudanças das volatilidades do mercado.

Como exemplo disso, voltemos a análise da figura 7.5, com o comportamento dos retornos da taxa de juros prefixada para o período de 20 dias. Para a estimativa do VaR pela Teoria dos Extremos no dia 20/11/97 é necessária a utilização dos retornos de períodos antigos até o começo ano de 1.996. Entretanto, ao realizarmos uma simples comparação do comportamento dos retornos antes e depois de novembro de 1997, podemos verificar uma mudança radical nos seus perfis: existe uma tendência de mudança no comportamento dos retornos. Essa mudança seria rapidamente detectada pelos métodos de cálculo de volatilidade que dão maior importância aos retornos mais recentes, como o método da janela móvel ou EWMA que podem ser utilizados nos

modelos de estimativa do VaR de Monte Carlo e no Analítico Paramétrico. Entretanto, no modelo de extremos isso não é feito, uma vez que são necessários vários dados antigos para a realização da simulação histórica. Logo, para o cálculo do VaR, é utilizado uma grande quantidade de informações antigas que não mais condizem com o panorama atual do mercado.

Considerações finais sobre os modelos

Os modelos apresentados para o cálculo do VaR foram feitos para a sua estimativa em condições normais de mercado (como foi exposto no capítulo inicial deste TF: “o VaR mede a pior expectativa de perda durante um certo período de tempo, sob **condições normais de mercado** e com um dado nível de confiança”). Como o período em que se analisou os modelos está longe de ser normal, isso justificaria em parte as altas taxas de falhas encontradas. No entanto, devemos ressaltar a nítida melhor performance que o modelo de simulações de Monte Carlo alcançou com relação aos demais, chegando a um nível de falhas razoavelmente próximo ao desejado mesmo nesse período de turbulência dos mercados financeiros. Isso, por si só já justificaria a introdução desse modelo pelo menos para a análise do risco das carteiras com contratos de opções, levando-se em conta também pelo fato do modelo atualmente utilizado no Banco ter sido o de pior desempenho dentre todos os analisados.

Entretanto, o fato de termos encontrado um modelo melhor desempenho não justifica nossa parada de pesquisa e sim nos estimula mais a procurar algo que melhor possa resolver os nossos problemas.

Novos modelos podem ser desenvolvidos buscando uma melhor aplicabilidade no caso brasileiro, ou nos mercados emergentes em geral. Como sugestões para isso, podemos citar uma variante para o modelo de simulação, com a utilização de distribuições assimétricas ou de outros tipos para a simulação dos retornos dos fatores de risco. Pesquisas nesse sentido já vêm sendo feitas e SHAW (1997) dá uma boa noção de como isso pode ser feito. Como relação ao modelo de Extremos, poder-se-ia introduzir algum tipo de parâmetro com o objetivo maior importância aos retornos mais recentes como é feito no cálculo das volatilidades pelo EWMA.

8

Conclusão

Neste Trabalho de Formatura procuramos mostrar a importância para as empresas de sistemas de gestão de riscos que as auxiliem na tomada de decisão e controle de seus níveis de exposição. Devemos enfatizar que, apesar desse trabalho ter sido aplicado para a análise do risco de mercado de uma carteira de uma instituição financeira, os conceitos e os modelos podem – e são – aplicados para medir os riscos a que estão expostas firmas dos mais variados tipos e ramos.

O tema desse trabalho surgiu em virtude da necessidade do Banco em controlar de forma mais precisa e eficiente os riscos em que está exposta. Para a resolução desse problema, buscamos, através de pesquisa na literatura especializada, por novos modelos para estimativa do risco de mercado e comparar com o atualmente utilizado no Banco. Nessa etapa, a principal dificuldade encontrada foi o fato de que, na maioria dos casos, os modelos ou se encontravam com uma linguagem excessivamente teórica, pecando pela falta de exemplos práticos e aplicabilidade, ou pelo contrário, encontravam-se demasiadamente superficiais abordando somente tópicos genéricos dos modelos como a sua importância, vantagens e desvantagens, sem no entanto, mostrar como chegaram a tais conclusões, ou como implementar tais modelos. Tendo em vista essa dificuldade, buscou-se neste trabalho, como um produto de engenharia, torná-lo o mais prático possível através de exemplos e testes, sem no entanto deixar de lado o rigor técnico.

Na fase de análise, buscou-se realizar um estudo comparativo de performance entre os modelos pesquisados e, ao aplicá-los em uma grande quantidade de dias, pôde-se de forma mais efetiva verificar os pontos fortes e fracos de cada um dos modelos. Cabe ressaltar, nesta etapa do trabalho, a grande dificuldade para a obtenção de dados históricos suficientes para o cálculo do VaR retroativo, assim como os problemas

numéricos e computacionais para implementar e executar os modelos em planilhas, especialmente no caso das simulações de Monte Carlo.

Em termos de resultados para a empresa, pode-se considerar este trabalho de formatura um sucesso, uma vez que a partir das análises feitas para uma carteira com os mesmos produtos financeiros utilizados pelo Banco, pôde-se chegar a conclusões quanto à fragilidade do modelo atualmente utilizado pelo Banco, principalmente quando a carteira contém contratos de opções. Em contrapartida, através da sua comparação com os novos modelos pesquisados, conscientizamos a instituição da necessidade realização de simulações de Monte Carlo para estimar do VaR de carteiras com contratos de opções, estando a sua implementação sendo efetivamente desenvolvida no Banco desde então.

Além disso, devemos ressaltar a conscientização da instituição, possibilitada pela execução desse trabalho, dos pontos fortes e fracos de cada um dos modelos analisados, assim como do fato de que em tempos de crises intensas, como as observadas no período em que foram realizados os testes, todos os modelos apresentam resultados no mínimo discretos ou com muito a desejar. Além disso deve-se salientar o fato de que o VaR mede apenas uma parcela dos tipos de riscos apresentados no primeiro capítulo desse trabalho, devendo ele nunca ser analisado isoladamente. Fatores como risco de crédito, de liquidez, operacional, entre outros, também devem ser levados em consideração.

Como sugestões a quem desejar prosseguir estudos sobre o assunto, podemos citar as melhorias que podem ser feitas nos modelos através do ataque às fontes principais da queda de desempenho de cada um deles, como a utilização de outros tipos de distribuições para os retornos dos fatores de risco simulados no modelo de Monte Carlo, ou a de atribuição ao modelo de valores extremos de uma variável que torne-o mais sensível às mudanças mais recentes do comportamento dos mercados. Além disso, pode-se também tentar levar em conta a implicação de outras fontes de risco à medida do VaR, como a de liquidez e de crédito. Uma outra abordagem interessante, associado ao curso de engenharia de produção, seria a aplicação do VaR para medir o risco global das empresas, considerando cada uma de suas unidades de negócios como produtos que estão expostos a uma série de fontes de risco. Da mesma forma de como é feito para o VaR de uma carteira financeira, a sua medida poderia ser utilizada em processos decisórios, na escolha de alternativas de investimentos baseados no risco ou como forma de gestão e controle do nível de suas exposições ao risco.

9

Referência Bibliográfica

1. BANCO CENTRAL, *Resolução 2554*. Brasília, 1998.
2. BATES, D.S.: *Testing Option Pricing Models*. In: *Handbook of Statistics vol. 14*. Amsterdam, Elsevier Science B. V., 1996. p.567-611.
3. BM&F, *Apostilas do Curso de Formação de Profissionais de Derivativos*. São Paulo.
4. COSTA NETO, P.L.O.: *Estatística*. São Paulo, Editora Edgard Blücher, 1977. 264p.
5. DAVISON, A.C.; SMITH, R.L.: *Models for Exceedences of High Thresholds*, In: *The Journal of Royal Statistical Society*. London, 1990. p.393-425.
6. FORTUNA, E.: *Mercado Financeiro: Produtos e Serviços*. Rio de Janeiro, Qualitymark, 1997. 366p.
7. GOLUB, G.H.; LOAN, C.F. van.: *Matrix Computations*. 2nd. ed., The John Hopkins University Press, 1989.
8. HENDRICKS, D.: *Evaluation of Value-at-Risk Models using Historical Data*. In: *VAR: Understanding and applying value-at-risk*. London, Risk Publications, 1997. p.151-171.
9. HULL, J.: *Options, Futures, and Other Derivative Securities*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1993.
10. JORION, P.: *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Derivatives Risk*. McGraw Hill, 1997. 332p.
11. MENDES, B.V.M.; DUARTE JR., A.M.: *Modelos Estatísticos Aplicados ao Mercado Financeiro Brasileiro*. Caxambu, ABE – Associação Brasileira de Estatística, 1998. 132p.

12. MORGAN, Banco J.P.: *Riskmetrics*. New York, J.P. Morgan, 1994. 212p.
13. NATENBERG S.: *Option, Volatility and Pricing Strategies*. Chicago, Irwin, 1994. 469p.
14. NEFTCI, S.N.: *Value at Risk Calculations, Extreme Events and Tail Estimation*, artigo ainda não publicado, 1998.
15. OLIVEIRA, F.R.: "*Value at Risk*": *Um Modelo de Gestão de Riscos de Mercado*. Trabalho de Formatura – Escola Politécnica da USP. São Paulo, 1997. 120p.
16. PAYANT, R.: *Why VaR is in Vogue*. In: *VAR: Understanding and applying value-at-risk*. London, Risk Publications, 1997. p.103-108.
17. PAUL-CHOUDHURY, S.: *Optional Extras*. In: *VAR: Understanding and applying value-at-risk*. London, Risk Publications, 1997. p.75-77.
18. PICKANDS, J.: *Statistical Inference Using Extreme Order Statistics*, In: *Annals of Statistics*. 1975.
19. PICOULT, E.: *Calculating Value-at-Risk with Monte Carlo Simulation*. In: *Risk Management for Financial Institution*. London, Risk Publications, 1997. p.73-92.
20. PRIEST[1], A.: *Not so Simple for Siemens*. In: *VAR: Understanding and applying value-at-risk*. London, Risk Publications, 1997. p.362-365.
21. PRIEST[2], A.: *Veba's Way with VAR*. In: *VAR: Understanding and applying value-at-risk*. London, Risk Publications, 1997. p.354-361.
22. SHAW, J.: *Beyond VAR and Stress Testing*. In: *VAR: Understanding and applying value-at-risk*. London, Risk Publications, 1997. p.211-224.
23. SILVA NETO, L.A.: *Opções: do Tradicional ao Exótico*. São Paulo, Atlas, 1996. 293p.
24. TEBECHRANI, F.Z.: *Métodos Empíricos de Estimação de Volatilidades para Gestão de Riscos*. Trabalho de Formatura – Escola Politécnica da USP. São Paulo, 1997. 107p.
25. TURNER, C.: *VAR as an Industrial Tool*. In: *VAR: Understanding and applying value-at-risk*. London, Risk Publications, 1997. p.341-344.
26. VOSE, D.: *Quantitative Risk Analysis: A Guide to Monte Carlo Simulation Modeling*. Chichester, John Wiley & Sons, 1996. 328p.

I

Anexo – Explicações de alguns conceitos utilizados

1.1 Considerações sobre formas de apropriação de taxas de juros

Em muitos modelos para avaliação de preços de produtos financeiros, a apropriação das taxas de juros por períodos consecutivos é feita de forma contínua ao invés da forma discreta.

Na forma discreta, a apropriação dos juros anuais (R) sobre um determinado montante (A) seria feito da seguinte forma, caso ele seja composto uma vez a cada ano:

$$A \cdot (1 + R)^n \quad (I.1)$$

onde n é o número de anos em que o montante é corrigido.

Se entretanto, ele fosse composto m vezes a cada ano, o valor final de A seria:

$$A \cdot \left(1 + \frac{R}{m}\right)^{m \cdot n} \quad (I.2)$$

O limite quando A é composto um número m tendendo a infinito de vezes é conhecido como apropriação contínua. Se rescrevermos a equação acima da seguinte forma:

$$A \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{m}{R}}\right)^{\frac{m}{R} \cdot n} \quad (I.3)$$

e fazendo $\frac{m}{R} = k$. Então o limite para $m \rightarrow \infty$ que é equivalente a $k \rightarrow \infty$ é:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k \cdot R \cdot n} = A \cdot e^{R \cdot n} \quad (\text{I.4})$$

pois do cálculo temos que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e \quad (\text{I.5})$$

Se quiséssemos ao invés de compor A, trazer A para o valor presente, encontraríamos utilizando a decomposição contínua:

$$A \cdot e^{-R \cdot n} \quad (\text{I.6})$$

A relação entre as taxas contínua e a discreta composta m vezes ao ano pode ser dado por:

$$A \cdot e^{R_1 \cdot n} = A \cdot \left(1 + \frac{R_2}{m}\right)^{m \cdot n} \quad (\text{I.7})$$

donde chegamos a:

$$R_1 = m \cdot \ln \left(1 + \frac{R_2}{m}\right) \quad (\text{I.8})$$

ou

$$R_2 = m \cdot \left(e^{\frac{R_1}{m}} - 1\right) \quad (\text{I.9})$$

onde R_1 é a taxa de juros na base contínua;

R_2 é a taxa de juros na forma discreta.

1.2 Retornos logarítmicos

Como foi apresentado anteriormente, existem basicamente duas formas de se calcular o retorno de uma variável, a percentual e a logarítmica. Por questão de praticidade, rerepresentamos as equações para cada um dos tipos:

$$RA = \frac{F_t - F_{t-1}}{F_{t-1}} \quad (\text{I.10})$$

onde RA é o retorno percentual (ou aritmético) do fator de risco F;

F_t é o valor do fator de risco no instante t;

F_{t-1} é o valor do fator de risco no instante t - 1.

O retorno logarítmico é dado por:

$$r_t = \ln\left(\frac{F_t}{F_{t-1}}\right) \quad (\text{I.11})$$

onde r_t é o retorno logarítmico do fator de risco F ;

F_t é o valor do fator de risco no instante t ;

F_{t-1} é o valor do fator de risco no instante $t - 1$.

Segundo JORION (1997), as vantagens que levam a escolha do retornos logarítmicos são várias:

- Primeiramente, eles têm um significado econômico mais consistente. Por exemplo, caso os retornos logarítmicos sigam uma distribuição normal, então não existe nenhum valor desses retorno que leve a um preço negativo do fator de risco. Isso se deve ao fato de que à medida que $\ln(F_t/F_{t-1}) \rightarrow -\infty$, $(F_t/F_{t-1}) \rightarrow 0$, ou seja, $F_t \rightarrow 0$;

Enquanto isso, a atribuição da distribuição normal aos retornos percentuais levaria a resultados totalmente sem sentido para os valores localizados na cauda esquerda da curva, pois à medida que $(F_t - F_{t-1}) / F_{t-1} \rightarrow -\infty$, quando $F_t \rightarrow -\infty$, ou seja, valores negativos para os fatores de risco.

- A atribuição dos retornos logarítmicos torna a medida do risco mais consistente. Por exemplo, analise a seguinte situação em que se deseja calcular os retornos da taxa de câmbio entre o dólar e o real. Os retornos poderiam ser calculados de duas formas: a da cotação do dólar em reais ou da cotação do real em dólares, dependendo da perspectiva do risco vista pelo investidor. Do ponto de vista do investidor que usa o preço em reais do dólar $S(\text{R}\$/\text{US}\$)$, o retorno de análise é $r_x = \ln(S_t / S_{t-1})$. Agora, do ponto de vista do investidor que usa o preço em dólar do real $S(\text{US}\$/\text{R}\$)$, o retorno utilizado seria $r_y = \ln((1 / S_t) / (1 / S_{t-1})) = -\ln(S_t / S_{t-1}) = -r_x$. Logo, as distribuições dos retornos em dólar (r_y) ou em real (r_x) são consistentes entre si, o que não ocorreria caso utilizássemos os retornos percentuais.

- Uma outra vantagem prática da utilização dos retornos logarítmicos é a fácil manipulação proporcionada de períodos múltiplos. Como exemplo, o retorno logarítmico entre dois dias de um certo fator de risco pode ser facilmente decomposto:

$$\ln(F_t / F_{t-2}) = \ln(F_t / F_{t-1}) + \ln(F_{t-1} / F_{t-2}) = r_{t-1} + r_t \quad (\text{I.12})$$

A decomposição em termos de retornos percentuais não é tão simples assim.

• Por último, em muitas situações pode-se admitir que as diferenças entre os retornos percentuais e os logarítmicos são desprezíveis. A explicação é feita a seguir:

Considere o retorno logarítmico como $r_t = \ln(F_t / F_{t-1}) = \ln(1 + RA_t)$. Se RA_t é pequeno, r_t pode ser decomposto segundo a série de Taylor por:

$$r_t = RA_t + \frac{RA_t^2}{2} + \frac{RA_t^3}{3} + \dots \quad (I.13)$$

A equação acima pode ser aproximada por

$$r_t \approx RA_t \quad (I.14)$$

se RA_t for pequeno o suficiente, havendo na prática pouca diferença entre os retornos na forma logarítmica quanto na forma percentual.

1.3 Agregação do tempo na estimativa do VaR

Como foi discutido no capítulo 3, o VaR em geral é calculado na base diária, uma vez que a volatilidade é calculada a partir da análise dos retornos diários e pelo fato de que na maioria das instituições, a composição da carteira mudar diariamente.

Entretanto, pode-se querer estimar o VaR para períodos maiores de tempo. Isso pode ser obtido através de um método de translação de tempo, mais conhecido em econometria como problema de agregação de tempo, caso os retornos sejam não correlacionados com relação ao tempo. A seguir apresentaremos como essa agregação é feita.

O problema de calcular VaR para períodos de dias consecutivos é semelhante ao cálculo da variância entre a soma de duas variáveis aleatórias:

$$E(x_1 + x_2) = E(x_1) + E(x_2) \quad (I.15)$$

$$V(x_1 + x_2) = V(x_1) + V(x_2) + 2 \cdot \text{Cov}(x_1, x_2) \quad (I.16)$$

onde $E(x)$ é a esperança de x ;

$V(x)$ é a variância da x .

Para que possamos agregar a variância sobre o tempo, uma suposição muito importante deve ser feita: a de que os retornos não são correlacionados sobre intervalos consecutivos de tempo. Segundo JORION (1997) essa suposição é válida para mercados eficientes em que o valor atual de um certo fator de risco inclui todas as informações que lhe dizem respeito. Assim, as mudanças de seu valor ocorrerão devido a novas

notícias, que por definição, não podem ser previstas e portanto não são correlacionadas com relação ao tempo. Consequentemente, os valores dos fatores de risco seguem um caminho aleatório (*random walk*), independente de onde estão ou onde estiveram.

Além disso, assumindo-se que $E(r_{t-1}) = E(r_t) = E(r)$ e que $V(r_{t-1}) = V(r_t) = V(r)$, a esperança do retorno para o período de dois dias é $E(r_{t,2}) = E(r_{t-1}) + E(r_t) = 2 \cdot E(r)$ e a sua variância é $V(r_{t,2}) = V(r_{t-1}) + V(r_t) = 2 \cdot V(r)$.

De forma genérica, o retorno esperado para períodos consecutivos de dias, assim como sua variância crescem linearmente com relação ao tempo em dias. Entretanto, a volatilidade, cresce com a raiz quadrada do tempo em dias.

Sintetizando, temos:

$$\mu_{\text{Tdias}} = \mu_{\text{diário}} \cdot T \quad (\text{I.17})$$

$$\sigma_{\text{Tdias}} = \sigma_{\text{diário}} \cdot \sqrt{T} \quad (\text{I.18})$$

Se a aproximação do VaR por uma função linear da volatilidade for boa o suficiente então:

$$\text{VaR}_{\text{Tdias}} = \text{VaR}_{\text{diário}} \cdot \sqrt{T} \quad (\text{I.19})$$

1.4 Interpolação linear de uma função bidimensional

Seja $Z = \langle x, y \rangle$ o ponto em que queremos interpolar a função F e seja $A = \langle x_L, y_L \rangle$, $B = \langle x_U, y_L \rangle$, $C = \langle x_U, y_U \rangle$ e $D = \langle x_L, y_U \rangle$ os quatro pontos mais próximos que temos na tabela de F .

Fazendo

$$T = \frac{x_U - x}{x_U - x_L} \quad (\text{I.20})$$

e

$$U = \frac{y_U - y}{y_U - y_L} \quad (\text{I.21})$$

Então a interpolação bilinear de $F(Z)$ é

$$F(Z) \cong F(A) \cdot T \cdot U + F(B) \cdot (1 - T) \cdot U + F(C) \cdot (1 - T) \cdot (1 - U) + F(D) \cdot T \cdot (1 - U) \quad (\text{I.22})$$

1.5 Modelo estatístico para extremos

Seja Δx_t uma variável aleatória, representando as mudanças incrementais dos retornos das taxas e preços dos ativos de mercado, e suponha que ela está cercada por x_0 :

$$P(\Delta x_t < x_0) = 1 \quad (I.23)$$

e que a média de Δx_t é aproximadamente igual a zero:

$$E(\Delta x_t) \cong 0 \quad (I.24)$$

Suponha que a verdadeira distribuição acumulada de Δx_t não é conhecida, mas é dada por $F(\Delta x_t)$.

Agora considere U, D , com $D < U$ dois limiares de “alto nível” tais que todo Δx_t que satisfaz $\Delta x_t > U > 0$ ou $\Delta x_t < D < 0$ é considerado como pertencente a uma das caudas da distribuição $F(\Delta x_t)$.

Deseja-se calcular o limiar¹ L de Δx_t tal que

$$P(\Delta x_t \leq L_U) = 1 - \alpha \quad (I.25)$$

para a cauda superior da distribuição ou

$$P(\Delta x_t \leq L_D) = \alpha \quad (I.26)$$

para a cauda inferior da distribuição.

U e D serão escolhidos de tal forma que eles sejam significativamente menores (em termos absolutos), do que os limiares L_U e L_D que se deseja estimar:

$$L_U \gg U \quad (I.27)$$

$$L_D \ll D \quad (I.28)$$

Para efeito de simplificação, trabalharemos apenas com o limiar (U) superior. O caso com o limiar inferior (D) é similar.

Sejam definidas as seguintes probabilidades associadas a variável aleatória Δx_t

$$P(\Delta x_t \leq U) = F(U), \quad U < x_0 \quad (I.29)$$

$$P(\Delta x_t \leq U + y_t) = F(U + y_t), \quad 0 < y_t < x_0 - U \quad (I.30)$$

onde $y_t \in \mathfrak{R}^+$ é o excedente do limiar (U) no instante t .

Logo, podemos definir $F_u(y_t)$:

¹ O limiar L associado à probabilidade $1 - \alpha$ foi utilizado neste trabalho para o cálculo do VaR

$$F_u(y_t) = \frac{F(U + y_t) - F(U)}{1 - F(U)} \quad (\text{I.31})$$

onde $F_u(y_t)$ representa a distribuição acumulada condicionada de $[\Delta x_t - U]$ dado que $\Delta x_t > U$.

PICKANDS (1975) mostrou que $F_u(y_t)$ pode ser aproximada pela distribuição generalizada de Pareto $G(y_t, \sigma^u, k)$:

$$G(y_t, \sigma^u, k) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{k \cdot y_t}{\sigma^u}\right)^{1/k}, & k \neq 0, \sigma^u > 0 \\ 1 - e^{-y_t/\sigma^u}, & k = 0, \sigma^u > 0 \end{cases} \quad (\text{I.32})$$

De fato, PICKANDS (1975) mostra que a distância entre $G(y_t, \sigma^u, k)$ e $F_u(y_t)$ convergirá a zero conforme $U \rightarrow \infty$.

Os parâmetros σ^u e k devem ser estimados. $G(\cdot)$ será uma boa aproximação de $F_u(\cdot)$ quando U for grande o suficiente.

Estimativa dos fatores

Seja uma amostra com n retornos Δx_t extremos superiores ao limiar U predefinido:

$$\{y_{t1}, \dots, y_{tn}\}$$

Assumindo que U é grande o suficiente para que a aproximação pela distribuição generalizada de Pareto seja boa então:

$$P(\Delta x_t < U + y_t \mid \Delta x_t > U) \cong 1 - \left(1 - \frac{k \cdot y_{ti}}{\sigma^u}\right)^{1/k} \quad (\text{I.33})$$

Então, a função densidade de probabilidade pode ser aproximada para um ponto arbitrário de observação y , por $g(y)$:

$$g(\sigma^u, k, y) = \left(\frac{\sigma^u - k \cdot y}{\sigma^u}\right)^{1/k} \cdot (\sigma^u - k \cdot y)^{-1} \quad (\text{I.34})$$

Segundo NEFTCI (1998), a função log-verossimilhança de $g(\cdot)$ em cada ponto y_{ti} será:

$$-n \cdot \ln \sigma^u + \left(\frac{1}{k} - 1\right) \cdot \sum_{i=1}^n \ln \left(1 - \frac{k \cdot y_{ti}}{\sigma^u}\right) \quad (\text{I.35})$$

onde n é o número de excedentes de U .

A função verossimilhança deve ser maximizada com relação aos parâmetros k e σ^u .

Escrevendo-se $\sigma = k / \tau$ e diferenciando com relação a τ e k , DAVISON (1990) mostra que o máximo da função com relação a k será alcançado quando:

$$k = k(\tau) = -\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \ln(1 - \tau \cdot y_{ii}) \quad (\text{I.36})$$

Consequentemente, a estimativa da máxima verossimilhança é reduzida a solução de uma única equação:

$$\frac{n}{\tau} = \left(\frac{1}{k(\tau)} - 1 \right) \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_{ii}}{1 - \tau \cdot y_{ii}} \right) \quad (\text{I.37})$$

Uma vez obtidos os parâmetros $\hat{k}$ e $\hat{\sigma}$ estimadores de k e σ^u respectivamente, podemos aproximar a cauda $F_u(\Delta x_i)$ em cada y_{ii} , usando a aproximação assintótica dada por:

$$\frac{F(U + y_{ii}) - F(U)}{1 - F(U)} \cong G(y_{ii}) \quad (\text{I.38})$$

Da expressão acima, o termo $1 - F(U + y_i)$ pode ser estimado facilmente por:

$$1 - F(U + y_{ii}) \cong 1 - [F(U) + G(y_{ii}) - G(y_{ii}) \cdot F(U)] \quad (\text{I.39})$$

A expressão acima depende de $F(U)$, até então desconhecido, que representa a probabilidade de que a observação irá exceder o limiar U . Uma possível estimativa de $F(U)$ pode ser obtida através da frequência da amostra:

$$1 - \hat{F}(U) = \frac{n}{N} \quad (\text{I.40})$$

onde n é o número total de excedentes do limiar U na amostra de tamanho N .

Substituindo a equação I.40 e I.32 em I.39 e utilizando os $\hat{k}$ e $\hat{\sigma}$ estimados, obtemos a estimativa da distribuição da cauda:

$$1 - \hat{F}(U + y_{ii}) \cong \frac{n}{N} \cdot \left(1 - \frac{\hat{k} \cdot y_{ii}}{\hat{\sigma}} \right)^{1/\hat{k}} \quad (\text{I.41})$$

O limiar crítico L_U , correspondente ao nível α na equação I.25 pode ser encontrado através de:

$$\alpha \equiv \frac{n}{N} \cdot \left(1 - \frac{\hat{k} \cdot y^\alpha}{\hat{\sigma}} \right)^{1/\hat{k}} \quad (\text{I.42})$$

e resolvendo a equação acima com relação ao L_U desconhecido, chegamos a única solução correspondente ao nível α :

$$\hat{L}_U^\alpha \equiv U + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{k}} \cdot \left(1 - e^{\ln\left(\frac{\alpha \cdot N}{n}\right) \hat{k}} \right) \quad (\text{I.43})$$

1.6 Método de decomposição por Cholesky

Uma matriz simétrica e positiva definida pode ser eficientemente decomposta em duas matrizes triangulares (uma inferior e outra superior) através da decomposição de Cholesky. Para uma matriz de qualquer tipo, isso é alcançado através da decomposição LU que fatoriza $A = L \cdot U$. Se A satisfaz o critério anterior, ela pode ser decomposta mais eficientemente em $A = L \cdot L^T$, onde L (que pode ser interpretada como “raiz quadrada” de A) é a matriz triangular inferior com todos os elementos de sua diagonal positivos.

Uma variante do método de Cholesky é a decomposição da forma $A = R^T R$, onde R é uma matriz triangular superior.

A decomposição de Cholesky é geralmente utilizada para resolver as equações normais de um problema linear por mínimos quadrados (*normal equations in linear least squares problems*); nesses problemas temos $A^T \cdot A x = A^T b$, onde $A^T \cdot A$ é simétrica e positiva definida.

Para resolver o problema $A = L \cdot L^T$, é feita a simples equalização dos coeficientes dos dois lados da equação:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{I.44})$$

para obter:

$$a_{11} = l_{11}^2 \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}} \quad (\text{I.45})$$

$$a_{21} = l_{21} \cdot l_{11} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} \Rightarrow l_{n1} = \frac{a_{n1}}{l_{11}} \quad (\text{I.46})$$

$$a_{22} = l_{21}^2 + l_{22}^2 \Rightarrow l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} \quad (\text{I.47})$$

$$a_{32} = l_{31} \cdot l_{21} + l_{32} \cdot l_{22} \Rightarrow l_{32} = \frac{(a_{32} - l_{31} \cdot l_{21})}{l_{22}}, \text{ etc.} \quad (\text{I.48})$$

genericamente, para $i = 1, \dots, n$ e $j = i+1, \dots, n$:

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \quad (\text{I.49})$$

$$l_{ji} = \frac{\left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \cdot l_{ik} \right)}{l_{ii}} \quad (\text{I.50})$$

Como A é simétrica e positiva definida, a expressão que é tirada a raiz quadrada é sempre positiva e todos os l_{ij} são reais.