

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA FINANCEIRA

**Definição de carteiras de investimento pelo modelo de média-variância e
comparação de desempenho com uma carteira igualmente ponderada**

Rafael Henrique de Luccas

São Paulo, SP - Brasil
2024

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA FINANCEIRA

**Definição de carteiras de investimento pelo modelo de média-variância e
comparação de desempenho com uma carteira igualmente ponderada**

Rafael Henrique de Luccas

Monografia apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de pós-
graduação do MBA de Engenharia
Financeira

Orientador: Prof. Danilo Z. Figueiredo

São Paulo, SP - Brasil

2024

CATALOGAÇÃO-NA-FONTE

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Catálogo-na-publicação

LUCCAS, RAFAEL HENRIQUE DE

Definição de carteiras de investimento pelo modelo de média-variância e comparação de desempenho com uma carteira igualmente ponderada / R. H. D. LUCCAS -- São Paulo, 2024.

76 p.

Monografia (MBA em Engenharia Financeira) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. PECE – Programa de Educação Continuada em Engenharia.

1.Finanças 2.Investimentos 3.Análise de risco 4.Modelos matemáticos
I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. PECE – Programa de Educação Continuada em Engenharia II.t.

Devemos acreditar que somos
talentosos para algumas coisas, e que
essa coisa, a qualquer custo, deve ser
alcançada.

Marie Curie

RESUMO

Neste projeto, foi realizada uma análise quantitativa para avaliação de *performance* de carteiras de investimento, formadas a partir de um processo de otimização definida pela Teoria Moderna do Portfólio de Markowitz. Para alcançar esse objetivo, um conjunto de ações selecionadas serviram como base para treinamento do modelo de cálculo, esse formado por duas grandes etapas: a primeira ocorreu com estimação de parâmetros de risco, por matrizes de covariâncias, e de retornos esperados desses ativos, a segunda sucedeu a aplicação o modelo de média-variância para que seja possível identificar as carteiras ótimas. A partir dessas carteiras, em conjunto com uma terceira carteira com uma estratégia de igual distribuição de pesos entre os ativos, foi possível a realizar análises comparativas, no período de teste, que concluíram a boa efetividade do modelo aplicado em estimar carteiras, com destaque para a carteira ótima de máximo Sharpe, ao visar maximizar o retorno esperado conforme nível de risco tolerado buscado pelo investidor.

Palavras-Chave: Finanças, investimentos, análise de risco, modelos matemáticos.

ABSTRACT

In this project, a quantitative analysis was conducted to assess the performance of investment portfolios, which were formed through an optimization process defined by the Modern Portfolio Theory of Markowitz. To achieve this objective, a set of selected stocks served as the basis for the model's training calculation, which consisted of two major stages: the first involved the estimation of risk parameters, using covariance matrices, and the expected returns of these assets; the second stage proceeded with the application of the mean-variance model to identify optimal portfolios. From these portfolios, along with a third portfolio employing a strategy of equal weight distribution among assets, it was possible to conduct comparative analyses during the test period. These analyses concluded the model's effective ability to estimate portfolios, notably the optimal portfolio with the highest Sharpe ratio, aiming to maximize expected returns according to the level of risk tolerance sought by the investor.

Keywords: Finance, investments, risk analysis, mathematical models.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	8
1.1 Justificativa	9
1.2 Objetivo	9
1.3 Organização da monografia	9
2. REFERENCIAL TEÓRICO	11
2.1 Definição de conceitos para análise de carteiras	11
2.1.1 Risco e retorno	11
2.1.2 Taxa livre de risco	11
2.1.3 Desvio Padrão	12
2.1.4 Covariância e Correlação	13
2.1.5 Índice Sharpe	15
2.2 Estimação de parâmetros do modelo de média-variância	17
2.2.1 Métodos de risco por matrizes de covariância	17
<i>2.2.1.1 Matriz de Covariância Amostral</i>	17
<i>2.2.1.2 Matriz de Semicovariância</i>	18
<i>2.2.1.3 Matriz de Covariância Exponencial</i>	18
2.2.2 Métodos de retorno esperado	19
<i>2.2.2.1 Retorno Histórico Médio</i>	20
<i>2.2.2.2 Retorno Histórico com Média Exponencialmente Ponderada</i>	20
<i>2.2.2.3 Retorno pelo Modelo de Precificação de Ativos Financeiros</i>	21
2.3 Otimização de carteiras pelo modelo de média-variância	23
2.3.1 Fronteira Eficiente	25
2.3.2 Carteira de Mínima Variância	27
2.3.3 Carteira de Máximo Sharpe	28
2.4 Carteira igualmente ponderada	28
3. METODOLOGIA	30
3.1 Classificação da pesquisa	30
3.2 Aplicação da metodologia	31
4. ANÁLISE DE RESULTADOS	40
4.1 Análise de séries temporais e de retornos do conjunto de ativos	40

4.2	Aplicação de métodos de risco por matrizes de covariância	45
4.3	Aplicação de métodos de retornos esperados	47
4.4	Aplicação do modelo de média-variância e formação das carteiras	49
4.5	Cálculo para teste de <i>performance</i> das carteiras formadas	53
4.6	Análise e comparação de <i>performance</i> e de resultados das carteiras	54
5.	CONCLUSÕES	58
	REFERÊNCIAS	59
	APÊNDICE A –	61

1. INTRODUÇÃO

A Teoria Moderna do Portfólio, inicialmente apresentada por Markowitz (1952), foi capaz de revelar a importância da diversificação de ativos como meio de redução de riscos e otimização de retornos. Para Assaf Neto (2014), a teoria mostra que o risco de um ativo deve ser analisado pela sua contribuição ao risco de um portfólio diversificado, orientando decisões de investimentos pelo impacto no risco e retorno global da carteira.

Esta monografia propõe a realização de uma análise comparativa de estratégias formação de carteiras de investimento, sendo fundamentada por conceitos da teoria de Markowitz. A metodologia de análise de dados teve seus cálculos realizados com programação em linguagem *Python*, com a finalidade de constituir carteiras otimizadas, com base em dados históricos, que são definidas de acordo com determinadas estratégias de investimento.

As carteiras formadas segundo as estratégias de otimização de carteiras, relacionadas a Fronteira Eficiente de Markowitz, são configuradas pelo modelo de média-variância no período de treinamento do modelo, e seguem os critérios de mínima variância e máximo Sharpe. Sendo o primeiro, direcionado a investidores com uma postura mais conservadora, que buscam minimizar o risco, enquanto o segundo visa maximizar o retorno ajustado ao risco. Essas carteiras são contrastadas com uma estratégia de investimento de maior simplicidade, baseada em uma distribuição igual de pesos do mesmo conjunto de ativos investidos, servindo como referência para comparação em relação as outras abordagens modeladas, que possuem maior complexidade.

Essas estratégias serão testadas em um momento futuro, para realização de comparações referentes as *performances* dessas carteiras de investimento, permitindo entender mais sobre suas características e servindo como um referencial para decisões de investimentos. Dessa maneira, possibilitando uma visão baseada em dados sobre estratégias de investimentos que podem contribuir para uma maior qualidade na tomada de decisão pelos investidores no mercado acionário.

1.1 Justificativa

A Teoria Moderna do Portfólio é de grande importância para a gestão de investimentos e possui grande influência em estratégias de alocação de ativos, permitindo que investidores apliquem diversas estratégias de investimentos para a tomada de decisões informadas e a para construção de carteiras otimizadas.

Essa teoria, desenvolvida inicialmente por Markowitz (1952), possibilitou uma compreensão sobre a influência da diversificação de ativos no impacto da volatilidade geral de um portfólio e como essa informação pode ser aplicada para alcançar um equilíbrio ideal entre risco e retorno. Com isso, seus princípios possibilitam a formação de estratégias para a redução de riscos e a otimização de retornos, que podem possibilitar tomadas de decisão baseada em dados.

1.2 Objetivo

O objetivo principal deste estudo é realizar uma comparação entre as carteiras de investimentos geradas através do modelo de média-variância e uma estratégia de investimento simplista, visando entender a *performance* realizada pelos métodos modelados, em termos de desempenho ajustado ao risco.

Como objetivo secundário, propõe-se a aplicação de métodos variados para a estimação do vetor de retornos esperados e da matriz de covariância dos ativos, visando a determinação dos métodos mais eficazes para previsão de retornos e da matriz de covariância que são parâmetros utilizados na aplicação do modelo de média-variância. Essa etapa é essencial para aprimorar a precisão da modelagem da Fronteira Eficiente, contribuindo para a assertividade na seleção de portfólios ótimos.

1.3 Organização da monografia

Esta monografia é estruturada em capítulos que desempenham papéis específicos na sustentação das ideias centrais desta pesquisa. Inicialmente, a Introdução (Capítulo 1) define o tema de estudo e estabelece seus objetivos, sublinhando a importância da investigação em questão. Segue-se a Referencial

teórico (Capítulo 2), que fundamenta teoricamente o estudo, introduzindo conceitos chave para a compreensão do contexto financeiro e estabelecendo os parâmetros necessários para a pesquisa. A Metodologia (Capítulo 3) detalha a abordagem adotada, descrevendo os métodos e procedimentos utilizados na condução do estudo. No capítulo de Análise de Resultados (Capítulo 4), os dados coletados são apresentados e examinados à luz da metodologia aplicada. Por fim, as Conclusões (Capítulo 5) propõem reunir as principais conclusões do trabalho e direcionar expansões para futuras investigações, sugerindo como o trabalho atual pode ser aprofundado.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Definição de conceitos para análise de carteiras

2.1.1 Risco e retorno

Ruppert (2015) indica uma há relação intrínseca entre risco e retorno, no qual ativos mais arriscados podem oferecer retornos esperados superiores, devido a compensação do risco assumido pelo investidor. Esse acréscimo no retorno esperado, em comparação à taxa de retorno livre de risco, é conhecido como prêmio de risco, e é um grande incentivo para o investimento em ativos mais arriscados.

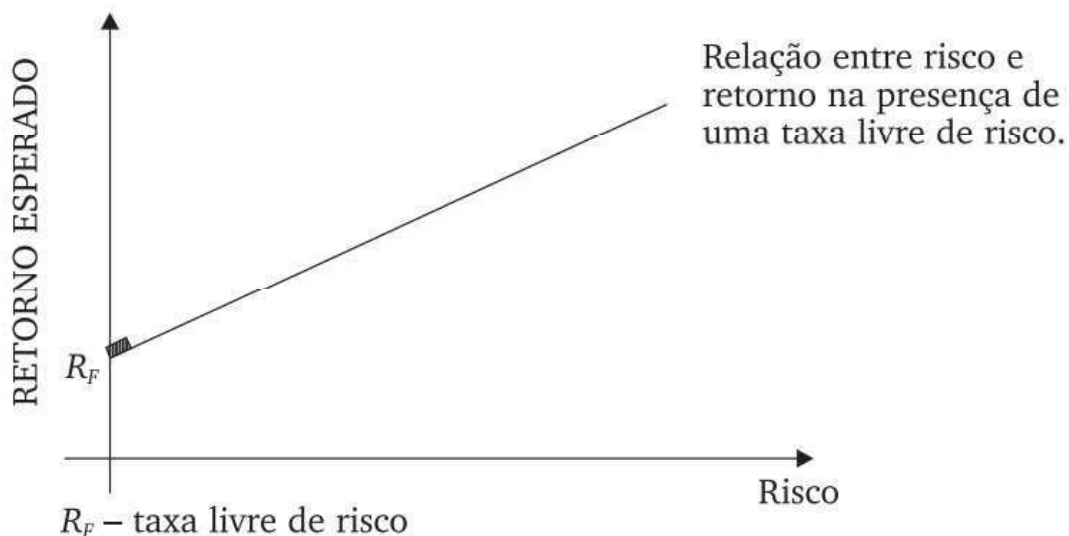
Há dois tipos principais de risco em que mercado financeiro está sujeito, o sistemático e o não sistemático, conforme descrito por Assaf Neto (2014). O risco sistemático está presente em todos os ativos do mercado, e é influenciado por fatores políticos, econômicos e sociais, sendo assim, esse risco não pode ser eliminado completamente, mesmo com a diversificação da carteira.

Por outro lado, o autor informa que o risco não sistemático é peculiar a cada ativo, sendo possível sua mitigação por meio da diversificação de investimentos em ativos que não possuam correlação positiva. Esta estratégia envolve a combinação de diferentes tipos de ativos, para reduzir os efeitos de flutuações específicas do mercado.

2.1.2 Taxa livre de risco

Assaf Neto (2014) descreve a taxa livre de risco como um conceito fundamental em economia, pois representa a taxa de retorno de um investimento que é considerado completamente livre de risco, assegurando ao investidor a certeza do retorno. Ou seja, é um ativo que garante uma remuneração a ser paga em seu vencimento. Essa taxa serve para formação da base da relação linear entre risco e retorno, onde o ponto de partida não é zero, mas sim o valor garantido pelo investimento livre de risco, conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – Relação entre risco e retorno com a taxa livre de risco



Fonte: Assaf Neto (2014, p. 90)

Dessa maneira, o autor comenta que o retorno livre de risco é muitas vezes exemplificado pelos juros reais pagos por títulos públicos federais, uma vez que são vistos como representações próximas de uma taxa pura de juros, devido à baixa probabilidade de default do governo em seus pagamentos. Sendo assim, na economia brasileira, a taxa Selic é reconhecida como uma taxa livre de risco, servindo como um importante parâmetro para a determinação das taxas de juros no mercado.

2.1.3 Desvio Padrão

Assaf Neto (2014) descreve que o desvio padrão é capaz de medir o grau de dispersão dos retornos em termos de valor esperado, e pode ser interpretado como o risco total do ativo. Ou seja, é uma medida estatística indica a dispersão dos retornos de um ativo em torno de sua média, é utilizada para quantificar a volatilidade de um ativo e está diretamente relacionada ao risco total associado.

Sendo assim, há maior incerteza quanto maior o desvio padrão, ou seja, maior o risco, porém podem possibilitar retornos elevados. Para um contexto de formação de portfólio, ativos que possuem um desvio padrão mais elevado são

vistos como mais arriscados, pois seus retornos são mais imprevisíveis devido a maior volatilidade.

A fórmula matemática do desvio padrão de um ativo é dada por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (R_i - \bar{R})^2} \quad (1)$$

Onde:

R_i : Retorno esperado de um ativo

\bar{R} : Taxa livre de risco

N: Número total de retornos

2.1.4 Covariância e Correlação

As análises de covariância e de correlação entre os retornos dos ativos podem indicar o grau de dependência linear entre as variáveis observadas. Essa medida indica o grau em que duas variáveis variam juntas, conforme descrito por Malkiel (2019), a diversificação não é suficiente quando carteira é formada por ações com alta covariância, uma vez que covariâncias com valores positivos indicam que os retornos dos dois ativos tendem a se mover na mesma direção.

Por outro lado, essa medida quando apresenta valores negativos indica que os ativos se movem em direções opostas. Para valor zero, entende-se que não há relação linear entre os retornos dos ativos. Essa escala de unidades está relacionada com as variáveis envolvidas, o que significa que ela pode variar conforme o conjunto de ativos escolhidos.

A fórmula matemática da covariância é dada por:

$$\text{Cov}(X, Y) = \sum_{x=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n - 1} \quad (2)$$

Onde:

$\text{Cov}(X, Y)$: Covariância entre X e Y

X_i : Valor individual da variável X na amostra i

Y_i : Valor individual da variável Y na amostra i

\bar{X} : Média aritmética dos valores de X

\bar{Y} : Média aritmética dos valores de Y

n: Número total de amostras

Uma outra maneira de compreender o risco entre ativos, é através da correlação, que é descrita por Hull (2018) como uma medida normalizada da covariância, que indica o grau de relacionamento linear entre as duas variáveis. Essa pode oferecer uma compreensão mais padronizada entre a relação entre as variáveis. A sua escala não é influenciada pelas escalas das variáveis envolvidas, diferente da covariância, possuindo valores podem variar entre -1 e +1, tornando-a uma métrica que permite maior comparabilidade entre os diferentes pares de ativos.

A fórmula matemática da correlação é dada por:

$$\text{Cor}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x * \sigma_y} \quad (3)$$

Onde:

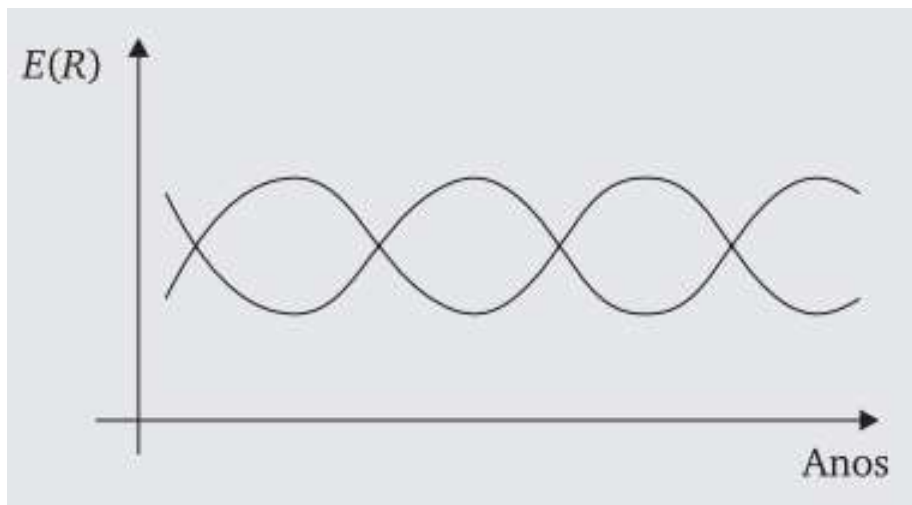
$\text{Cor}(X, Y)$: Coeficiente de correlação entre as variáveis X e Y

σ_x : Desvio padrão de X

σ_y : Desvio padrão de Y

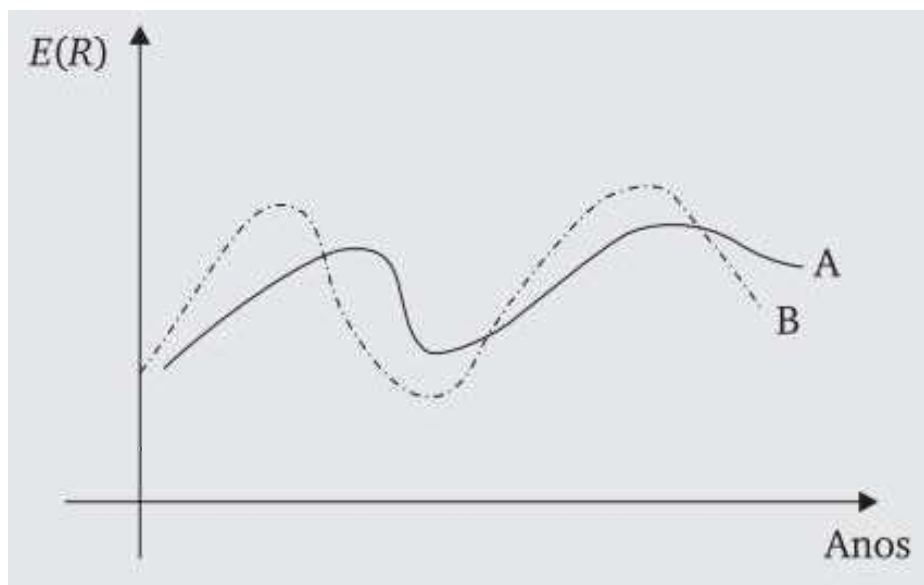
Entende-se que há benefícios em verificar a correlação entre os ativos escolhidos para a formação do portfólio, uma vez que permitem entender o comportamento de diferentes ativos em relação aos seus retornos. A relação entre os retornos de ativos com correlação perfeitamente negativa ou perfeitamente positiva são ilustrados na Figura 2 e 3, respectivamente.

Figura 2 – Investimentos com correlação negativa



Fonte: Assaf Neto (2014, p. 236)

Figura 3 – Investimentos com correlação positiva



Fonte: Assaf Neto (2014, p. 236)

2.1.5 Índice Sharpe

O conceito de Índice Sharpe foi introduzido por Sharpe em 1964, é uma medida utilizada para calcular o retorno ajustado ao risco de um investimento, enfatizando a importância de considerar essa variável. O autor define a fórmula do Índice Sharpe como a diferença entre o retorno do investimento e a taxa de

retorno livre de risco, dividida pelo desvio padrão dos retornos do investimento, que representa o risco adicional.

A fórmula matemática do índice Sharpe é dada por:

$$\text{Índice Sharpe} = \frac{(\mu_i - r_f)}{\sigma_i} \quad (4)$$

Onde:

μ_i : Retorno esperado de um ativo

r_f : Taxa livre de risco

σ_i : Desvio padrão dos retornos, representando o risco

Para um Índice Sharpe com valores mais elevados, indica-se que há um melhor ajuste de retorno ao risco. Um valor positivo sugere que o investimento gerou retornos acima do esperado para o nível de risco assumido, enquanto um valor negativo indica o oposto.

As publicações subsequentes de Sharpe expandiram a aplicação do índice e discutiram sua relevância em avaliações de desempenho e alocação de ativos. Em sua publicação de 1992, destacou que os investidores podem utilizar o índice para comparar a eficácia de diferentes investimentos ou estratégias de portfólio, uma vez que essa métrica permite uma quantificação da recompensa adicional por unidade de risco.

Na publicação de 1942, o autor definiu o índice Sharpe como uma razão do retorno adicional esperado por unidade de risco adicional, fornecendo um resumo conveniente de dois aspectos importantes de qualquer estratégia que envolva a diferença entre o retorno de um fundo e o de um referencial relevante.

Dessa maneira, esse índice tornou-se uma medida fundamental para a gestão de portfólio, ajudando investidores a compreender e melhorar a relação entre risco e retorno de seus investimentos.

2.2 Estimação de parâmetros do modelo de média-variância

2.2.1 Métodos de risco por matrizes de covariância

A mensuração do risco de um portfólio é frequentemente embasada na matriz de covariância, o autor Assaf Neto (2014) reproduz que essa análise é um importante conceito para teoria do portfólio de Markowitz, uma vez permite realizar a distinção entre o risco associado de um ativo isolado e o risco do mesmo ativo, quando integrado a uma carteira.

A relevância desse modelo está na sua capacidade de mapear a interdependência entre o conjunto de ativos que compõem a carteira de investimentos, sendo essa compreensão importante pois possibilita maximizar os benefícios da diversificação e, com isso, otimizar o retorno ajustado ao risco. Para isso, é importante a definição de métodos para estimação da matriz de covariância dos retornos dos ativos.

2.2.1.1 Matriz de Covariância Amostral

A matriz de covariância amostral, descrita por Edwin (2009) é um método tradicional para estimar as relações entre os retornos de diferentes ativos em um portfólio, baseado em um cálculo de maior simplicidade.

A fórmula matemática para calcular a matriz de covariância amostral, $Cov_{amostral}(R_i, R_j)$, entre os ativos i e j pode ser representada por:

$$Cov_{amostral}(R_i, R_j) = \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N (R_{it} - \bar{R}_i)(R_{jt} - \bar{R}_j) \quad (5)$$

Onde R_{it} e R_{jt} representam os vetores de retornos dos ativos i e j no período t , \bar{R}_i e \bar{R}_j são as médias dos retornos dos ativos, e N é o número de observações temporais. O elemento $Cov_{amostral}(R_i, R_j)$ da matriz $n \times n$ indica a covariância entre os retornos dos ativos i e j , medindo o grau de variação conjunta dessa combinação.

2.2.1.2 *Matriz de Semicovariância*

A matriz de semicovariância oferece uma perspectiva quanto ao risco por possuir maior foco nas perdas potenciais, sendo sugerida para cálculo da matriz de risco por Markowitz (1959). A maior ênfase nas perdas, ao invés da volatilidade total, permite uma visão mais direcionada de aversão ao risco em investimentos, útil para analisar como diferentes ativos se comportam juntos em condições adversas de mercado em relação a uma referência comum. Sendo uma proposta de modelo conservadora que busca contemplar as incertezas do mercado ao destacar a volatilidade negativa.

Estrada (2006) descreve que a fórmula matemática para cálculo da matriz de semicovariância, $Cov_{semivar}(R_i, R_j)$, entre os ativos i e j pode ser representada por:

$$Cov_{semivar}(R_i, R_j) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N ([\min(R_{it} - B, 0)] \cdot [\min(R_{jt} - B, 0)]) \quad (6)$$

Onde r_i e r_j são os retornos dos ativos i e j , respectivamente, e a variável B é o benchmark ou ponto de referência para os retornos. Esse método captura a extensão da variabilidade dos retornos que caem abaixo de um determinado ponto de referência, frequentemente é utilizado o retorno livre de risco.

2.2.1.3 *Matriz de Covariância Exponencial*

A matriz de covariância exponencial possui um ajuste de peso aos dados mais atuais, atribuindo maior importância às observações mais recentes. Isso é realizado através de uma função de ponderação exponencial que aplica um parâmetro de fator de decaimento, conforme mencionado por Hull (2015).

A fórmula matemática simplificada para calcular a matriz de covariância exponencial, $Cov_{exp}(R_i, R_j)$, entre os ativos i e j pode ser representada por:

$$Cov_{exp}(R_i, R_j) = \sum_{t=1}^N w_t (R_{it} - \overline{R_{ie}})(R_{jt} - \overline{R_{je}}) \quad (7)$$

$w_t = \lambda^{N-t}$, onde λ ($0 < \lambda < 1$) é o fator de decaimento

Onde w_t denota o fator de decaimento que influencia em pesos que diminuam exponencialmente, R_{it} e R_{jt} são os retornos dos ativos i e j no tempo t , respectivamente, e $\overline{R_{ie}}$ e $\overline{R_{je}}$ são as médias móveis ponderadas exponencialmente dos retornos. Entende-se que a ênfase em dados recentes a torna esse método interessante para mercados voláteis ou em rápida mudança, possibilitando que investidores otimizem a relação entre risco e retorno em um ambiente de mercado em constante evolução.

2.2.2 Métodos de retorno esperado

A incerteza é uma característica proeminente do investimento em ativos, conforme descrito por Fama (1991), uma vez que há dificuldade na previsão dos retornos uma vez que os cálculos são baseados em dados passos e há grande incerteza e dúvida sobre as combinações de ações que podem impactar os preços dos ativos no futuro e, também, sua percepção frente ao mercado.

A relação do retorno esperado com os fluxos de caixa incertos do investimento, descrito por Assaf Neto (2014), é calculado através da combinação dos valores financeiros previstos com suas probabilidades de ocorrerem. Assim, os investidores devem selecionar a alternativas que oferecem o maior retorno esperado para o mesmo grau de risco.

Há grande importância quanto a qualidade nas estimações dos retornos esperados e, por esse motivo, entende-se que a decisão pelo melhor método para quantificar o retorno esperado é muito importante, uma vez que permite alcançar maior precisão de cálculo, isso é muito relevante pois imprecisões podem influenciar em uma alocação não ótima de ativos.

2.2.2.1 Retorno Histórico Médio

O retorno histórico médio é uma medida estatística que fornece uma estimativa básica dos retornos esperados, sendo calculada a partir dos retornos passados de um ativo. Sendo descrito por Bodie (2009), o retorno histórico médio pode ser calculado em sua forma aritmética dos retornos passados do ativo, conforme fórmula matemática dada por:

$$R_{\text{médio (arit)}} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N R_t \quad (8)$$

Onde:

N: Número total de períodos

R_t : Retorno do ativo no período t

Uma alternativa importante para seu cálculo ocorre através do retorno geométrico médio. A fórmula matemática para cálculo do retorno geométrico médio (CAGR - Taxa de Crescimento Anual Composta), é dada por:

$$R_{\text{médio (geom)}} = \left(\prod_{i=1}^N 1 + R_t \right)^{\frac{1}{N}} - 1 \quad (9)$$

Onde:

\prod : Esse produto indica que você deve multiplicar os termos $(1+R_t)$ para todos os períodos de 1 a N

2.2.2.2 Retorno Histórico com Média Exponencialmente Ponderada

O retorno histórico com média exponencialmente ponderada é um método de retornos esperados, abordado por Hull (2018), que aplica maior peso aos retornos mais recentes. Isso oferece maior destaque para as tendências atuais e possíveis mudanças no mercado. Essa abordagem de cálculo é interessante para análise financeira, uma vez que eventos mais recentes podem ter maior influência sobre as expectativas de preço futuras.

A fórmula matemática do retorno histórico com média exponencialmente ponderada (EWMA) é dada por:

$$R_{EWMA(t)} = \lambda \cdot R_{EWMA(t-1)} + (1 - \lambda) \cdot R_t \quad (10)$$

Onde:

$R_{EWMA(t)}$: Média móvel exponencial ponderada no tempo t

$R_{EWMA(t-1)}$: Média móvel exp. ponderada no tempo t-1

R_t : Retorno do ativo no tempo t

λ : Fator de decaimento

O fator de decaimento, aplicado na fórmula, é uma constante que respeita as limitações de ser um valor superior a zero e inferior a 1 ($0 < \lambda < 1$). Valores de λ mais próximos de zero implicam em menor mudança na média após a introdução de uma nova observação. Por outro lado, quanto mais próximo de 1, mais a média aproxima-se do último valor observado.

2.2.2.3 *Retorno pelo Modelo de Precificação de Ativos Financeiros*

Conforme descrito por Assaf Neto (2014), o Modelo de Precificação de Ativos Financeiros (CAPM) é um método de cálculo utilizado para determinar o retorno esperado de um ativo que considera o risco sistemático, representado pelo Beta do ativo, em relação ao mercado como um todo e a taxa de retorno esperada do mercado.

O coeficiente Beta (β) é uma medida de risco que mostra como o retorno do ativo está correlacionado com o retorno do mercado, foi apontada por Malkiel (2019) como uma representação do risco sistemático, aferindo a sensibilidade de um ativo em relação aos movimentos gerais do mercado.

Essa medida indica a volatilidade da ação em comparação com o desempenho de um benchmark, de forma complementar, o autor destaca que é muito utilizada para calcular o custo de capital em avaliações e estratégias de investimento, sendo fundamental para a aplicação do Modelo de Precificação de

Ativos de Capital (CAPM), uma vez que é uma variável utilizada para calcular o retorno esperado de um ativo baseado em seu risco em relação ao mercado.

A fórmula matemática do Coeficiente Beta (β) é dada por:

$$\beta = \frac{Cov(R_i, R_m)}{Var(R_m)} \quad (11)$$

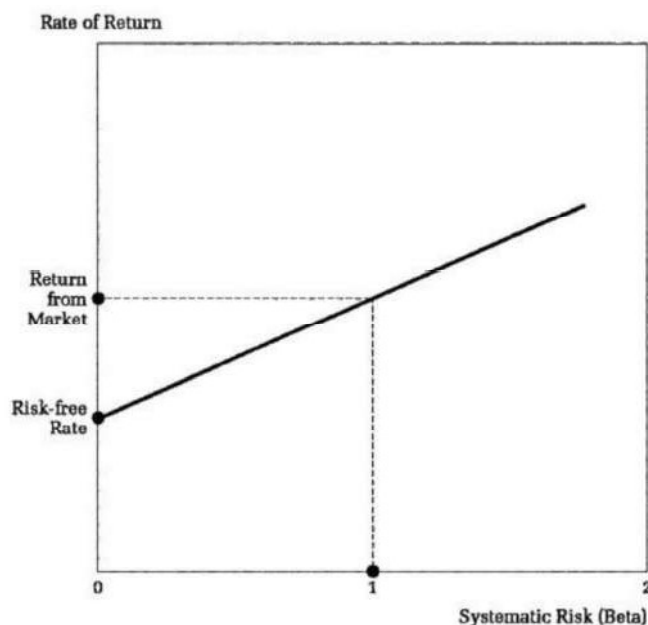
Onde:

$Cov(R_i, R_m)$: Covariância entre o retorno do ativo e o retorno do mercado

$Var(R_m)$: Variância dos retornos do mercado

Os valores desse coeficiente quando iguais a 1, indicam que o ativo se movimenta na mesma intensidade que o mercado, já os valores superiores a 1 sugerem que o ativo é mais volátil que o mercado, aumentando o risco e potencialmente o retorno. Já para inferiores a 1, indica-se que o ativo é menos volátil e, portanto, possui menor risco.

Figura 4 – Retorno e o Beta com a taxa livre de risco e retorno do mercado



Fonte: Malkiel (2019, p. 169)

Markiel (2019) descreve que diversas possibilidades de retornos esperados são possíveis ajustando o beta do portfólio, ou seja, o prêmio de risco assumido com um ativo ou portfólio aumentará diretamente com o valor do beta que você assume, conforme é possível identificar na Figura 4.

Uma vez estimado o coeficiente Beta, é possível seguir para o cálculo do método de retorno esperado em questão, descrito por Bodie (2009), a fórmula matemática do retorno pelo modelo CAPM é dado por:

$$E(R_i) = R_f + \beta_i(E(R_m) - R_f) \quad (12)$$

Onde:

$E(R_i)$: Retorno esperado de um ativo

R_f : Taxa livre de risco

β_i : Beta do ativo

$E(R_m)$: Retorno esperado do mercado

O autor descreve que a fórmula infere que o retorno esperado de um ativo é linearmente proporcional ao seu Beta. Isso porque um valor de beta igual à 0, implica em um retorno esperado igual à taxa livre de risco, mostrando que o ativo não apresenta um risco relevante. Já para um valor dessa medida igual 1, é imposto que o retorno esperado do ativo é igual ao retorno esperado do mercado, uma vez que o Beta da carteira de mercado é igual a 1.

2.3 Otimização de carteiras pelo modelo de média-variância

A Fronteira Eficiente, calculada através do modelo de média-variância, é formada por um conjunto de pontos ótimos cuja implementação inclui maximizar o retorno mantendo o risco limitado, ou minimizar o risco sujeito a um retorno mínimo. De acordo com Barbosa (2013), as fórmulas matemáticas podem ser representadas conforme itens (13) e (14), essas aplicam a estratégia utilizando retorno esperado, para variável de retorno, e a matriz de covariância como medida para calcular o risco.

$$\min \sigma_p \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij}} \quad (13)$$

Sujeito às restrições:

$$R_p = \sum_{i=1}^N w_i \bar{R}_i : \text{retorno esperado da carteira}$$

$$1 = \sum_{i=1}^N w_i : \text{investimento de todo o capital disponível}$$

$$0 \leq w_i \leq 1 : \text{sem alavancagem}$$

$$\max R_p \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i \bar{R}_i \quad (14)$$

Sujeito às restrições:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij}} : \text{risco da carteira}$$

$$1 = \sum_{i=1}^N w_i : \text{investimento de todo o capital disponível}$$

$$0 \leq w_i \leq 1 : \text{sem alavancagem}$$

O modelo de média-variância seleciona carteiras eficientes baseadas na Fronteira Eficiente, focando em encontrar uma carteira ideal. Para isso, considera-se o risco e retorno desejados pelo investidor. As abordagens comuns incluem maximizar o retorno mantendo o risco limitado, ou minimizar o risco respeitando um retorno mínimo. Este estudo aplica esses dois métodos, excluindo técnicas como venda a descoberto e aluguel de ativos sem risco. O risco da carteira é avaliado pela matriz de covariância.

A Teoria Moderna de Portfólio revolucionou a forma como os investidores constroem e gerenciam carteiras de investimento, foi inicialmente apresentada por Markowitz (1959) que defendia que os investidores deveriam construir um portfólio integrado que melhor atenda às suas necessidades, de modo a buscar a maximização do retorno esperado conforme nível de risco tolerado. Para isso, são utilizados modelos de otimização de portfólio para buscar as carteiras com melhor equilíbrio entre a relação de risco e retorno.

O autor contribuiu na elaboração de técnicas de análise direcionadas para determinar a carteira mais adequada, conforme um objetivo de abordagem de retorno baseada no risco. De acordo com Ruppert (2019), é descrito que portfólios eficientes equilibram a relação entre o risco e retorno dos ativos, de modo a assegurar maior retorno esperado para um dado nível de risco ou o menor risco para um retorno esperado específico. Sendo assim, qualquer tentativa de aumentar o retorno esperado resultará em maior risco, enquanto a redução do risco acarretará diminuição do retorno esperado.

Essa teoria revolucionou a abordagem de investimentos ao relacionar princípios de diversificação, otimização de retorno-risco e correlação entre ativos para a tomada de decisão na formação de carteiras conhecidas como ótimas.

2.3.1 Fronteira Eficiente

A importância da medição dos parâmetros de risco e retorno para formação de carteira foi defendida por Markowitz (1991) ao descrever que uma abordagem interessante para decisão de investimentos era a seleção de um ponto do conjunto de combinações ótimas. Essas são encontradas na curva de Pareto pela otimização do retorno esperado e da variância dos retornos, em uma representação gráfica conhecida como Fronteira Eficiente, ilustrada na Figura 5.

Cochrane (2000) descreve que a taxa de retorno livre de risco de um ativo está sendo representada pela variável R_F , considerando que um investidor possa tomar emprestado essa taxa para investir em ativos mais arriscados de maior retorno, é possível decidir por portfólios com posições mais à direita na curva, aumentando o retorno esperado estando sujeito a um maior risco na carteira.

A Linha de Mercado de Capitais (CML) é descrita por Ruppert (2015) como uma relação entre o retorno esperado excedente de um portfólio eficiente e o seu risco. Sendo que o retorno esperado excedente é o retorno esperado menos a taxa livre de risco, chamado de prêmio de risco.

A fórmula matemática Linha de Mercado de Capitais (CML) é dada por:

$$\mu_R = \mu_f + \frac{(\mu_M - \mu_f)}{\sigma_M} \sigma_R \quad (15)$$

Onde:

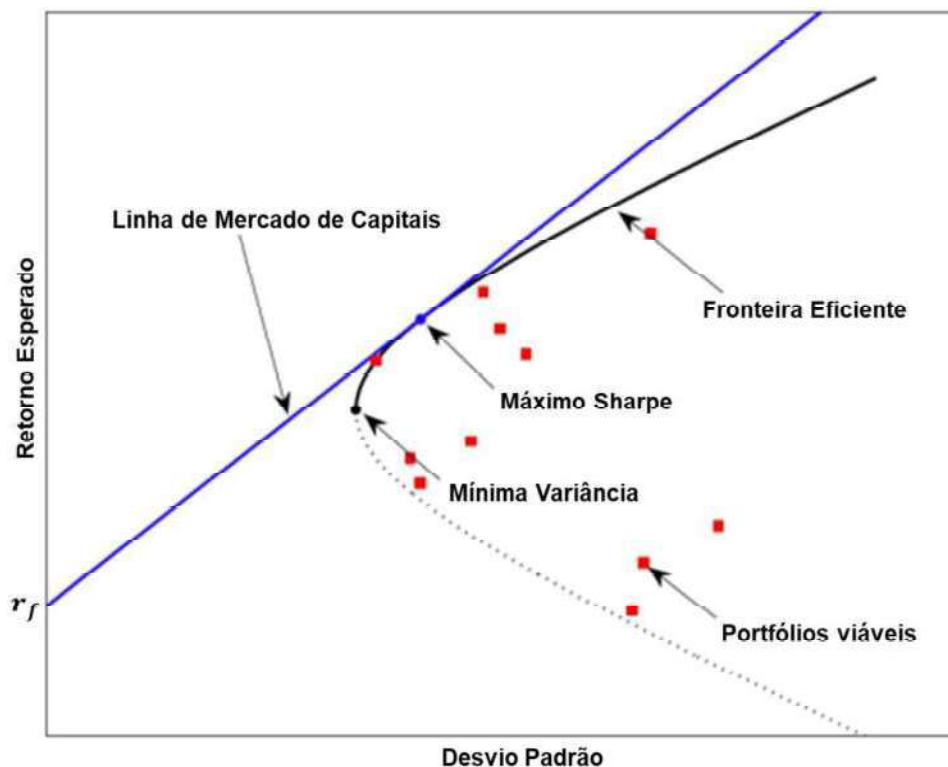
μ_f : Taxa livre de risco

σ_R, σ_M : Desvio padrão

$\mu_M - \mu_f$: Prêmio de risco do portfólio de mercado

A Figura 5 ilustra a Fronteira Eficiente, que representa o conjunto de portfólios que oferecem o máximo retorno para um dado nível de risco ou o mínimo risco para um dado nível de retorno, destacando as carteiras ótimas com estratégias de máximo Sharpe e mínima variância, essas são consideradas ótimas, pois não é possível aumentar o retorno sem aumentar o risco.

Figura 5 – Fronteira Eficiente e carteiras ótimas



Fonte: Palomar (2021, p. 38; Tradução própria)

Na abordagem de Markowitz (1952) para a otimização de portfólios, o retorno médio e a variância são medidas essenciais para avaliar o desempenho de um conjunto de ativos. Entende-se que um aumento no retorno esperado será acompanhado de um aumento na variância, assim a seleção de um portfólio na Fronteira Eficiente depende da preferência individual do investidor em sua avaliação de risco e retorno.

Palomar (2021) descreve a Figura 5 como a solução que forma uma curva de compensação, conhecida como curva de Pareto, sendo que o retorno buscado ao longo dessa curva varia conforme a disposição do investidor em tolerar riscos. A otimização busca controlar o nível de aversão ao risco do investidor, buscando equilibrar o retorno esperado e o risco.

2.3.2 Carteira de Mínima Variância

A carteira de mínima variância, definida por Markowitz (1959), também conhecida como de mínima volatilidade, busca atingir a minimização do risco total, identificando a composição de ativos que resulta no menor desvio padrão ou volatilidade. Essa carteira é ideal para investidores avessos ao risco, que preferem preservar o capital em detrimento de retornos potencialmente maiores.

O portfólio de mínima variância destaca-se como o de menor risco, devido sua menor variância e, conseqüentemente, o menor desvio-padrão combinado dentre as opções. O autor define que essa carteira oferece o menor risco, uma vez que a seleção de ativos nessa carteira é baseada na correlação entre os ativos, buscando a combinação que resulta na menor volatilidade.

Palomar (2021) descreve a fórmula matemática para minimizar a variância de um portfólio, na qual é considerado apenas o parâmetro de risco, dada por:

$$\min w \quad w^T \sum w \quad (16)$$

Sujeito às restrições:

$$w^T \mu \geq \beta$$

$$1^T w = 1; w \geq 0$$

2.3.3 Carteira de Máximo Sharpe

Conforme descrito por Cicogna (2014), a carteira de máximo Sharpe está localizada no ponto onde a Linha de Alocação de Capital (CAL) é tangente à Fronteira Eficiente, no qual a linha tangente originada pelo ativo livre de risco intercepta a curva, representando a melhor relação risco-retorno possível.

A carteira de máximo Sharpe, proposta por Sharpe (1994), é aquela que oferece a maior relação de recompensa por unidade de risco, que é medida através do índice de Sharpe. Sendo considerado um portfólio ótimo para investidores que buscam maximizar o retorno ajustado ao risco.

Palomar (2021) descreve a fórmula matemática para maximizar o índice Sharpe de um portfólio, dada por:

$$\max w \frac{w^T \mu - r_f}{\sqrt{w^T \Sigma w}} \quad (17)$$

Sujeito às restrições:

$$1^T w = 1; w \geq 0$$

Assim, o autor indica que estrutura de média-variância de Markowitz fornece carteiras ao longo da fronteira Pareto-ótima e o ponto escolhido depende da aversão ao risco do investidor. Mas, dentre as opções, a estratégia de carteira conhecida como de máximo Sharpe, é um portfólio na fronteira Pareto-ótima que alcança o índice de Sharpe máximo.

2.4 Carteira igualmente ponderada

A carteira igualmente ponderada, também conhecida como estratégia de alocação 1/N, é apontada por DeMiguel (2009) como uma estratégia que envolve alocar o mesmo percentual de capital para cada ativo disponível na carteira, sem tentar otimizar os pesos com base em expectativas de retorno ou risco. Sendo uma abordagem atraente por sua simplicidade e por evitar a complexidade da

estratégia de otimização de carteiras, conforme fundamentos da teoria moderna do Portfolio, que requer estimação retornos futuros e covariâncias dos ativos.

O autor destaca que um dos benefícios dessa carteira é sua facilidade de implementação. Ao alocar o mesmo montante de capital para cada ativo, os investidores podem evitar o processo muitas vezes complexo e propenso a erros de estimar retornos futuros e correlações. Isso ocorre pois alega que o modelo de média-variância funciona melhor com estimativas derivadas de várias décadas de séries históricas, para garantir menor erro nas estimativas de risco e retornos para geração de pesos mais coerentes para os ativos analisados, visando desempenhos mais satisfatórios. Além disso, a estratégia promove a diversificação, pois evita excesso de concentração em qualquer ativo específico.

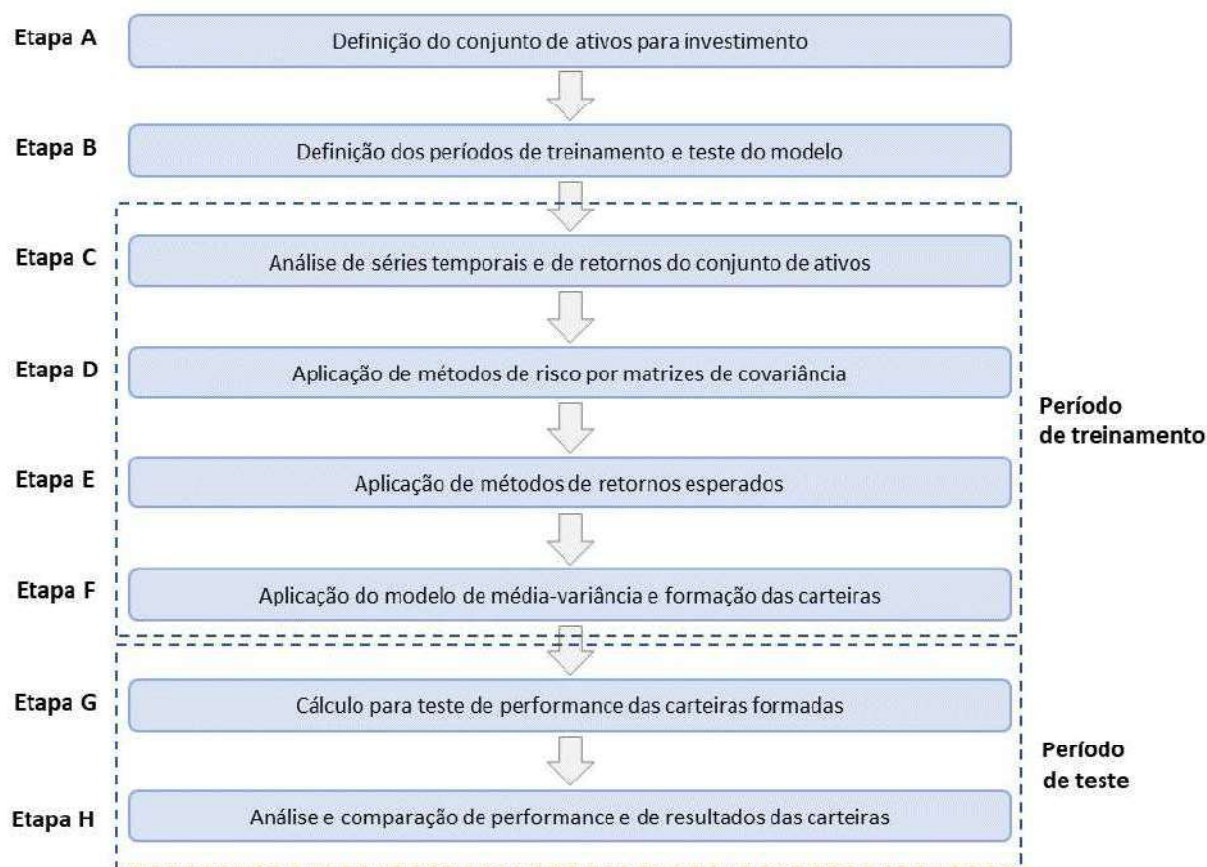
3. METODOLOGIA

3.1 Classificação da pesquisa

Este capítulo possui o propósito de descrever a metodologia utilizada nesse trabalho empírico que visa a seleção de um conjunto de ativos para estimação dos parâmetros para aplicação do modelo de média-variância e, com isso, gerar a Fronteira Eficiente para seleção de carteiras ótimas, fundamentadas pela Teoria do Portfólio Moderno e nos conceitos apresentados na Revisão Bibliográfica, no capítulo 2.

A partir do objetivo definido, é possível a representação da lógica metodológica desenvolvida de maneira simplificada na Figura 6, de modo a visar uma melhor descrição do trabalho. A partir desse contexto inicial, a apresentação de maiores detalhes sobre suas etapas e estratégias aplicadas.

Figura 6 - Fluxograma de etapas da metodologia



Fonte: Autoria Própria (2024)

Para implementação das estimativas de risco-retorno e aplicação do modelo de média-variância, será utilizada programação em linguagem Python, com uso, em especial, da biblioteca *PyPortfolioOpt*, que é capaz de implementar métodos de otimização de carteiras ótimas, incluindo técnicas relacionadas a teoria de Markowitz e métodos de estimação risco e retorno para geração da Fronteira Eficiente. A metodologia aplicada no desenvolvimento desse trabalho foi inspirada pelos exemplos práticos de aplicação disponibilizadas por Martin (2021), em seu diretório de projetos *PyPortfolioOpt – Cookbook*, no *GitHub*, além de seu guia de documentação do usuário, que apresenta detalhes sobre os métodos e estratégias de otimização aplicadas em seus projetos documentados.

3.2 Aplicação da metodologia

Etapa A: Definição do conjunto de ativos para investimento

O procedimento adotado nessa pesquisa para formatar o conjunto de ativos, que será alvo do processo de otimização para formação de carteiras de investimento, consiste na escolha de um índice do mercado acionário de ações listadas na B3, Bolsa de Valores do Brasil, e capturar parcialmente sua exposição de ativos na data de realização desse estudo.

Os índices de mercado permitem entender o desempenho de uma carteira teórica específica. Para esse estudo focado no mercado acionário brasileiro, foi adotado o Índice Mid-Large Cap (MLCX) para formação do conjunto de ativos que alvo do processo de otimização e formação das carteiras de investimento.

Segundo informações disponibilizadas pela bolsa brasileira (B3), esse índice tem como objetivo representar o desempenho médio das cotações dos ativos ações de companhias listadas na bolsa. Sendo essa, uma carteira teórica composta por ações das empresas de maior capitalização, consideradas de média e grande porte, com base na liquidez e no valor de mercado para determinar a exposição do índice a essas companhias.

A Figura 7 mostra a seleção do conjunto de ativos, que funciona a partir da escolha das ações das doze empresas que possuem maior participação em

nesse índice, de modo a não repetir uma ação de mesma empresa e não adotar holdings que possuam grande exposição a outra empresa já escolhida, como no caso da Itaúsa, além disso é necessário a escolha de ações que possuam dados históricos para todo o período de estudo.

Figura 7 – Índice MidLarge Cap (MLCX) e as ações selecionadas

Seleção	Ativo	Nome da empresa	Tipo	Qtde. Teórica	Part. (%)
1	VALE3	VALE	ON NM	4.427.123.466	13,992
2	PETR4	PETROBRAS	PN N2	4.566.445.852	7,954
3	ITUB4	ITAUNIBANCO	PN N1	4.801.593.832	7,34
-	PETR3	PETROBRAS	ON N2	3.701.760.571	6,692
4	ELET3	ELETROBRAS	ON N1	1.980.568.384	3,834
5	BBDC4	BRADERCO	PN N1	5.146.576.868	3,736
6	BBAS3	BRASIL	ON NM	1.420.949.112	3,688
7	B3SA3	B3	ON NM	5.602.790.110	3,586
8	ABEV3	AMBEV S/A	ON	4.394.245.879	2,723
-	ITSA4	ITAUSA	PN N1	5.560.910.983	2,591
9	RENT3	LOCALIZA	ON NM	853.202.347	2,379
10	WEGE3	WEG	ON NM	1.481.593.024	2,302
11	BPAC11	BTGP BANCO	UNT N2	1.150.645.866	1,966
12	EQTL3	EQUATORIAL	ON NM	1.095.587.251	1,748
-	PRI03	PETRORIO	ON NM	800.010.734	1,656
-	SUZB3	SUZANO S.A.	ON NM	683.452.836	1,643
-	RADL3	RAIADROGASIL	ON NM	1.275.798.515	1,593
-	RDOR3	REDE D OR	ON NM	1.168.230.366	1,445
-	UGPA3	ULTRAPAR	ON NM	1.086.411.192	1,395
-	RAIL3	RUMO S.A.	ON NM	1.218.352.541	1,267
-	DEMAIS ATIVOS				26,47
-	TOTAL				100

Fonte: Autoria Própria (2024)

Desse modo, é possível listar as doze ações que compõem o conjunto:

1. Vale (VALE3)
2. Petrobras (PETR4)
3. Itaú Unibanco (ITUB4)
4. Eletrobrás (ELET3)
5. Banco Bradesco (BBDC4)
6. Banco do Brasil (BBAS3)
7. B3 (B3SA3)
8. Ambev (ABEV3)
9. Localiza (RENT3)

10.Weg (WEGE3)

11.BTG Pactual (BPAC11)

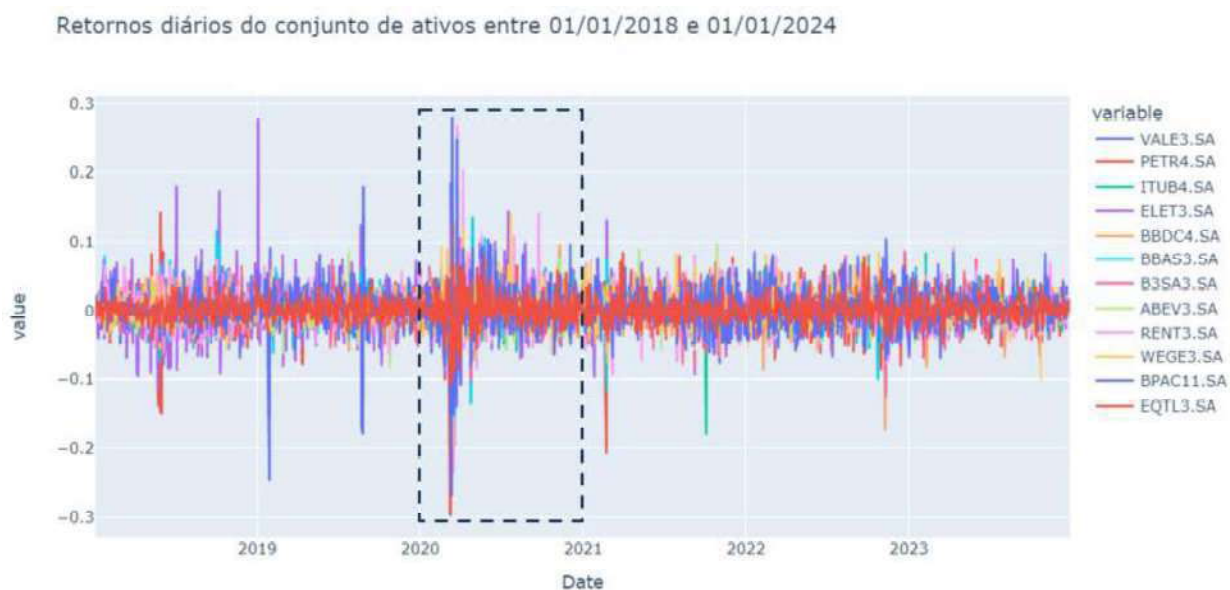
12.Equatorial (EQTL3)

Etapa B: Definição dos períodos de treinamento e teste do modelo

Para a definição do intervalo temporal analisado nesse estudo, foram estabelecidas duas fases fundamentais: o período de treinamento e o período de teste. O período de treinamento é composto por duas etapas distintas: a fase de estimação e a fase de validação.

No período de treinamento, a etapa de estimação ocorre de 01/01/2021 a 01/01/2022 e a etapa de validação ocorre de 01/01/2022 a 01/01/2023. Essa divisão de períodos é importante para identificação dos melhores métodos para cálculo do retorno esperado e do risco, através das matrizes de covariância. Sobre a escolha da data inicial do estudo, a partir do ano de 2021, houve a motivação de não utilizar dados do ano de 2020, pela ocorrência da pandemia do coronavírus, devido à alta volatilidade observada nos ativos durante esse período, que poderia influenciar o modelo com informações atípicas, que tendem a não se repetir no curto ou médio prazo, conforme ilustrado na Figura 8.

Figura 8 – Gráfico de retornos diários do conjunto de ativos



Fonte: Autoria Própria (2024)

De maneira geral, essa divisão de tempos no treinamento do modelo é importante pois diferentes métodos para aplicação do cálculo do risco e do retorno, no período de estimação e no período de validação subsequente. O contraste entre os resultados desses períodos, para o mesmo método, resultará em um desvio de cálculo. Isso possibilitará a escolha do melhor método, que será aquele que apresentar menor divergência entre as previsões realizadas entre esses dois momentos. Assim, identificando os parâmetros de risco e retorno que serão aplicados no cálculo da Fronteira Eficiente e formação das carteiras ótimas pelas estratégias de investimento.

O período de teste, definido de 01/01/2023 a 01/01/2024, é a etapa final na avaliação do modelo. Durante este período, no qual o modelo é submetido a dados mais atuais, imediatamente posteriores ao período de treinamento, para que seja possível a medição do desempenho das carteiras selecionadas e a comparação de seus resultados com as expectativas de cada estratégia.

Etapa C: Análise de séries temporais e de retornos do conjunto de ativos

A análise temporal de ações é um componente importante na gestão de carteiras de investimento. Esta etapa do estudo aborda a compreensão de elementos individuais das doze ações selecionadas para o processo de otimização da carteira de investimentos, visando uma melhor compreensão do investidor sobre o mercado.

Esse entendimento inicial consiste na análise ocular de determinados comportamentos individuais de cada ação do conjunto de ativos definido, ao longo do tempo de treinamento. Sendo importante a análise de variáveis como a evolução da cotação histórica, os retornos diários, os retornos acumulados e a volatilidade, que permitem compreender os ativos e a reação do mercado a eventos específicos, permitindo ajustes na estratégia de investimento.

Através desse reconhecimento de padrões baseado em dados, é possível que o investidor entenda melhor sobre os diferentes comportamentos, sobre ações das empresas escolhidas, e com distintas visões relacionadas a risco e retorno.

Etapa D: Aplicação de métodos de risco por matrizes de covariância

As matrizes de covariância são elementos aplicados para a avaliação do risco associado a uma carteira de investimentos, são capazes de informar como os retornos entre diferentes ativos se movimentam juntos, auxiliando na compreensão sobre a diversificação de risco. A matriz de covariância amostral, a matriz de semivariância e a matriz de covariância exponencial são os métodos aplicados para os modelos de riscos.

A comparação desses métodos nos períodos de estimação e validação permite identificar as melhores opções para cálculo do modelo de média-variância e formação das carteiras de investimento. Assim, destaca-se a importância de buscar um cálculo assertivo sobre os retornos esperados e as matrizes de covariância, uma vez que são variáveis cruciais para o gerar a fronteira eficiente. Dessa forma, possibilitando a geração de carteiras otimizadas com objetivos específicos do investimento para o perfil do investidor.

A análise da covariância, que pode ser realizada através de matrizes, oferece uma visão geral da relação entre as diversas combinações de pares de ativos presente no portfólio de investimento. Há diversos métodos capazes de calcular a covariância, sendo alguns desses: a matriz de covariância amostral, a matriz de semivariância e a matriz de covariância exponencial. Esses métodos de covariância podem ser calculados através da biblioteca *PyPortfolioOpt* no *Python*, que possui as funções `'sample_cov'`, `'semicovariance'` e `'exp_cov'`, respectivamente, que estão presentes no módulo `"risk_models"`. Essas funções possuem fórmulas matemáticas que transformam preços em retornos e permitem o cálculo da matriz e a multiplicação pelo parâmetro *frequency* anualiza a matriz de covariância, com a aplicação do padrão de 252 dias em um ano.

A função `sample_cov` calcula a matriz de covariância amostral anualizada dos retornos dos ativos.

```
pyppopt.risk_models.sample_cov(prices, returns_data=False,
frequency=252, log_returns=False, **kwargs)
```

A função `semicovariance` calcula a matriz de covariância amostral, sendo necessário a definição de um benchmark para capturar a variabilidade alvo dos

retornos abaixo dessa referência. Para a definição do benchmark foi seguido o direcionamento da documentação do usuário, da biblioteca em questão, que indica o uso da taxa livre de risco elevado a $1/252$, com a subtração de 1, resultando em $0,000322 (1,0844^{1/252})$ para o treinamento do modelo.

```
pypfopt.risk_models.semicovariance(prices, returns_data=False,
benchmark=7.9e-05, frequency=252, log_returns=False, **kwargs)
```

A função *exp_cov* aplica o cálculo da matriz de covariância exponencial com um *span* padrão de 180, fornecendo uma suavização mais rápida para priorização de dados mais recentes, sendo possível sua implementação através da biblioteca *PyPortfolioOpt*.

```
pypfopt.risk_models.exp_cov(prices, returns_data=False, span=180,
frequency=252, log_returns=False, **kwargs)
```

Etapa E: Aplicação de métodos de retornos esperados

Os modelos de retornos esperados e de riscos em carteiras de investimento é fundamental no contexto da teoria moderna do portfólio. Isso possibilita o processo de otimização na alocação de ativos e contribui em melhores decisões de investimento, balanceando eficientemente o equilíbrio entre retorno esperado e o risco associado.

Envolve as projeções de retorno esperado e risco do conjunto de ativos considerados, sendo que o cálculo dos retornos esperados fornece estimativa sobre o desempenho futuro de carteiras, servindo como base para prever o potencial de ganho de um investimento. Os modelos de retornos aplicados são o retorno histórico médio, o retorno histórico com média exponencialmente ponderada e o retorno pelo modelo de precificação de ativos financeiros (CAPM).

Os retornos esperados podem ser calculados de diversas maneiras, sendo os métodos analisados, alvos da implementação na programação: a média histórica simples, a média exponencialmente ponderada e a média CAPM. Respectivamente, as funções que aplicam esses métodos de retorno são chamadas de '*mean_historical_return*', '*ema_historical_return*' e '*capm_return*',

presentes no módulo “*expected_return*” do pacote *PyPortfolioOpt* no *Python*, que possuem cálculos matemáticos capazes de estimar esses retornos.

Essas funções calculam o retorno a partir de uma média geométrica utilizando dados de preço, como parâmetro padrão, e aplicam uma frequência anualizada. A média geométrica, também conhecida como retorno composto ou CAGR, possui maior destaque em análises financeiras sobre a média aritmética, isso porque compõe os retornos de maneira anualizada, resultando em uma estimativa mais precisa do que esperar em termos de retorno médio.

O modelo ‘*mean_historical_return*’, presente no pacote *PyPortfolioOpt*, calcula o retorno médio anualizado.

```
pypfopt.expected_returns.mean_historical_return(prices,  
returns_data=False, compounding=True, frequency=252,  
log_returns=False)
```

O modelo de ‘*ema_historical_return*’ aplica uma maior relevância aos dados mais recentes, isso é parametrizado pelo parâmetro ‘*span*’ que têm seu padrão em 500, desse modo ajustando-se mais rapidamente às mudanças recentes de preço em comparação com uma média móvel simples.

```
pypfopt.expected_returns.ema_historical_return(prices,  
returns_data=False, compounding=True, span=500,  
frequency=252, log_returns=False)
```

O modelo ‘*capm_return*’ calcula os retornos pelo método CAPM, chamado de Modelo de Precificação de Ativos Financeiros, nesse é possível definir uma taxa livre de risco para o período considerado a frequência padrão anual. Sendo o retorno esperado do ativo é proporcional aos retornos do mercado mais o termo β (beta), risco relativo do ativo, e a taxa livre de risco. A taxa livre de risco é calculada a partir da média das taxas Selic ao longo do período de treinamento. Isso pode ser feito somando todas as taxas diárias e dividindo pelo número total de dias, resultando em uma taxa de 8,44%.

```
pypfopt.expected_returns.capm_return(prices,  
market_prices=None, returns_data=False, risk_free_rate=0.02,  
compounding=True, frequency=252, log_returns=False)
```

Etapa F: Aplicação do modelo de média-variância e formação das carteiras

As carteiras que oferecem o máximo retorno para um dado nível de risco serão identificadas com base nos parâmetros estimados anteriormente, pelos métodos de retornos esperados e de risco pelas matrizes de covariância, serão aplicados no cálculo da Fronteira Eficiente para identificar as carteiras ótimas.

Dessa maneira, investidores podem identificar carteiras com maior eficiência, no sentido de que nenhum outro portfólio oferece um retorno mais alto para o mesmo nível de risco. As carteiras ótimas escolhidas são a de máximo Sharpe, que oferece o melhor retorno ajustado ao risco possível, e a de mínima variância, que busca minimizar o risco total da carteira, independentemente do retorno, sendo ideal para investidores avessos ao risco.

A aplicação do modelo de média-variância é viabilizada através da biblioteca *PyPortfolioOpt* em *Python*, no qual a função *min_volatility()* é aplicada no cálculo da carteira de mínima variância, no qual o objetivo dessa função é encontrar o peso de cada ativo no portfólio que resulta na menor volatilidade possível ativos considerados. Já a função *max_sharpe()* é aplicada para calcular a carteira de máximo Sharpe, encontrando o peso de cada ativo que resulta em maior retorno possível para um risco reduzido.

Etapa G: Cálculo para teste de *performance* das carteiras formadas

A estimação dos parâmetros para aplicação do modelo de variância no período de treinamento do modelo possibilitou a formação das carteiras ótimas, conhecidas como de máximo Sharpe e mínima variância, que informou o peso de cada ativo do conjunto de ações que deve ser aplicado para alcançar o dado nível de retorno ajustado ao risco proposto.

Essas formatações ótimas de carteira e, adicionalmente, a carteira baseada em um método mais simplista, que consiste em uma distribuição igual de peso nos ativos do conjunto, terão suas *performances* testadas no período de teste, no qual serão calculadas as variáveis anualizadas de retorno acumulado, volatilidade e índice Sharpe.

Etapa H: Análise e comparação de *performance* e de resultados das carteiras

A análise de *performance* e comparação de resultados das carteiras otimizadas pela Teoria Moderna do Portfólio de Markowitz é essencial para determinar a eficácia das estratégias de alocação de ativos. Nessa etapa será explorado a análise avaliativa dos resultados das três carteiras no período de teste, comparando os parâmetros objetivos de retorno acumulado anual, volatilidade anual e índice Sharpe com esses quando calculados no período de treinamento do modelo.

Através dessa comparação de parâmetros no treinamento e no teste do modelo irá permitir o investidor compreender os resultados e a *performance* dessas carteiras assim como o comportamento do modelo para realizar seu propósito de retorno baseado em risco.

4. ANÁLISE DE RESULTADOS

4.1 Análise de séries temporais e de retornos do conjunto de ativos

A análise de séries temporais financeiras é importante para investidores do mercado acionário, pois fornece informações sobre o comportamento de preços e retornos dos ativos ao longo do tempo. Ao examinar as tendências, os padrões e a volatilidade dos ativos, os analistas podem entender mais sobre os ativos selecionados, avaliar riscos e desenvolver estratégias de alocação de recursos mais informadas.

Figura 9 – Evolução dos preços do conjunto de ativos para investimento no período de treinamento do modelo



Fonte: Autoria Própria (2024)

A figura 9 ilustra a evolução dos preços das ações selecionadas, com valor nominal corrigido por dividendos, ao longo do período de treinamento do modelo. Embora sem efeito prático para tomada de decisões de investimentos, é possível observar um valor nominal maior nas ações da empresa Vale e da Localiza e um valor nominal menor para B3 e Banco Bradesco.

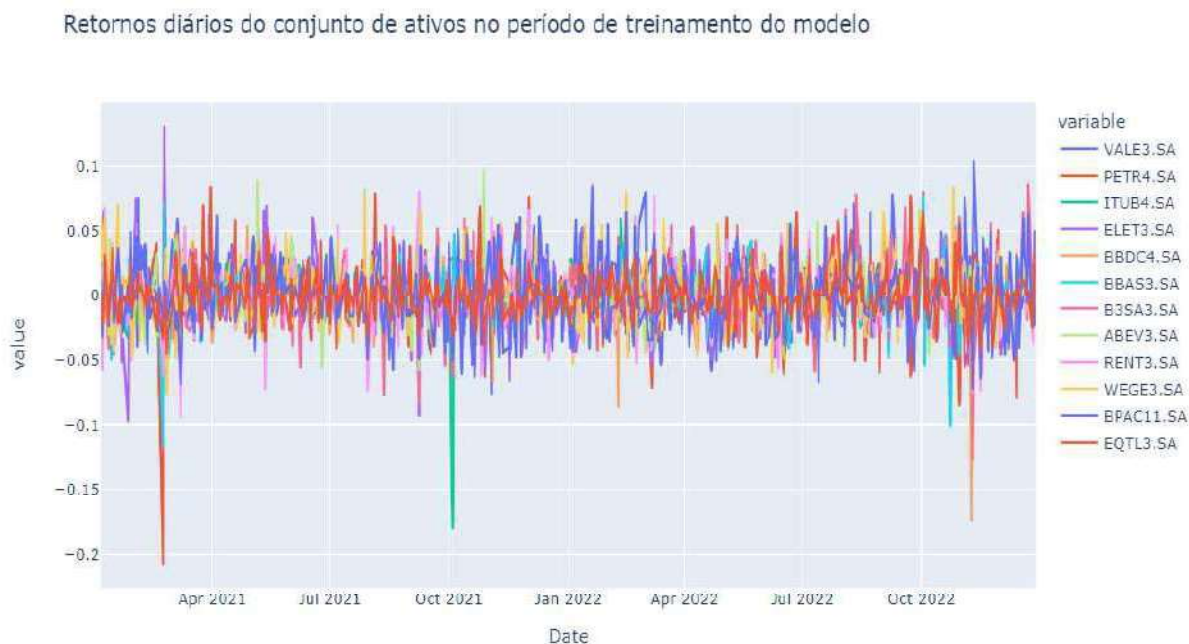
Figura 10 – Retornos acumulados do conjunto de ativos no período de treinamento do modelo



Fonte: Autoria Própria (2024)

A Figura 10 apresenta retornos acumulados do conjunto de ativos selecionados, corrigidos por dividendos, no período de treinamento. Sendo os maiores desempenhos foram realizados pela Petrobrás e pela Eletrobrás, com um retorno acumulado de 78,4% e 29,7%, respectivamente. Isso mostra um desempenho muito interessante por essas ações controladas pelo governo brasileiro, em relação as demais.

Figura 11 – Retornos diários do conjunto de ativos no período de treinamento do modelo



Fonte: Autoria Própria (2024)

O gráfico da Figura 11 mostra os retornos diários do conjunto de ativos ao longo do tempo, destacando a volatilidade do mercado acionário. O eixo Y representa os retornos, variando entre -0.2 e 0.1, indicando perdas de até 20% ou ganhos de até 10% em um único dia ao longo do período de treinamento. Evidenciando uma maior volatilidade negativa maior nos ativos relacionados as empresas no mercado financeiro, ao longo do período apresentado.

De modo geral, observa-se uma série de flutuações diárias nos retornos, com todos os ativos passando por altos e baixos, refletindo as mudanças constantes no mercado. Algumas quedas e picos acentuados indicam eventos de mercado significativos que impactaram o desempenho desses ativos, no curto prazo. Além das variações diárias, uma outra medida para entender a volatilidade dos ativos, é o desvio padrão dos retornos diários.

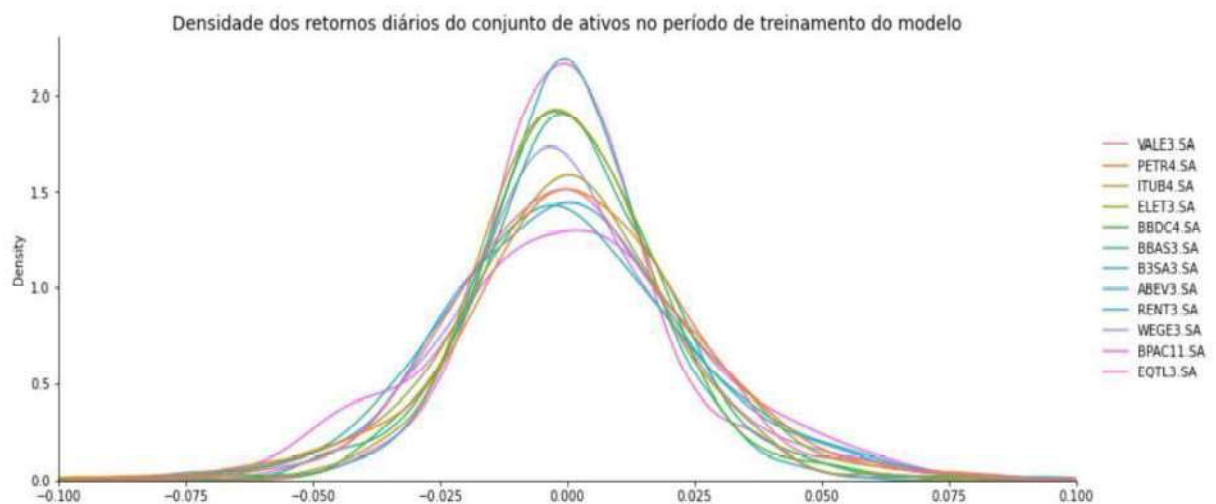
Figura 12 – Desvio padrão dos retornos diários

ABEV3.SA	0.017309
B3SA3.SA	0.025702
BBAS3.SA	0.020308
BBDC4.SA	0.020289
BPAC11.SA	0.026189
ELET3.SA	0.024118
EQTL3.SA	0.017298
ITUB4.SA	0.019636
PETR4.SA	0.026574
RENT3.SA	0.024754
VALE3.SA	0.023348
WEGE3.SA	0.022699

Fonte: Autoria Própria (2024)

A maior volatilidade foi observada para Petrobrás e BTG Pactual, com desvio padrão dos retornos diários de 2,66% e 2,62%, isso implica em riscos mais elevados para esses ativos, bem como potencial para maiores retornos, já que os preços podem tanto subir quanto cair em um curto período.

Figura 13 – Densidade dos retornos diários do conjunto de ativos no período de treinamento do modelo



Fonte: Autoria Própria (2024)

As curvas de densidade com as bases mais alargadas indicam que o ativo correspondente teve retornos diários com maior dispersão, implicando em maior incerteza e risco e, portanto, uma maior volatilidade. Por outro lado, as curvas

mais estreitas indicam que a maioria dos retornos diários estava próxima da média, sugerindo menor volatilidade e, possivelmente, menor risco.

Figura 14 – Matriz de correlação entre as ações do conjunto de ativos no período de treinamento do modelo

Correlação entre as ações do conjunto de ativos no período de treinamento do modelo



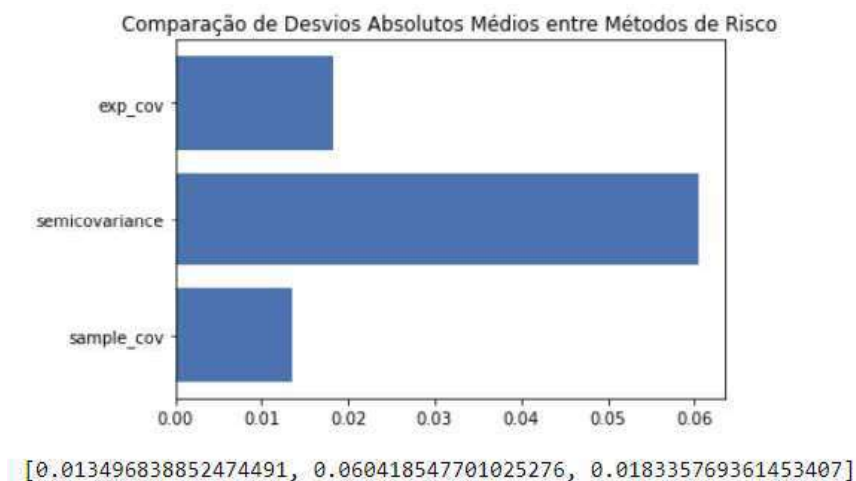
Fonte: Autoria Própria (2024)

Na análise da matriz de correlação, representada na Figura 14, os valores mais próximos a 1 e positivos, contidos nos quadrantes de coloração amarela, sugerem que os ativos tendem a se mover juntos. Enquanto valores baixos ou negativos, com a cor roxa, indicam que eles têm uma relação mais fraca ou tendem a se mover em direções opostas. No conjunto de ações selecionadas, a matriz revela uma boa heterogeneidade de cores, que reflete a diversidade de relações lineares entre os retornos dos ativos financeiros analisados. Esta dispersão de valores indica uma variação significativa na maneira como os preços dos ativos se movem em relação uns aos outros, uma condição essencial para a construção de portfólios diversificados.

4.2 Aplicação de métodos de risco por matrizes de covariância

Na gestão de risco financeiro, as matrizes de covariância são ferramentas para quantificar o risco dos de um conjunto de ativos, esse parâmetro é fundamental para aplicar o modelo de média variância. Esse ajuste de exposição ao risco, será realizado através da melhor escolha entre os métodos estudados, sendo esses: covariância amostral, semicovariância e covariância exponencial.

Figura 15 – Comparação de desvios absolutos médios entre métodos de estimação do risco no período de treinamento do modelo



Fonte: Autoria Própria (2024)

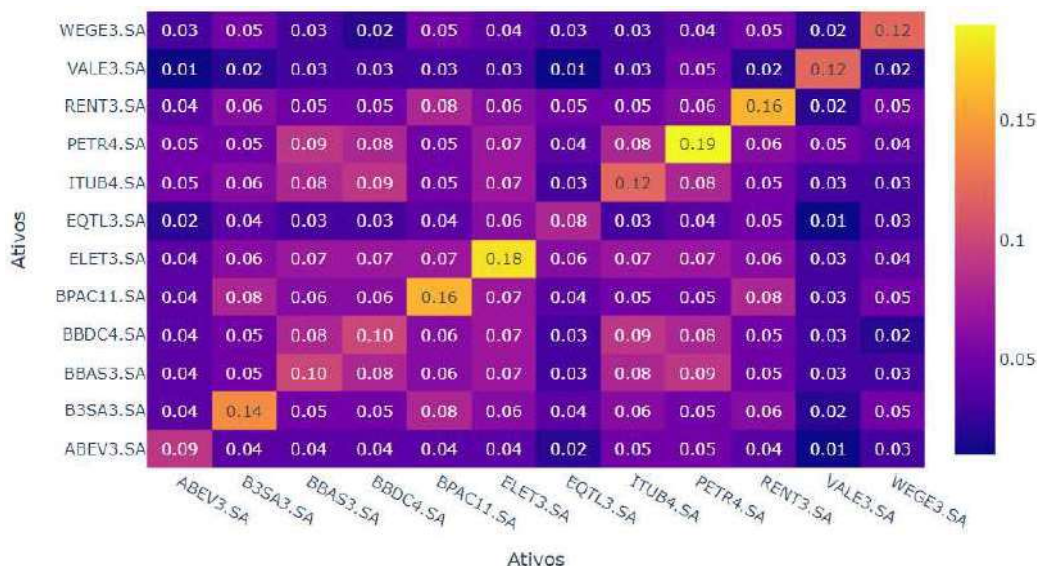
O desvio absoluto médio é calculado como a soma dos valores absolutos das diferenças entre a variância no período de estimação e a variância no período de validação de cada ativo, dividida pelo número total de ativos. Nessa análise, representada na Figura 15, a covariância amostral mostrou-se como a melhor abordagem para estimação do risco, com um desvio absoluto médio de 1,35%. Isso mostra que, em média, a variância de estimação dos retornos dos ativos prevê esse desvio em relação a variância de validação, indicando a maior precisão desse modelo em capturar a volatilidade dos ativos.

A previsão do melhor método de volatilidade é importante para formatação da Fronteira Eficiente e aplicação de estratégias de otimização de carteiras, com maior nível de precisão. A melhor opção ocorreu com o método de covariância

amostral, e seus resultados das matrizes de risco, nos períodos de estimação e validação, podem ser observados na Figura 16 e Figura 17, respectivamente.

Figura 16 – Matriz covariância de amostral no período de estimação

Matriz covariância de amostral no período de estimação (2021-01-01 até 2022-01-01)



Fonte: Autoria Própria (2024)

Figura 17 – Matriz de covariância amostral no período de validação

Matriz de covariância amostral no período de validação (2021-01-01 até 2022-01-01)

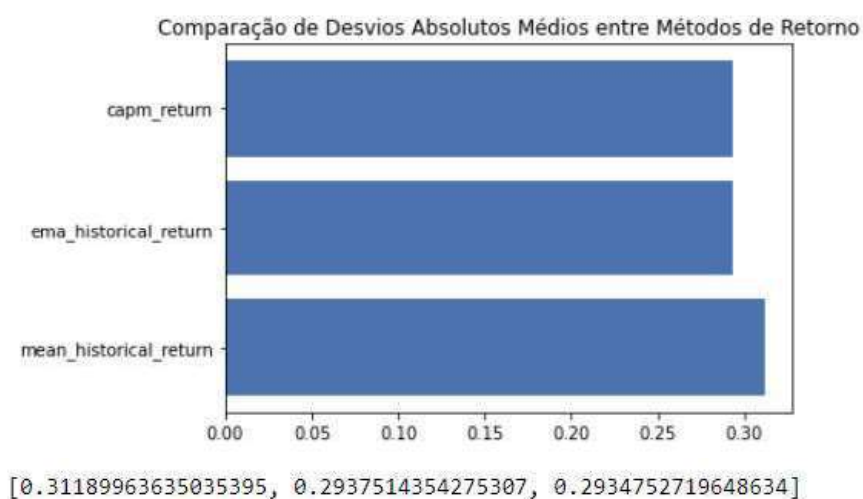


Fonte: Autoria Própria (2024)

4.3 Aplicação de métodos de retornos esperados

Dando sequência para análise de retornos, a comparação entre os desvios absolutos médios entre diferentes métodos de retornos esperados é importante para entender qual o melhor método para previsão desses retornos, influenciando em uma posterior otimização de carteiras com maior precisão. As alternativas de métodos escolhidas para estimação dos retornos esperados, são: retorno histórico médio, o retorno histórico médio exponencialmente ponderado e o retorno pelo modelo de precificação de ativos de capital, CAPM.

Figura 18 – Comparação de desvios absolutos médios entre métodos de estimação de retorno no período de treinamento do modelo



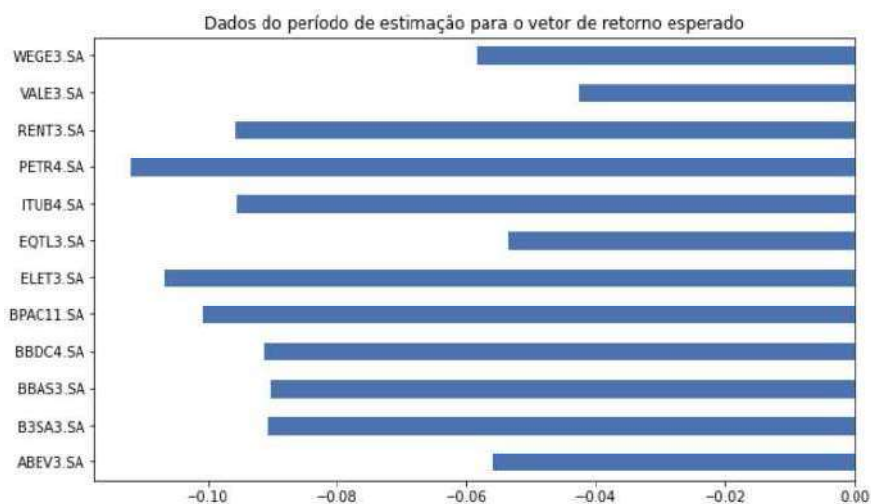
Fonte: Autoria Própria (2024)

O desvio absoluto médio dos modelos é obtido pela soma dos valores absolutos das diferenças entre as estimativas de retorno no período de estimação e as estimativas no período de validação do modelo. É possível perceber que valores de desvios estão muito próximos, conforme Figura 18, na comparação da precisão desses diferentes modelos, mas o método de retorno CAPM apresentou o melhor desempenho, com 29,3% de desvio, uma vez que os retornos nos períodos entre os períodos de estimação e validação desviou levemente menos em relação aos demais.

Em um contexto financeiro, atingir precisão nas previsões de retorno é fundamental, dado que um desempenho superior, mesmo que marginal, pode ter

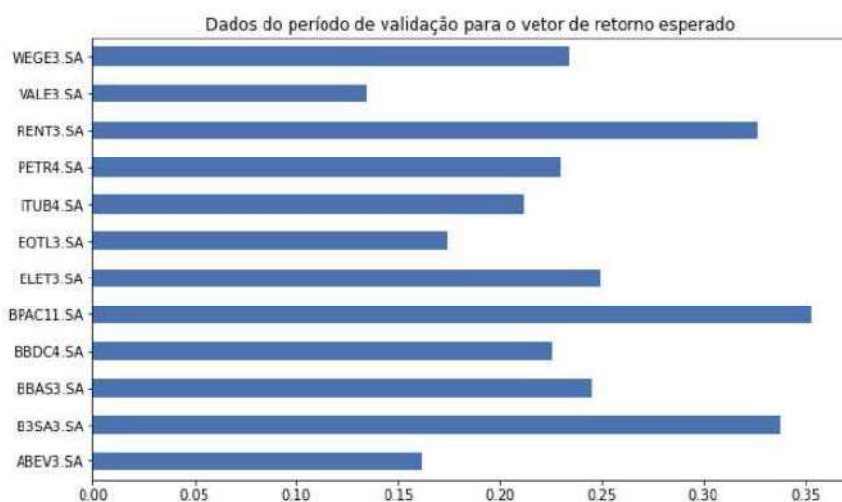
implicações significativas na gestão de portfólio e na ponderação dos ativos. Uma vez analisado que o método de retorno CAPM é o melhor para estimação dos retornos, para essa situação estudada, é possível calcular os retornos esperados nos períodos de estimação e validação, na Figura 19 e Figura 20, respectivamente, sendo o primeiro marcado por vetores com retornos negativos e o segundo com retornos positivos.

Figura 19 – Dados do período de estimação para o vetor de retorno esperado pelo método CAPM



Fonte: Autoria Própria (2024)

Figura 20 – Dados do período de validação para o vetor de retorno esperado pelo método CAPM



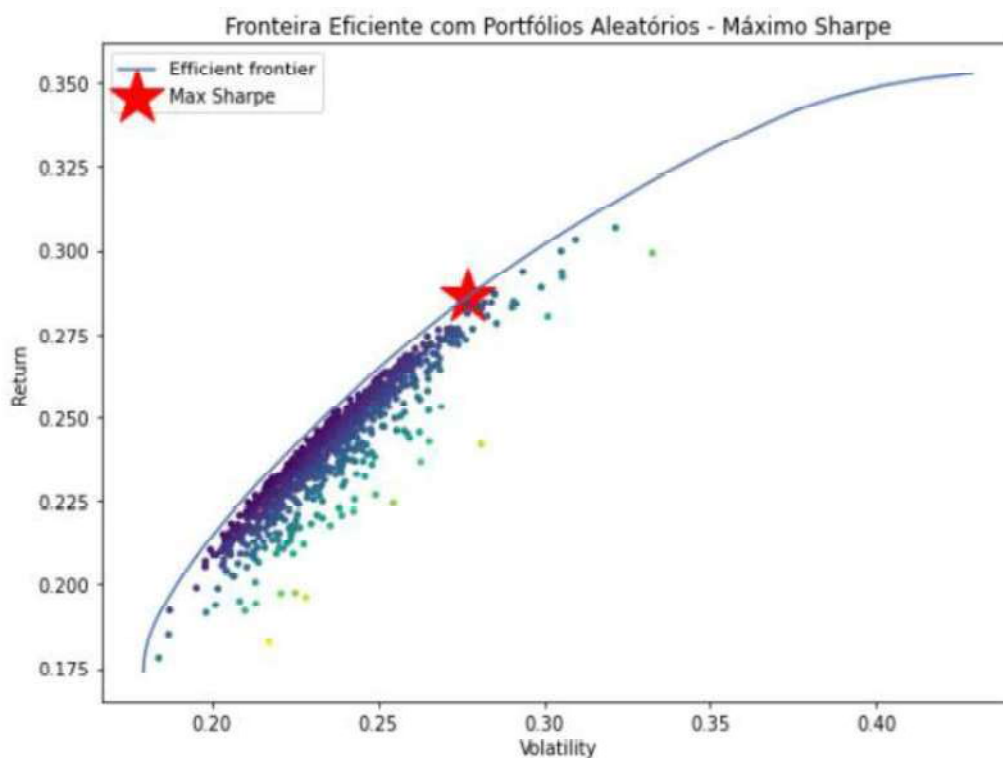
Fonte: Autoria Própria (2024)

4.4 Aplicação do modelo de média-variância e formação das carteiras

A Fronteira Eficiente é um conceito fundamental na teoria moderna de portfólios proposta por Harry Markowitz, para formação das carteiras, analisadas na elaboração deste estudo, serão aplicadas as estratégias de máximo Sharpe e mínima variância, geradas a partir da simulação destes portfólios que estão na Fronteira Eficiente simulada no período da validação e com os melhores modelos de risco e retorno obtidos anteriormente. A outra estratégia adotada consiste na aplicação igualmente ponderada do conjunto de ativos, caracterizada por ser uma proposta de maior nível de simplicidade.

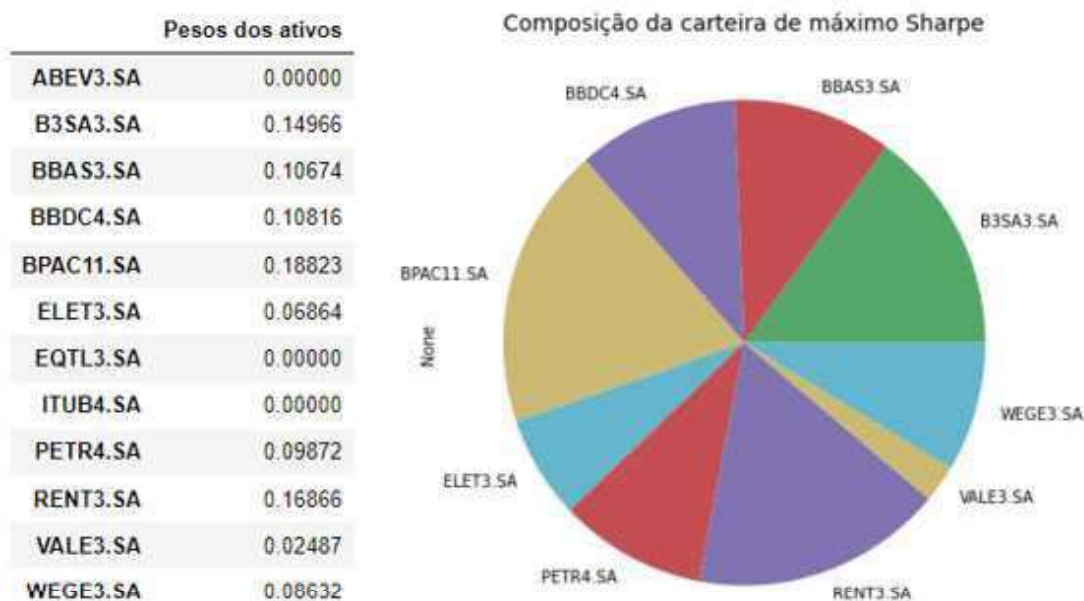
A primeira estratégia de otimização, é identificar a carteira na qual sua apresentam o maior índice de Sharpe, que é o ponto na Fronteira Eficiente representado na Figura 21, no qual o retorno por unidade de risco é maximizado, e os seus pesos na composição dos ativos, Figura 22. Essa estratégia é utilizada por investidores que buscam equilibrar uma expectativa de retorno adequada com um nível de risco controlado, maximizando o retorno ajustado ao risco.

Figura 21 – Fronteira Eficiente com portfólios aleatórios e carteira de máximo Sharpe



Fonte: Autoria Própria (2024)

Figura 22 – Composição de pesos dos ativos na carteira de máximo Sharpe

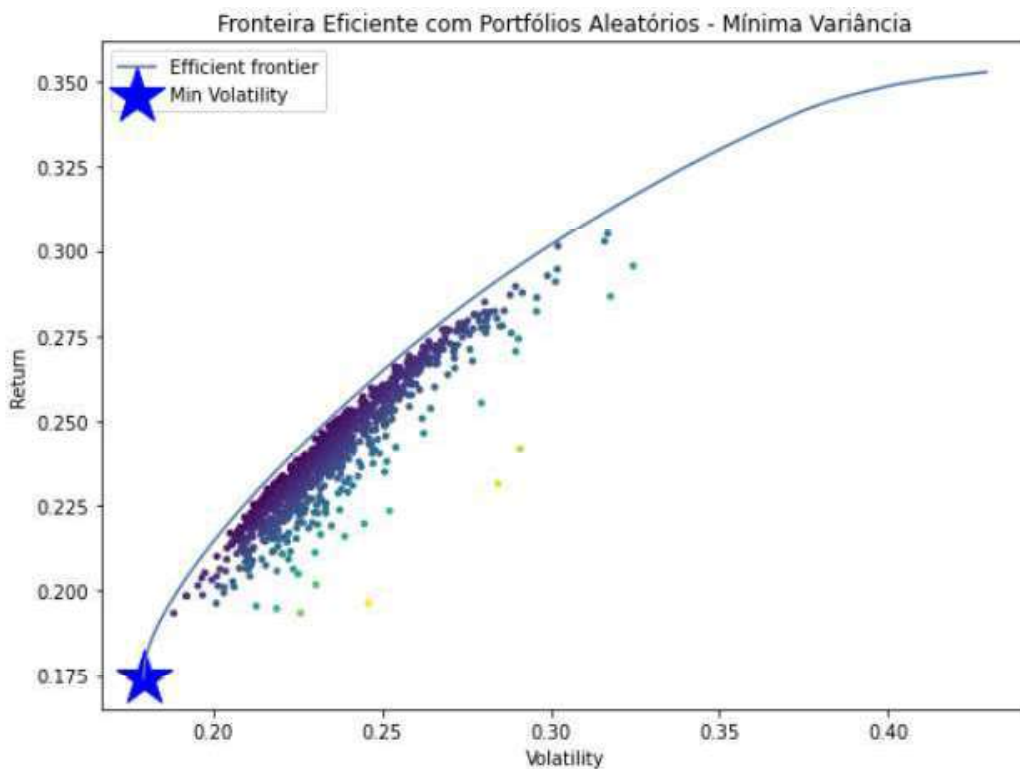


Fonte: Autoria Própria (2024)

É notável observar que as maiores posições definidas por essa estratégia de otimização estão relacionadas com aqueles ativos que apresentaram maior retorno esperado pelo método CAPM, sendo esses BTG Pactual, Localiza e B3SA3, marcando a característica da estratégia em buscar o máximo retorno com um risco relativamente aceitável. Um ponto interessante a se destacar é que o modelo gerou uma carteira com exposição razoavelmente diversificada no conjunto de ativos em avaliação.

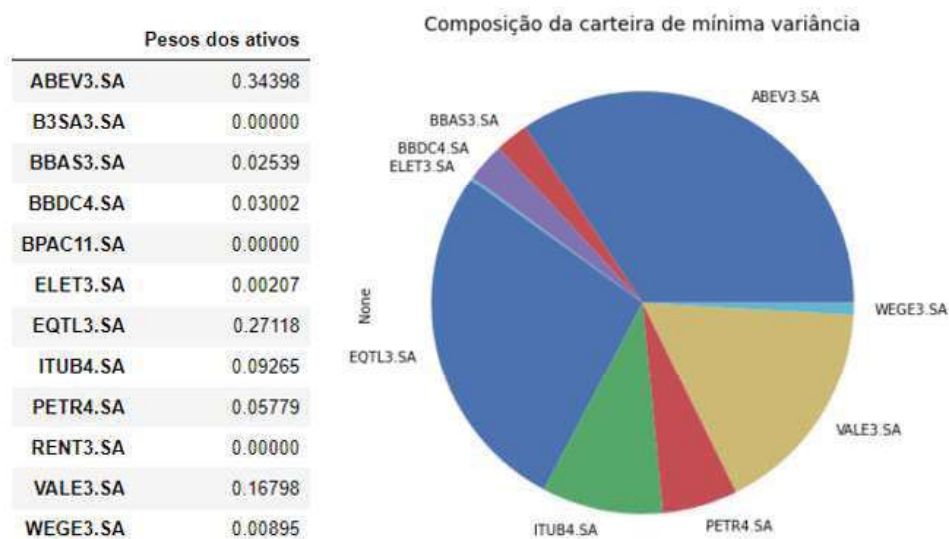
A segunda estratégia de otimização é carteira de mínima variância, ponto representado na Figura 23, que representa o portfólio com a menor volatilidade possível para qualquer nível de retorno esperado, situando-se no ponto mais inferior da Fronteira Eficiente, e os pesos definidos para cada ativo, Figura 24. A seleção deste portfólio é essencial para investidores que desejam minimizar o risco para um retorno aceitável.

Figura 23 – Fronteira Eficiente com portfólios aleatórios e carteira de mínima variância



Fonte: Autoria Própria (2024)

Figura 24 – Composição de pesos dos ativos na carteira de mínima variância

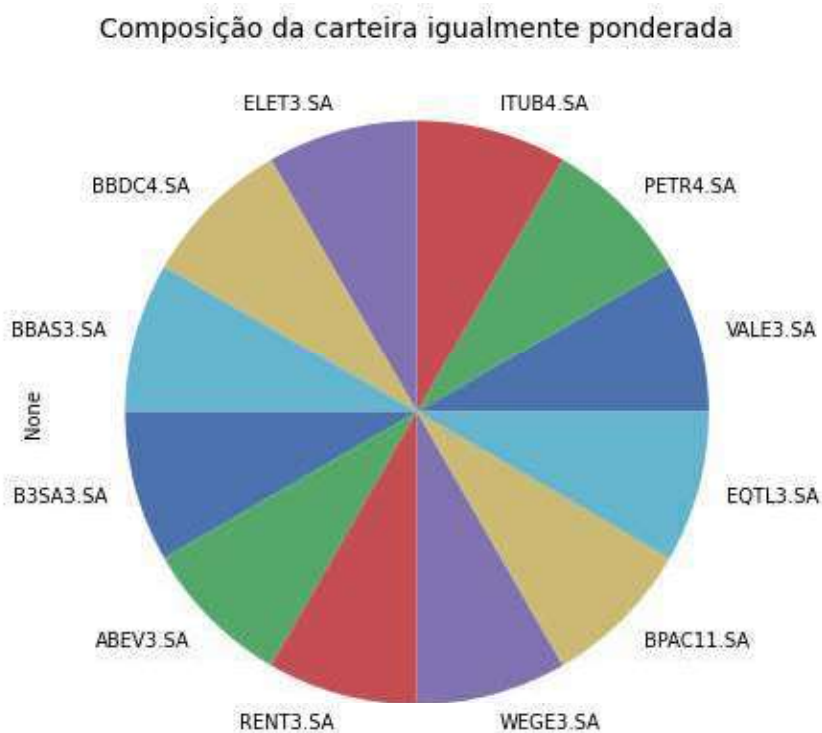


Fonte: Autoria Própria (2024)

Para essa estratégia de aversão ao risco de menor volatilidade, correspondente a carteira de mínima variância, percebe-se que a preferência por maiores pesos ocorreu para as ações das empresas Ambev, Equatorial e Vale.

A terceira estratégia de investimento é representada pela carteira igualmente ponderada, que possui uma abordagem simplificada, que prescreve alocar uma fração igual do capital total em cada ativo do portfólio. Nesse caso, atribuindo pesos iguais de cerca de 8,33% para cada ativo do conjunto de doze ações, conforme Figura 26, eliminando a necessidade de análises complexas de mercado ou previsões econômicas para definição dos pesos dos ativos.

Figura 25 – Composição de pesos dos ativos na carteira igualmente ponderada



Fonte: Autoria Própria (2024)

A partir da formação dessas carteiras, fundamentas nessas estratégias de investimento, é considerado o cálculo de parâmetros importantes como o retorno anual esperado, a volatilidade anual e o índice Sharpe para as carteiras de investimentos correspondentes, sendo critérios importantes para análise comparativa entre os resultados das carteiras.

Figura 26 – Resultados das carteiras no período de validação do modelo

Resultados esperados da carteira de máximo Sharpe:

- Retorno Anual Esperado: 27.92%
- Volatilidade Anual: 27.93%
- Índice de Sharpe: 0.70

Resultados esperados da carteira de mínima variância:

- Retorno Anual Esperado: 16.91%
- Volatilidade Anual: 17.94%
- Índice de Sharpe: 0.47

Resultados esperados da carteira igualmente ponderada:

- Retorno Anual Realizado: 23.4%
- Volatilidade Anual: 22.4%
- Índice de Sharpe: 0.67

Fonte: Autoria Própria (2024)

A carteira de máximo Sharpe se destaca pelo seu elevado retorno anual esperado de 28,61% e volatilidade anual de 27,70%, resultando em um índice de Sharpe de 0,73, mostrando-se como a ideal para investidores dispostos a assumir maior volatilidade em troca de retornos potencialmente mais altos. Por outro lado, a carteira de mínima variância demonstra um perfil de risco mais conservador, com um retorno anual esperado de 17,41% e uma volatilidade mais baixa de 17.93%, apresentando um índice de Sharpe de 0,50.

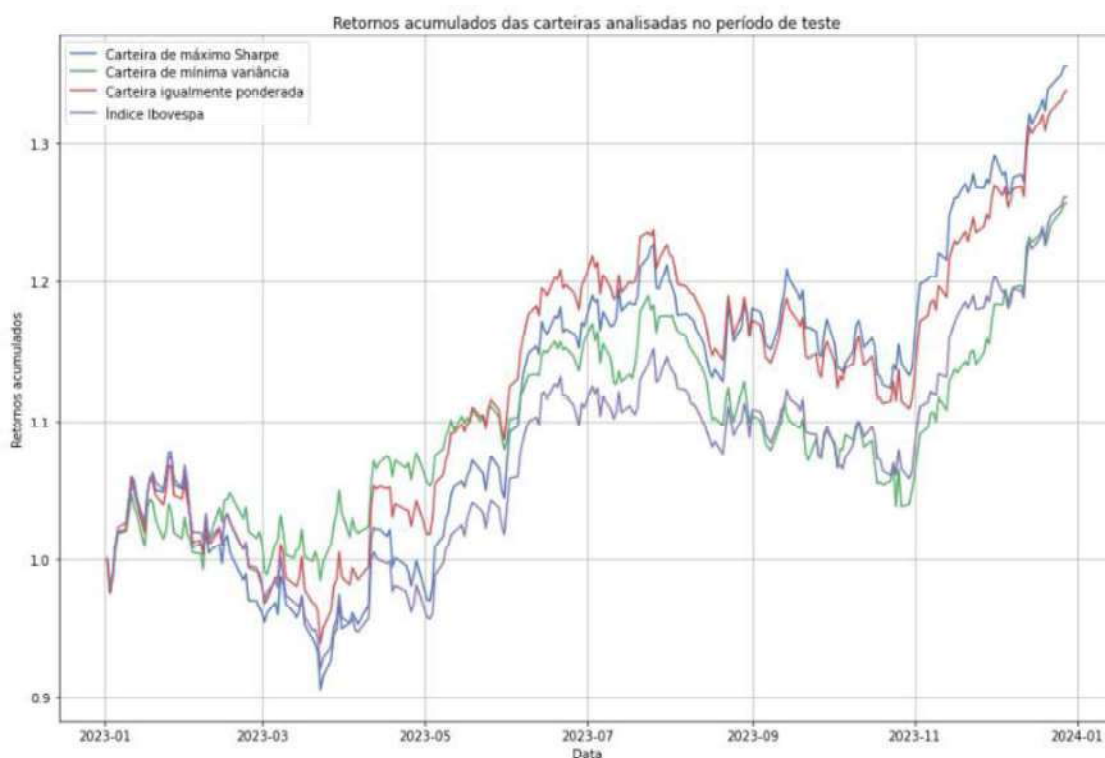
A carteira igualmente ponderada, que divide o capital igualmente entre todos os ativos, proporcionou um retorno anual realizado de 23,9% com uma volatilidade anual de 22,4%, alcançando um índice de Sharpe de 0,69. Sendo interessante perceber que essa estratégia projeta resultados esperados com uma *performance* intermediária as duas outras estratégias que foram alvo de otimização. Entretanto, é fundamental lembrar projeções baseadas em dados históricos não garantem o mesmo desempenho futuro, uma vez que os mercados acionários são voláteis e incertos.

4.5 Cálculo para teste de *performance* das carteiras formadas

A avaliação empírica das estratégias das carteiras ótimas pode revelar *insights* valiosos sobre seu comportamento ao longo do período de teste, período

subsequentemente ao período de validação. Através da comparação de retornos acumulados no período de teste com o que foi realizado no treinamento, há oportunidade de contrastar as *performances* teóricas com as práticas, contribuindo para a robustez da pesquisa. A análise gráfica complementa e enriquece essa avaliação ao demonstrar visualmente o desempenho acumulado das três estratégias de portfólio, conforme Figura 27.

Figura 27 – Retornos acumulados das carteiras analisadas no período de teste



Fonte: Autoria Própria (2024)

4.6 Análise e comparação de *performance* e de resultados das carteiras

Para realização da análise comparativa de *performance* e resultados das carteiras, são calculados os parâmetros de retorno anual esperado, a volatilidade anual e o índice Sharpe para cada carteiras de investimento, mas dessa vez para o período de teste do modelo. Isso possibilitará entender se a finalidades teóricas propostas pelas carteiras ótimas de média-variância cumprem seu objetivo de retorno baseado em risco e, também, permite comparação com resultados gerados no período de treinamento.

Figura 28 – Resultados das carteiras no período de teste do modelo

Carteira de máximo Sharpe no período de teste:

- Retorno Anual Realizado: 32.8%
- Volatilidade Anual: 19.2%
- Índice de Sharpe: 1.27

Carteira de mínima variância no período de teste:

- Retorno Anual Realizado: 24.8%
- Volatilidade Anual: 17.4%
- Índice de Sharpe: 0.94

Carteira igualmente ponderada no período de teste:

- Retorno Anual Realizado: 31.3%
- Volatilidade Anual: 18.4%
- Índice de Sharpe: 1.25

Índice Ibovespa no período de teste:

- Retorno Anual Realizado: 25.1%
- Volatilidade Anual: 17.0%
- Índice de Sharpe: 0.98

Fonte: Autoria Própria (2024)

Durante o período de teste, a carteira de máximo Sharpe alcançou um retorno anualizado de 32,8%, superando as expectativas do período de validação. Isso indica uma persistência no desempenho superior ao assumir um risco maior, como evidenciado por uma volatilidade anual de 19,2%. O índice de Sharpe aumentou para 1,27, sugerindo uma eficiência melhorada na relação risco-retorno comparada ao período de validação, além de apresentar resultados de retornos superiores as demais estratégias e em relação ao índice Ibovespa.

A carteira de mínima variância demonstrou a eficácia de uma estratégia conservadora. Com um retorno anualizado de 24,8% e uma volatilidade de 17,4%, mantendo-se coerente à sua proposta de minimizar o risco com retorno aceitável, possuindo resultado semelhante ao índice Ibovespa, e indicando uma volatilidade ligeiramente inferior em relação ao período de validação.

Contrastando com as estratégias baseadas na otimização da Fronteira Eficiente, a carteira igualmente ponderada apresentou resultados interessantes, com um retorno anualizado de 31,3% e uma volatilidade de 18,3%, atingiu um

índice de Sharpe de 1,24. Esse desempenho sugere que, no período de teste, a simplicidade da estratégia igualmente ponderada não apenas rivalizou, mas quase igualou a eficiência da carteira de máximo Sharpe, um resultado que desafia a complexidade na otimização de portfólios, no qual é defendido a busca por um maior retorno ajustado ao risco.

Estes resultados sublinham a dinâmica do mercado e a importância de testar as estratégias de formação de carteiras para validar sua eficácia. Além disso, reforçam a premissa de que desempenho passado pode não ser indicativo de resultados futuros, uma vez que as variações do mercado podem alterar significativamente o desempenho das estratégias de investimento.

No período de validação, a carteira de máximo Sharpe antecipava o maior retorno com uma volatilidade substancial, enquanto no período de teste, essa carteira não apenas cumpriu, mas superou as expectativas, atingindo um retorno anualizado de 32,8%, superior ao esperado de 28,61%, e uma melhoria no índice de Sharpe de 0,73 para 1,27, junto a uma volatilidade inferior.

A carteira de mínima variância manteve seu compromisso com a estabilidade, proporcionando um retorno acima do esperado pelo período de teste, com um aumento no índice de Sharpe de 0,50 para 0,94, e apresentando retorno anual semelhante ao índice Ibovespa, ressaltando sua eficácia na preservação de capital em face a volatilidade de mercado.

Curiosamente, a carteira igualmente ponderada, que adotou uma abordagem de investimento mais simplista, demonstrou um desempenho bastante robusto, muito próximo ao atingido pela carteira de máximo Sharpe no período de teste, com um índice de Sharpe passando de 0,69 para 1,24, sugerindo que estratégias de investimento menos complexas podem, em certas condições de mercado, rivalizar com métodos otimizados baseados em modelos teóricos sofisticados.

As análises do período de teste revelam que a carteira otimizada de máximo Sharpe emergiu como a estratégia mais bem-sucedida, cumprindo seu compromisso teórico de maximização de retorno ajustado ao risco e superando o índice acionário de referência. A superioridade desta carteira durante o período de teste endossa a aplicabilidade da teoria de Markowitz na prática e destaca a

importância de uma abordagem quantitativa para a seleção de ativos. Ao equilibrar adequadamente o risco e o retorno, a carteira de máximo Sharpe demonstrou ser uma estratégia capaz de capitalizar em oportunidades de mercado, enquanto gerencia efetivamente a exposição ao risco.

Dessa maneira, entende-se que a aplicação do modelo de média-variância é uma ferramenta benéfica para tomada de decisão dos investidores, com base em seus objetivos de investimento e tolerância ao risco, uma vez que os resultados mostraram uma boa *performance*, dada a finalidade das carteiras ótimas analisadas. É importante destacar que há grande incerteza inerente aos mercados financeiros, por esse motivo o desempenho passado pode não ser suficiente para prever resultados futuros, sendo essenciais a adaptação e a validação contínua das estratégias de investimento.

5. CONCLUSÕES

Os resultados desse estudo permitiram observar a eficácia da aplicação do modelo de média-variância e das estratégias de otimização de carteiras, para a formação de carteiras de investimento que possuem boa ponderação de risco e retorno. Com destaque para a carteira de máximo Sharpe que apresentou uma *performance* superior na comparação com as demais carteiras e com o índice Ibovespa, nas condições de mercado do período de teste, evidenciando seu propósito em oferecer maior relação de recompensa para investidores mais propensos a suportar um maior risco. Por outro lado, a carteira igualmente ponderada apresentou competitividade em relação aos retornos das estratégias baseadas em carteiras ótimas, destacando a eficácia dessa estratégia simplista, que promove a diversificação sem excessos de concentração.

Como sugestões para futuros trabalhos, é possível citar alguns possíveis pontos de melhoria ou de expansão, visando atingir um maior enriquecimento as análises realizadas no desenvolvimento desse projeto, sendo essas:

- a. Aplicar diferentes conjuntos de ativos como alvos do modelo de média-variância, utilizando métodos alternativos para seleção das ações, como procedimentos baseados em análise fundamentalista das empresas;
- b. Atribuir alternativas de períodos analisados, para o treinamento e teste do modelo, seja expandindo ou reduzindo o intervalo de tempo estudado;
- c. Aplicação de outras possibilidades de métodos de riscos, por matrizes de covariância, e de retornos esperados, existindo mais alternativas de estimação dos parâmetros para aplicação do modelo de média-variância;
- d. Desenvolver outras estratégias de formação de carteiras, por outros métodos de otimização de carteiras na Fronteira Eficiente, a fim de existir mais opções de carteiras ótimas para comparação de *performance*.

REFERÊNCIAS

- ASSAF NETO, Alexandre. Finanças Corporativas e Valor. 8ª ed. São Paulo. p. 81-294. Editora Atlas S.A. 2014.
- BARBOSA, André do S. Otimização de carteiras com restrição de VaR: Estudo para o mercado brasileiro. Insper Instituto de Ensino e Pesquisa. Programa de Mestrado Profissional em Economia. 2013.
- B3. Índices de segmentos e setoriais – índice MidLarge Cap. Site da B3. Disponível em: https://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/indices/indices-de-segmentos-e-setoriais/indice-midlarge-cap-mlcx.htm
- BODIE, Zvi; KANE, Alex; MARCUS, Alan J. Investments. 8th Edition. McGraw-Hill Education. 2009.
- CICOGNA, Maria P. V.; Carteiras de Risco Ótimas. Cap. 7. 2014. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5278111/mod_resource/content/1/Cap%2007%20-%20CARTEIRAS%20COM%20RISCO%20OTIMAS.pdf
- COCHRANE, John H.; Asset Pricing. Graduate School of Business University of Chicago. June 12, 2000.
- DEMIGUEL, Victor. Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy? The Review of Financial Studies. v 22 n 5. 2009.
- ESTRADA, Javier. Mean-Semivariance Optimization: A Heuristic Approach. p. 57-72. 2006.
- ELTON, Edwin J., GRUBER, Martin J., BROWN, Stephen J., & GOETZMANN, William N. Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. Wiley. 2009.
- FAMA, Eugene; Efficient Capital Markets II. Journal of Finance. Volume 46. Wiley-Blackwell. p. 1575-1617. 1991.
- HULL, John C.; Risk Management and Financial Institutions. 5th Edition. Published by John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey. 2018.

MALKIEL, Burton G.; A Random Walk Down Wall Street. 12^a ed.; p. 432. New York: W. W. Norton & Company, 2019.

MARKOWITZ, Harry M. Portfolio selection. Journal of finance, n. 1, v. 7, p.77-91. 1952.

MARKOWITZ, Harry M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. Yale University Press. 1959.

MARKOWITZ, Harry M. Foundations of Portfolio Theory. The Journal of Finance. Vol. 46, No. 2, p. 469-477. 1991.

PALOMAR, Daniel P.; Portfolio Optimization: Convex Optimization. The Hong Kong University of Science and Technology (HKUST), 2021. Disponível em: https://palomar.home.ece.ust.hk/ELEC5470_lectures/slides_portfolio_optim.pdf

MARTIN, Robert A. Cookbook. PyPortfolioOpt Documentation. GitHub. Disponível em: <https://github.com/robertmartin8/PyPortfolioOpt/tree/master/cookbook>

MARTIN, Robert A. PYPORTFOLIOOPT, Portfolio optimization in python. Guia do Usuário. Disponível em: <https://pyportfolioopt.readthedocs.io/en/latest/UserGuide.html>

MARTIN, Robert A. PyPortfolioOpt: portfolio optimization in Python. University of Cambridge. 2021.

RUPPERT, David. MATTESON, David S.; Statistics and Data Analysis for Financial Engineering: With R Examples. 2nd Edition. Springer. 2015.

SHARPE, William F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. Journal of Finance, volume 19, n. 3, p. 425- 442. 1964.

SHARPE, William F. Asset Allocation: Management Style and Performance Measurement. Journal of Portfolio Management, 18, p. 7–19. 1992.

SHARPE, William F.; The Sharpe Ratio. Journal of Portfolio Management, v.21 pp. 49-58, 1994.

APÊNDICE A –

```
# Instalando e importando bibliotecas para as análises.

import yfinance as yf
from pypfopt.discrete_allocation import DiscreteAllocation,
get_latest_prices
from pypfopt import EfficientFrontier
from pypfopt import risk_models
from pypfopt import expected_returns
from pypfopt import plotting
import copy
import numpy as np
import pandas as pd
import plotly.express as px
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
import plotly.graph_objects as go
```

Etapa A: Definição do conjunto de ativos para investimento

```
# Índices Mid Large Cap - database janeiro 2024
# 12 Ações de empresas com maior exposição nesse índice de mercado
# Ações selecionadas:
ativos = ['VALE3.SA', 'PETR4.SA', 'ITUB4.SA', 'ELET3.SA', 'BBDC4.SA',
          'BBAS3.SA', 'B3SA3.SA', 'ABEV3.SA', 'RENT3.SA', 'WEGE3.SA',
          'BPAC11.SA', 'EQTL3.SA']
```

Etapa B: Definição dos períodos de treinamento e teste do modelo

```
# Período de treinamento do modelo
c_start_date = '2021-01-01'
c_end_date = '2023-01-01'
### Estimação
e_start_date = '2021-01-01'
e_end_date = '2022-01-01'
### Validação
v_start_date = '2022-01-01'
v_end_date = '2023-01-01'

# Teste
t_start_date = '2023-01-01'
t_end_date = '2024-01-01'

#DataReader(tickers, start = start_date, end = end_date)['Adj Close']
c_precos = yf.download(ativos, start=c_start_date,
end=c_end_date)['Adj Close']
c_precos.head()
```

```
# Análise de período para decisão de plica modelo a partir do início
de 2021
ativos = ['VALE3.SA', 'PETR4.SA', 'ITUB4.SA', 'ELET3.SA', 'BBDC4.SA',
          'BBAS3.SA', 'B3SA3.SA', 'ABEV3.SA', 'RENT3.SA', 'WEGE3.SA',
```

```

        'BPAC11.SA', 'EQTL3.SA']
# Período de treinamento do modelo
full_start_date = '2018-01-01'
full_end_date = '2024-01-01'
#DataReader(tickers, start = start_date, end = end_date)['Adj Close']
full_precos = yf.download(ativos, start=full_start_date,
end=full_end_date)['Adj Close']
# Retornos diários
full_daily_returns = full_precos.pct_change().dropna()
# Plotagem dos retornos diários do conjunto de ativos
fig = px.line(full_daily_returns[ativos], title='Retornos diários do
conjunto de ativos entre 01/01/2018 e 01/01/2024')
fig.show()

```

----- PERÍODO DE TREINAMENTO -----

Etapa C: Análise de séries temporais e de retornos do conjunto de ativos

```

import pandas as pd
import plotly.express as px

# Converte o DataFrame para o formato longo
c_precos_long = c_precos.melt(var_name='Ativo', value_name='Preço em
BRL', ignore_index=False).reset_index()
c_precos_long = c_precos_long.rename(columns={'index': 'Date'})

# Cria o gráfico de linha
fig = px.line(c_precos_long, x='Date', y='Preço em BRL',
color='Ativo',
              labels={'Preço em BRL': 'Preço em BRL', 'Date': 'Data'},
              title='Conjunto de ativos para investimento')

# Adiciona linhas verticais
dates_to_mark = ['2021-01-01', '2022-01-01', '2023-01-01']
for date in dates_to_mark:
    fig.add_shape(type='line',
                  x0=date, y0=0, x1=date, y1=1,
                  line=dict(color='Blue', dash='dash'),
                  xref='x', yref='paper')

# Ajusta o layout
fig.update_layout(xaxis_title='Data',
                  yaxis_title='Preço em BRL',
                  legend_title='Ativo',
                  legend=dict(x=1.05, y=0.5, bordercolor='Black',
borderwidth=1),
                  title={'text': 'Evolução dos preços do conjunto de
ativos para investimento no período de treinamento do modelo', 'x':
0.5, 'xanchor': 'center'})

# Mostrar o gráfico
fig.show()

```

```
# Retornos diários
daily_returns = c_precos.pct_change().dropna()
daily_returns.head()
```

```
# Plotagem dos retornos acumulados do conjunto de ativos
def plot_cum_returns(data, title):
    daily_cum_returns = (1 + daily_returns).cumprod()*1000
    fig = px.line(daily_cum_returns, title=title)
    return fig

fig_cum_returns = plot_cum_returns(c_precos, 'Retornos acumulados do
conjunto de ativos no período de treinamento do modelo')
dates_to_mark = ['2021-01-01', '2022-01-01', '2023-01-01']
for date in dates_to_mark:
    fig_cum_returns.add_shape(type='line',
                              x0=date, y0=0, x1=date, y1=1,
                              line=dict(color='Blue', dash='dash'),
                              xref='x', yref='paper')

# Mostrar o gráfico
fig_cum_returns.show()
```

```
# Plotagem dos retornos diários do conjunto de ativos
fig = px.line(daily_returns[ativos], title='Retornos diários do
conjunto de ativos no período de treinamento do modelo')
fig.show()
```

```
# Desvio padrão dos retornos diários
daily_returns.std()
```

```
# Plotagem da densidade dos retornos diários
sns.displot(data=daily_returns[ativos], kind = 'kde', aspect = 2.50)
plt.xlim(-0.1, 0.1)
plt.title('Densidade dos retornos diários do conjunto de ativos no
período de treinamento do modelo', fontsize=14);
```

Etapa D: Aplicação de métodos de risco por matrizes de covariância

Matriz de correlação

```
# Período de treinamento do modelo

# Calculando a matriz de correlação e arredondando para duas casas
decimais
corr_df = c_precos.corr().round(2)

# Convertendo a matriz de correlação para duas casas decimais
corr_values_rounded = corr_df.values
```

```

# Criando um Heatmap com textos formatados para os valores
fig = go.Figure(data=go.Heatmap(
    z=corr_values_rounded,
    x=corr_df.columns,
    y=corr_df.index,
    text=[[ '{:.2f}'.format(j) for j in i] for i in
corr_values_rounded],
    texttemplate="%{text}",
    hoverinfo="none" # Desativa informações adicionais no hover
(opcional)
))

# Atualizando o layout do gráfico
fig.update_layout(title='Correlação entre as ações do conjunto de
ativos no período de treinamento do modelo',
                  xaxis_title="Ativos",
                  yaxis_title="Ativos")

fig.show()

```

Matriz de covariância

```

#DataReader(tickers, start = start_date, end = end_date) ['Adj Close']
e_precos = yf.download(ativos, start=e_start_date,
end=e_end_date) ['Adj Close']

```

```

#DataReader(tickers, start = start_date, end = end_date) ['Adj Close']
v_precos = yf.download(ativos, start=v_start_date,
end=v_end_date) ['Adj Close']

```

```

import pypfopt
pypfopt.__version__
from pypfopt import plotting

```

```

# Definição das variáveis para matriz no período de estimação e de
validação
v_cov = risk_models.sample_cov(v_precos, frequency=252)
e_cov = risk_models.sample_cov(e_precos, frequency=252)

```

```

# Entendimento sobre como cada modelo realiza a previsão da matriz de
covariância
# O melhor modelo apresenta menor erro absoluto entre a matriz de
covariância de estimação e de validação
v_variance = np.diag(v_cov)
mean_abs_errors = []

risk_methods = [
    "sample_cov",
    "semicovariance",
    "exp_cov",
]

# Ajuste para aplicar benchmark=0.000322 para método semicovariance

```

```

for method in risk_methods:
    if method == "semicovariance":
        S = risk_models.semicovariance(e_precos, benchmark=0.000322)
        variance = np.diag(S)
    else:
        S = risk_models.risk_matrix(c_precos, method=method)
        variance = np.diag(S)
    mean_abs_errors.append(np.sum(np.abs(variance - v_variance)) /
len(variance))

# Mostrar desvios absolutos médios - erros absolutos
xrange = range(len(mean_abs_errors))
plt.barh(xrange, mean_abs_errors)
plt.title('Comparação de Desvios Absolutos Médios entre Métodos de
Risco')
plt.yticks(xrange, risk_methods)
plt.show()
print(mean_abs_errors)

```

```

import plotly.graph_objects as go
from pypfopt import risk_models

# Calculando a matriz de covariância amostral
e_cov = risk_models.sample_cov(e_precos, frequency=252)

# Convertendo a matriz de covariância para duas casas decimais
e_cov_rounded = np.around(e_cov.values, decimals=2)

# Criando um Heatmap com textos formatados para os valores
fig = go.Figure(data=go.Heatmap(
    z=e_cov_rounded,
    x=e_cov.columns,
    y=e_cov.index,
    text=[[ '{:.2f}'.format(j) for j in i] for i in e_cov_rounded],
    texttemplate="%{text}",
    hoverinfo="none" # Desativa informações adicionais no hover
    (opcional)
))

# Atualizando o layout do gráfico
fig.update_layout(title='Matriz covariância de amostral no período de
estimação (2021-01-01 até 2022-01-01)',
                  xaxis_title="Ativos",
                  yaxis_title="Ativos")

fig.show()

```

```

# Calculando a matriz de covariância amostral para o período de
validação
v_cov = risk_models.sample_cov(v_precos)

# Convertendo a matriz de covariância para duas casas decimais
v_cov_rounded = np.around(v_cov.values, decimals=2)

```

```

# Criando um Heatmap com textos formatados para os valores
fig = go.Figure(data=go.Heatmap(
    z=v_cov_rounded,
    x=v_cov.columns,
    y=v_cov.index,
    text=[[ '{:.2f}'.format(j) for j in i] for i in v_cov_rounded],
    texttemplate="%{text}",
    hoverinfo="none" # Desativa informações adicionais no hover
    (opcional)
))

# Atualizando o layout do gráfico
fig.update_layout(title='Matriz de covariância amostral no período de
validação (2021-01-01 até 2022-01-01)',
                  xaxis_title="Ativos",
                  yaxis_title="Ativos")

fig.show()

```

Etapa E: Aplicação de métodos de retornos esperados

```

from pypfopt import expected_returns

# Entendimento sobre como cada modelo realiza a previsão de retorno
esperado
# O melhor modelo apresenta menor erro absoluto

v_rets = expected_returns.mean_historical_return(v_precos)
mean_abs_errors = []
return_methods = [
    "mean_historical_return",
    "ema_historical_return",
    "capm_return",
]

# Ajuste para aplicar risk_free_rate=0.0844 para método capm
for method in return_methods:
    if method == "capm_return":
        mu = expected_returns.capm_return(e_precos,
risk_free_rate=0.0844) #risk free rate
    else:
        mu = expected_returns.return_model(e_precos, method=method)
    mean_abs_errors.append(np.sum(np.abs(mu - v_rets)) / len(mu))

# Mostrar desvios absolutos médios - erros absolutos
xrange = range(len(mean_abs_errors))
plt.barh(xrange, mean_abs_errors)
plt.title('Comparação de Desvios Absolutos Médios entre Métodos de
Retorno')
plt.yticks(xrange, return_methods)
plt.show()
print(mean_abs_errors)

```

```
# Método CAPM para estimar os retornos esperados (melhor método observado)

# Dados do período de estimação para o vetor de retorno esperado
e_mu_capm = expected_returns.capm_return(e_precos)

print(e_mu_capm)
e_ax = e_mu_capm.plot.barh(figsize=(10,6))
e_ax.set_title("Dados do período de estimação para o vetor de retorno esperado");
```

```
# Dados do período de validação para o vetor de retorno esperado
v_mu_capm = expected_returns.capm_return(v_precos)

print(v_mu_capm)
v_ax = v_mu_capm.plot.barh(figsize=(10,6))
v_ax.set_title("Dados do período de validação para o vetor de retorno esperado");
```

Etapa F: Aplicação do modelo de média-variância e formação das carteiras

CARTEIRA DE MÁXIMO SHARPE

```
# Fronteira Eficiente gerada a partir dos melhores modelos de matriz de covariância e retornos esperados
# Matriz de covariância amostral e CAPM

#Plotagem da Fronteira Eficiente
def plot_efficient_frontier_and_max_sharpe(v_mu_capm, v_cov):
    # Optimize portfolio for maximal Sharpe ratio
    ef = EfficientFrontier(v_mu_capm, v_cov)

    fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
    ef_max_sharpe = copy.deepcopy(ef)
    plotting.plot_efficient_frontier(ef, ax=ax, show_assets=False)

    # Descobrir a carteira de máximo sharpe
    ef_max_sharpe.max_sharpe(risk_free_rate=0.0844)
    ret_tangent, std_tangent, _ =
ef_max_sharpe.portfolio_performance(risk_free_rate=0.0844)
    ax.scatter(std_tangent, ret_tangent, marker="*", s=1000, c="r",
label="Max Sharpe")

    # Geração de portfolios aleatórios
    n_samples = 1000
    w = np.random.dirichlet(np.ones(ef.n_assets), n_samples)
    rets = w.dot(ef.expected_returns)
    stds = np.sqrt(np.diag(w @ ef.cov_matrix @ w.T))
    sharpes = rets / stds
    ax.scatter(stds, rets, marker=".", c=sharpes, cmap="viridis_r")

    # Saídas
    ax.set_title("Fronteira Eficiente com Portfólios Aleatórios -
Máximo Sharpe")
```

```

    ax.legend()
    plt.tight_layout()
    plt.show()

plot_efficient_frontier_and_max_sharpe(v_mu_capm, v_cov)

```

```

# Uso do Modelo CAPM por apresentar grau de concordância entre os
modelos de retornos esperados
ef_ms = EfficientFrontier(v_mu_capm, v_cov)
ef_ms.max_sharpe(risk_free_rate=0.0844)
ms_ef_weights = ef_ms.clean_weights()

# Pesos dos ativos na carteira de máximo Sharpe
ms_weights_df = pd.DataFrame.from_dict(ms_ef_weights, orient =
'index')
ms_weights_df.columns = ['Pesos dos ativos']
ms_weights_df

```

```

# Gráfico dos pesos dos ativos
pd.Series(ms_ef_weights).plot.pie(figsize=(7, 7))
plt.title('Composição da carteira de máximo Sharpe', fontsize=14)
plt.show()

```

```

# 'ef_ms' como uma instância de EfficientFrontier, aplicando a função
portfolio_performance
ms_expected_annual_return, ms_annual_volatility, ms_sharpe_ratio =
ef_ms.portfolio_performance(risk_free_rate=0.0844)

# Definação de títulos próprios
titulos = {
    "expected_annual_return": "Retorno Anual Esperado",
    "annual_volatility": "Volatilidade Anual",
    "sharpe_ratio": "Índice de Sharpe"
}

# Imprima os resultados com seus títulos personalizados
print(f"{titulos['expected_annual_return']}:
{ms_expected_annual_return * 100:.2f}%")
print(f"{titulos['annual_volatility']}: {ms_annual_volatility *
100:.2f}%")
print(f"{titulos['sharpe_ratio']}: {ms_sharpe_ratio:.2f}")

```

CARTEIRA DE MÍNIMA VOLATILIDADE

```

# Função para plotar a Fronteira Eficiente e a Máxima Volatilidade
def plot_efficient_frontier_and_min_volatility(v_mu_capm, v_cov):
    # Otimize a carteira para a volatilidade mínima
    ef = EfficientFrontier(v_mu_capm, v_cov)

    fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 6))
    ef_min_volatility = copy.deepcopy(ef)

```

```

plotting.plot_efficient_frontier(ef, ax=ax, show_assets=False)

# Encontre a carteira de volatilidade mínima
ef_min_volatility.min_volatility()
ret_min_volatility, std_min_volatility, _ =
ef_min_volatility.portfolio_performance(risk_free_rate=0.0844)
ax.scatter(std_min_volatility, ret_min_volatility, marker="*",
s=1000, c="b", label="Min Volatility")

# Gere portfólios aleatórios
n_samples = 1000
w = np.random.dirichlet(np.ones(ef.n_assets), n_samples)
rets = w.dot(ef.expected_returns)
stds = np.sqrt(np.diag(w @ ef.cov_matrix @ w.T))
sharpes = rets / stds
ax.scatter(stds, rets, marker=".", c=sharpes, cmap="viridis_r")

# Saída
ax.set_title("Fronteira Eficiente com Portfólios Aleatórios -
Mínima Variância")
ax.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()

# Plotar a Fronteira Eficiente e a Máxima Volatilidade
plot_efficient_frontier_and_min_volatility(v_mu_capm, v_cov)

```

```

# Uso do Modelo CAPM por apresentar grau de concordância entre os
modelos de retornos esperados
ef_mv = EfficientFrontier(v_mu_capm, v_cov)
ef_mv.min_volatility()
mv_weights = ef_mv.clean_weights()

# Pesos Mínima Variância
mv_weights_df = pd.DataFrame.from_dict(mv_weights, orient='index')
mv_weights_df.columns = ['Pesos dos ativos']
mv_weights_df

```

```

# Gráfico dos pesos dos ativos
pd.Series(mv_weights).plot.pie(figsize=(7,7))
plt.title('Composição da carteira de mínima variância', fontsize=14)
plt.show()

```

```

# 'ef_mv' como uma instância de EfficientFrontier, aplicando a função
portfolio_performance
mv_expected_annual_return, mv_annual_volatility, mv_sharpe_ratio =
ef_mv.portfolio_performance(risk_free_rate=0.0844)

# Definição de títulos próprios
titulos = {
    "expected_annual_return": "Retorno Anual Esperado",
    "annual_volatility": "Volatilidade Anual",

```

```

    "sharpe_ratio": "Índice de Sharpe"
}

# Imprima os resultados com seus títulos personalizados
print(f"{titulos['expected_annual_return']}:
{mv_expected_annual_return * 100:.2f}%")
print(f"{titulos['annual_volatility']}: {mv_annual_volatility *
100:.2f}%")
print(f"{titulos['sharpe_ratio']}: {mv_sharpe_ratio:.2f}")

```

CARTEIRA IGUALMENTE PONDERADA

```

# Pesos carteira IGUALMENTE PONDERADA
id_weights = {ticker: 1/12 for ticker in ativos}
print(id_weights)

```

```

# Gráfico dos pesos dos ativos
pd.Series(id_weights).plot.pie(figsize=(7,7))
plt.title('Composição da carteira igualmente ponderada', fontsize=14)
plt.show()

```

```

# Constantes
trading_days = 252 # Número de dias de negociação por ano
risk_free_rate = 0.0844 # Taxa livre de risco ajustada para 8.44%

# Calculando os retornos diários
v_returns = v_precos.pct_change()

# Assegurar que os pesos estão na ordem correta em relação aos ativos
id_weights_array = np.array([id_weights[ticker] for ticker in ativos])
# Calculando o retorno
id_portfolio_returns = (id_weights_array * v_returns).sum(axis=1)
# Calculando o retorno acumulado
id_cumulative_returns = (1 + id_portfolio_returns).cumprod()
# Calculando o retorno acumulado final
id_final_cumulative_return = id_cumulative_returns.iloc[-1]

# Calculando a volatilidade anual
id_annual_volatility = np.sqrt(np.dot(id_weights_array.T,
                                     np.dot(v_returns.cov() *
trading_days,
                                     id_weights_array)))

# Calculando o retorno anual da carteira
id_annual_portfolio_return = id_portfolio_returns.mean() *
trading_days
# Calculando o Sharpe Ratio
id_sharpe_ratio = (id_annual_portfolio_return - risk_free_rate) /
id_annual_volatility

# Imprimir os resultados formatados
print(f"Retorno Anual Realizado:
{id_annual_portfolio_return*100:.1f}%")

```

```
print(f"Volatilidade Anual: {id_annual_volatility*100:.1f}%")
print(f"Índice de Sharpe:: {id_sharpe_ratio:.2f}")
```

Resultados esperados das carteiras – consolidado

```
print("Resultados esperados da carteira de máximo Sharpe:")
print(f"- {titulos['expected_annual_return']}:
{ms_expected_annual_return * 100:.2f}%")
print(f"- {titulos['annual_volatility']}: {ms_annual_volatility *
100:.2f}%")
print(f"- {titulos['sharpe_ratio']}: {ms_sharpe_ratio:.2f}")
print(" ")
print("Resultados esperados da carteira de mínima variância:")
print(f"- {titulos['expected_annual_return']}:
{mv_expected_annual_return * 100:.2f}%")
print(f"- {titulos['annual_volatility']}: {mv_annual_volatility *
100:.2f}%")
print(f"- {titulos['sharpe_ratio']}: {mv_sharpe_ratio:.2f}")
print(" ")
print("Resultados esperados da carteira igualmente ponderada:")
# Imprimir os resultados formatados
print(f"- Retorno Anual Realizado:
{id_annual_portfolio_return*100:.1f}%")
print(f"- Volatilidade Anual: {id_annual_volatility*100:.1f}%")
print(f"- Índice de Sharpe:: {id_sharpe_ratio:.2f}")
```

----- PERÍODO DE TESTE -----

Etapa G: Cálculo para teste de performance das carteiras formadas

```
t_precos = yf.download(ativos, start=t_start_date,
end=t_end_date)['Adj Close']
t_precos.head()

# Calculando os retornos diários
t_returns = t_precos.pct_change()
```

CARTEIRA DE MÁXIMO SHARPE

```
# Constantes
trading_days = 252 # Número de dias de negociação por ano
risk_free_rate = 0.0844 # Taxa livre de risco ajustada para 8.44%

# Assegurar que os pesos estão na ordem correta em relação aos ativos
ms_weights_array = np.array([ms_ef_weights[ticker] for ticker in
ativos])
# Calculando o retorno
ms_portfolio_returns = (ms_weights_array * t_returns).sum(axis=1)
# Calculando o retorno acumulado
ms_cumulative_returns = (1 + ms_portfolio_returns).cumprod()
# Calculando o retorno acumulado final
ms_final_cumulative_return = ms_cumulative_returns.iloc[-1]
```

```

# Calculando a volatilidade anual
ms_annual_volatility = np.sqrt(np.dot(ms_weights_array.T,
                                     np.dot(t_returns.cov() *
trading_days,
                                     ms_weights_array)))

# Calculando o retorno anual da carteira
ms_annual_portfolio_return = ms_portfolio_returns.mean() *
trading_days
# Calculando o Sharpe Ratio
ms_sharpe_ratio = (ms_annual_portfolio_return - risk_free_rate) /
ms_annual_volatility

# Criando um gráfico para os retornos acumulados da carteira
plt.figure(figsize=(12,6))
plt.plot(ms_cumulative_returns, label="Carteira de máximo Sharpe")
plt.title('Retornos acumulados da carteira de máximo Sharpe')
plt.xlabel('Data')
plt.ylabel('Retornos')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

print("Carteira de máximo Sharpe no período de teste:")
# Imprimindo o retorno cumulativo final
print(f"- Retornos acumulados da carteira de máximo Sharpe:
{ms_final_cumulative_return*100:.1f}%")
# Imprimir os resultados formatados
print(f"- Retorno Anual Realizado:
{ms_annual_portfolio_return*100:.1f}%")
print(f"- Volatilidade Anual: {ms_annual_volatility*100:.1f}%")
print(f"- Índice de Sharpe:: {ms_sharpe_ratio:.2f}")

```

CARTEIRA DE MÍNIMA VOLATILIDADE

```

# Constantes
trading_days = 252 # Número de dias de negociação por ano
risk_free_rate = 0.0844 # Taxa livre de risco ajustada para 8.44%

# Assegurar que os pesos estão na ordem correta em relação aos ativos
mv_weights_array = np.array([mv_weights[ticker] for ticker in ativos])
# Calculando o retorno
mv_portfolio_returns = (mv_weights_array * t_returns).sum(axis=1)
# Calculando o retorno acumulado
mv_cumulative_returns = (1 + mv_portfolio_returns).cumprod()
# Calculando o retorno acumulado final
mv_final_cumulative_return = mv_cumulative_returns.iloc[-1]

# Calculando a volatilidade anual
mv_annual_volatility = np.sqrt(np.dot(mv_weights_array.T,
                                     np.dot(t_returns.cov() *
trading_days,
                                     mv_weights_array)))

# Calculando o retorno anual da carteira

```

```

mv_annual_portfolio_return = mv_portfolio_returns.mean() *
trading_days
# Calculando a mínima variância para a carteira
mv_min_variance = (mv_annual_portfolio_return - risk_free_rate) /
mv_annual_volatility

# Criando um gráfico para os retornos acumulados da carteira
plt.figure(figsize=(12,6))
plt.plot(mv_cumulative_returns, label="Carteira de mínima variância")
plt.title('Retornos acumulados da carteira de mínima variância')
plt.xlabel('Data')
plt.ylabel('Retornos acumulados')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

print("Carteira de mínima variância no período de teste:")
# Imprimindo o retorno cumulativo final
print(f"- Retornos acumulados da carteira de mínima variância:
{mv_final_cumulative_return*100:.1f}%")
# Imprimir os resultados formatados
print(f"- Retorno Anual Realizado:
{mv_annual_portfolio_return*100:.1f}%")
print(f"- Volatilidade Anual: {mv_annual_volatility*100:.1f}%")
print(f"- Índice de Sharpe: {mv_min_variance:.2f}")

```

CARTEIRA IGUALMENTE PONDERADA

```

# Constantes
trading_days = 252 # Número de dias de negociação por ano
risk_free_rate = 0.0844 # Taxa livre de risco ajustada para 8.44%

# Assegurar que os pesos estão na ordem correta em relação aos ativos
id_weights_array = np.array([id_weights[ticker] for ticker in ativos])
# Calculando o retorno
id_portfolio_returns = (id_weights_array * t_returns).sum(axis=1)
# Calculando o retorno acumulado
id_cumulative_returns = (1 + id_portfolio_returns).cumprod()
# Calculando o retorno acumulado final
id_final_cumulative_return = id_cumulative_returns.iloc[-1]

# Calculando a volatilidade anual da carteira
id_annual_volatility = np.sqrt(np.dot(id_weights_array.T,
                                     np.dot(t_returns.cov() *
trading_days,
                                     id_weights_array)))

# Calculando o retorno anual da carteira
id_annual_portfolio_return = id_portfolio_returns.mean() *
trading_days
# Calculando o Sharpe Ratio para a carteira
id_equally_weighted = (id_annual_portfolio_return - risk_free_rate) /
id_annual_volatility

# Criando um gráfico para os retornos acumulados da carteira
plt.figure(figsize=(12,6))

```

```

plt.plot(id_cumulative_returns, label="Carteira igualmente ponderada")
plt.title('Retornos acumulados da carteira igualmente ponderada')
plt.xlabel('Data')
plt.ylabel('Retornos acumulados')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

print("Carteira igualmente ponderada no período de teste:")
# Imprimindo o retorno cumulativo final
print(f"- Retornos acumulados da carteira igualmente ponderada:
{id_final_cumulative_return*100:.1f}%")
# Imprimir os resultados formatados
print(f"- Retorno Anual Realizado:
{id_annual_portfolio_return*100:.1f}%")
print(f"- Volatilidade Anual: {id_annual_volatility*100:.1f}%")
print(f"- Índice de Sharpe: {id_equally_weighted:.2f}")

```

ÍNDICE IBOVESPA

```

ibovespa = ['^BVSP']

# Download dos preços ajustados de fechamento do Ibovespa
t_precos_ibov = yf.download(ibovespa, start=t_start_date,
end=t_end_date)['Adj Close']

# Calculando os retornos diários do Ibovespa
t_returns_ibov = t_precos_ibov.pct_change()

# Constantes
trading_days = 252 # Número de dias de negociação por ano
risk_free_rate = 0.0844 # Taxa livre de risco ajustada para 8.44%

# Calculando o retorno acumulado do Ibovespa
ibov_cumulative_returns = (1 + t_returns_ibov).cumprod()

# Calculando o retorno acumulado final do Ibovespa
ibov_final_cumulative_return = ibov_cumulative_returns.iloc[-1]

# Calculando a volatilidade anual do Ibovespa
ibov_annual_volatility = np.sqrt(t_returns_ibov.var() * trading_days)

# Calculando o retorno anual do Ibovespa
ibov_annual_portfolio_return = t_returns_ibov.mean() * trading_days

# Calculando o Sharpe Ratio do Ibovespa
ibov_sharpe_ratio = (ibov_annual_portfolio_return - risk_free_rate) /
ibov_annual_volatility

# Criando um gráfico para os retornos acumulados do Ibovespa
plt.figure(figsize=(12,6))
plt.plot(ibov_cumulative_returns, label="Índice Ibovespa")
plt.title('Retornos acumulados do Índice Ibovespa')
plt.xlabel('Data')

```

```

plt.ylabel('Retornos acumulados')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# Imprimindo os resultados formatados para o Ibovespa
print("Índice Ibovespa no período de teste:")
print(f"- Retorno Anual Realizado:
{ibov_annual_portfolio_return*100:.1f}%")
print(f"- Volatilidade Anual: {ibov_annual_volatility*100:.1f}%")
print(f"- Índice de Sharpe: {ibov_sharpe_ratio:.2f}")

```

Etapa H: Análise e comparação de performance e de resultados das carteiras

Resultados realizados pelas carteiras – consolidado

```

# Gerar gráfico combinado das carteiras analisadas
# Utilizando a mesma escala de tempo para os três gráficos
plt.figure(figsize=(15,10))

# Plotando os retornos acumulados para cada carteira
plt.plot(ms_cumulative_returns, label="Carteira de máximo Sharpe")
plt.plot(mv_cumulative_returns, label="Carteira de mínima variância")
plt.plot(id_cumulative_returns, label="Carteira igualmente ponderada")
plt.plot(ibov_cumulative_returns, label="Índice Ibovespa")

# Adicionando títulos e rótulos
plt.title('Retornos acumulados das carteiras analisadas no período de
teste')
plt.xlabel('Data')
plt.ylabel('Retornos acumulados')
plt.legend() # Mostra a legenda
plt.grid(True) # Adiciona uma grade para melhor leitura

# Mostra o gráfico
plt.show()

```

```

print("Carteira de máximo Sharpe no período de teste:")
print(f"- Retorno Anual Realizado:
{ms_annual_portfolio_return*100:.1f}%")
print(f"- Volatilidade Anual: {ms_annual_volatility*100:.1f}%")
print(f"- Índice de Sharpe: {ms_sharpe_ratio:.2f}")
print(" ")
print("Carteira de mínima variância no período de teste:")
print(f"- Retorno Anual Realizado:
{mv_annual_portfolio_return*100:.1f}%")
print(f"- Volatilidade Anual: {mv_annual_volatility*100:.1f}%")
print(f"- Índice de Sharpe: {mv_min_variance:.2f}")
print(" ")
print("Carteira igualmente ponderada no período de teste:")
print(f"- Retorno Anual Realizado:
{id_annual_portfolio_return*100:.1f}%")

```

```
print(f"- Volatilidade Anual: {id_annual_volatility*100:.1f}%")
print(f"- Índice de Sharpe: {id_equally_weighted:.2f}")
print(" ")
print("Índice Ibovespa no período de teste:")
print(f"- Retorno Anual Realizado:
{ibov_annual_portfolio_return*100:.1f}%")
print(f"- Volatilidade Anual: {ibov_annual_volatility*100:.1f}%")
print(f"- Índice de Sharpe: {ibov_sharpe_ratio:.2f}")
```