
Projeto de algoritmo para cálculo de campos
eletromagnéticos na teoria generalizada de
Lorenz-Mie

PROJETO DE FORMATURA

SÃO CARLOS, 2017

ELABORADO POR

LUIZ FELIPE MACHADO VOTTO

ORIENTADO PELO

PROF. DR. LEONARDO ANDRÉ AMBROSIO

*Universidade de São Paulo
São Carlos - SP*

EESC E ICMC

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Machado Votto, Luiz Felipe
MV872p Projeto de algoritmo para cálculo de campos
eletromagnéticos na teoria generalizada de Lorenz-Mie /
Luiz Felipe Machado Votto; orientador Leonardo André
Ambrosio. São Carlos, 2017.

Monografia (Graduação em Engenharia de Computação)
-- Escola de Engenharia de São Carlos e Instituto de
Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de
São Paulo, 2017.

1. Eletromagnetismo. 2. Ondas. 3. Espalhamento. 4.
Python. I. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Nome: Luiz Felipe Machado Votto

Título: “Projeto de algoritmo para cálculo de campos eletromagnéticos na teoria generalizada de Lorenz-Mie”

Trabalho de Conclusão de Curso defendido em 29/11/2017.

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Dr. Leonardo André Ambrosio
(Orientador) - SEL/EESC/USP

APROVADO

Profª. Dra. Mônica de Lacerda Rocha
SEL/EESC/USP

Aprovado

Prof. Dr. João Paulo Pereira do Carmo
SEL/EESC/USP

APROVADO

Coordenador do Curso Interunidades Engenharia de Computação:

Prof. Dr. Maximilian Luppe

Agradecimentos

*Aos meus pais, Katia e Marco, meu irmão, Daniel, e toda minha família,
pelo amor e apoio sem condições.*

*Aos meus amigos, em qualquer lugar do mundo;
pelas noites em claro, pela companhia e compreensão nas horas mais bonitas
e nas mais feias.*

*Ao professor Leonardo,
pelo companheirismo, atenção e apoio nestes últimos meses.*

Sumário

1	Introdução	9
2	Fundamentos Teóricos de Eletromagnetismo	12
2.1	As Equações de Maxwell	12
2.2	Condições de Contorno	13
2.3	Formulação no Espaço de Fourier	15
2.4	Campos Harmônicos e Modos Normais	16
2.5	Equações de Maxwell em meios l.l.h.i.	18
2.6	Coordenadas curvilíneas ortogonais	18
2.7	Coordenadas esféricas	20
2.8	Potenciais e Calibres	20
2.9	Potenciais de Bromwich	22
	Modo Transverso Magnético	23
	Modo Transverso Elétrico	25
2.10	Potenciais de Bromwich no Domínio da frequência	26
	Modo Transverso Magnético	27
	Modo Transverso Elétrico	27
2.11	Soluções dos Potenciais Escalares de Bromwich	27
	Equação Harmônica	29
	Equação de Legendre Associada	29
	Equação de Bessel Esférica	30
2.12	Expressões Gerais para os Potenciais de Bromwich	31
2.13	BSPs da Onda Incidente	32
2.14	Expansões das Componentes dos Campos Incidentes	33
3	Estratégias Computacionais	35
3.1	Desafios	35
3.2	Considerações	36
3.3	Algoritmos	37
3.4	Convergência	39
4	Implementação	41
4.1	Organização do Código	41
4.2	Classes de Campos Vetoriais	42
4.3	Funções Especiais	44
	Funções de Riccati-Bessel	44
	Funções de Legendre	45
4.4	Componentes de Campos segundo a GLMT	46

5	Resultados	48
5.1	Feixes de Bessel	48
5.2	<i>Frozen Waves</i>	55
6	Conclusões	62
A	Tensores Métricos e Covariantes	64
B	Ângulos de áxicon e Coeficientes da <i>Frozen Wave</i> de exemplo	66

Lista de Figuras

1	Tempo computacional dos algoritmos de Fibonacci iterativo e recursivo - com e sem <i>cache</i>	39
2	Fluxograma representativo da estrutura do programa no processo de obter um objeto da classe CartesianField que ilustra um campo elétrico ou magnético segundo a GLMT.	42
3	Valor absoluto do campo elétrico nos eixos cartesianos em função da distância até a origem do sistema de coordenadas.	50
4	Valor absoluto ao quadrado das componentes do campo elétrico ao longo do eixo- x . (a) Nas componentes x , y e z . (b) Detalhe apenas na componente z	50
5	Valor absoluto do campo elétrico. Eixos em μm no sistema de coordenadas cartesiano.	53
6	Valor absoluto ao quadrado das componentes do campo magnético ao longo do eixo- x . (a) Nas componentes x , y e z . (b) Detalhe apenas na componente z	54
7	Valor absoluto ao quadrado das componentes do campo elétrico pelo plano- xy . (a) Componente E_x . (b) Componente E_z com escala normalizada. (c) Visão tridimensional de (b) sem normalização.	55
8	Valor absoluto ao quadrado do campo elétrico nos eixos cartesianos em função da distância até a origem do sistema de coordenadas.	58
9	Valor absoluto ao quadrado do campo elétrico no plano- xz . Escala normalizada.	58
10	Valor absoluto ao quadrado do campo elétrico de uma composição de três FWs de ordem 0. (a) Visão 2D no plano- xz representando a escala completa da onda. (b) Visão 2D no plano- xz representado a uma escala reduzida da onda, isto é, os valores de 0 até 1 são dados como na barra de cores à direita e os valores superiores a 1 são representados na cor branca. (c) Visão tridimensional da onda no plano- xz	60
11	Valor absoluto ao quadrado do campo elétrico de uma composição de três FWs de ordem até 4. (a) Visão 2D no plano- xz representando a escala completa da onda. (b) Visão tridimensional da onda no plano- xz	61

Lista de Símbolos

E	Campo elétrico	B	Densidade de fluxo magnético
D	Deslocamento elétrico	H	Campo magnético
ε	Permissividade elétrica	μ	Permeabilidade magnética
ρ	Densidade de carga elétrica	J	Densidade de corrente elétrica
$\nabla \cdot$	Operador divergência	$\nabla \times$	Operador rotacional
∇	Operador gradiente	P	Momento de dipolo elétrico
M	Magnetização	$d\mathbf{F}$	Elemento de Força de Lorentz
χ_e	Susceptibilidade elétrica	χ_m	Susceptibilidade magnética
$\hat{\cdot}$	Versor	r	Vetor posição
t	Variável temporal	ω	Frequência angular
i	Unidade imaginária ($i^2 = -1$)	$\delta(\cdot)$	Distribuição de Dirac
$\tilde{A}$	Representativo complexo de A	A^*	Complexo conjugado de A
A	Potencial vetor magnético ($\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$)	V	Potencial elétrico
∇^2	Operador Laplaciano	U	Potencial Escalar de Bromwich
k	Número de onda	c_n^{pw}	Coefficiente de onda plana
$g_{n,TM}^m$	Fator de forma de onda transversal magnética	$f'(x)$	$\frac{d}{dx}f(x)$
$g_{n,TE}^m$	Fator de forma de onda transversal elétrica	$f''(x)$	$\frac{d^2}{dx^2}f(x)$
$\Psi_n^{(k)}$	Função de Bessel esférica de ordem n e tipo k		
Ψ_n	Primeira função de Riccati-Bessel de ordem n		
ξ_n	Segunda função de Riccati-Bessel de ordem n		
P_n	Polinômio de Legendre de ordem n		
P_n^m	Função de Legendre associada de ordem n e grau m		
τ_n^m, π_n^m	Funções de Legendre generalizadas de ordem n e grau m		

Resumo

Propõe-se um algoritmo implementado por um programa `Python` para a visualização do campo elétrico e magnético no espalhamento de um *laser* por uma partícula biológica esférica a partir da Teoria Generalizada de Lorenz-Mie. Tomando como ponto de partida trabalhos já completos, consideram-se conhecidos os coeficientes de forma de onda do *laser* - g_n^m - para ambos os modos transversos elétrico e magnético. Aqui serão discutidas as estratégias utilizadas tanto a partir do que é geralmente utilizado no espectro geral de métodos numéricos quanto a partir dos elementos da teoria eletromagnética na qual o algoritmo se baseia.

1 Introdução

O aprimoramento contínuo das tecnologias computacionais fez surgir uma dicotomia fundamental nos mais diversos modelos da Física a qual traz para o debate acadêmico um contraponto importante entre os resultados analíticos e os resultados numéricos. Enquanto, de um lado, os métodos analíticos geralmente levantam *insights* aos pesquisadores quanto às origens de cada processo e exaltam os significados físicos dos elementos estudados, de outro, temos a eficiência quase garantida de métodos numéricos elaborados de forma inteligente para adquirir resultados concretos de maneira rápida.

Não diferente do caso a ser estudado neste projeto, existem instâncias no mundo científico onde, para trazer os resultados da Física a um nível prático no ponto de vista de Engenharia, é necessário complementar os métodos analíticos com métodos numéricos bem fundamentados. Em eletromagnetismo, por exemplo, problemas para geometrias arbitrárias ou para situações com complexidade intermediária implicam equações transcendentais que geralmente não possuem solução em forma de expressões fechadas, obrigando o pesquisador a recorrer a aproximações no âmbito analítico ou a soluções numéricas.

A Teoria Generalizada de Lorenz-Mie para espalhamento eletromagnético - GLMT (*Generalized Lorenz-Mie Theory*) daqui em diante - permite o

cálculo de campos e forças em partículas de tamanho não desprezível como células, gotículas de água, aerossóis, poeira, vírus, moléculas, etc. [1] – [8] Embora, a fim disto, proponha o uso de soluções para as equações de Maxwell em forma de expansões em séries infinitas, os termos da série trazem um custo computacional alto para seu desenvolvimento. Assim, é necessário tomar algum cuidado na abordagem do problema de solução numérica a partir da GLMT.

Com respaldo na teoria que suporta o espalhamento eletromagnético de Lorenz-Mie, estudar-se-á adiante abordagens que diferem dos métodos ditos "de força-bruta" para melhorar a eficiência dos cálculos e implementar um programa a ser tido como adjunto de ferramentas abertas para o estudo deste tipo de espalhamento. Primeiramente, serão deduzidas as equações principais para os cálculos do campo elétrico e magnético interno e externo adequadamente trazidas para um domínio palpável para a computação. Depois serão discutidos os métodos de redução de custo computacional destas operações.

A implementação é feita na linguagem `Python` com a importação de bibliotecas padrão para cálculos científicos para uma leitura fluida do código sem perda considerável da eficiência. A escolha da linguagem também se dá por conta do uso de ferramentas em elaboração de colaboradores às quais se pretende integrar os algoritmos. Além disso, o programa é fundamentado com o intuito de permitir aprimoramentos contínuos tais como a inclusão de novas partículas, de esferas multi-camadas e cálculos de propriedades ópticas de interesse derivadas dos campos calculados pelo algoritmo.

Como já dito, o intuito principal é disponibilizar uma ferramenta livre para quem estiver interessado neste ramo de pesquisa em páginas de destaque como `scattport.org` por exemplo [9]. O primeiro passo para qualquer análise relevante é, de fato, o cálculo dos campos eletromagnéticos, pois nos permite inferir se as descrições dos feixes pela GLMT são de fato confiáveis em relação às equações originais. Isto quer dizer que os coeficientes devem

ser calculados com atenção às suas precisões. No departamento de engenharia elétrica e de computação da USP de São Carlos, as ferramentas disponíveis para estes tipos de simulação dependem de *software* pago - tais como **Wolfram Mathematica** ou **MATLAB** - ou de linguagens não facilmente compatíveis com tecnologias de ponta no meio acadêmico como o **Fortran**.

Sobre a organização deste trabalho, no Capítulo 2, será estruturada a teoria por trás do projeto computacional desde uma abordagem das equações de Maxwell em si, métodos de resolvê-las, implicações sobre o significado destas soluções até se obter expressões para projetar um algoritmo consistente com a realidade. No Capítulo 3, toma-se uma certa distância das deduções físicas e discute-se rapidamente algumas estratégias do domínio da computação para justificar algumas escolhas tomadas no projeto. No Capítulo 4, os dois domínios - da Física e da Computação - convergem a fim de elaborarmos o algoritmo. Lá estão as nuances da implementação de fato do código. No Capítulo 5, serão expostos os resultados e serão justificadas as suas formas com base na fundação matemática e física descrita antes no Capítulo 2. Finalmente, no Capítulo 6; serão feitas considerações sobre o projeto em si e dar-se-ão direções à continuidade do projeto e sobre como ele pode ser aprimorado e ser de ajuda para o universo científico.

2 Fundamentos Teóricos de Eletromagnetismo

2.1 As Equações de Maxwell

O alicerce de qualquer teoria eletromagnética está nas equações de Maxwell, seja ela complementada pela mecânica quântica ou não. Para o espaço livre [10], em coordenadas cartesianas, as equações de Maxwell são dadas por:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Assim, são introduzidos os dois campos vetoriais $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, respectivamente campo elétrico e densidade de fluxo magnético. μ_0 e ε_0 são constantes dadas, respectivamente, como permeabilidade magnética e constante dielétrica do vácuo. O termo ρ diz respeito a cargas elétricas e $\mathbf{J}$ representa correntes elétricas.

Entretanto, quando tratamos de eletromagnetismo na matéria a nível microscópico, devemos tomar certos cuidados. Devem ser introduzidos os campos $\mathbf{D}$ e $\mathbf{H}$, respectivamente campo de deslocamento elétrico e campo magnético. Assim, as equações de Maxwell são adaptadas como abaixo:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde as relações constitutivas para $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$ são dadas por

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}. \quad (2.2)$$

Desta forma, pode-se enxergar até certo ponto, os novos campos $\mathbf{P}$ e $\mathbf{M}$ como efeitos modificadores que a matéria exerce sobre o campo elétrico e a densidade de fluxo magnético. De fato, chamamos estes elementos de polarização elétrica e de magnetização, respectivamente. Isto se deve ao fato de que, na matéria macroscópica, campos elétricos podem rearranjar cargas criando dipolos elementares. O campo $\mathbf{P}$ ilustra este efeito. A argumentação para $\mathbf{M}$ é análoga a partir do momento em que os campos que interagem com o material em questão afetam os seus domínios magnéticos.

2.2 Condições de Contorno

As equações dadas de (2.1) a (2.2) ainda devem ser completadas por condições de contorno e a introdução do conceito da Força de Lorentz. As condições de contorno são o que de fato descrevem o problema. Elas nos dão as condições limites no infinito e nas descontinuidades das situações que virão a ser estudadas.

Considere dois meios - 1 e 2 - separados por uma superfície S onde $\hat{\mathbf{n}}_{12}$ é vetor unitário ortogonal a S e está positivamente orientado ao meio 2. As condições de interface são dadas por:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}}_{12} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) &= \rho_S, \\ \hat{\mathbf{n}}_{12} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= 0, \\ \hat{\mathbf{n}}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0, \\ \hat{\mathbf{n}}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \mathbf{J}_S. \end{aligned}$$

Aqui, os termos ρ_S e $\mathbf{J}_S$ representam densidades de carga e correntes na superfície S respectivamente. Em poucas palavras, as componentes tangenciais de campo elétrico e as componentes normais de campo de indu-

ção magnética preservam continuidade na transição dos meios, enquanto as componentes tangenciais de campo magnético e as componentes normais de deslocamento elétrico são descontínuas dependendo do comportamento das cargas na interface.

Como os campos dependem de intensidades de fontes e que estas fontes podem ter movimento induzido pelos campos, é preciso introduzir o conceito de força de Lorentz. Um elemento de força de Lorentz $d\mathbf{F}$ atuando num volume elementar dV é dado por:

$$d\mathbf{F} = [\rho\mathbf{E} + (\mathbf{J} \times \mathbf{B})] dV$$

A partir deste ponto, para se tratar de soluções para as equações de Maxwell como apresentadas em (2.1), ainda temos que formalizar relações constitutivas para definir os momentos elétricos e a magnetização dadas por $\mathbf{P}$ e $\mathbf{M}$ que surgem em meios reais.

Uma abordagem geral às relações constitutivas deve introduzir conceitos como pareamento de campos, não-linearidade, convoluções espaciais e temporais, anisotropia e heterogeneidade de materiais. Não será do interesse deste trabalho o aprofundamento nestas áreas. Feita esta ressalva, prosseguir-se-á à representação das equações de Maxwell no domínio da frequência, onde as dependências do tempo poderão ser tratadas de forma a auxiliar os aspectos computacionais deste trabalho.

Antes de nos aprofundarmos nas nuances da abordagem pela transformada de Fourier, os resultados para as relações constitutivas em meios simples, isto é, isotrópicos, perfeitos (que seguem imediatamente as variações dos campos) e que não dependem de vizinhanças espaciais para os campos eletromagnéticos, podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 \chi_e(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) &= \chi_m(\mathbf{r}, t) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t),\end{aligned}$$

onde χ_e e χ_m são as susceptibilidades elétrica e magnética do material, $\mathbf{r}$ é vetor posição e t é tempo.

2.3 Formulação no Espaço de Fourier

A utilidade da transformada de Fourier aqui é, principalmente, o fato de transformar o operador diferencial $\partial/\partial t$ no operador algébrico $i\omega$, onde ω é a frequência angular de um modo de Fourier. Assim, podemos reformular as equações de Maxwell:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -i\omega\mathbf{B}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + i\omega\mathbf{D}.\end{aligned}$$

É importante notar que todas as grandezas aqui representadas são referentes agora ao domínio da frequência, por mais que estejamos usando a notação anterior. Note que a corrente segue a relação constitutiva seguir

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') C_j^k(\mathbf{r}, t; t') dt',$$

onde C_j^k representa um tensor que se reduz a um escalar quando a corrente e o campo elétrico são colineares. Esta convolução temporal se perde quando o meio é perfeito. Feitas as devidas correções para meios lineares, locais, homogêneos e isotrópicos no espaço de Fourier, temos as equações de Maxwell escritas como:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -i\omega\mu\mathbf{H}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= i\omega\varepsilon\mathbf{E}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Onde

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e) - \frac{i\sigma}{\omega}, \quad \mu = \mu_0(1 + \chi_m),$$

e

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0(1 + \chi_e)\mathbf{E}.$$

2.4 Campos Harmônicos e Modos Normais

Usamos a transformada de Fourier para tratar a teoria como o estudo dos modos normais de oscilação das ondas. Consideraremos aqui os modos normais como campos harmônicos no tempo, com seus termos dependentes do tempo como $e^{+i\omega t}$. É importante ressaltar que aqui foi tomada uma escolha importante. A teoria poderia ser descrita de forma equivalente utilizando o termo dependente do tempo como $e^{-i\omega t}$. É importante ter em mente que, uma vez escolhida esta convenção, não devemos mais trocá-la sob o risco deletério de afetar as interpretações físicas das situações a serem estudadas.

Assim, qualquer grandeza harmônica real

$$A(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \cos(\omega_0 t + \phi(\mathbf{r}))$$

possui um representativo complexo $\tilde{A}$ dado por

$$\tilde{A}(\mathbf{r})e^{i\omega_0 t} = a(\mathbf{r})e^{i\phi(\mathbf{r})}e^{i\omega_0 t}.$$

Sua transformada de Fourier se torna:

$$\mathcal{F}\{A\}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2} \left(\tilde{A}(\mathbf{r})\delta(\omega - \omega_0) + \tilde{A}^*(\mathbf{r})\delta(\omega + \omega_0) \right),$$

onde δ é a função impulso unitário ou a distribuição de Dirac e $\tilde{A}^*(\mathbf{r})$ é a grandeza complexa conjugada de $\tilde{A}(\mathbf{r})$.

Podemos aplicar estas considerações às equações de Maxwell. Conside-

rando campos harmônicos, por exemplo, no caso da lei de Faraday,

$$\begin{aligned}\nabla \times E &= -i\omega\mu H, \\ \nabla \times \left(\tilde{E}\delta(\omega - \omega_0) + \tilde{E}^*\delta(\omega + \omega_0) \right) &= -i\mu\omega \left(\tilde{H}\delta(\omega - \omega_0) + \tilde{H}^*\delta(\omega + \omega_0) \right).\end{aligned}$$

Aqui, podemos checar que

$$\omega\delta(\omega - \omega_0) = \omega_0\delta(\omega - \omega_0),$$

pois, pelas seguintes propriedades da distribuição de Dirac,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\delta(\omega - \omega_0)d\omega &= f(\omega_0), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0)d\omega &= 1,\end{aligned}$$

mostramos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega\delta(\omega - \omega_0)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0\delta(\omega - \omega_0)d\omega = \omega_0.$$

Portanto, chega-se à conclusão de que

$$\nabla \times \tilde{E} = -i\omega_0\mu\tilde{H}.$$

Aplicando as mesmas estratégias para as outras equações em (2.3), deduzimos o novo conjunto para campos harmônicos em modos normais:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \tilde{D} &= \tilde{\rho}, \\ \nabla \cdot \tilde{H} &= 0, \\ \nabla \times \tilde{E} &= -i\omega_0\mu\tilde{H}, \\ \nabla \times \tilde{H} &= i\omega_0\varepsilon\tilde{E}.\end{aligned}$$

2.5 Equações de Maxwell em meios l.l.h.i.

Para os fins deste projeto, trabalharemos apenas com meios lineares, locais em relação ao espaço e ao tempo, homogêneos e isotrópicos sem fontes macroscópicas de carga elétrica ou de densidades de corrente. A estes meios daremos o nome de meios l.l.h.i. daqui em diante. Para tais meios, as equações de Maxwell se reduzem, em coordenadas cartesianas, para:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Aqui, μ e ε são constantes devido à homogeneidade do espaço a ser tratado. Como a abordagem dos métodos utilizados se dará em sistemas de coordenadas variados, é importante salientar a formulação da teoria de eletromagnetismo em coordenadas curvilíneas ortogonais.

2.6 Coordenadas curvilíneas ortogonais

Numa rápida visita à teoria do cálculo tensorial, representamos sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonais de maneira generalizada usando um tensor métrico covariante da forma

$$g_{km} = \begin{bmatrix} (e_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (e_2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (e_3)^2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

onde as entradas e_k , $k = 1, 2, 3$, são os fatores de escala para o espaço. O Apêndice A discorre rapidamente sobre tensores métricos e covariantes.

Assim, podemos definir um comprimento infinitesimal como

$$ds = (e_1 dx^1)^2 + (e_2 dx^2)^2 + (e_3 dx^3)^2 \quad (2.5)$$

onde x^k , $k = 1, 2, 3$ representa cada uma das coordenadas do espaço.

Assim sendo, as equações de Maxwell se traduzem para a forma das equações a seguir. A Lei de Gauss se torna:

$$\frac{\partial}{\partial x^1} e_2 e_3 E_1 + \frac{\partial}{\partial x^2} e_3 e_1 E_2 + \frac{\partial}{\partial x^3} e_1 e_2 E_3 = 0.$$

Similar à equação acima, equação a seguir demonstra que não existem cargas magnéticas.

$$\frac{\partial}{\partial x^1} e_2 e_3 H_1 + \frac{\partial}{\partial x^2} e_3 e_1 H_2 + \frac{\partial}{\partial x^3} e_1 e_2 H_3 = 0.$$

Da Lei de Faraday:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^2} e_3 E_3 - \frac{\partial}{\partial x^3} e_2 E_2 &= -\mu e_2 e_3 \frac{\partial}{\partial t} H_1, \\ \frac{\partial}{\partial x^3} e_1 E_1 - \frac{\partial}{\partial x^1} e_3 E_3 &= -\mu e_3 e_1 \frac{\partial}{\partial t} H_2, \\ \frac{\partial}{\partial x^1} e_2 E_2 - \frac{\partial}{\partial x^2} e_1 E_1 &= -\mu e_1 e_2 \frac{\partial}{\partial t} H_3. \end{aligned} \quad (2.6)$$

E da Lei de Ampère:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^2} e_3 H_3 - \frac{\partial}{\partial x^3} e_2 H_2 &= \varepsilon e_2 e_3 \frac{\partial}{\partial t} E_1, \\ \frac{\partial}{\partial x^3} e_1 H_1 - \frac{\partial}{\partial x^1} e_3 H_3 &= \varepsilon e_3 e_1 \frac{\partial}{\partial t} E_2, \\ \frac{\partial}{\partial x^1} e_2 H_2 - \frac{\partial}{\partial x^2} e_1 H_1 &= \varepsilon e_1 e_2 \frac{\partial}{\partial t} E_3. \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.7 Coordenadas esféricas

O próximo passo em direção às soluções desejadas é tratarmos o cenário em coordenadas esféricas. Formuladas as expressões de (2.5) a (2.7), basta adaptarmos o tensor métrico covariante [1, 11, 12] para o nosso novo espaço em (r, θ, ϕ) .

$$g_{km} = \begin{bmatrix} (e_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (e_2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (e_3)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (r)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (r \sin \theta)^2 \end{bmatrix}.$$

2.8 Potenciais e Calibres

A partir do fato de que o divergente do rotacional de qualquer campo é nulo e de que não existem cargas magnéticas, vemos, do ponto de vista matemático, que existe um campo $\mathbf{A}$ tal que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.8)$$

Assim, para meios l.l.h.i., o campo magnético $\mathbf{H}$ pode ser expresso em função deste novo campo:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}.$$

Ao campo $\mathbf{A}$ daremos o nome de potencial vetor. Entretanto, a relação (2.8) não determina unicamente o campo potencial vetor aqui descrito. Para isto, precisamos adicionar uma condição ao divergente deste campo. É neste ponto que surgem as teorias de calibre. Por exemplo, o calibre de Coulomb se aplica à teoria eletromagnética através da imposição da condição:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

No contexto deste projeto, é mais interessante utilizar outro calibre: o calibre de Lorentz.

De fato, reescrevendo a lei de Faraday a partir da definição (2.8), temos que:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Agora, como o rotacional de um gradiente é zero, podemos introduzir mais um potencial. Neste caso, um potencial escalar V tal que

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V, \quad (2.9)$$

onde ∇V é o gradiente do campo escalar V . Entretanto, ainda temos o problema de que a dupla $(\mathbf{A}, V)$ não é unicamente determinada, pois os campos não mudam se trocarmos para uma dupla $(\mathbf{A}', V')$ onde

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla \varphi, \\ V' &= V - \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \end{aligned}$$

O calibre de Lorentz se trata da condição:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial V}{\partial t} = 0. \quad (2.10)$$

Relembrando, do cálculo vetorial, que, para qualquer campo vetorial Φ temos que

$$\nabla \times \nabla \times \Phi = \nabla (\nabla \cdot \Phi) - \nabla^2 \Phi,$$

onde $\nabla^2 \Phi$ se trata do laplaciano do campo Φ . Invocando a lei de Ampère, temos que

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Logo, pela condição (2.10) e pela relação (2.9) tomada da lei de Faraday,

deduzimos que

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0,$$

a qual, no domínio da frequência para campos harmônicos, se torna a equação de Helmholtz:

$$\nabla^2 A + k^2 A = 0,$$

onde $k^2 = \omega_0^2 \mu\epsilon$. Assim, uma vez determinado o campo potencial vetor como descrito, determinamos os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$, resolvendo, portanto, as equações de Maxwell para nosso caso especial.

2.9 Potenciais de Bromwich

Potenciais escalares também podem ser utilizados e, de fato, será a abordagem tomada daqui para frente em direção às soluções que desejamos. Chegaremos em equações diferenciais parciais que requerem sistemas de coordenadas que nos fornecem separabilidade para o método de solução escolhido. Para os fins do projeto, trabalharemos com sistemas de coordenadas ortogonais curvilíneas como dito anteriormente, mas agora teremos mais dois requisitos para os fatores de escala:

$$\begin{aligned} e_1 &= 1, \\ \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{e_2}{e_3} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Tais condições são verdadeiras para o caso das coordenadas esféricas:

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sin \theta} = 0.$$

Introduziremos, nesta seção, o conceito de potenciais escalares de Bromwich - BSPs (*Bromwich Scalar Potentials*) daqui em diante - para conseguirmos encontrar soluções especiais às equações de Maxwell para os sistemas de coordenadas tais como descritos acima [1]. Encontraremos duas soluções

especiais que são linearmente independentes, a Transversa Magnética - TM - e a Transversa Elétrica - TE. A partir da determinação dos potenciais de Bromwich, conseguiremos determinar os dois pares de soluções especiais: $(\mathbf{E}_{TM}, \mathbf{H}_{TM})$ e $(\mathbf{E}_{TE}, \mathbf{H}_{TE})$.

Modo Transverso Magnético

A solução TM se atribui, em coordenadas esféricas, à solução em que a componente da primeira coordenada do campo magnético é nula:

$$H_1 = 0.$$

Assim, a partir da primeira equação em (2.6), ficamos apenas com:

$$\frac{\partial}{\partial x^2} e_3 E_3 = \frac{\partial}{\partial x^3} e_2 E_2. \quad (2.11)$$

Introduzimos uma nova função potencial P para as grandezas $e_2 E_2$ e $e_3 E_3$ tal que

$$\begin{aligned} e_2 E_2 &= \frac{\partial P}{\partial x^2}, \\ e_3 E_3 &= \frac{\partial P}{\partial x^3}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

ainda respeitando a relação (2.11).

Um primeiro BSP, U , é introduzido como um potencial do potencial P a partir da relação

$$P = \frac{\partial U}{\partial x^1}.$$

Portanto, podemos deduzir as componentes E_2 e E_3 a partir de U :

$$E_2 = \frac{1}{e_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^1 \partial x^2}, \quad (2.13)$$

$$E_3 = \frac{1}{e_3} \frac{\partial^2 U}{\partial x^1 \partial x^3}. \quad (2.14)$$

Assim, a partir da definição do potencial P em (2.12) e da lei de Ampère adaptada para coordenadas curvilíneas ortogonais em (2.7), temos

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x^1} e_3 H_3 &= \varepsilon \frac{e_3 e_1}{e_2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2 \partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial x^1} e_2 H_2 &= \varepsilon \frac{e_1 e_2}{e_3} \frac{\partial^2 P}{\partial x^3 \partial t}. \end{aligned}$$

O que, em termos de U é

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x^1} e_3 H_3 &= \varepsilon \frac{e_3 e_1}{e_2} \frac{\partial^3 U}{\partial x^1 \partial x^2 \partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial x^1} e_2 H_2 &= \varepsilon \frac{e_1 e_2}{e_3} \frac{\partial^3 U}{\partial x^1 \partial x^3 \partial t}. \end{aligned}$$

Portanto, agora podemos também determinar os valores de H_2 e de H_3 dado um BSP U .

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x^1} e_3 H_3 &= \varepsilon \frac{e_3 e_1}{e_2} \frac{\partial^3 U}{\partial x^1 \partial x^2 \partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial x^1} e_2 H_2 &= \varepsilon \frac{e_1 e_2}{e_3} \frac{\partial^3 U}{\partial x^1 \partial x^3 \partial t}. \end{aligned}$$

Assim, ficam determinadas todas as componentes de campo magnético para o modo TM - $\mathbf{H}_{TM} = (H_1, H_2, H_3)$:

$$H_1 = 0, \quad (2.15)$$

$$H_2 = \varepsilon \frac{1}{e_3} \frac{\partial^2 U}{\partial x^3 \partial t}, \quad (2.16)$$

$$H_3 = -\varepsilon \frac{1}{e_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2 \partial t}. \quad (2.17)$$

Para determinar $\mathbf{E}_{TM}$, ainda precisamos encontrar a componente E_1 . Para isto, partimos da lei de Faraday,

$$\frac{\partial}{\partial x^3} e_1 E_1 - \frac{\partial}{\partial x^1} e_3 E_3 = \mu e_3 e_1 \frac{\partial H_2}{\partial t},$$

e usamos os resultados em (2.14) e (2.17), deduzimos a solução especial de $\mathbf{E}_{TM} = (E_1, E_2, E_3)$

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\partial^2 U}{(\partial x^1)^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \\ E_2 &= \frac{1}{e_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^1 \partial x^2}, \\ E_3 &= \frac{1}{e_3} \frac{\partial^2 U}{\partial x^1 \partial x^3}. \end{aligned}$$

Agora, como consequência da lei de Ampère, (2.7),

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{-1}{e_2 e_3} \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \frac{e_3}{e_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{e_2}{e_3} \frac{\partial^2 U}{\partial x^3 \partial t} \right)$$

obtemos a seguinte equação diferencial para U :

$$\frac{\partial^2 U}{(\partial x^1)^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{1}{e_2 e_3} \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \frac{e_3}{e_2} \frac{\partial U}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{e_2}{e_3} \frac{\partial U}{\partial x^3} \right) = 0. \quad (2.18)$$

Este é um resultado importante, pois, descoberto o valor de U a partir da solução da equação (2.18), conseguimos deduzir as componentes transversas magnéticas para os campos elétrico e magnético. Encontradas as soluções especiais nas mesmas condições para o modo transversal elétrico, as equações de Maxwell especiais estarão resolvidas.

Modo Transverso Elétrico

Análogo ao modo TM, o modo TE assume a primeira componente do campo elétrico como nula. A análise é muito similar à feita acima e, para fins de síntese, apenas exibiremos os resultados para o modo transversal elétrico. Entretanto, é importante salientar que temos aqui dois potenciais escalares

de Bromwich a serem tratados: potencial já mostrado anteriormente, U_{TM} e, agora, para o modo TE, U_{TE} .

$$\begin{aligned}
E_{1,TE} &= 0, \\
E_{2,TE} &= -\frac{\mu}{e_3} \frac{\partial^2 U_{TE}}{\partial x^3 \partial t}, \\
E_{3,TE} &= \frac{\mu}{e_2} \frac{\partial^2 U_{TE}}{\partial^2 \partial t}, \\
H_{1,TE} &= \frac{\partial^2 U_{TE}}{(\partial x^1)^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 U_{TE}}{\partial t^2}, \\
H_{2,TE} &= \frac{1}{e_2} \frac{\partial^2 U_{TE}}{\partial x^1 \partial x^2}, \\
H_{3,TE} &= \frac{1}{e_3} \frac{\partial^2 U_{TE}}{\partial x^1 \partial x^3}
\end{aligned}$$

2.10 Potenciais de Bromwich no Domínio da frequência

Como já discutido anteriormente, convoluções temporais foram tratadas e o operador diferencial no tempo $(\frac{\partial}{\partial t})$ se torna um operador multiplicativo na frequência $(i\omega)$ através da transformada de Fourier. Assim, a equação (2.18) se torna

$$\frac{\partial^2 U}{(\partial x^1)^2} + k^2 U + \frac{1}{e_2 e_3} \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \frac{e_3}{e_2} \frac{\partial U}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{e_2}{e_3} \frac{\partial U}{\partial x^3} \right) = 0. \quad (2.19)$$

Agora, as componentes dos campos se tornam:

Modo Transverso Magnético

$$E_{1,TM} = \frac{\partial^2 U_{TM}}{(\partial x^1)^2} + k^2 U_{TM}, \quad (2.20)$$

$$E_{2,TM} = \frac{1}{e_2} \frac{\partial^2 U_{TM}}{\partial x^1 \partial x^2}, \quad (2.21)$$

$$E_{3,TM} = \frac{1}{e_3} \frac{\partial^2 U_{TM}}{\partial x^1 \partial x^3}. \quad (2.22)$$

$$H_{1,TM} = 0, \quad (2.23)$$

$$H_{2,TM} = i\omega\varepsilon \frac{1}{e_3} \frac{\partial U_{TM}}{\partial x^3}, \quad (2.24)$$

$$H_{3,TM} = -i\omega\varepsilon \frac{1}{e_2} \frac{\partial U_{TM}}{\partial x^2}. \quad (2.25)$$

Modo Transverso Elétrico

$$E_{1,TE} = 0, \quad (2.26)$$

$$E_{2,TE} = -i\omega\mu \frac{1}{e_3} \frac{\partial U_{TE}}{\partial x^3}, \quad (2.27)$$

$$E_{3,TE} = i\omega\mu \frac{1}{e_2} \frac{\partial^2 U_{TE}}{\partial x^2}, \quad (2.28)$$

$$H_{1,TE} = \frac{\partial^2 U_{TE}}{(\partial x^1)^2} + k^2 U_{TE}, \quad (2.29)$$

$$H_{2,TE} = \frac{1}{e_2} \frac{\partial^2 U_{TE}}{\partial x^1 \partial x^2} \quad (2.30)$$

$$H_{3,TE} = \frac{1}{e_3} \frac{\partial^2 U_{TE}}{\partial x^1 \partial x^3} \quad (2.31)$$

2.11 Soluções dos Potenciais Escalares de Bromwich

A escolha de coordenadas esféricas para nossa modelagem se deve principalmente ao fato de suas coordenadas serem separáveis. Assim, a equação diferencial parcial para os BSPs (2.19) se torna uma equação diferencial ordinária.

$$U(r, \theta, \phi) = rR(kr)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

Tomando a equação diferencial em U e multiplicando por:

$$\mathcal{M} = \frac{r}{R(kr)\Theta(\theta)\Phi(\phi)}$$

temos

$$\frac{r}{R(kr)} \frac{d^2 r R(kr)}{dr^2} + k^2 r^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \Theta(\theta) + \frac{1}{\sin \theta \Phi(\phi)} \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi(\phi) \right). \quad (2.32)$$

Separadas as variáveis, ambos os lados da equação devem ser um número complexo que aqui escreveremos de forma conveniente como $a(a+1)$. Logo, o lado esquerdo da equação (2.32) se torna

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d}{dx} R(x) \right) + (x^2 - a(a+1)) R(x) &= 0, \\ x &= kr, \end{aligned} \quad (2.33)$$

que, nesta forma, se chama de equação de Bessel esférica.

Ao lado direito da equação (2.32) temos

$$a(a+1) \sin^2 \theta + \frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \Theta(\theta) = -\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi(\phi).$$

Se igualarmos cada lado da equação ao número complexo b^2 , obtemos a equação de Legendre associada:

$$\begin{aligned} (1 - u^2) \frac{d^2}{du^2} \Theta(\theta) - 2u \frac{d}{du} \Theta(\theta) + \left(a(a+1) - \frac{b^2}{1 - u^2} \right) \Theta(\theta) &= 0, \\ u &= \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Além disso, também obtemos a equação harmônica

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \Phi + b^2 \Phi = 0 \quad (2.35)$$

A partir destas três equações - (2.35), (2.34) e (2.33) - discutiremos suas

soluções e traremos uma discussão sobre quais são os valores dos números complexos que aqui chamamos de a e b .

Equação Harmônica

A continuidade da função harmônica com rotação ao redor do eixo- z requer que seja satisfeita a seguinte condição de contorno:

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi).$$

Assim, temos que, com a condição de continuidade de ϕ que o próprio sistema de coordenadas impõe, tem-se que b é um número inteiro e faz com que as soluções da equação (2.35) sejam da forma

$$\begin{aligned}\Phi(\phi) &= e^{im\phi}, \\ m &\in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Equação de Legendre Associada

A equação (2.34) possui soluções conhecidas. Estas soluções precisam ser válidas para todo o espaço, portanto, em particular, as soluções devem manter-se finitas quando $u = \pm 1$ - então a deve ser um número inteiro positivo. As soluções para as equações de Legendre associadas são chamadas de funções de Legendre associadas [13], vindas dos polinômios de Legendre. As funções de Legendre associadas são da forma:

$$P_n^m(\cos \theta) = (-1)^m (\sin \theta)^m \frac{d^m}{(d \cos \theta)^m} P_n(\cos \theta) \quad (2.36)$$

onde P_n são os polinômios de Legendre que são definidos por

$$P_n(x) = P_n^0(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Vemos aqui, portanto, que os polinômios de Legendre P_n identificam com as funções de Legendre P_n^0 . Podemos então colapsar as definições acima

numa única expressão:

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{(-1)^m}{2^n n!} (\sin \theta)^m \frac{d^{n+m}}{(d \cos \theta)^{n+m}} (\cos^2 \theta - 1)^n.$$

É importante salientar uma relação importante para $m \in \mathbb{Z}$ nas funções de Legendre associadas que será utilizada na parte prática do projeto:

$$P_n^{-m}(\cos \theta) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta). \quad (2.37)$$

Equação de Bessel Esférica

Mantendo a restrição anteriormente imposta de que a deve ser um número inteiro positivo, as soluções básicas para a equação de Bessel esférica (2.33) são as quatro funções de Bessel esféricas dadas por

$$\begin{aligned} \Psi_n^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x), \\ \Psi_n^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{n+\frac{1}{2}}(x), \\ \Psi_n^{(3)}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x), \\ \Psi_n^{(4)}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(x), \end{aligned}$$

onde J é a função de Bessel, N é a função de Neumann e $H^{(1)}$ e $H^{(2)}$ são as funções de Hankel de primeira e segunda espécie [14].

Por mais que digamos que estas são as soluções básicas para a equação de Bessel esférica, isto não implica que elas sejam linearmente independentes. As funções de Hankel são da forma

$$H_p^{(1)}(x) = J_p(x) + iN_p(x) = H_p^{(2)}(x)^*$$

o que implica que

$$\Psi_n^{(4)}(x) = \Psi_n^{(1)}(x) - i\Psi_n^{(2)}(x) = \Psi_n^{(3)}(x)^*.$$

A escolha de qual das funções esféricas de Bessel serão de fato solução útil ao problema físico depende intrinsecamente das condições de contornos que impomos ao problema. De forma mais específica, $x\Psi_n^{(1)}(x)$ é definida sem singularidades na origem do sistema de coordenadas e para a dependência temporal em $e^{+i\omega t}$ e apenas $x\Psi_n^{(4)}(x)$ possui valor quando $x \rightarrow \infty$.

Para a parte prática do projeto, serão de extrema importância as funções de Riccati-Bessel Ψ_n e ξ_n definidas como

$$\begin{aligned}\Psi_n(x) &= x\Psi_n^{(1)}(x), \\ \xi_n(x) &= x\Psi_n^{(4)}(x).\end{aligned}$$

2.12 Expressões Gerais para os Potenciais de Bromwich

Pelos resultados obtidos na seção anterior, vemos que qualquer combinação linear de funções da forma

$$\Phi(r, \theta, \phi) = r \begin{pmatrix} \Psi_n^{(1)}(kr) \\ \Psi_n^{(2)}(kr) \\ \Psi_n^{(3)}(kr) \\ \Psi_n^{(4)}(kr) \end{pmatrix} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

é solução da equação diferencial para os BSPs (2.32).

Entretanto, traremos algumas simplificações. Como dito anteriormente, apenas as funções $\Psi_n^{(1)}$ e $\Psi_n^{(4)}$ serão utilizadas. Ver-las-emos na forma das funções de Riccati-Bessel Ψ_n e ξ_n . Novamente, podemos simplificar as funções de Legendre associadas P_n^m e P_n^{-m} para $P_n^{|m|}$ pela relação de proporcionalidade dada em (2.37). Os termos onde $n = 0$ e $m = 0$ serão ignorados, pois não são soluções de qualquer potencial de campos não-triviais.

Assim, os potenciais escalares de Bromwich serão da forma:

$$U(r, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{nm} \frac{r}{k} \begin{pmatrix} \Psi_n(kr) \\ \xi_n(kr) \end{pmatrix} P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.38)$$

2.13 BSPs da Onda Incidente

Para a GLMT, temos três figuras principais dividindo a nossa atenção. A onda incidente - de sobrescrito i , a onda interna da partícula - sp e onda espalhada pela partícula - sobrescrita por s . A parte prática deste trabalho se concentra na descrição da onda incidente particularmente dada pelos potenciais deduzidos nesta subseção - U_{TM}^i e U_{TE}^i .

Voltamos ao problema da escolha de qual função de Riccati-Bessel tomar para ter uma solução que realmente representa as condições impostas pelo contorno. Usaremos aqui a função Ψ_n , pois é de nosso interesse ter a solução definida em $r = 0$. Também usaremos de uma renomeação dos coeficientes c_{nm} em (2.38). As expressões dos BSPs se tornam:

$$\begin{aligned} U_{TM}^i(r, \theta, \phi) &= \frac{E_0}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{pw} g_{n,TM}^m \Psi_n(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}, \\ U_{TE}^i(r, \theta, \phi) &= \frac{H_0}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{pw} g_{n,TE}^m \Psi_n(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde E_0 e H_0 são, respectivamente, amplitudes do campo elétrico e magnético. Os coeficientes c_n^{pw} são os coeficientes de onda plana que surgem na teoria de Lorenz-Mie convencional os quais são dados por

$$c_n^{pw} = \frac{1}{ik} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \quad (2.40)$$

e os coeficientes g_n^m são conhecidos como os fatores de forma da onda incidente [1]. Eles são calculados por métodos numéricos e dependem completamente da forma da onda incidente.

Existem diversos métodos para se calcular o valor dos coeficientes de forma de onda. Entretanto, não é o foco principal do trabalho em mãos um aprofundamento rigoroso nestes métodos.

2.14 Expansões das Componentes dos Campos Incidentes

Partindo do ponto em que deduzimos as expressões para os BSPs em (2.39), podemos substituir U_{TM} e U_{TE} das soluções (2.20) - (2.31), aplicando as regras de derivação cabíveis e obtemos:

$$E_{r,TM}^i = kE_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{pw} g_{n,TM}^m (\Psi_n''(kr) + \Psi_n(kr)) P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (2.41)$$

$$E_{\theta,TM}^i = \frac{E_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{pw} g_{n,TM}^m \Psi_n'(kr) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (2.42)$$

$$E_{\phi,TM}^i = i \frac{E_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n m c_n^{pw} g_{n,TM}^m \Psi_n'(kr) \pi_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (2.43)$$

$$H_{r,TM}^i = 0 \quad (2.44)$$

$$H_{\theta,TM}^i = -\frac{H_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n m c_n^{pw} g_{n,TM}^m \Psi_n(kr) \pi_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (2.45)$$

$$H_{\phi,TM}^i = -i \frac{H_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{pw} g_{n,TM}^m \Psi_n(kr) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (2.46)$$

$$E_{r,TE}^i = 0, \quad (2.47)$$

$$E_{\theta,TE}^i = \frac{E_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n m c_n^{pw} g_{n,TE}^m \Psi_n(kr) \pi_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (2.48)$$

$$E_{\phi,TE}^i = i \frac{E_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{pw} g_{n,TE}^m \Psi_n(kr) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (2.49)$$

$$H_{r,TE}^i = k H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{pw} g_{n,TE}^m (\Psi_n''(kr) + \Psi_n(kr)) P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (2.50)$$

$$H_{\theta,TE}^i = \frac{H_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{pw} g_{n,TE}^m \Psi_n'(kr) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (2.51)$$

$$H_{\phi,TE}^i = i \frac{H_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n m c_n^{pw} g_{n,TE}^m \Psi_n'(kr) \pi_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (2.52)$$

onde introduzimos as função de Legendre generalizadas:

$$\tau_n^q(\cos \theta) = \frac{d}{d\theta} P_n^q(\cos \theta), \quad (2.53)$$

$$\pi_n^q(\cos \theta) = \frac{P_n^q(\cos \theta)}{\sin \theta}. \quad (2.54)$$

Assim, temos todas as expressões necessárias para fazer os cálculos computacionais efetivos dos campos incidentes para a teoria generalizada de Lorenz-Mie.

3 Estratégias Computacionais

3.1 Desafios

Mesmo somente para as ondas incidentes na partícula que as espalham, ficam evidentes ao pesquisador que pretende projetar um algoritmo a fim representar as soluções expostas no capítulo anterior os desafios envolvidos. Primeiramente, a partir das expressões das componentes dos campos dados de (2.41) a (2.52) já se nota que os métodos a serem utilizados para representar os campos se darão a partir da aproximação de séries infinitas. Mais que isso, séries aninhadas com funções especiais recursivas em seu conteúdo.

Desta maneira, encontramos o primeiro candidato ao gargalo do problema, a natureza quadrática de complexidade advinda de um método iterativo de computação de séries aninhadas. Além disso, percebemos que as expressões dadas são referentes a apenas um ponto no espaço dado pela tripla (r, θ, ϕ) . Então, para uma análise em um plano, por exemplo, a complexidade dos cálculos também é elevada ao quadrado, dada a resolução dos gráficos a serem computados.

Portanto, é mandatório, para computação em tempo hábil, a abordagem cuidadosa não só em termos de procurar estratégias analíticas adequadas como visto no capítulo anterior, mas também de trazer abordagens estratégicas do mundo da computação.

Usaremos programas em `Python` para ilustrar resultados e análises de convergência dos métodos utilizados nas seções mais adiante deste capítulo. A partir de pesquisas já consagradas na GLMT apresentaremos algumas estratégias utilizadas para conseguir otimizar os algoritmos já existentes.

No início do trabalho, falamos sobre o projeto do nosso grupo de pesquisa, o qual carece de otimizações significativas por se utilizar de linguagens de alto nível que trazem uma intensidade de abstração elevada como se vê em

software tais como **Wolfram Mathematica**. A escolha da linguagem **Python** se deve à sua ampla difusão nas mais diversas áreas da ciência, pois ela permite tanto uma programação de alto nível de abstração quanto passagens de baixo nível altamente otimizadas.

Vale salientar que este é um primeiro esforço em direção a uma ferramenta de *software* de interface acessível a ser disponibilizado gratuitamente. O cálculo dos campos é o pontapé inicial em direção aos cálculos de propriedades mais elaboradas as quais decorrem deles como seções eficazes e de choque, séries de Debye, partículas multicamadas, índices de refração arbitrários, entre outras.

3.2 Considerações

Como já dito, neste trabalho, apresentaremos apenas as magnitudes dos campos incidentes descritos pela GLMT. As próprias séries aninhadas da seção 2.14 já apresentam grande grau de complexidade computacional, entretanto, não nos aprofundamos nos cálculos dos coeficientes de forma de onda dados para a generalização do método.

Desde integrais de convolução a partir da ortogonalidade das funções harmônicas, de Legendre e de Riccati-Bessel até métodos numéricos de resolução de equações diferenciais, os coeficientes - $g_{n,TM}^m$ e $g_{n,TE}^m$ - podem ser calculados a partir de diversos métodos. Entretanto, não será foco deste trabalho o cálculo exato destas integrais ou de outros artifícios. Consideraremos dados os coeficientes de forma de onda.

Para os testes a serem feitos nas próximas seções, traremos feixes de Bessel [15] – [21] e *frozen waves* [22] – [27] cujos coeficientes de forma de onda já são conhecidos e poderão, por exemplo, ser armazenados em memória previamente para a computação concentrada apenas nas ondas eletromagnéticas associadas. Este tipo de estratégia de utilizar o *trade-off* de tempo *versus* espaço - aumentar custo de memória para diminuir o custo em tempo com-

putacional - será chave para conseguir um algoritmo equilibrado e útil para os pesquisadores interessados na GLMT.

3.3 Algoritmos

Esta subseção é uma rápida e simples exposição ao leitor que não se familiariza com as nuances da computação de como a estrutura de um algoritmo afeta diretamente em seu desempenho e sobre como se pode reestruturá-lo de forma a melhorar seu custo computacional [28].

Algoritmos de cálculo de convergência de séries são tipicamente estruturados como algoritmos iterativos, isto é, explicitamente construídos a partir de laços nos programas que os implementam. Traz-se como exemplo a implementação de uma função que traz o n -ésimo número de Fibonacci - a_n - dado pela função recursiva:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ a_{n-1} + a_{n-2}, & n > 1 \end{cases},$$
$$n \in \mathbb{Z}, n \geq 0.$$

Uma implementação imediata e, talvez ingênua, em **Python** seria a tradução direta para uma função recursiva como mostrado abaixo cuja recursão é caracterizada pela autorreferência envolvida:

```
def fib(n):  
    if n == 0 or n == 1:  
        return 1  
  
    return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```

Entretanto, esta implementação peca no desempenho. Por exemplo, para o cálculo de números de Fibonacci a_n com n maior que 50, o tempo computacional envolvido é proibitivo. Para fins de contraste, abaixo segue uma implementação iterativa do algoritmo recursivo visto acima.

```

def it_fib(n):
    sum = 1;
    last_sum = 1
    for i in range(1, n):
        aux = sum
        sum += last_sum
        last_sum = aux
    return sum

```

Como pode ser visto adiante, na figura 1a; o tempo de execução da função recursiva planejada de forma imediata possui um aspecto exponencial em n , pois quando se faz o cálculo de qualquer um dos a_n , são chamados sempre mais dois cálculos de dois a_n que irão chamar outros dois *ad infinitum*. Entretanto, a execução recursiva se beneficia muito de uma adição simples de uma *cache*, que salva resultados já buscados como implementado abaixo. Esta técnica é formalmente chamada de *memoization*, em inglês [29].

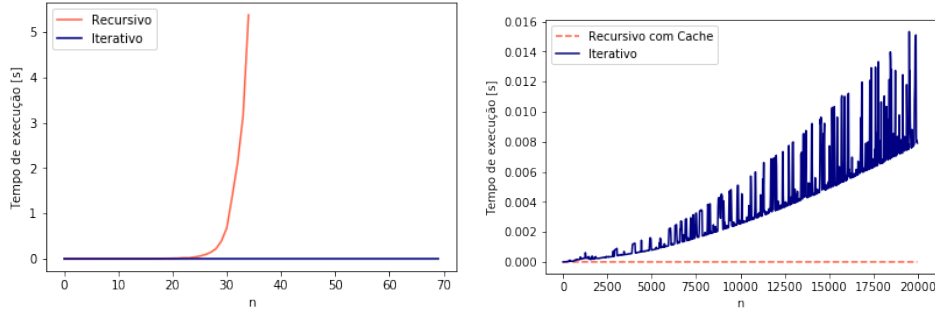
```

CACHE = {}
def cached_fib(n):
    if n==0 or n==1:
        return 1

    if n in CACHE:
        return CACHE[n]
    else:
        retval = cached_fib(n - 1) + cached_fib(n - 2)
        CACHE[n] = retval
        return retval

```

A análise do tempo de execução é feita na figura 1b e pode ser notado que os tempos de execução são parecidos até para valores de n muito elevados.



(a) Iterativo e recursivo sem *cache* (b) Iterativo e recursivo com *cache*

Figura 1: Tempo computacional dos algoritmos de Fibonacci iterativo e recursivo - com e sem *cache*

Fica clara então a importância de uma análise mais aprofundada do problema antes de tentar desenvolver diretamente um algoritmo e também se percebe como pequenas mudanças na estrutura de um código pode gerar benefícios consideráveis ao seu desempenho. O objetivo deste trabalho é traçar um caminho para as possíveis direções de otimização usando ferramentas modernas dos principais métodos que a GLMT necessita para ser modelada com base nos campos eletromagnéticos.

3.4 Convergência

Dado um método iterativo que depende de convergência de séries, precisamos de um critério de parada. Se um método produz uma sequência de resultados $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e seja $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ a solução exata para o algoritmo iterativo, é possível que nunca se chegue exatamente neste resultado. Para algoritmos lineares, normalmente, com base nas matrizes de transformação, é trivial escolher um erro mínimo tolerável para que o método pare de ser executado e retorne um resultado, assim limitando o número de iterações [30].

Entretanto, o uso de métodos lineares não é o caso deste trabalho. Assim, é necessário que haja um cuidado maior no truncamento do método. Segundo Wiscombe (1980, p. 1508) [31], uma boa aproximação para o número ideal de iterações - N - para que haja um erro relativamente pequeno em relação

ao valor de x^* é dado pela expressão

$$N = \begin{cases} kr + 4(kr)^{\frac{1}{3}} + 1 & \text{se } 0,02 \mu m < r < 8 \mu m, \\ kr + 4,05(kr)^{\frac{1}{3}} + 2 & \text{se } 8 \mu m < r < 4200 \mu m, \\ kr + 4(kr)^{\frac{1}{3}} + 2 & \text{se } r > 4200 \mu m \end{cases} \quad (3.1)$$

Para os cálculos dos campos, as séries serão calculadas portanto até seu N -ésimo termo e nada mais seguindo os cálculos das expressões em (3.1). Mais à frente, faremos uma análise de como a implementação dos algoritmos se comporta de acordo com este truncamento.

4 Implementação

O código-fonte do projeto se encontra aberto no repositório da plataforma GitHub acessível pelo link github.com/LVotto/glmtscatt [32].

4.1 Organização do Código

Implementado em Python, são utilizadas bibliotecas padrão para pesquisas científicas como `scipy` e `matplotlib`. O programa será dividido em módulos específicos para cada parte do código. O módulo `field.py` descreve as classes de campos em coordenadas cartesianas e esféricas trazendo uma abordagem mais orientada a objetos, enquanto que o módulo `specials.py` declara as funções especiais usadas aqui tais como as funções de Riccati-Bessel e as funções de Legendre associadas e as funções delas derivadas. Enquanto isso, o módulo `glmt.py` usa estas dependências para calcular as componentes dos campos como em 2.14.

Note que os campos são primeiramente calculados em coordenadas esféricas, mas os transcrevemos para coordenadas cartesianas. A figura 2 apresenta um fluxograma ilustrativo do processo do algoritmo. Primeiramente, se calculam as componentes esféricas do campo TM e TE, os dois campos são somados obtendo-se o campo total em coordenadas esféricas dado um conjunto de fatores de forma g_n^m para os dois modos transversais.

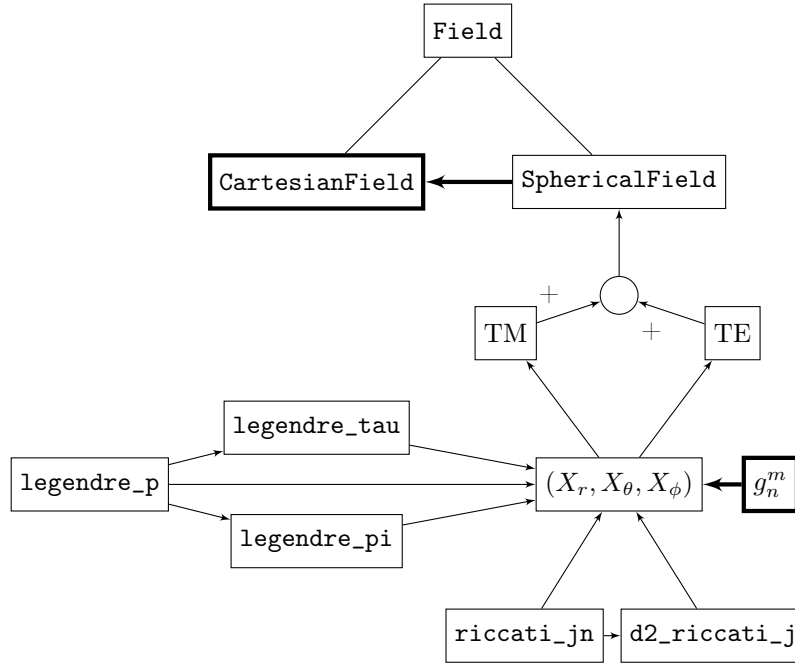


Figura 2: Fluxograma representativo da estrutura do programa no processo de obter um objeto da classe `CartesianField` que ilustra um campo elétrico ou magnético segundo a GLMT.

4.2 Classes de Campos Vetoriais

O módulo `field.py` implementa as classes de campos tridimensionais em Python como objetos de classes filhas da classe `Field` - implementada como abstrata. Até a conclusão deste projeto, estão implementadas as classes `CartesianField` e `SphericalField`, as quais representam, respectivamente, campos vetoriais em coordenadas cartesianas e esféricas.

A princípio, está implementada uma sobrecarga no operador de soma nas classes `Field` e também um construtor que pode receber, em `CartesianField`, um objeto `SphericalField` para convertê-lo de coordenadas esféricas para cartesianas.

Os campos possuem uma lista no formato `dict` nativo de Python, o qual

se trata apenas de uma tabela de associação chave-valor com o nome de `functions`, a qual armazena as funções `Python` que definem como cada componente é calculada em função das coordenadas. A classe `Field` a inicializa como vazia, mas as classes `SphericalField` e `CartesianField` devem ser inicializadas com as funções das componentes declaradas no objeto `function`.

A conversão se baseia nas identidades:

$$\begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \arctan \frac{y}{x} \end{bmatrix},$$

e, se $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{z}{r} \\ \frac{xz}{r\rho} & \frac{yz}{r\rho} & -\frac{\rho}{r} \\ -\frac{y}{\rho} & \frac{x}{\rho} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix}.$$

Logo, podemos escrever o campo em coordenadas esféricas

$$\mathbf{F}(r, \theta, \phi) = F_r(r, \theta, \phi)\hat{\mathbf{r}} + F_\theta(r, \theta, \phi)\hat{\theta} + F_\phi(r, \theta, \phi)\hat{\phi}$$

na forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\hat{\mathbf{x}} + F_y(x, y, z)\hat{\mathbf{y}} + F_z(x, y, z)\hat{\mathbf{z}}$$

em coordenadas cartesianas.

Os campos recebem três funções - ou métodos - para suas componentes e assim ficam definidos, tendo métodos para avaliação de seus valores vetoriais em cada ponto do espaço e também para o valor absoluto, baseado na função `norm` do pacote `numpy.linalg` a qual calcula a norma de matrizes, no caso, vetores. Aqui, ela está programada para o cálculo da norma- L_2 .

4.3 Funções Especiais

A teoria generalizada de Lorenz-Mie para espalhamento de ondas eletromagnéticas envolve o uso de funções especiais recursivas. Algumas já possuem implementação já feita pelo módulo `special` do pacote `scipy`, outras precisarão de breves construções cuja elaboração se reserva a ser descrita nesta seção.

Funções de Riccati-Bessel

O pacote `scipy` traz a implementação das funções de Riccati-Bessel nos métodos `special.riccati_jn` para a primeira espécie, Ψ_n , e `special.riccati_yn` para a segunda espécie, ξ_n . Apenas usaremos da implementação da função Ψ_n , pois apenas nos atentamos à simulação da onda incidente.

O método `special.riccati_jn` recebe uma ordem n a ser computada e um argumento x no qual a função será avaliada retornando uma matriz com valores da função de Riccati-Bessel de primeira espécie para ordem zero até a ordem n escolhida no argumento x na primeira linha, e os valores correspondentes à primeira derivada desta função na segunda linha da matriz.

$$\text{riccati_jn}(n, x) = \begin{bmatrix} \Psi_0(x) & \Psi_1(x) & \dots & \Psi_n(x) \\ \Psi'_0(x) & \Psi'_1(x) & \dots & \Psi'_n(x) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Entretanto, para os cálculos das componentes radiais do campo elétrico no modo TM (2.41) e do campo magnético no modo TE (2.50), precisamos da segunda derivada da função de Riccati-Bessel de primeira espécie Ψ''_n . Para isto, no módulo `special.py`, implementa-se a função `d2_riccati_bessel_j` que se baseia na seguinte relação:

$$\text{d2_riccati_bessel_j}(n, x) = \Psi''_n(x) = \frac{n(n+1) - x^2}{x} \Psi_n(x)$$

Funções de Legendre

Novamente, no módulo `special` do pacote `scipy`, encontramos as funções de Legendre associadas de ordem inteira m e de grau real v no método `special.lpmv`. Assim,

$$\text{lpmv}(m, v, x) = P_v^m(x)$$

como visto em (2.36).

Entretanto, ainda precisamos implementar as funções de Legendre generalizadas τ_n^m e π_n^m . Temos que,

$$\begin{aligned}\tau_n^m(\cos \theta) &= \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \\ &= -\sin \theta (P_n^m)'(\cos \theta).\end{aligned}$$

A partir da relação

$$(P_n^m)'(x) = \frac{(n+m)P_{n-1}^m(x) - nxP_n^m(x)}{1-x^2}$$

fica evidente que

$$\tau_n^m(x) = \frac{nxP_n^m(x) - (n+m)P_{n-1}^m(x)}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (4.2)$$

Para as funções π_n^m , partindo da expressão exposta em (2.54) é fácil ver que

$$\pi_n^m(x) = \frac{P_n^m(x)}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (4.3)$$

No módulo `special.py` do código Python implementamos as funções `legendre_tau` baseada em τ_n^m como em (4.2) e a função `legendre_pi` baseada em π_n^m como em (4.3).

4.4 Componentes de Campos segundo a GLMT

As componentes dos campos como vistas de (2.41) a (2.52) são dadas por expressões da forma

$$F_{j,X}(r, \theta, \phi) = C(k, r) \sum_{n=1}^{N_{max}} \sum_{m=-n}^n c_{n,m}^{pw} g_{n,X}^m R(kr) \Theta(\theta) e^{im\phi}, \quad (4.4)$$

onde $F \in \{E, H\}$ $j \in \{r, \theta, \phi\}$ e $X \in \{TM, TE\}$. As funções R podem ser quaisquer das variações das funções de Riccati-Bessel como já visto e as funções Θ podem ser quaisquer funções de Legendre associadas ou generalizadas. Para ilustrar um excerto geral de código, consideremos a componente radial do campo elétrico incidente, $E_{r,TM}^i(r, \theta, \phi)$, que será ilustrado pelo método `radial_electric_i_tm` abaixo seguindo as diretrizes da expressão (2.41).

```
def radial_electric_i_tm(radial, theta, phi, wave_number_k):
    """ Computes the radial component of inciding electric field in TM mode.
    """
    result = 0
    n = 1

    riccati_bessel_list = special.riccati_jn(MAX_IT,
                                              wave_number_k * radial)
    riccati_bessel = riccati_bessel_list[0]

    while n < MAX_IT:
        for m in [-1, 1]:
            increment = plane_wave_coefficient(n, wave_number_k) \
                * beam_shape_g(n, m, mode='TM') \
                * (d2_riccati_bessel_j(n, wave_number_k * radial) \
                    + riccati_bessel[n]) \
                * legendre_p(n, abs(m), np.cos(theta)) \
                * np.exp(1j * m * phi)
            result += increment
        n += 1

    return wave_number_k * result
```

Perceba que, pela eficiência do método do módulo `scipy.special`, se faz a computação dos valores da função de Riccati-Bessel de primeira espécie para todas as ordens, de 0 até N_{max} - mostrado no código como `MAX_IT` -

antes de entrar no laço duplo da maneira que foi mostrada em (4.1). Toma-se apenas a primeira linha da matriz, descartando-se as derivadas, as quais não serão necessárias no cálculo efetivo da componente radial.

A constante `MAX_IT` é calculada de maneira estática dado o valor máximo de r usando a expressão exibida em (3.1). Mais precisamente, a implementação considera apenas o caso intermediário, onde $8 \mu m < r < 4200 \mu m$.

Perceba também a presença do cálculo do coeficiente de onda plana c_n^{pw} representado pelo método `plane_wave_coefficient` calculado como ilustrado em (2.40). Como consideramos dados os coeficientes de forma de onda, o método `beam_shape_g` toma os valores de $g_{n,X}^m$ já dados anteriormente. Basta inserir os cálculos dos coeficientes neste método.

Para fins de normalização da energia dos sinais derivados pelas ondas definidas, consideramos as amplitudes dos campos tais que $|E_0| = |H_0| = 1$.

As outras componentes em seus respectivos modos são calculadas de maneira análoga, seguindo todas as similaridades apontadas pela expressão (4.4), e podem ser observadas no código-fonte.

5 Resultados

Não estão envolvidas no escopo deste trabalho as nuances dos cálculos dos coeficientes de forma de onda - $g_{n,TM}^m$ e $g_{n,TE}^m$ -, portanto, para conseguir resultados, utilizaremos coeficientes de forma já dados previamente. Mais precisamente, foram testados coeficientes provenientes de feixes de Bessel e de *frozen waves* provenientes de trabalhos mais recentes [33, 34].

5.1 Feixes de Bessel

Os feixes de Bessel são consagrados na literatura por se tratarem de feixes não-difrativos e possuem uma natureza de auto-reconstrução [15] – [21]. Descritos matematicamente e numericamente na década de 1980, eles são até hoje utilizados nas áreas de engenharia, física e medicina. Por se tratarem de feixes de cálculos relativamente simples de coeficientes de forma de onda e pela sua importância nas mais diversas áreas da ciência, eles foram escolhidos para serem analisados pelos algoritmos aqui criados. Os feixes de Bessel ordinários - de ordem 0 - são descritos pela seguinte solução da equação de onda em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) :

$$\Psi(\rho, z) = J_0(k_\rho \rho) e^{-ik_z z}$$

onde J_0 é a função de Bessel de ordem 0, k_ρ é o número de onda transversal e k_z o número de onda longitudinal, relacionados através do ângulo de eixo com α na forma $k_\rho = k \sin \alpha$ e $k_z = k \cos \alpha$, onde k é o número de onda de fato.

Seus coeficientes de forma de onda, segundo o método integral da aproximação localizada - ILA (*integral localized approximation*) daqui em diante

- são descritos a partir das expressões

$$g_n^{loc} = J_0 \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \sin \alpha \right), \quad (5.1)$$

$$g_{n,TM}^{-1} = g_{n,TM}^1 = \frac{1}{2} g_n^{loc}, \quad (5.2)$$

$$g_{n,TE}^{-1} = -g_{n,TE}^1 = i \frac{1}{2} g_n^{loc}, \quad (5.3)$$

$$g_{n,TM}^m = g_{n,TE}^m = 0, \quad \forall m \neq \pm 1, \quad (5.4)$$

onde α é o ângulo de áxicon associado ao feixe [18,20,35]. Assim, a magnitude tanto do campo elétrico quanto do campo magnético deve seguir o padrão da magnitude da função de Bessel em qualquer ramo ortogonal ao eixo- z . É importante salientar que os fatores de forma aqui dados apenas são válidos no que chamamos de regime paraxial. Isto é, para ângulos de áxicon muito pequenos, tal que a onda predominantemente se propaga na direção do eixo- z : $k_z \approx k$, $k_\rho \approx 0$ [33].

Incorporando as expressões (5.1) a (5.4) na função `beam_shape_g` do código-fonte como descrito na seção 4.4, os resultados obtidos para a magnitude do campo elétrico nos eixos cartesianos contra a distância até a origem são observados na figura 3. Para estes resultados, foi escolhido um ângulo de áxicon $\alpha = 1^\circ$. Como esperado, os valores de magnitude dos campos no eixo- x e no eixo- y são idênticos e seguem o padrão do valor absoluto da função de Bessel de ordem 0.

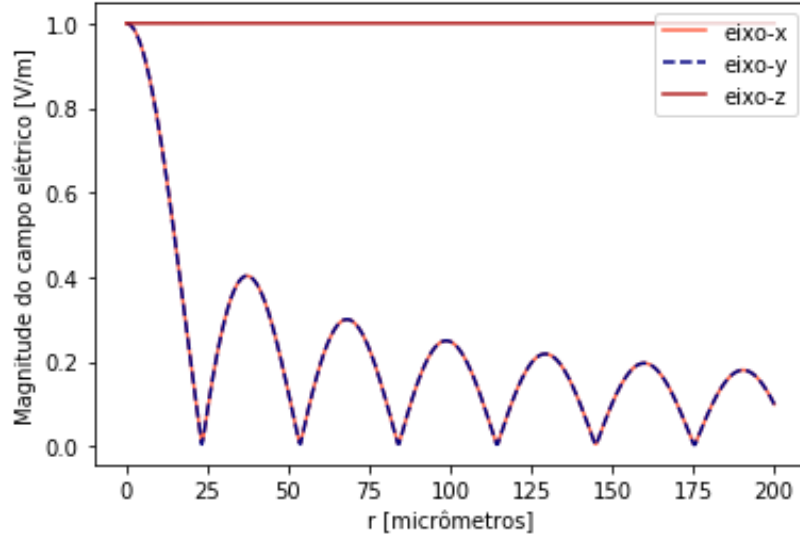


Figura 3: Valor absoluto do campo elétrico nos eixos cartesianos em função da distância até a origem do sistema de coordenadas.

Inspecionando as componentes do campo elétrico separadamente, pode-se observar seu módulo ao quadrado ao longo do eixo- x para cada componente se dá como na figura 4a, onde se percebe uma predominância da componente x sobre as outras. Enquanto a componente y sempre permanece nula, a componente z ainda obedece um perfil parecido à função de Bessel de ordem 1, mas com a magnitude consideravelmente atenuada em relação à componente x .

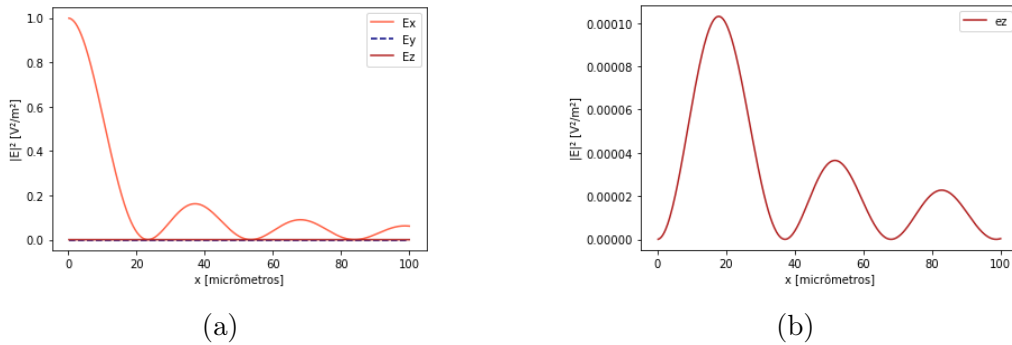


Figura 4: Valor absoluto ao quadrado das componentes do campo elétrico ao longo do eixo- x . (a) Nas componentes x , y e z . (b) Detalhe apenas na componente z .

O comportamento da componente em z é verificado, pois as ondas definidas a partir da GLMT devem, necessariamente, ser solução das equações de Maxwell. Assim, se $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, as linhas de campo devem ser curvas fechadas, o que não se verifica se $\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{x}}$.

Bouchal (1995) [36] mostra que, para o feixe de Bessel de ordem 0, a componente em z do campo elétrico é dada pela expressão

$$E_z = -i \frac{1}{2} \frac{k_\rho}{k_z} \left(e^{-i\phi} J_{-1}(k_\rho \rho) - e^{i\phi} J_1(k_\rho \rho) \right).$$

Como $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, observa-se que

$$J_{-1}(k_\rho \rho) = -J_1(k_\rho \rho).$$

Portanto

$$\begin{aligned} E_z &= i \frac{k_\rho}{k_z} J_1(k_\rho \rho) \left(\frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \right) \\ &= i \left(\frac{k_\rho}{k_z} \right) J_1(k_\rho \rho) \cos \phi. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Desta forma, o valor máximo que E_z pode tomar é

$$|E_z|_{max}^2 = \left| \frac{k_\rho}{k_z} \right|^2 |J_1(x)|_{max}^2,$$

onde

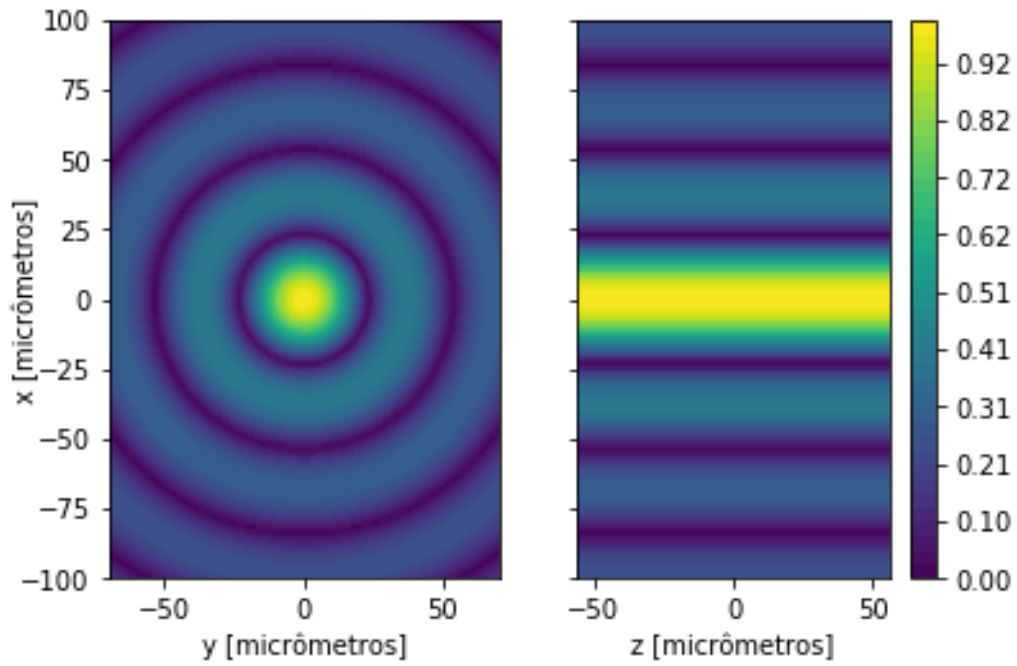
$$\frac{k_\rho}{k_z} = \tan \alpha = \tan 1^\circ,$$

então

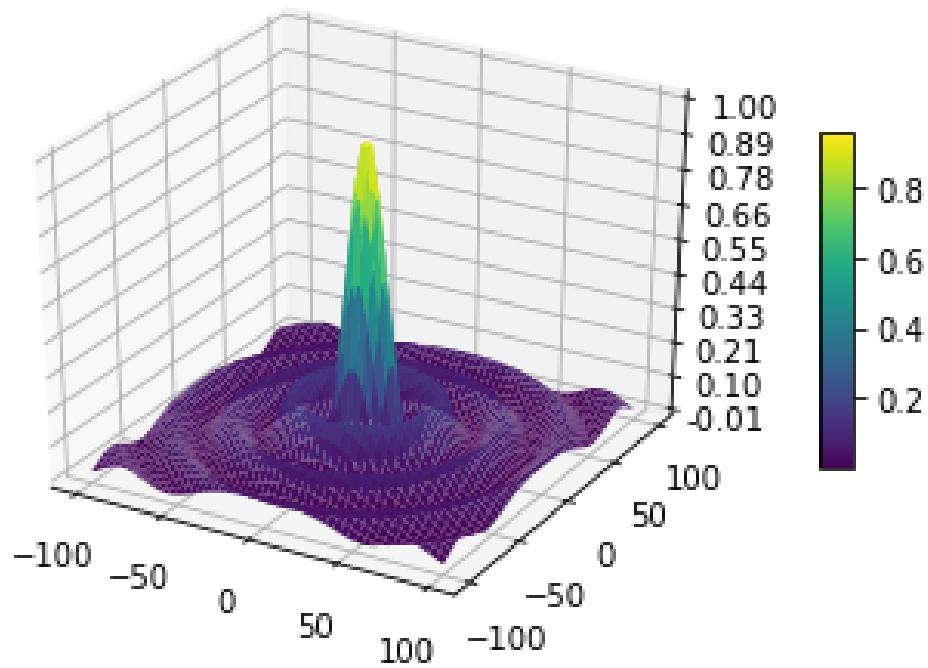
$$|E_z|_{max}^2 = \tan^2 1^\circ |J_1(x)|_{max}^2 \approx 0,0001,$$

justificando então o comportamento do gráfico na figura 4b.

A figura 5b ilustra a magnitude do campo elétrico tal como tomada em cortes no plano- xy - à esquerda da figura 5a e na figura 5b - e no plano- xz - à esquerda da figura 5a. A afirmação anteriormente feita sobre a simetria radial dos cortes de magnitudes feixes de Bessel ortogonais ao eixo- z se confirma na figura 5 e, acompanhando o eixo- z , vemos o caminho do feixe de fato.



(a) Magnitude do campo elétrico do feixe de Bessel no plano- xy e no plano- xz .



(b) $|E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$ no plano- xy .

Figura 5: Valor absoluto do campo elétrico. Eixos em μm no sistema de coordenadas cartesiano.

A partir das equações referentes ao campo magnético na seção 2.14, conseguimos traçar o perfil deste mesmo campo. A figura 6 mostra as componentes do campo magnético em separado, uma vez que sua magnitude total segue similar ao campo elétrico, já que consideramos $E_0 = H_0 = 1$. Desta vez, observamos o perfil majoritário seguir na direção do eixo- y enquanto ainda há um resíduo parecido ao visto na figura 4b na direção z . Na desnormalização de E_0 e H_0 , surgiria um fato multiplicativo inversamente proporcional à impedância intrínseca do meio em questão.

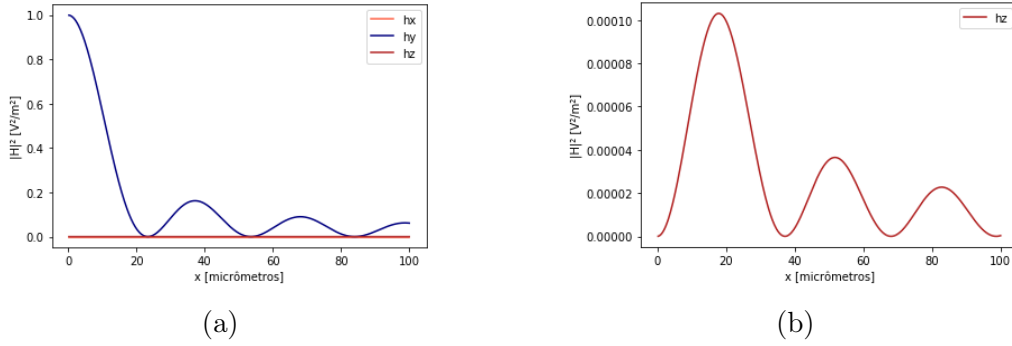


Figura 6: Valor absoluto ao quadrado das componentes do campo magnético ao longo do eixo- x . (a) Nas componentes x , y e z . (b) Detalhe apenas na componente z .

Para ter uma visão mais completa das componentes do campo elétrico, a figura 7, abaixo, demonstra o valor absoluto ao quadrado das componentes x e z do campo elétrico no plano- xy . Notamos o comportamento dependente de $\cos \phi$, deduzido em (5.5), representado na figura 7b.

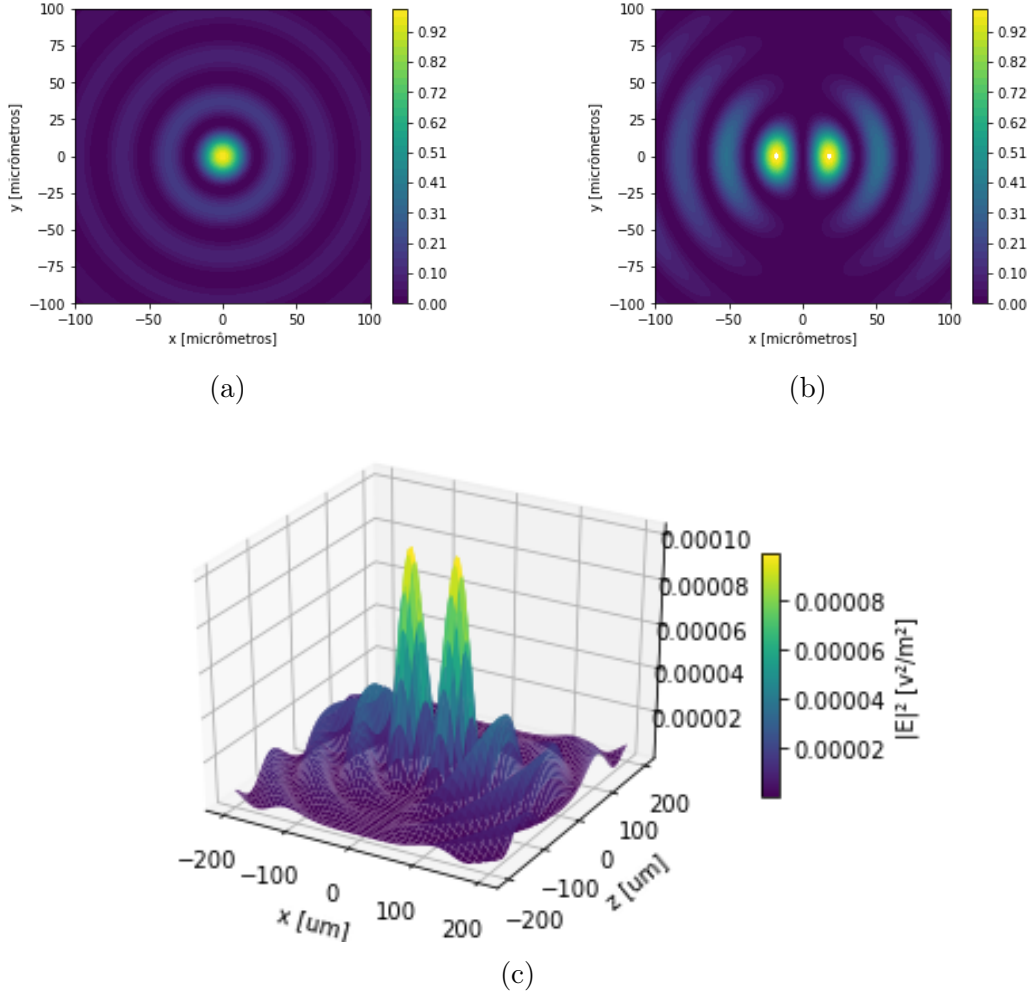


Figura 7: Valor absoluto ao quadrado das componentes do campo elétrico pelo plano- xy . (a) Componente E_x . (b) Componente E_z com escala normalizada. (c) Visão tridimensional de (b) sem normalização.

Assim, vemos que se pode chegar a uma visão razoavelmente detalhada de um feixe tal como o de Bessel utilizando-se da ferramenta em mãos.

5.2 *Frozen Waves*

Aproveitando-se das vantagens que os feixes de Bessel, como comentado na seção 5.1, recentemente foram incorporadas na GLMT sobreposições de feixes de Bessel conhecidas como *frozen waves*. Pela ortogonalidade das funções

de Bessel, elas podem tomar praticamente qualquer perfil longitudinal desejado - inclusive em meios com perdas [22–27]. Mostraremos aqui como são definidos estes feixes e seus fatores de forma.

Assumindo que queiramos uma onda com perfil arbitrário de intensidade no eixo- z , em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) , queremos a seguinte solução para a equação de onda escalar:

$$\Psi(\rho, z) = \sum_{q=-N}^N A_q J_0(k_{\rho q} \rho) e^{-ik_{zq} z} \quad (5.6)$$

onde os números complexos $k_{\rho q}$ são os números de onda transversais e k_{zq} os longitudinais do q -ésimo feixe de Bessel sobreposto com amplitude complexa A_q . A escolha das constantes A_q dependem fortemente do perfil longitudinal desejado $|E(z)|^2 = |\Psi(z)|^2$ [22–24, 34].

Seguindo esta direção, deduz-se que os fatores de forma devem ser:

$$g_{n,TM}^0 = i \frac{2n(n+1)}{2n+1} \sum_{q=-N}^N A_q J_1(\varpi_q) J_1(\xi_q) \cos \phi_0 e^{ik_{zq} z_0}, \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} g_{n,TM}^{m \neq 0} &= \frac{1}{2} \left(\frac{-2i}{2n+1} \right)^{|m|-1} \\ &\times \sum_{q=-N}^N A_q (J_{|m|-1}(\varpi_q) J_{|m|-1}(\xi_q) e^{-i(|m|-1)\phi_0} \\ &+ J_{|m|+1}(\varpi_q) J_{|m|+1}(\xi_q) e^{-i(|m|+1)\phi_0}) e^{ik_{zq} z_0}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$g_{n,TE}^0 = i \frac{2n(n+1)}{2n+1} \sum_{q=-N}^N A_q J_1(\varpi_q) J_1(\xi_q) \sin \phi_0 e^{ik_{zq} z_0}, \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} g_{n,TE}^{m \neq 0} &= i \frac{m}{|m|} \frac{1}{2} \left(\frac{-2i}{2n+1} \right)^{|m|-1} \\ &\times \sum_{q=-N}^N A_q (J_{|m|-1}(\varpi_q) J_{|m|-1}(\xi_q) e^{-i(|m|-1)\phi_0} \\ &+ J_{|m|+1}(\varpi_q) J_{|m|+1}(\xi_q) e^{-i(|m|+1)\phi_0}) e^{ik_{zq} z_0}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

onde,

$$\varpi_q = \left(n + \frac{1}{2}\right) \sin \theta_{aq}, \quad (5.11)$$

$$\xi_q = \rho_0 k \sin \theta_{aq}, \quad (5.12)$$

tal que θ_{aq} é o ângulo de áxicon do q -ésimo feixe de Bessel da sobreposição [34].

Para fins de simplicidade das simulações, escolhemos $\xi_q = \rho_0 = \phi_0 = z_0 = 0$, ou seja, trata-se de um feixe paraxial cujo eixo óptico coincide com o eixo- z . Desta maneira, os fatores de forma para $m \neq \pm 1$ se tornam nulos e as expressões de (5.7) a (5.10) se simplificam como mostrado abaixo:

$$g_{n,TM}^{m=\pm 1} = \frac{1}{2} \sum_{q=-N}^N A_q J_0(\varpi_q),$$

$$g_{n,TE}^{m=\pm 1} = -m \frac{i}{2} \sum_{q=-N}^N A_q J_0(\varpi_q).$$

Com $N = 15$, escolhemos, para nossas simulações os fatores de formas disponíveis para reproduzir a figura 2 da referência [34]. Os coeficientes de cada termo da sobreposição são como é mostrado no arquivo `glmt/frozenwave.py` e no apêndice B.

Assim, traçando o perfil da onda de campo elétrico ao longo dos eixos cartesianos, obtemos os resultados da figura 8.

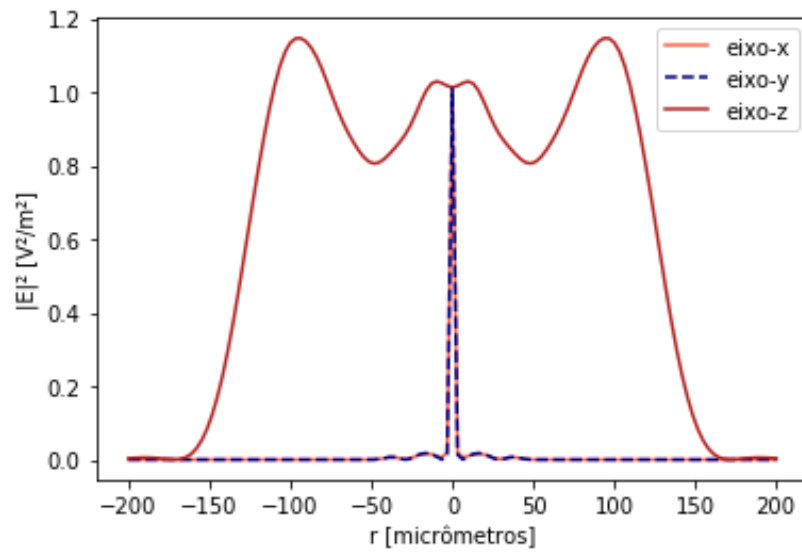


Figura 8: Valor absoluto ao quadrado do campo elétrico nos eixos cartesianos em função da distância até a origem do sistema de coordenadas.

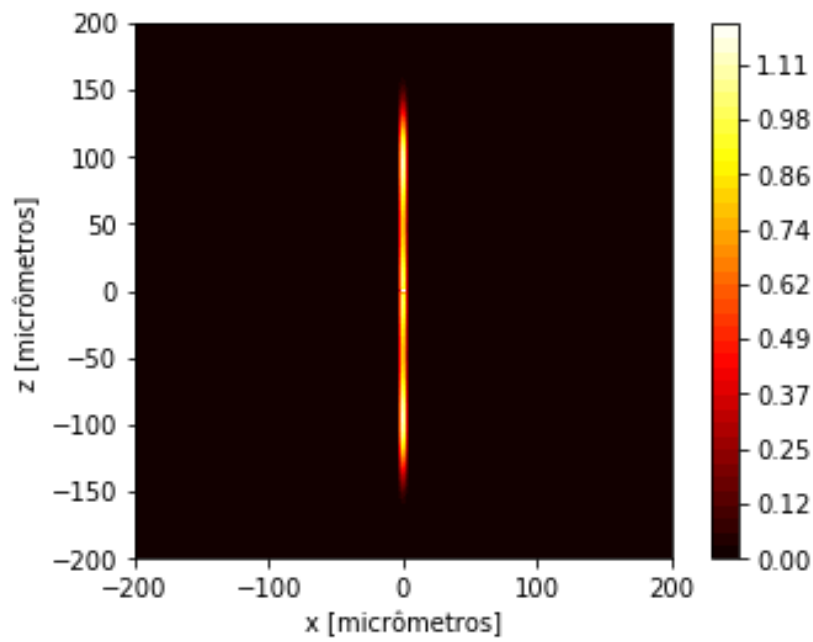


Figura 9: Valor absoluto ao quadrado do campo elétrico no plano- xz . Escala normalizada.

Novamente, conseguimos notar uma sobreposição dos valores do eixo- x

com o eixo- y . Ainda por cima, o perfil encontrado ao longo de eixo- z é similar ao encontrado no trabalho de Ambrosio (2017) [34], de onde foram retirados os fatores de forma, g_n^m , para cada um dos modos transversais.

Até agora, foram utilizadas expressões como as vistas de (5.7) a (5.10) e as implementamos de maneira literal tal que os valores dos fatores de forma, $g_{n,TM}^m$ e $g_{n,TE}^m$, são calculados em tempo de execução. Ainda por cima, partindo da premissa de que os valores dos fatores de forma são, de fato, conhecidos, a aplicação também prevê como entrada uma matriz de fatores de forma no formato `.mtx` já calculados *a priori* por qualquer rotina separada do domínio do projeto.

A seguir, representamos, por meio do programa `Python` elaborado, duas composições de *frozen waves* no regime paraxial cujos fatores de forma foram calculados em separado por um programa de `Wolfram Mathematica`. Num primeiro momento, uma composição de três *frozen waves* de ordem 0 e, em seguida, uma composição de três *frozen waves* de ordem superior.

A figura 10 mostra o valor absoluto ao quadrado do campo elétrico referente à primeira FW cujos fatores de forma foram importados por um arquivo no formato `.mtx` externo à aplicação. Este é o caso da composição de três FWs de ordem 0. Vale notar que os valores recebidos ainda foram tais que

$$g_{n,TM}^m = g_{n,TE}^m = 0, \forall m \neq \pm 1,$$

pois todos os feixes envolvidos na composição são de ordem 0. Para o caso do segundo conjunto de fatores de forma recebidos isto não é verdade.

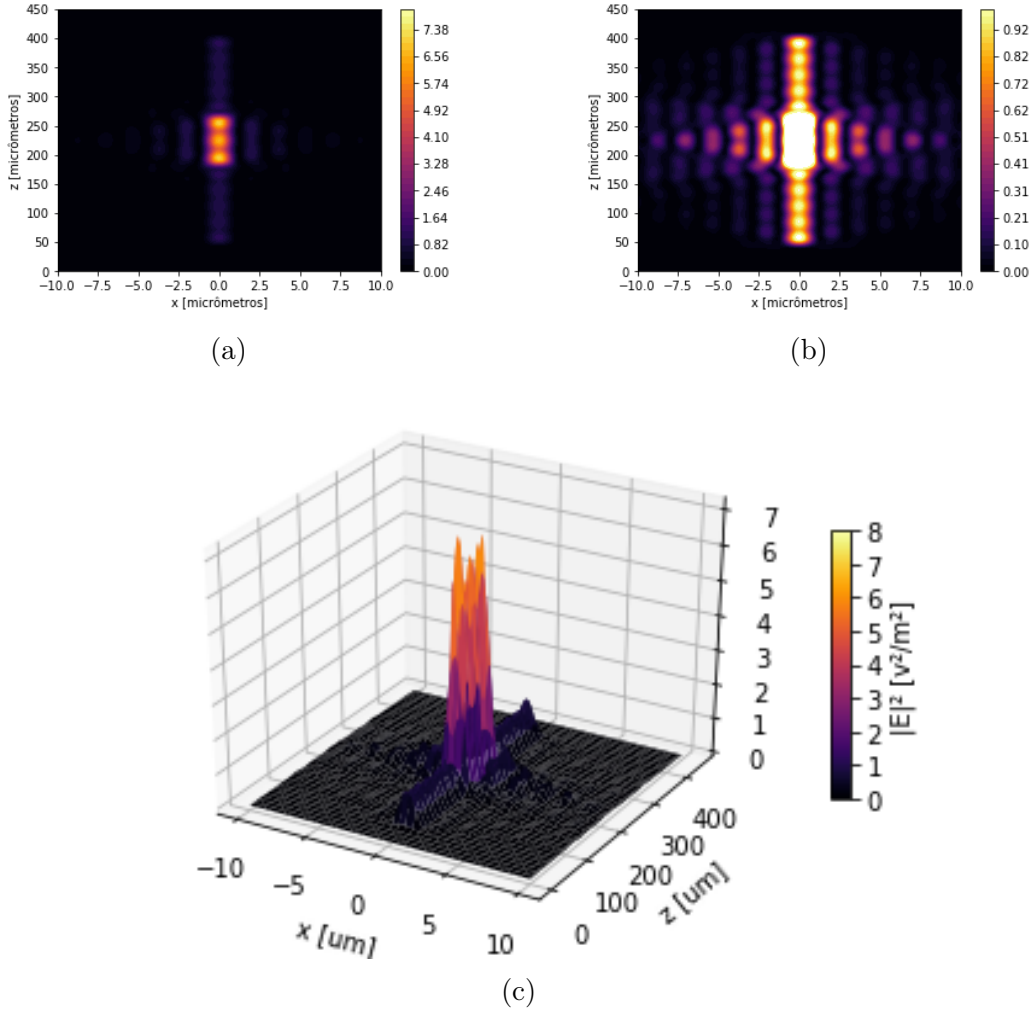
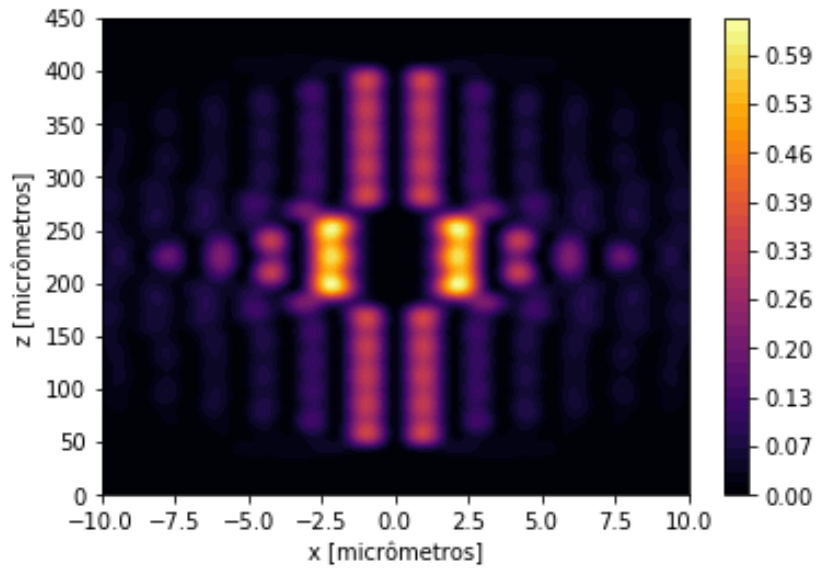


Figura 10: Valor absoluto ao quadrado do campo elétrico de uma composição de três FWs de ordem 0. (a) Visão 2D no plano- xz representando a escala completa da onda. (b) Visão 2D no plano- xz representado a uma escala reduzida da onda, isto é, os valores de 0 até 1 são dados como na barra de cores à direita e os valores superiores a 1 são representados na cor branca. (c) Visão tridimensional da onda no plano- xz .

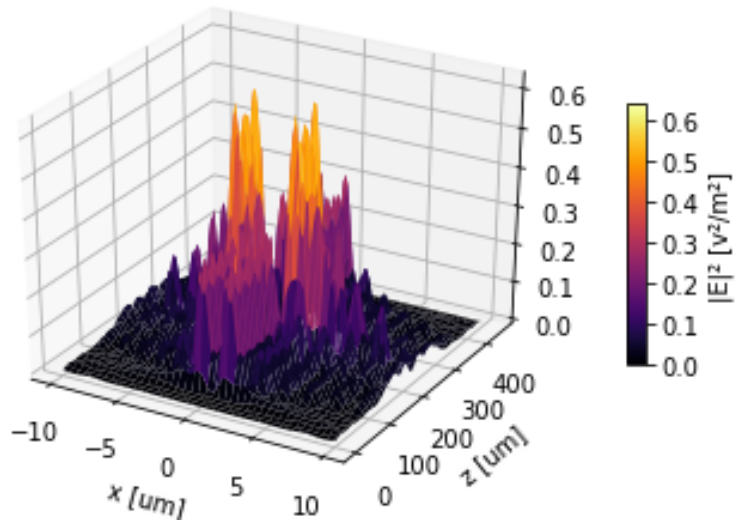
A composição de feixes de *frozen waves* de ordem superior vista na figura 11 nos traz feixes até de quarta ordem. Devido a este fato, os fatores de forma recebidos são tais que

$$g_{n,TM}^m = g_{n,TE}^m = 0, \quad \forall m \notin [-4, 4],$$

mesmo que a composição ainda siga o regime paraxial - onde o eixo óptico coincide com o eixo- z do sistema de coordenadas.



(a)



(b)

Figura 11: Valor absoluto ao quadrado do campo elétrico de uma composição de três FWs de ordem até 4. (a) Visão 2D no plano- xz representando a escala completa da onda. (b) Visão tridimensional da onda no plano- xz .

6 Conclusões

Passando pela porção da Teoria Generalizada de Lorenz-Mie que se trata de ondas incidentes a serem espalhadas, tomamos as expansões para os campos eletromagnéticos que resolvem as equações de Maxwell e as reproduzimos em um código `Python`. A complexidade computacional das tarefas envolvidas na computação dos perfis destas ondas, principalmente em cálculos que envolvem mais de uma dimensão, traz desafios interessantes ao cientista que aborda este problema apenas com base na literatura teórica.

A disponibilização da ferramenta na plataforma `GitHub` de desenvolvimento coletivo é símbolo maior do caráter de código aberto do projeto. A GLMT é um recurso poderoso para diversas pesquisas em espalhamento eletromagnético cuja validade deve ser extensivamente testada. Hoje em dia, as ferramentas que permitem estas validações são apenas disponibilizadas por meios pagos ou de algumas linguagens que já não condizem com as utilizadas no cotidiano científico.

O projeto tem caráter de desenvolvimento contínuo e ainda não possui uma interface de usuário amigável ao usuário que não se familiariza com desenvolvimento de *software*. O programa depende de alterações no código, como sobrescrever os fatores de forma g_n^m para os modos transversos na função `glmt.beam_shape_g` e, também, a escolha e a customização dos testes desejados pelo usuário.

Uma miríade de otimizações é cabível na computação dos perfis de onda dados pela GLMT. Entre elas, podemos comentar sobre o que é planejado como a próxima otimização a ser feita. A construção de gráficos das ondas, nos programas já desenvolvidos em outras linguagens, faz o truncamento da série infinita da expansão de forma estática. Isto é, gráficos com valores de distância da origem até R terão todos os seus pontos calculados a partir da expressão em (3.1). A alternativa dinâmica é, ao invés de usar $N_{max}(R)$ para todos os pontos, avaliar o valor $N_{max}(r_P)$ para cada ponto (r_P, θ_P, ϕ_P) e exe-

cutar apenas este número de iterações.

Para gráficos em duas dimensões, uma otimização imediata utilizada amplamente é o uso de computação paralela. Hoje, a grande maioria computadores que executam recursos de multimídia se utilizam de placas de vídeo e processadores com vários núcleos. A implementação de algoritmos concorrentes é um passo chave para o futuro da ferramenta *software* desenvolvida neste projeto. Entretanto, não foi o interesse desta etapa desenvolvimento usar da programação concorrente para otimização.

Fica claro que ainda há um caminho considerável a ser traçado para o futuro do projeto, desde a implementação das ondas espalhadas e internas às partículas esféricas até propriedades complexas derivadas dos campos eletromagnéticos simulados. Outro passo importante é a divulgação da ferramenta, que, além de estar disponível na página `GitHub`, almeja-se divulgar em grupos de pesquisa da área e em páginas da *web* especializadas tais como `scattport.org`, entre outras.

A Tensores Métricos e Covariantes

Na seção 2.6, introduzimos um tensor métrico covariante determinado pela expressão (2.4). Para maior clareza neste trabalho, serão dadas as definições necessárias para a compreensão do conceito de tensores métricos e covariantes.

Definição A.0.1 *Seja V um espaço vetorial e K um campo de escalares. Uma função $B : V \times V \rightarrow K$ é dita uma forma bilinear se*

$$\begin{aligned} B(\alpha u + \beta v, w) &= \alpha B(u, w) + \beta B(v, w), \\ B(w, \alpha u + \beta v) &= \alpha B(w, u) + \beta B(w, v). \end{aligned}$$

Definição A.0.2 *Uma função de duas variáveis $S : V \times V \rightarrow K$ é dita simétrica se*

$$S(u, v) = S(v, u), \quad \forall u, v \in V.$$

Definição A.0.3 *Seja M uma variedade suave de dimensão n ou uma hipersuperfície no espaço cartesiano $\mathbb{R}^{n+1}$. Para cada ponto $p \in M$, existe um espaço vetorial $T_p M$ – chamado de espaço tangente – consistindo de todos os vetores tangentes à variedade no ponto p . Uma métrica em p é a função $g_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

- g_p é uma forma bilinear,
- g_p é simétrica:
- g_p é não-degenerada. Isto é, para qualquer $X_p \neq 0$ em $T_p M$, existe um Y_p tal que $g_p(X_p, Y_p) \neq 0$.

Definição A.0.4 *O tensor g é dito tensor métrico em M , se, para todo conjunto aberto $U \subset M$ e quaisquer campos vetoriais suaves X, Y em U , a função real*

$$g(X, Y)(p) = g_p(X_p, Y_p)$$

é suave na variável $p \in U$.

Agora que temos a noção formal de métrica e do significado matemático do tensor métrico, podemos seguir para o próximo passo. Uma transformação covariante determina como entidades tais como tensores e vetores mudam quando há uma mudança de base. A transformação que dita como os vetores

base do espaço mudam com a mudança de sistema de coordenadas é chamada de transformação covariante [11].

Mais precisamente, um tensor covariante é um tensor que segue propriedades específicas [12]. Considere o gradiente:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\hat{\mathbf{x}}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\hat{\mathbf{x}}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\hat{\mathbf{x}}_3$$

para qual

$$\frac{\partial\phi'}{\partial x'_i} = \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i},$$

onde $\phi(x_1, x_2, x_3) = \phi'(x'_1, x'_2, x'_3)$.

Assim, qualquer conjunto de grandezas A_j que se transforma de acordo com

$$A'_i = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} A_j$$

é um tensor covariante.

Assim, o tensor métrico covariante g_{nm} mostrado em (2.4) é covariante para a transformação em coordenadas esféricas e é métrico no sentido de que elementos de distâncias [11] nas coordenadas esféricas são dados por,

$$\begin{bmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = ds^2 = dx_1^2 + r^2 dx_2^2 + r^2 \sin^2 \theta dx_3^2.$$

B Ângulos de áxicon e Coeficientes da *Frozen Wave* de exemplo

A seção 5.2 apresenta os resultados da aplicação do programa elaborado sobre um feixe de uma *frozen wave*. Aqui se encontram listados os ângulos de áxicon θ_{aq} e os coeficientes de sobreposição A_q para $\{q \in \mathbb{Z} : -15 \leq q \leq 15\}$.

$$\begin{aligned}
\theta_{a,-15} &= 20.2816, \\
\theta_{a,-14} &= 20.149, \\
\theta_{a,-13} &= 20.0155, \\
\theta_{a,-12} &= 19.8812, \\
\theta_{a,-11} &= 19.7459, \\
\theta_{a,-10} &= 19.6098, \\
\theta_{a,-9} &= 19.4728, \\
\theta_{a,-8} &= 19.3348, \\
\theta_{a,-7} &= 19.1959, \\
\theta_{a,-6} &= 19.056, \\
\theta_{a,-5} &= 18.9151, \\
\theta_{a,-4} &= 18.7732, \\
\theta_{a,-3} &= 18.6302, \\
\theta_{a,-2} &= 18.4862, \\
\theta_{a,-1} &= 18.3411, \\
\theta_{a,0} &= 18.1949, \\
\theta_{a,1} &= 18.0475, \\
\theta_{a,2} &= 17.899, \\
\theta_{a,3} &= 17.7492, \\
\theta_{a,4} &= 17.5982, \\
\theta_{a,5} &= 17.446, \\
\theta_{a,6} &= 17.2924, \\
\theta_{a,7} &= 17.1376, \\
\theta_{a,8} &= 16.9813, \\
\theta_{a,9} &= 16.8237, \\
\theta_{a,10} &= 16.6646, \\
\theta_{a,11} &= 16.504, \\
\theta_{a,12} &= 16.3419, \\
\theta_{a,13} &= 16.1782, \\
\theta_{a,14} &= 16.0128, \\
\theta_{a,15} &= 15.8458.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{-15} &= -2.37169 \times 10^{-17}, \\
A_{-14} &= 0.0133641, \\
A_{-13} &= 0.023287, \\
A_{-12} &= 0.0252276, \\
A_{-11} &= 0.0170089, \\
A_{-10} &= 1.05964 \times 10^{-14}, \\
A_{-9} &= -0.0207887, \\
A_{-8} &= -0.0378413, \\
A_{-7} &= -0.0432472, \\
A_{-6} &= -0.031183, \\
A_{-5} &= -1.05783 \times 10^{-14}, \\
A_{-4} &= 0.0467745, \\
A_{-3} &= 0.10091, \\
A_{-2} &= 0.151365, \\
A_{-1} &= 0.187098, \\
A_0 &= 0.2, \\
A_1 &= 0.187098, \\
A_2 &= 0.151365, \\
A_3 &= 0.10091, \\
A_4 &= 0.0467745, \\
A_5 &= -1.05783 \times 10^{-14}, \\
A_6 &= -0.031183, \\
A_7 &= -0.0432472, \\
A_8 &= -0.0378413, \\
A_9 &= -0.0207887, \\
A_{10} &= 1.05964 \times 10^{-14}, \\
A_{11} &= 0.0170089, \\
A_{12} &= 0.0252276, \\
A_{13} &= 0.023287, \\
A_{14} &= 0.0133641, \\
A_{15} &= -2.37169 \times 10^{-17}.
\end{aligned}$$

Referências

- [1] GOUESBET, G.; GRÉHAN, G. **Generalized Lorenz-Mie Theories**. Berlin: Springer-Verlag, 2011. ISBN 978-3-642-17193-2.
- [2] GOUESBET, G.; GRÉHAN, G. Sur la généralisation de la théorie de Lorenz–Mie. **J. Opt.**, v. 13, p. 97–103, 1982.
- [3] MAHEU, B; GOUESBET, G.; GRÉHAN, G. A concise presentation of the generalized Lorenz–Mie theory for arbitrary incident profile. **J. Opt.** v. 19, p. 59–67, 1988.
- [4] GOUESBET, G.; GRÉHAN, G.; MAHEU, B. Expressions to compute the coefficients gnm in the generalized Lorenz–Mie theory using finite series. **J. Opt.** v.19, p. 35–48, 1988.
- [5] GOUESBET, G.; GRÉHAN, G.; MAHEU, B. Computation of the gn coefficients in the generalized Lorenz–Mie theory using three different methods. **Appl. Optics**, v. 27, p. 4874–4883, 1988.
- [6] LOCK, J. A.; GOUESBET, G. Generalized Lorenz–Mie theory and applications. **J. Quant. Spectrosc. Ra.**, v. 110, p. 800–807, 2009.
- [7] GOUESBET, G. Generalized Lorenz–Mie theories, the third decade: a perspective. **J. Quant. Spectrosc. Ra.**, v. 110, p. 1223–1238, 2009.
- [8] GOUESBET, G. Latest achievements in generalized Lorenz–Mie theories: a commented reference database. **Ann. Phys.**, v. 526, p. 461–489, 2014.
- [9] **ScattPort**. Acesso em <<https://scattport.org/>>.
- [10] CHENG, D. K. **Field-Wave Electromagnetics**. Second Edition. Tsinghua University Press, 2006.
- [11] DULLEMOND, K.; PEETERS, K. **Introduction to Tensor Calculus**. University of Nijmegen, 2010.
- [12] ARFKEN, G. **Mathematical methods for physicists**. Academic Press, 1985. c. 3.
- [13] ARFKEN, G. **Mathematical methods for physicists**. Academic Press, 1985. c. 12.
- [14] ARFKEN, G. **Mathematical methods for physicists**. Academic Press, 1985. c. 11.

- [15] DURNIN, J. Exact solutions for nondiffracting beams, I: the scalar theory. **J. Opt. Soc. Am. A**, v. 4, p. 651–654, 1987.
- [16] DURNIN, J.; MICELI, J. J. Diffraction-free beams. **Phys. Rev. Lett.**, v. 58, p. 1499–1501, 1987.
- [17] HERMAN R. M.; WIGGINS, T. A. Production and uses of diffractionless beams. **J. Opt. Soc. Am. A**, v. 8, p. 932–942, 1991.
- [18] ARLT, J. et al. Optical micromanipulation using a Bessel light beam. **Opt. Commun.** v. 197, p. 239–245, 2001.
- [19] GARCÉS-CHÁVEZ, V. et al. Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam. **Nature**, v.419, p. 145–147, 2002.
- [20] GARCÉS-CHÁVEZ V. et al. Optical levitation in a Bessel light beam. **Appl. Phys. Lett.** v. 85, p. 4001–4003, 2004.
- [21] BOUCHAL, Z. Nondiffracting optical beams: physical properties, experiments, and applications. **Czech J. Phys.**, v. 53, p. 537–578, 2003.
- [22] ZAMBONI-RACHED, M. Stationary optical wavefields with arbitrary longitudinal shape, by superposing equal frequency Bessel beams: Frozen Waves. **Opt. Express**, v. 12, p. 4001–4006, 2004.
- [23] ZAMBONI-RACHED, M.; RECAMI, E.; HERNÁNDEZ-FIGUEROA, H. Theory of “frozen waves”: modeling the shape of stationary wave fields. **J. Opt. Soc. Am. A**, v. 22, p. 2465–2475, 2005.
- [24] ZAMBONI-RACHED, M. Diffraction-Attenuation resistant beams in absorbing media. **Opt. Express**, v. 14, p. 1804–1809, 2006.
- [25] ZAMBONI-RACHED, M.; AMBROSIO, L. A.; HERNÁNDEZ-FIGUEROA, H. E. Diffraction-attenuation resistant beams: their higher-order versions and finite-aperture generations. **Appl. Opt.**, v. 49, p. 5861–5869, 2010.
- [26] VIEIRA, T. A.; GESUALDI, M. R. R.; ZAMBONI-RACHED, M. Frozen Waves: Experimental Generation. **Opt. Lett.**, v. 37, p. 2034–2036, 2012.
- [27] VIEIRA, T. A.; GESUALDI, M. R. R.; ZAMBONI-RACHED, M. Modeling the spatial shape of nondiffracting beams: experimental generation of Frozen Waves via holographic method. **Opt. Commun.**, v. 315, p. 374–380, 2014.

- [28] CORMEN, T. H. **Algoritmos: Teoria e Prática**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012. ISBN 978-85-352-3699-6.
- [29] NORVIG, P. Techniques for Automatic Memoization with Applications to Context-Free Parsing. **Comput. Linguist.**, v. 17 n. 1, p. 91–98, 1991.
- [30] FRANCO, N. M. **Cálculo Numérico**. ICMC USP: Pearson, 2006.
- [31] WISCOMBE, W. J. Improved Mie Scattering Algorithms. **Appl. Optics**, v. 19 n. 9, p.1505-1509, 1980.
- [32] VOTTO, L. F. **GLMT-based electromagnetic field simulator**. Acesso em: <<https://github.com/LVotto/glmtscatt>>
- [33] AMBROSIO, L. A.; WANG, J.; GOUESBET, G. On the validity of the integral localized approximation for Bessel beams and associated radiation pressure forces. **Appl. Optics**, v. 56 n. 2, p. 1-11, 2017.
- [34] AMBROSIO, L. A.; ZAMBONI-RACHED, M. Analytical approach of ordinary frozen waves for optical trapping and micromanipulation. **Appl. Optics** v. 54, n. 10, p. 2584-2593, 2015.
- [35] GOUESBET, G.; LOCK, J. A.; AMBROSIO, L. A.; WANG, J. J. On the validity of localized approximation for an on-axis zeroth-order Bessel beam. **J. Quant. Spectrosc. Ra.** v. 195, p. 18–25, 2017.
- [36] BOUCHAL. Z.; MAREK O. Non-diffractive Vector Bessel Beams. **J. Mod. Optic.**, v. 42, n. 8, 1995.