

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

Sofia de Freitas Martins

Aspectos físicos e matemáticos da Física de Partículas

São Carlos

2024

Sofia de Freitas Martins

Aspectos físicos e matemáticos da Física de Partículas

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Afonso Faria da Veiga, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC-USP)

São Carlos

2024

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

RESUMO

Martins, Sofia de F. **Aspectos físicos e matemáticos da Física de Partículas**. 2024. 20 p. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

Pretende-se realizar um estudo envolvendo alguns aspectos matemáticos e físicos importantes para a Física de Partículas Elementares. Para tal, começa-se com uma descrição geral das Teorias Clássicas de Gauge (calibre), em especial a invariância de Gauge local, que está na base da construção de modelos para a Física de Partículas sob transformações locais geradas por Grupos de Lie compactos. Isso permite associar, na versão quântica correspondente, as partículas fundamentais como representações dos grupos de Gauge. Compreendendo a teoria clássica e a derivação das Equações de Maxwell a partir da Eletrodinâmica Quântica (a teoria de Gauge associada ao grupo $U(1)$) à nível clássico, procede-se para a teoria quântica, utilizando a fórmula de Feynman-Kac e tomando-a como justificativa para a definição de um modelo quântico de Gauge via o formalismo de integrais funcionais. Esta fórmula permite construir e usar a teoria de semi-grupos e o teorema espectral para compreender como determinar a evolução temporal no sistema. Neste formalismo, o operador Hamiltoniano (energia) é o gerador da dinâmica, essencial para a determinação da evolução temporal. Pela abordagem de Feynman-Kac, tem-se uma integral de caminho que leva em conta todas as possíveis trajetórias de um sistema físico, com funções complexas exponenciais das ações associadas, o que é compatível com a interpretação probabilística da descrição quântica dos sistemas físicos.

É importante ressaltar que, embora o trabalho aborde diversos objetos de estudo, o projeto teve como objetivo fornecer à estudante uma introdução aos temas, complementando sua formação. Por isso, os tópicos serão apresentados de forma concisa, oferecendo uma visão geral sem entrar em detalhes extensivos.

Palavras-chave: Grupos de Lie. Teorias de Gauge. Fórmula de Feynman-Kac.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	4
2	GRUPOS E ÁLGEBRAS DE LIE	5
2.1	Grupos de Lie	5
2.2	Álgebras de Lie	5
2.3	Mapa Exponencial	6
2.4	Representações	6
3	INVARIÂNCIA DE GAUGE NA TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS	8
3.1	Derivação das equações de Maxwell a partir da QED	8
3.2	Transformações locais: caso abeliano	10
3.3	Transformações locais: caso não abeliano	12
4	QUANTIZAÇÃO VIA INTEGRAIS DE CAMINHO	13
4.1	Operador Energia e Teorema Espectral	13
4.2	Semigrupo de evolução temporal	14
4.3	Fórmula de Feynman-Kac	15
5	CONCLUSÃO	19
	REFERÊNCIAS	20

1 INTRODUÇÃO

O conceito de campos na física começou a ser utilizado explicitamente no século XIX, quando Michael Faraday descreveu os fenômenos magnéticos por meio de linhas de campo traçadas ao redor de um material magnetizado para indicar sua influência em outros corpos. Tal ideia desafiava a noção tradicional aristotélica da impossibilidade de uma ação sem um meio físico direto entre os corpos. Pelo contrário, Faraday acreditava que as interações poderiam ser mediadas por um campo físico não visível, que permeia o espaço e atua entre os objetos, carregando a influência de um corpo a outro sem a necessidade de entrarem em contato.

Mais tarde, com o auxílio desse conceito, James Clerk Maxwell conseguiu unificar as interações elétricas e magnéticas em um conjunto de equações diferenciais, consolidando dessa forma o campo como uma entidade fundamental. No início do século XX surgiu a teoria da relatividade restrita, expandindo dessa forma a teoria clássica de campos ao constatarem que as equações de Maxwell eram compatíveis com a relatividade especial.

Após o desenvolvimento da mecânica quântica no século XX, mostrou-se necessário reformular a teoria clássica de campos para incluir efeitos quânticos. Em 1928, Paul Dirac chegou na sua famosa fórmula que descreve o comportamento relativístico dos férmions, como os elétrons, sendo compatível tanto com a mecânica quântica quanto com a relatividade restrita.

Este trabalho introduz brevemente alguns aspectos da Física de Partículas, que usa a teoria de campos como uma ferramenta fundamental para descrever as partículas. Inicialmente, são apresentados os Grupos e as Álgebras de Lie e como eles são utilizados para descrever invariâncias de Gauge locais, que são simetrias presentes nas teorias de campos conhecidas como teorias de Gauge. Também nessa parte inicial aborda-se a Eletrodinâmica Quântica à nível clássico, e como obter dela as equações de Maxwell. Por fim, é exposta a proposta de Feynman para a quantização de teorias clássicas de campos por meio de integrais de caminho.

2 GRUPOS E ÁLGEBRAS DE LIE

2.1 Grupos de Lie

Seja G um conjunto não vazio munido de uma operação binária $*$:

$$\begin{aligned} * : G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto a * b \end{aligned} \tag{2.1}$$

Em (2.1), essa operação toma dois elementos de G (par ordenado (a, b)) e mapeia-os para um elemento também em G , sendo portanto uma operação fechada por definição, em que o conjunto dos operandos e do resultado é o mesmo. Diz-se que $(G, *)$ é um grupo se as propriedades abaixo são válidas para $\forall a, b, c \in G$ (1).

$$a * b = c \tag{2.2}$$

$$\exists e \in G \text{ tq. } e * a = a * e = a, \forall a \in G \tag{2.3}$$

$$\text{para } \forall a \in G, \exists a^{-1} \in G \text{ tq. } a * a^{-1} = a^{-1} * a = e \tag{2.4}$$

$$(a * b) * c = a * (b * c) \tag{2.5}$$

onde (2.2) é a propriedade de fechamento, (2.3) elemento neutro, (2.4) elemento inverso e (2.5) associatividade. Um exemplo de grupo são os números inteiros sob adição $(\mathbb{Z}, +)^1$. Se G é uma variedade diferenciável, isto é, um espaço topológico que se assemelha localmente a um espaço euclidiano, possuindo uma estrutura que permite definir funções suaves, cujas derivadas são contínuas e existentes em toda a variedade, então G é um grupo de Lie. Especificamente, para um Grupo de Lie complexo, todo elemento é conexo à identidade, isto é, sempre existe um caminho contínuo que conecta $\forall g \in G$ à identidade e . Essa conectividade permite usar o espaço tangente na identidade para descrever a estrutura do grupo em torno de e , pois qualquer elemento do grupo pode ser entendido em termos da informação infinitesimal contida neste espaço, que forma um espaço vetorial dotado de uma operação adicional, o colchete de Lie.

2.2 Álgebras de Lie

Seja \mathfrak{g} um espaço vetorial com aplicação bilinear $[X, Y] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ denominada comutador ou colchete de Lie. Deve valer (2):

¹ A soma de números inteiros é associativa e sempre resulta em outro número inteiro, possui o número 0 como elemento neutro e $-a$ como o inverso do número a .

$$[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z] \quad (2.6)$$

$$[X, Y] + [Y, X] = 0 \Rightarrow [X, Y] = -[Y, X] \quad (2.7)$$

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad (2.8)$$

Sendo X, Y e $Z \in \mathfrak{g}$ e α e β escalares. Se \mathfrak{g} obedecer (2.6) bilinearidade, (2.7) anticomutatividade e (2.8) identidade de Jacobi, então \mathfrak{g} constitui uma Álgebra de Lie. Quando o comutador $[X, Y]$ está definido em álgebras de matrizes e de operadores, ele vale $XY - YX$.

2.3 Mapa Exponencial

O mapa exponencial associa uma álgebra de Lie a seu grupo de Lie correspondente. Dado um grupo de Lie G e sua álgebra de Lie \mathfrak{g} , o mapa exponencial é uma função que leva um elemento da álgebra $X \in \mathfrak{g}$ a um elemento do grupo $g \in G$ (3):

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G, \quad X \mapsto \exp(X) \quad (2.9)$$

Para uma matriz X , o exponencial é definido pela série de potências:

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \dots \quad (2.10)$$

Esse mapeamento é extremamente importante para a compreensão da interação entre as partículas fundamentais, que são relacionadas a representações de grupos de Lie sob simetrias denominadas invariâncias de Gauge. Em alguns sistemas, estas simetrias decorrem de transformações no sistema físico que garantem a invariância das leis da física sob mudanças de configurações.

2.4 Representações

No contexto da Teoria de Grupos, a representação de um grupo de Lie é a estrutura que permite associar o grupo de Lie, até então visto como entidade abstrata, a operadores lineares em um espaço vetorial. Em outras palavras, diz-se que a representação é a ação de um grupo em um espaço vetorial. Formalmente, uma representação de um grupo G em um espaço vetorial V é um homomorfismo ² de grupos, dado por (3):

$$\Pi : G \rightarrow GL(V) \quad (2.11)$$

O grupo $GL(V)$ representa o conjunto de todas as transformações lineares invertíveis (ou matrizes) em V . Isso significa que cada elemento de G é mapeado para uma

² Na álgebra abstrata, o homomorfismo é um mapa que preserva a estrutura entre duas estruturas algébricas do mesmo tipo, como dois anéis, dois grupos ou dois espaços vetoriais.

transformação linear (ou matriz) que age em V , respeitando todas as propriedades de grupos explicitadas na seção 2.1. A representação então permite ver como o grupo, que é abstrato, atua sobre vetores em um espaço concreto.

Na Física de Partículas, representações distintas de um mesmo grupo são úteis para descrever diferentes aspectos de partículas e campos. Isso ocorre porque uma única estrutura de simetria pode ter várias formas de ser representada no espaço matemático, fornecendo visões alternativas de uma mesma simetria. Diferentes partículas podem se transformar de forma distinta sob a ação dos elementos de um grupo. Cada representação é responsável então por associar a cada tipo de partícula um espaço de representação no qual o grupo de Gauge age. Por exemplo, no caso do elétron, o campo do elétron ψ está associado a um espaço unidimensional complexo. Nesse espaço, o grupo $U(1)$ age aplicando uma transformação de fase em ψ . Essa ação caracteriza a representação fundamental de $U(1)$. Além da representação fundamental, existe a conjugada e a adjunta.

A representação obtida diretamente da definição de um grupo de matrizes é chamada de representação fundamental. Por exemplo, a representação fundamental 3 de $SU(3)$, que é da forma de matrizes 3×1 , representando os quarks (partículas elementares submetidas à força forte).

A representação obtida ao tomar a transposta conjugada das matrizes da representação fundamental é denominada de representação conjugada. Por exemplo, a representação conjugada $\bar{3}$ de $SU(3)$, da forma de matrizes 1×3 , que representa os antiquarks, as antipartículas dos quarks.

A representação adjunta do grupo é usada para descrever as transformações do próprio grupo sobre seu próprio espaço de Lie. Para $SU(3)$, esta representação é formada por matrizes 3×3 de traço nulo, representando os glúons, que são as partículas mediadoras da interação forte.

Os quarks, antiquarks e glúons são partículas que estão inseridas na Cromodinâmica Quântica (QCD). Para o grupo de simetria $U(1)$, que descreve a Eletrodinâmica Quântica (QED), os elétrons, que carregam uma carga q , estão na representação fundamental, em que a ação de $U(1)$ sobre estas partículas é uma multiplicação por uma fase $e^{i\alpha}$, em que i é o número imaginário e α uma função escalar real. O grupo de Lie da QED é abeliano³ e consiste em todas as rotações complexas de fase $e^{i\alpha}$. Já os pósitrons estão na representação conjugada, com carga $-q$ e multiplicados por uma fase $e^{-i\alpha}$.

Por fim, os fótons estão na representação adjunta de $U(1)$, sendo a representação trivial. Isso ocorre porque esse grupo possui apenas um único gerador (o operador carga elétrica, no eletromagnetismo), que se comporta como a identidade na álgebra do grupo. Assim, a representação adjunta é trivial, não introduz cargas e age de forma

³ Em um grupo abeliano (ou comutativo), $a * b = b * a$.

idêntica em qualquer direção. Logo, os fótons são neutros e não interagem entre si no vácuo.

3 INVARIÂNCIA DE GAUGE NA TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS

3.1 Derivação das equações de Maxwell a partir da QED

A Eletrodinâmica Quântica é uma teoria de campos que descreve a interação entre luz e matéria. Como explicado anteriormente na seção 2.4, as estruturas matemáticas dos grupos e das álgebras de Lie permitem formalizar as simetrias que governam as interações entre partículas elementares. Ao considerar o grupo de simetria $U(1)$ como o grupo de gauge da QED, as representações desse grupo fornecem uma forma de associar elementos do grupo a transformações específicas dos campos de partículas, como o campo do elétron. Essas transformações específicas são conhecidas como transformações de Gauge ⁴ e garantem que as leis da física permaneçam inalteradas sob a mudança do sistema físico, pois asseguram a invariância da lagrangiana, que descreve a dinâmica das partículas e é definida como a diferença entre a energia cinética e a energia potencial do sistema.

Ao contrário da Mecânica Clássica que trata partículas como pontos, na teoria de campos as partículas são analisadas como campos que podem interagir entre si no espaço-tempo. Logo, nesse contexto a lagrangiana L precisa ser descrita por uma densidade lagrangiana \mathcal{L} . O formalismo lagrangiano segue o princípio da mínima ação (ou princípio de Hamilton) (4), enunciando que o caminho que um sistema segue entre dois pontos é aquele que minimiza a ação S , dada por:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x)) \quad (3.1)$$

A expressão da ação na QED já é dada com a finalidade de focar em como as equações de Maxwell podem ser obtidas por ela. Esta ação é composta pela ação de Maxwell S_M e de Dirac S_D (5):

$$S_{QED} = S_M + S_D = \int d^4x (\mathcal{L}_M + \mathcal{L}_D) \quad (3.2)$$

$$S_{QED} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(x)(i\mathcal{D} - m)\psi(x) \right] \quad (3.3)$$

em que m é a massa da partícula, $\mathcal{D} = \gamma^\mu D_\mu$, D_μ a derivada covariante e $\psi(x), (\bar{\psi}(x))$ o campo de Dirac da partícula, (antipartícula) fermiônica ⁵, com $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0$ sendo seu adjunto. O tensor do campo eletromagnético vale $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, onde A_μ é o

⁴ As transformações de Gauge serão detalhadas nas seções 3.2 e 3.3.

⁵ Férmions são partículas de spin semi-inteiro, por exemplo o elétron de spin 1/2.

potencial eletromagnético. As matrizes de Dirac γ^μ são um conjunto de matrizes 4×4 que satisfazem a relação de anticomutação $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} I_4$, com $\eta^{\mu\nu}$ sendo o tensor métrico de Minkowski $\eta = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

em que $i = 1, 2, 3$, σ_i são as matrizes de Pauli (6) e I_2 a matriz identidade 2×2 . Expandindo os termos da densidade lagrangiana de Dirac, \mathcal{L}_{QED} pode ser expresso por:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + i\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - q\bar{\psi}(x) \gamma^\mu A_\mu \psi(x) - m\bar{\psi}(x) \psi(x) \quad (3.5)$$

sendo, da esquerda para direita, respectivamente, o termo eletromagnético, o termo cinético do campo fermiônico, a interação entre férmion e campo de Gauge, e o termo de massa. É importante ressaltar que em todo o trabalho estão sendo adotadas as unidades naturais, isto é, com $\hbar = c = 1$.

As Equações de Maxwell podem ser obtidas no contexto da QED ao se aplicar as Equações de Euler-Lagrange ao campo de Gauge, que nesse caso é o potencial eletromagnético. Inicialmente, as equações de movimento serão aplicadas na densidade lagrangiana do eletromagnetismo, que no presente trabalho foi denominada de densidade lagrangiana de Maxwell:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) = 0 \quad (3.6)$$

Repare que \mathcal{L}_M depende apenas das derivadas do campo de Gauge, e não diretamente de A_ν em si, fazendo com que o primeiro termo de (3.6) seja nulo. Quanto ao segundo termo, é possível aplicar a regra da cadeia, uma vez que a densidade lagrangiana depende implicitamente de $\partial_\mu A_\nu$ pela expressão do tensor eletromagnético:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial F_{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \quad (3.7)$$

Sabendo a derivada de uma função quadrática e que $\frac{\partial (\partial_\alpha A_\beta)}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu$, isto é, vale 1 se $\alpha = \mu$ e $\beta = \nu$, caso contrário vale 0, chega-se em:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (3.8)$$

que são simplesmente as equações de Maxwell homogêneas na formulação do eletromagnetismo clássico dadas por:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.9)$$

correspondendo as equações de Maxwell no vácuo, isto é, com ausência de fontes carregadas na região do espaço considerada. O tensor eletromagnético segue a identidade de Bianchi (3.10) e a partir dela é possível encontrar outras duas equações de Maxwell (3.11) que permanecem verdadeiras mesmo na presença de partículas carregadas.

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \quad (3.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.11)$$

que correspondem, da esquerda para direita, à Lei de Gauss para o magnetismo e à Lei de Faraday-Lenz. A fim de se obter as equações de Maxwell não homogêneas, basta aplicar as equações de Euler-Lagrange em \mathcal{L}_{QED} , de forma análoga ao feito anteriormente. Define-se $j^\mu = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ como sendo a corrente de Dirac ⁶ associada a um campo de férmions, no caso da QED os elétrons. O resultado será:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = qj^\nu \quad (3.12)$$

que enuncia a Lei de Gauss para o campo elétrico e a Lei de Ampère-Maxwell em regiões na presença de cargas elétricas ⁷.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = q\rho \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B} = q\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.13)$$

3.2 Transformações locais: caso abeliano

No estudo da teoria de campos, existem simetrias que resultam em uma invariância do sistema físico sob transformações, as chamadas invariâncias de Gauge. Quando a simetria é global, a transformação aplicada ao campo é a mesma em todos os pontos do espaço-tempo, sendo denominada transformação global. Já nas teorias mais fundamentais da natureza, como na QED e na QCD, as transformações variam diferentemente em cada ponto do espaço-tempo, gerando transformações locais.

No caso do eletromagnetismo, descrito pela QED, trabalha-se com o grupo abeliano $U(1)$, formado pelas matrizes unitárias unidimensionais. Como já visto na seção 2.4, o campo do elétron, representado por uma função de onda $\psi(x)$, é multiplicado por uma fase complexa $e^{i\alpha(x)}$, em que $\alpha(x)$ é uma função escalar real que depende de um ponto x do espaço-tempo de Minkowski ou sua versão euclideana com tempo imaginário (7):

⁶ Não será detalhado, mas a simetria de Gauge leva à conservação da corrente e consequentemente, da carga elétrica, pelo Teorema de Noether.

⁷ $\rho = j^0$ é a densidade de carga.

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x) \quad (3.14)$$

com forma infinitesimal ⁸ :

$$\delta\psi(x) = i\alpha(x)\psi(x) \quad (3.15)$$

Para manter a invariância do sistema sob esta transformação local, a derivada parcial $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ (com $x^\mu = 0, 1, 2, 3$ representando as coordenadas espaço-temporais) deve ser substituída pela derivada covariante ⁹, denotada por D_μ . Ela inclui o campo de Gauge A_μ , que na QED é o campo do fóton:

$$D_\mu := \partial_\mu + iqA_\mu(x) \quad (3.16)$$

em que q é a carga elétrica. Para $D_\mu\psi(x)$ se transformar como (3.14), tem-se $D_\mu\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi(x)$, logo é necessário que:

$$(\partial_\mu + iqA'_\mu(x))(e^{i\alpha(x)}\psi(x)) = e^{i\alpha(x)}(\partial_\mu + iqA_\mu(x))\psi(x) \quad (3.17)$$

Expandindo o lado direito de (3.17) e dividindo toda a equação por $e^{i\alpha(x)}$, obtém-se:

$$\partial_\mu\psi(x) + iqA'_\mu(x)\psi(x) + i(\partial_\mu(\alpha(x)))\psi(x) = \partial_\mu\psi(x) + iqA_\mu(x)\psi(x) \quad (3.18)$$

cuja solução vale:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha(x) \quad (3.19)$$

Por fim, o tensor dos campos $F_{\mu\nu}$ é, por definição:

$$[D_\mu, D_\nu] := iqF_{\mu\nu} \quad (3.20)$$

Aplicando o comutador, encontra-se:

$$\begin{aligned} & ((\partial_\mu + iqA_\mu(x))(\partial_\nu + iqA_\nu(x))) - ((\partial_\nu + iqA_\nu(x))(\partial_\mu + iqA_\mu(x))) \\ &= iq(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - q^2[A_\mu, A_\nu] \end{aligned} \quad (3.21)$$

sendo $[A_\mu, A_\nu] = 0$ porque $U(1)$ é abeliano, obtendo portanto $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ que é justamente o tensor do campo eletromagnético.

⁸ Aqui foi aplicado o mapa exponencial em (2.10), onde $e^{i\alpha(x)}$ representa um elemento do grupo de Lie $U(1)$ e $i\alpha(x)$ o elemento correspondente na álgebra de Lie $\mathfrak{u}(1)$.

⁹ Repare que se não houvesse a substituição, $\partial_\mu\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}(\partial_\mu + i(\partial_\mu\alpha(x)))\psi(x)$, violaria a invariância. Em transformações globais, não é preciso introduzir D_μ , uma vez que nesse caso α não depende de x .

Conforme dito na seção 3.1, as transformações de Gauge asseguram a invariância da lagrangiana da Eletrodinâmica Quântica. Pode-se notar isso aplicando (3.14) ao termo de Dirac de \mathcal{L}_{QED} e (3.19) ao termo do tensor eletromagnético:

$$\bar{\psi}(x)(i\not{D} - m)\psi(x) \rightarrow e^{-i\alpha}\bar{\psi}(x)(i\not{D} - m)e^{i\alpha}\psi(x) \quad (3.22)$$

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \rightarrow \partial_\mu A_\nu - \frac{1}{q}\partial_\mu\partial_\nu\alpha - \partial_\nu A_\mu + \frac{1}{q}\partial_\nu\partial_\mu\alpha \quad (3.23)$$

Repare que em (3.22) os termos exponenciais multiplicados valem 1 e em (3.23), por α se tratar de uma função suave, as derivadas parciais comutam. Logo, chega-se em $\mathcal{L}_{QED} \rightarrow \mathcal{L}_{QED}$. Por simplificação, adota-se $\alpha \equiv \alpha(x)$ e $A_\mu \equiv A_\mu(x)$.

3.3 Transformações locais: caso não abeliano

Nas teorias abelianas, como na QED, o campo de Gauge interage apenas com partículas carregadas, como o elétron. Todavia, para descrever interações mais complexas, como a força forte, em que os campos de Gauge não interagem apenas com os campos de matéria, mas também entre si ¹⁰, precisa-se adotar as teorias de gauge com grupos não abelianos de simetria $SU(N)$. O grupo $SU(N)$ é o grupo especial unitário de ordem N , composto por matrizes complexas unitárias de dimensão $N \times N$ com determinante igual a 1. A dimensão do grupo é $N^2 - 1$, que corresponde ao número de graus de liberdade destas matrizes ¹¹. A transformação de Gauge local em grupos não abelianos é dada por:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(x)\psi(x) \quad (3.24)$$

onde $U(x) = e^{i\boldsymbol{\alpha}(x) \cdot \boldsymbol{t}}$, em que $\boldsymbol{\alpha}(x)$ é uma função vetorial dependente de um ponto x do espaço-tempo, com componente $\alpha^a(x)$ associado a seu respectivo gerador t^a da álgebra de Lie do grupo correspondente, sendo que $a = 1, 2, \dots, N^2 - 1$. A álgebra de Lie do grupo $SU(2)$ é gerada pelas matrizes hermitianas 2×2 , de traço nulo, que são as 3 matrizes de Pauli, tendo o seu equivalente nas 8 matrizes de Gell-Man (8) para a álgebra de Lie do grupo $SU(3)$. Os geradores da álgebra de Lie verificam a relação de comutação:

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c \quad (3.25)$$

¹⁰ Os campos de matéria $\psi(x)$ descrevem partículas que constituem a matéria, como elétrons e quarks, enquanto os campos de Gauge $A_\mu(x)$ descrevem partículas mediadoras de forças, como fótons e glúons.

¹¹ A condição de unitariedade impõe N^2 graus de liberdade, e a restrição adicional do determinante igual a um, que faz o grupo ser especial, elimina um grau.

em que f^{abc} são as constantes de estrutura antissimétricas, isto é, $f^{abc} = -f^{bac}$. Tem-se então um conjunto de campos auto-adjuntos $\mathbf{A}_\mu(x) = A_\mu^a(x)t^a$ que sofrerão transformações de Gauge ao serem incluídos na derivada covariante, definida como:

$$D_\mu := \partial_\mu + ig\mathbf{A}_\mu(x) \quad (3.26)$$

em que g é a carga de Gauge ou constante de acoplamento. De maneira análoga à seção 3.2, para que $D_\mu\psi(x)$ se transforme da mesma forma que (3.24), impõe-se $D_\mu\psi(x) \rightarrow U(x)D_\mu\psi(x)$, chegando na condição abaixo:

$$(\partial_\mu + ig\mathbf{A}'_\mu(x))U(x)\psi(x) = U(x)(\partial_\mu + ig\mathbf{A}_\mu(x))\psi(x) \quad (3.27)$$

Ao expandir os termos, tem-se:

$$\begin{aligned} \partial_\mu U(x)\psi(x) + U(x)\partial_\mu\psi(x) + ig\mathbf{A}'_\mu(x)U(x)\psi(x) \\ = U(x)\partial_\mu\psi(x) + U(x)ig\mathbf{A}_\mu(x)\psi(x) \end{aligned} \quad (3.28)$$

que resulta na transformação do campo de Gauge:

$$\mathbf{A}_\mu(x) \rightarrow \mathbf{A}'_\mu(x) = U(x)\mathbf{A}_\mu(x)U^{-1}(x) + \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x))U^{-1}(x) \quad (3.29)$$

O comutador das derivadas covariantes possui a mesma definição de (3.20), porém com a constante de acoplamento g no lugar da carga elétrica q , resultando portanto em um tensor de campo $F_{\mu\nu}$ igual à:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \quad (3.30)$$

em que por se tratar de um grupo não abeliano $SU(N)$, o termo do comutador não é nulo.

4 QUANTIZAÇÃO VIA INTEGRAIS DE CAMINHO

4.1 Operador Energia e Teorema Espectral

A ação na Eletrodinâmica Quântica fornece uma descrição completa das interações entre as partículas carregadas e o campo eletromagnético no formalismo clássico, todavia, ela não é uma teoria quantizada quando assume somente a forma de (3.3). A formulação clássica da ação representa apenas o comportamento médio ou esperado dos campos sem capturar as propriedades quânticas intrínsecas, como a probabilidade e a natureza discreta das interações a níveis microscópicos. Na Física Moderna, quantizar significa incorporar uma estrutura que possibilite a definição de operadores, estados e integrações funcionais,

seguindo de fato a Mecânica Quântica, que é descrita por vetores complexos no espaço de Hilbert físico.

Estes vetores complexos, também chamados de estados $\psi \equiv \psi(t, \vec{r})$ são elementos do espaço de Hilbert \mathcal{H} , com norma associada ao produto interno tal que $\|u\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{(u, u)_{\mathcal{H}}}$. Os observáveis \mathcal{O} são representados por operadores auto-adjuntos (ou hermitianos), isto é $\mathcal{O} = \mathcal{O}^*$, sendo \mathcal{O}^* o operador adjunto, que por definição satisfaz a propriedade $(\mathcal{O}^* \psi, \psi')_{\mathcal{H}} = (\psi, \mathcal{O} \psi')_{\mathcal{H}}$. Logo, considerando a hermiticidade dos observáveis, tem-se $(\mathcal{O} \psi, \psi')_{\mathcal{H}} = (\psi, \mathcal{O} \psi')_{\mathcal{H}}$, o que significa que o operador \mathcal{O} é simétrico em relação ao produto interno. Esta simetria é importante, pois assegura que os valores esperados dos observáveis são reais, garantindo medições que possam ser fisicamente validadas por meio de experimentos.

Uma ideia fundamental da Mecânica Quântica é a translação temporal ¹² atuando sobre qualquer estado físico, sendo o Hamiltoniano o operador que gera esta translação. Denotado por \hat{H} , esse operador também é chamado de operador energia, e é dado pela soma do operador energia cinética \hat{H}_0 e do operador potencial $V(\vec{r})$, que é um operador de multiplicação:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + V(\vec{r}) = -\frac{\Delta}{2m} + V(\vec{r}) \quad (4.1)$$

onde $\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ é o Laplaciano. O Teorema Espectral afirma que qualquer operador auto-adjunto em um espaço de Hilbert de dimensão finita pode ser diagonalizado, ou seja, existe uma base de autovetores na qual o operador assume uma forma diagonal, com os autovalores sendo os coeficientes da matriz diagonal. Aplicando esse teorema ao operador energia, tem-se uma decomposição espectral, com \hat{H} sendo decomposto em termos de seus autovetores $|\psi_n\rangle$, que são os estados estacionários (estados com densidade de probabilidade independente do tempo), tal que:

$$\hat{H} = \sum_n E_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (4.2)$$

onde E_n são os autovalores, correspondentes às energias dos estados estacionários do sistema. Se o operador tiver autovalores múltiplos, a base de autovetores pode não ser ortonormal de imediato, mas pode ser ortogonalizada utilizando o processo de Gram-Schmidt.

4.2 Semigrupo de evolução temporal

A equação de Schrödinger é responsável por descrever a evolução temporal do estado quântico de um sistema. Com $\hbar = 1$, tem-se:

¹² A translação temporal pode ser entendida como a evolução de um sistema no tempo conforme ele passa. A partir disso se define o operador de evolução temporal, na seção 4.2.

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi \quad (4.3)$$

A evolução temporal é determinística, pois dado o estado inicial $\psi(0, \vec{r})$, a equação determina o estado $\psi(t, \vec{r})$ para qualquer tempo t . A solução geral da equação de Schrödinger dependente do tempo pode ser expressa como uma combinação linear das soluções dos estados estacionários:

$$\psi(t, \vec{r}) = \sum_n c_n e^{-\hat{H}(t-t_0)} \psi(t_0, \vec{r}) = \sum_n c_n e^{-E_n(t-t_0)} \psi(t_0, \vec{r}) \quad (4.4)$$

onde c_n são os coeficientes determinados pelas condições iniciais do sistema. Nesse caso, a função de onda é uma superposição de estados que oscilam em uma frequência proporcional aos autovalores de \hat{H} . Repare que, por conveniência, foi feita a transformação $t \rightarrow it$, isto é, o tempo real foi transformado em tempo imaginário (euclideo) ¹³. Essa mudança faz com que, se \hat{H} é limitado inferiormente, a evolução temporal tenha um decaimento exponencial ao invés de oscilatório, facilitando a formulação de métodos matemáticos. Por exemplo, no tempo real, a equação de Schrödinger envolve números complexos devido à presença de i no expoente, complicando fazer a análise matemática dos sistemas. Por sua vez, no tempo imaginário, para que a interpretação probabilística da função de onda seja preservada, a evolução temporal deve ser feita de tal forma que a norma do estado (função de onda) não aumente com o tempo. Isso só é possível com $\hat{H} \geq 0$, ou seja, com o Hamiltoniano limitado inferiormente, de tal forma que não seja possível "voltar no tempo". Tem-se então que o operador de evolução temporal $U(t, t_0) = e^{-\hat{H}(t-t_0)}$ é definido apenas para tempos futuros ($t \geq t_0$), sendo uma contração e garantindo a positividade e irreversibilidade, tendo portanto um semigrupo cujo Hamiltoniano é o gerador da dinâmica (9).

4.3 Fórmula de Feynman-Kac

Fazendo $2m = 1$ e utilizando o tempo imaginário, a equação de Schrödinger (4.3) fica na forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\hat{H}\psi = -(\Delta + V(\vec{r}))\psi = -(H_0 + V(\vec{r})) \quad (4.5)$$

Essa equação é do tipo difusão, podendo ser representada por um processo de Wiener ¹⁴. O operador de evolução temporal pode ser interpretado como uma média sobre todas as possíveis trajetórias de uma partícula sujeita a esse processo de Wiener. Desse modo, a

¹³ Essa transformação foi feita por uma rotação de Wick, que converte integrais de caminho em integrais de caminho euclidianas, semelhantes a integrais usadas em estatística e teoria de probabilidades.

¹⁴ Processo que descreve variações aleatórias ao longo do tempo, também chamado de movimento browniano.

função de Green associada à propagação de uma partícula entre os pontos \vec{x} e \vec{y} em um espaço tridimensional é dada por (10):

$$G_t(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} \exp\left(\frac{-|\vec{x} - \vec{y}|^2}{4t}\right) \quad (4.6)$$

Para solucionar $e^{-(H_0+V)t}$, isto é, o operador de evolução temporal com uma perturbação potencial, utiliza-se o Teorema de Lie Trotter (11):

$$e^{-(H_0+V)t} = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-H_0 t/n} e^{-V t/n}) \quad (4.7)$$

Esse teorema pode ser utilizado nesse caso porque segue as condições de convergência no limite: os operadores são autoadjuntos, limitados inferiormente, apresentam um domínio em comum (as funções de onda ψ que são quadrado-integráveis e satisfazem condições de suavidade e de contorno, garantindo que os operadores estejam bem definidos) e t funciona para intervalos de tempos finitos, onde a contribuição de cada passo é pequena para que o limite $n \rightarrow \infty$ possa ser tomado. Em seguida, deve-se calcular a evolução da função de onda, que será expressa como uma integral sobre todas as possíveis trajetórias da partícula no intervalo de tempo t . Denota-se essas trajetórias pelos pontos intermediários $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ em que a partícula pode estar nos tempos $t/n, 2t/n, \dots, t$ (12).

Essa integral sobre todas as possíveis trajetórias pode ser visualizada de maneira análoga à integral de Riemann, ilustrada abaixo:

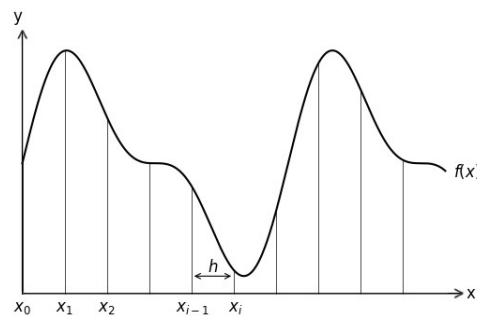


Figura 1 – A função $f(x)$ é aproximada pela soma de áreas de retângulos com largura h em intervalos $[x_{i-1}, x_i]$. Essa soma se aproxima do valor da integral da função no intervalo considerado à medida que $h \rightarrow 0$.

Fonte: Elaborada pela autora.

A área A abaixo da curva da figura 1 pode ser aproximada pela soma das áreas dos retângulos construídos em intervalos discretos ao longo do eixo x . Em cada intervalo $I = [x_{i-1}, x_i]$, forma-se um retângulo cuja altura é dada pelo valor da função $f(x)$ em um ponto dentro de I e cuja largura é o comprimento do próprio intervalo, que vale $h = x_{i-1} - x_i$. Um conjunto finito de pontos não tem uma representação completa do contínuo, no entanto, conforme aumenta-se o número de pontos e reduz-se a distância entre

eles, isto é, $h \rightarrow 0$ e, por conseguinte, $n \rightarrow \infty$, o conjunto se torna uma aproximação cada vez mais próxima do contínuo. Neste sentido, tem-se a integral de Riemann que calcula a área:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(x_{i-1}) \cdot h = \int_a^b f(x) dx \quad (4.8)$$

Na integral de caminho, o processo é similar, mas em vez de calcular a área sob uma curva, somam-se as contribuições de todas as trajetórias possíveis que a partícula pode seguir ao longo do tempo. Em outras palavras, enquanto a integral de Riemann lida com uma única curva, a integral de caminho considera todas as possíveis curvas que conectam os pontos inicial e final no tempo. Neste caso, t/n é análogo a h e tem-se:

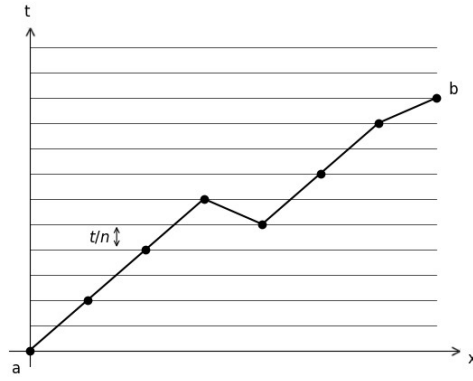


Figura 2 – O tempo total é dividido por n passos. Infinitos caminhos podem ser tomados a cada intervalo de tempo, resultando em um conjunto de trajetórias de a a b cuja soma é obtida pela integral de caminho.

Fonte: Elaborada pela autora.

Retorna-se a (4.6), tendo então que a propagação de uma partícula de \vec{x} até \vec{y}_n em n passos é dada por:

$$\prod_{i=1}^n G_{t/n}(y_{i-1}, \vec{y}_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(4\pi t/n)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\vec{y}_i - y_{i-1}|^2}{4(t/n)}\right) \quad (4.9)$$

onde $\vec{y}_0 \equiv \vec{x}$ e \vec{y}_n é a posição final da partícula. O potencial entra multiplicativamente em cada intervalo de tempo, e a contribuição do potencial ao longo do caminho é:

$$\prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{t}{n} V(\vec{y}_i)\right) \quad (4.10)$$

Logo, temos que a evolução temporal é obtida por (9):

$$(e^{-(H_0+V)t}\Phi)(\vec{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{4\pi t}\right)^{\frac{3n}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \dots \int_{\mathbb{R}^3} e^{-tS_n(\vec{x}, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)} \Phi(\vec{y}_n) d\vec{y}_1 \dots d\vec{y}_n \quad (4.11)$$

onde:

$$S_n(\vec{x} \equiv \vec{y}_0, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{|\vec{y}_i - \vec{y}_{i-1}|}{t/n} \right)^2 - V(\vec{y}_i) \right] \quad (4.12)$$

Em (4.11) os y 's são integrados em todo o espaço e engloba uma expansão em caminhadas aleatórias. No limite do contínuo ($n \rightarrow \infty$), o fator $\left(\frac{n}{4\pi t}\right)^{\frac{3n}{2}}$ é absorvido na densidade de probabilidade associada à medida de Wiener. Os \vec{y} 's são integrados em todo o espaço, com pontos inicial e final fixos. Considera-se todos os caminhos possíveis com um peso estatístico, chegando enfim à fórmula de Feynman-Kac:

$$(e^{-(H_0+V)t}\Phi)(\vec{x}) = \int_{\Omega_{\vec{x}}} e^{-tS(\omega)} \Phi(\omega(t)) d\omega \quad (4.13)$$

em que Φ é um estado quântico (vetor no espaço de Hilbert), $S(\omega)$ a ação e $\Omega_{\vec{x}}$ o conjunto de caminhos ω com $\omega(0) = \vec{x}$ com uma medida de Wiener sobre processos aleatórios. A fórmula (4.13) considera que não há uma única trajetória, como no caso da Mecânica Clássica, onde a trajetória é determinada pelas equações variacionais de Euler-Lagrange, mas uma superposição de todas as trajetórias, incorporando o princípio de incerteza de Heisenberg, e, então, a quantização do sistema. Não há contradição com o princípio da mínima ação, uma vez que caminhos mais próximos ao caminho clássico possuem um maior peso na somatória, o que pode ser verificado quantitativamente ao expandir a ação em torno do caminho clássico ω_{cl} :

$$S(\omega) \approx S(\omega_{cl}) + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 S}{\delta \omega^2} \Big|_{\omega=\omega_{cl}} (\delta \omega)^2 \quad (4.14)$$

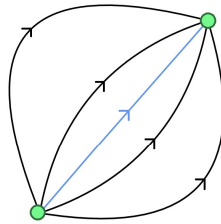


Figura 3 – Possíveis caminhos de uma partícula livre entre dois pontos, com o caminho clássico, cuja ação é mínima, destacado em azul.

Fonte: Elaborada pela autora.

Para transicionar da mecânica quântica para uma teoria de campos, ao invés de integrar sobre caminhos $\omega(t)$ como em (4.13), integra-se sobre todas as configurações possíveis de campo $\phi(x)$. A medida de integração sobre caminhos então é substituída por uma medida funcional $d\omega \rightarrow \mathcal{D}\phi$. Na TQC, essa integral funcional¹⁵ é uma medida do tipo Gibbs, onde soma-se sobre todas as configurações possíveis de um sistema com pesos dados por $e^{-S[\phi]}$.

¹⁵ Tem-se que $d\omega$ é um produto das diferenciais dos y 's e $\mathcal{D}\phi$ das diferenciais dos ϕ 's.

5 CONCLUSÃO

As Teorias de Gauge desempenham um importante papel na Física de Partículas Elementares, sendo essenciais na compreensão das interações fundamentais da natureza – a interação eletrofraca, que tem como mediadores os fótons e os bósons W e Z, é descrita por $SU(2) \times U(1)$, já $SU(3)$ descreve a interação forte, a qual participam os glúons e quarks – que unificadas constituem o chamado Modelo Padrão. Essas teorias permitem a formulação matemática de simetrias de campo, facilitando a análise de interações complexas e promovendo avanços em áreas além da Física de Partículas, como na cosmologia, na física do estado sólido e na teoria da informação quântica.

Diante do exposto, este estudo apresentou uma introdução estruturada aos conceitos fundamentais da Física de Partículas, apresentando os principais aspectos das Teorias de Gauge e sua relação com os Grupos e Álgebra de Lie, que descrevem as simetrias de Gauge locais abelianas e não abelianas nas teorias de campos. Também obteve-se as equações de Maxwell a partir da Eletrodinâmica Quântica no âmbito clássico, por meio das Equações de Euler-Lagrange aplicadas à densidade de lagrangiana da QED.

Foi explorada ainda a quantização de teorias de campos utilizando a formulação de Feynman-Kac, método que permitiu uma nova interpretação das trajetórias em sistemas quânticos, fundamentada na probabilidade e nas ações associadas ao sistema. Tais desenvolvimentos ofereceram uma visão mais abrangente da Física de Partículas e estabeleceram uma base sólida para futuros estudos na área, servindo como uma motivação inicial para estudos mais específicos em Teoria Quântica de Campos.

REFERÊNCIAS

- 1 GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. **Elementos de Álgebra**. 1st. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. 135–137 p. ISBN 978-85-244-0370-5.
- 2 WYBOURNE, B. G. **Classical Groups for Physicists**. 1st. ed. Weinheim: Wiley-VCH, 1974. 7, 40–41 p. ISBN 0-471-96505-7.
- 3 HALL, B. C. **Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction**. 2nd. ed. New York: Springer, 2015. 67–70, 77–79 p. DOI 10.1007/978-3-319-13467-3. ISBN 978-3-319-13466-6, 978-3-319-13467-3.
- 4 GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical Mechanics**. 3rd. ed. San Francisco: Addison Wesley, 2002. 34–45 p. ISBN 978-0-201-65702-9.
- 5 TONG, D. **Quantum Field Theory**. 2006. Disponível em: <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft/six.pdf>. Acesso em: 27 out. 2024.
- 6 SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. **Modern Quantum Mechanics**. 2nd. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. 494–497 p. DOI 10.1017/9781108499996. ISBN 978-1-108-42241-3.
- 7 ABERS, E. S.; LEE, B. W. Gauge theories. **Physics Reports**, New York, v. 9, n. 1, p. 6–13, 1973.
- 8 GRIFFITHS, D. J. **Introduction to Elementary Particles**. 2nd revised ed.. ed. Weinheim: Wiley-VCH, 2008. 287 p. ISBN 978-3-527-40601-2.
- 9 DA VEIGA, P. A. F. **Euclidean Quantum Field Theory (In Few Minutes)**. 2014. Slides apresentados em Colóquio no Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC-UNICAMP).
- 10 SKINNER, D. **Mathematical Methods: Part IB**. 2015. Disponível em: <https://damtp.cam.ac.uk/user/dbs26/1BMethods/GreensPDE.pdf>. Acesso em: 29 out. 2024.
- 11 DELL’ANTONIO, G. **Lectures on the Mathematics of Quantum Mechanics II: Selected Topics**. Rome: Atlantis Press, 2016. v. 2. 133–153 p. DOI 10.2991/978-94-6239-115-4. ISBN 978-94-6239-114-7.
- 12 FEYNMAN, R. P.; HIBBS, A. R. **Quantum Mechanics and Path Integrals**. Emended ed. New York: Dover Publications Inc., 2005. 31–35 p. ISBN 978-0-486-47722-0, 0-486-4772-3.