JOSÉ THIAGO IZIDORO DE BARROS

Otimização Industrial: Uma Abordagem Prática

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

São Paulo

Novembro/2019

JOSÉ THIAGO IZIDORO DE BARROS

Otimização Industrial: Uma Abordagem Prática

Monografia submetida à apreciação de Banca examinadora da Coordenadoria Acadêmica do PECE, como exigência parcial para obtenção do grau de Especialização em Engenharia Financeira, elaborada sob a orientação do Prof. Oswaldo Luiz do Valle Costa.

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

São Paulo

2019

Dedico este trabalho aos meus queridos e amados filhos João Pedro, Heloisa Cristina, Ana Beatriz e Leonardo Luiz, fontes de minha inspiração.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família que foi fonte de incentivo para que eu pudesse concluir o curso.

Aos professores, em especial ao Professor Oswaldo, meu orientador e ao Professor Roberto, eles despertaram a minha admiração pela dedicação que apresentaram nas aulas.

Aos colegas do MBA, especialmente pela convivência ao longo do curso.

BARROS, JOSÉ THIAGO I. Otimização Industrial: Uma Abordagem Prática. São Paulo, 2019. Monografia de Especialização (MBA Engenharia Financeira) – Escola

Politécnica da Universidade de São Paulo.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo apresentar uma abordagem prática de otimização numa indústria de transformação. A ideia é demonstrar de forma geral as técnicas de pesquisa operacional passando pelo método de programação linear, o método simplex, multiplicadores de Lagrange e programação não linear.

Após a apresentação dos respectivos métodos, o trabalho se delimita no enfoque de um modelo linear para uma empresa que, atuando no ramo da indústria de transformação de metalurgia pesada e, dado o portfólio de produtos com suas margens de contribuição, terá o objetivo de buscar, mediante a aplicação da técnica de programação linear inteira, o *mix* ótimo de produção que tem por objetivo maximizar o lucro. Para isso, o modelo precisará atender as restrições estabelecidas, tais como, não ultrapassar o total dos gastos fixos de produção, o total de horas produtivas disponíveis e as quantidades demandas pelo mercado.

Palavras chaves: Pesquisa Operacional, Otimização, Multiplicadores de Lagrange, Método Simplex, Programação Linear, Programação Não Linear.

BARROS, JOSÉ THIAGO I. Otimização Industrial: Uma Abordagem Prática. São Paulo, 2019. Monografia de Especialização (MBA Engenharia Financeira) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

ABSTRACT

This paper aims to present a practical approach to optimization in a manufacturing industry. The idea is to demonstrate in general the operational research techniques using the linear programming method, the simplex method, Lagrange multipliers and nonlinear programming.

After presenting the respective methods, the work is limited to the focus of a linear model for a company that, working in the heavy metallurgy transformation industry and, given the product portfolio with its contribution margins, will have the challenge of seeking, by applying the entire linear programming technique, the optimal production mix that aims to maximize profit. For this, the model will have to meet the established restrictions, such as not exceeding the total fixed production costs, the total available productive hours and the quantities demanded by the market.

Keywords: Operational Research, Optimization, Lagrange Multipliers, Simplex Method, Linear Programming, Nonlinear Programming.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLEAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Considerando que as companhias prezam pela racionalidade, a busca pela excelência e a máxima produtividade, concomitante ao mínimo desperdício, o alcance dessas metas torna-se desafios impostos a todos os agentes econômicos. O objetivo deste trabalho será analisar e apresentar um estudo de caso ilustrando a contribuição que a pesquisa operacional oferece às empresas industriais para assuntos relacionados à otimização (maximizar ou minimizar) de seus processos e operações, ajudando-as a superar estes desafios.

O estudo de caso será realizado através da aplicação de um modelo de programação linear inteira para uma empresa industrial que possa trazer uma análise objetiva, para fundamentar as escolhas de produção e venda de um produto em detrimento de outro, embasado num modelo matemático racional embasando as decisões.

Segundo Winston (1995), programação inteira estabelece que uma ou mais variáveis de decisão da programação matemática sejam representados apenas por valores inteiros. O algoritmo de Branch and Bound é o mais utilizado atualmente para esse tipo de programação. O procedimento consiste em dividir o conjunto de soluções viáveis em subconjuntos sem intersecções entre si, calculando-se os limites inferiores e superiores para cada subconjunto e eliminando-os em concordância com a regras estabelecidas.

Serão apresentados no primeiro capítulo alguns aspectos históricos da Pesquisa Operacional (PO).

O segundo será dedicado a algumas técnicas, tais como a programação linear, programação não linear, método simplex e multiplicadores de Lagrange.

No terceiro será abordada a situação problema para uma indústria de transformação de metalurgia pesada. O desafio será maximizar o lucro diante do *mix* de produção que a empresa oferece, as restrições serão o total de custo fixo, as horas disponíveis a serem utilizadas na produção e produtos que devem ser produzidos atendendo a demanda de marcado de cada um dos produtos.

O conceito de margem de contribuição será empregado a fim de nortear a visão dos produtos com maior margem, contribuindo assim para o alcance do objetivo proposto.

Obviamente nem sempre o melhor *mix* de produção de uma empresa é absorvido pelo mercado já que empresas inseridas em mercados competitivos e até mesmo em oligopólios não tem garantias de que isto ocorra. Entretanto, o trabalho visa também oferecer ao departamento comercial uma visão da melhor combinação possível do portfólio, possibilitando assim um *sales force* direcionado para a otimização do lucro.

O quarto capítulo traz o resultado o obtido pelo modelo de Programação Linear Inteira.

Para a aplicação do modelo será usado o *software* Excel, utilizando a ferramenta *solver*.

No último capítulo serão abordados a conclusão e as considerações gerais sobre o trabalho.

1.1 Fatores Históricos

A Pesquisa Operacional (PO) está contida no campo da matemática aplicada. A otimização de funções lineares sofreu grande transformação em 1939, quando o estudante George Dantzig[1] chegara atrasado para a aula do professor Jerzy Neyman, na Universidade de Berkely.

O problema resolvido por Dantzing (resolvido por acaso, pois como havia chegado atrasado, pensou se tratar de um exercício para entrega futura), foi objeto de estudo e refinamento por oito anos de forma secreta, pois a técnica era considerada importantíssima pelo Governo Americano. De acordo com Colin (2018, p.3): “Entre 1941 e 1945, Dantzig trabalhou no Pentágono, órgão de defesa americano, como especialista em planejamento e programação de atividades miliares. Posteriormente, continuou trabalhando no mesmo órgão em outras funções como conselheiro em matemática da Força Aérea”. George Dantzig desenvolveu boa parte da técnica que seria batizada de pesquisa operacional.

Para Silva et al. (1998) apresentam a Pesquisa Operacional como a utilização de um método de descrição de um sistema organizado, auxiliado por um modelo definido. De forma que experimentações desse modelo levam a maneira ótima de operar o sistema.

De acordo com Andrade (1998) a Pesquisa Operacional é apresentada como um método científico para tomada de decisões, por meio da elaboração de modelos, que permitem simulações para se encontrar o ponto ótimo dos objetivos propostos.

Segundo Hamandy (2008, p.1) “As primeiras atividades formais de pesquisa operacional (PO) foram iniciadas na Inglaterra durante a Segunda Guerra Mundial, quando uma equipe de cientistas britânicos decidiu tomar decisões com bases científicas sobre a melhor utilização de material de guerra. Após a guerra, as ideias propostas para operações militares foram adaptadas para melhorar a eficiência e a produtividade do setor civil. ”

[1] George Dantzig faleceu em 2005 de complicações das diabetes e doenças cardiovasculares.

Ainda de acordo com Colin, a primeira aplicação não militar da programação linear aconteceu em 1952, com a mistura ótima de produtos na produção de gasolina. No Brasil, a primeira publicação sobre Programação Linear ocorreu em 1956, publicada por Leme.

No ano de 1951, Robert Dorfman, no ***Activity of Production and Allocation*** (Análise de Atividade de Produção Alocada), chamaria a técnica proposta por Dantzig de ***Simplex Method*** (Método Simplex).

Dantzig publicou em 1963 um artigo chamado ***Linear Programming and Extensions*** (Programação Linear e Extensões), desde então, foi considerado o “pai” da Pesquisa Operacional, entretanto, como mencionado por Hamandy, antes da publicação de Dantzing, já havia trabalhos importantes sobre o tema.

Outros grandes estudos na área foram surgindo, como o do físico e matemático holandês Charles Koopmans e do matemático e economista russo Leonid Vitaliyevich Kantorovich, ambos laureados com o Prêmio Nobel de Economia no ano de 1975.

Koopmans tinha um grande brilhantismo intelectual, ademais, era dotado de um grande senso de justiça e fortes convicções; ele ficara tão indignado pelo fato de Dantzing não ter ganhado o prêmio que doou 1/3 do mesmo após recebê-lo (Balinsk, 1991, p.12). Aparentemente, o motivo de Dantzing não ter recebido o prêmio foi a sua descoberta não ter aderido as exigências da Real Academia Sueca de Ciências. As descobertas de Dantzing não foram publicadas rapidamente porque foram utilizadas originalmente para causas militares.

Desde então, a otimização de funções com restrições implicaria em utilizar a técnica de programação linear (Dantzig) ou a de Lagrange para funções não lineares.

2 PROGRAMAÇÃO LINERAR

Segundo Colin (2018), programação linear (PL) lida com problemas de alocação ótima de recursos escassos para a realização de atividades. Por ótimo entende-se que não há outra solução melhor que a oferecida pela PL, podendo haver outras tão boas quanto.

Para Bazaraa, Jarvis e Sherali (2009, tradução nossa) “A programação linear se preocupa com a otimização (minimização ou maximização) de uma função linear enquanto satisfaz um conjunto de igualdade linear e/ou restrições ou restrições às desigualdades. ”

A programação linear faz parte de um ramo de estudos interdisciplinar da matemática aplicada, interdisciplinar porque abrange em seu campo de estudos disciplinas como estatística, matemática, algoritmos, simulação de monte carlo, etc. Tem como objetivo principal a formulação de modelos matemáticos para dar suporte à tomada de decisões de problemas complexos. Sua aplicação abrange uma grande gama de assuntos e áreas do conhecimento, atuando na solução de problemas nas áreas de renovação urbana, investimentos, planejamento de produção, controle de misturas de materiais, finanças avançadas, assuntos bélicos, entre muitos outros.

De acordo com Taha (2007) a PO é uma ciência e uma arte, é uma ciência em virtude das técnicas matemáticas que incorpora e é uma arte porque o sucesso das fases que resultam na solução do modelo matemático depende em grande parte da criatividade e da experiência da equipe de pesquisa operacional.

Para que algum modelo de PO seja implementado, algumas fases precisam ser analisadas, são elas:

1. **Definição do Problema** => esta é a fase inicial do modelo, é preciso entender qual é o objetivo da modelagem, quais resultados são desejados alcançar, definindo assim o escopo do problema sob investigação;

2. **Construção do modelo** => nessa fase procura-se estabelecer os conceitos matemáticos a serem utilizados, para isso, é preciso definir a **função objetivo**. Segundo Colin (2018 p. 7) a função objetivo representa o principal objetivo do

tomador de decisão. Ela é de dois tipos: **minimização (**custos, chance de perda, desvio do objetivo, etc.) ou **maximização** (de lucro, receita, utilidade, bem estar, riqueza, chance de sobrevivência, etc.). Nessa fase também se define as regras que o modelo irá obedecer, isso quer dizer quais serão as limitações dos recursos ou das atividades associadas ao modelo, tais limitações são chamadas de **restrições**;

3. **Solução do modelo** => nessa etapa, as utilizações dos algoritmos de otimização apresentarão os resultados obtidos na modelagem da PO;

4. **Validação do modelo** => a fase de validação do modelo consiste em analisar os resultados obtidos e se os mesmos estão aderentes aos objetivos esperados.

5. **Implementação da solução** => validado os resultados e comprovando a sua aderência, o modelo deve ser calibrado e implementado.

As fases apresentadas podem ser demonstradas também através do fluxograma de operações proposto por Ragsdale (2017, p.6):

Figura 1 – Fluxo de fase de um modelo de PL

Fonte: O autor.

Atualmente, muitos *softwares* são utilizados para a aplicação da técnica, guardado as proporções, o Excel, através do solver ou o desenvolvimento de programas em VAB (*Visual Aplication Basic*), revolvem problemas complexos de PL.

2.1 O Modelo Simplex

O Método Simplex é uma técnica utilizada para determinar, numericamente, a solução ótima de um modelo de Programação Linear. (Ragsdale).

Atualmente, é difícil imaginar a resolução de problemas de programação linear reais sem o auxílio de computadores. Isso porque tais problemas são, na maioria dos casos, demasiadamente complexos, e sua solução de forma manual se torna inviável, tanto pelo tempo para a obtenção da resolução, quanto pela possibilidade maior de erros, uma vez que o autor/consultor poderá cometê-los em alguma etapa do desenvolvimento do cálculo. Ademais, o tempo é essencial para a tomada de decisões, isso implica em muitos casos na perda ou ganho de um negócio, a viabilidade de um projeto, etc.

Entender as soluções matemáticas encontradas pelo computador, o entendimento do Método Simplex é crucial.

Para apresentar o algoritmo simplex é preciso antes dizer que a função objetivo deve ser linear e as variáveis do problema devem ser maiores ou iguais a zero e as restrições devem ser lineares e de igualdade.

A descrição apresentada acima pode ser chamada de forma padrão (Colin) e escrita conforme abaixo:

$$Mim\ z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$\text{s.a.} \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{ln}\, x_n = k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}\, x_n = k_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m_1}x_1 + a_{m}x_2 + \ldots\ldots + a_{m_n}\, x_n = k_n \\ x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n >= 0 \end{array} \right.$$

Na forma padrão, pode-se acrescentar as variáveis de folga.

Em seguida, um exemplo de programação linear aplicado e outro sobre a resolução do método simplex:

Exemplo 1 (problema de programação linear inteira no Excel):

Considerando uma empresa industrial que produz essencialmente dois produtos, produto A e produto B. Nessa estrutura de produção, o produto A requer 9 horas de trabalho e 12 kg da matéria prima Z, enquanto que o produto B requer 6 horas de trabalho e 16 kg da matéria prima Z, ademais, os produtos requerem um 1kg para cada unidade da matéria prima X. O lucro gerado por unidade do produto A é de $ 350,00 e, para B, o lucro por unidade é de $ 300,00.

Em um determinado mês, a empresa se deparou com a seguinte situação:

Tem-se 200 kg da matéria prima X em estoque, as horas produtivas para o mês devem totalizar 1566 horas (a companhia não paga horas extras e não está disposta a ceder banco de horas aos seus colaboradores) e, para a matéria prima Z, a empresa conta com 2880 kg.

Diante do cenário apresentado, a empresa deve determinar o número ideal de produtos A e B a ser produzidos a fim de maximizar o lucro diante das restrições de horas produtivas disponíveis e matérias primas.

Logo, o problema pode ser escrito da seguinte forma:

$$\boldsymbol{MAX}: \quad 350xa + 300xb -> Lucro$$

Sujeito a:

$$1xa + 1xb \leq 200 - restrição\ da\ matéria\ prima\ X$$

$$9xa + 6xb \leq 1556 - restrição\ da\ mão\ de\ obra$$

$$12xa + 16xb \leq 2880 - restrição\ da\ matéria\ prima\ Z$$

$$1xa \geq 0 - limite\ inferior\ simples$$

$$1xb \geq 0 - limite\ inferior\ simples$$

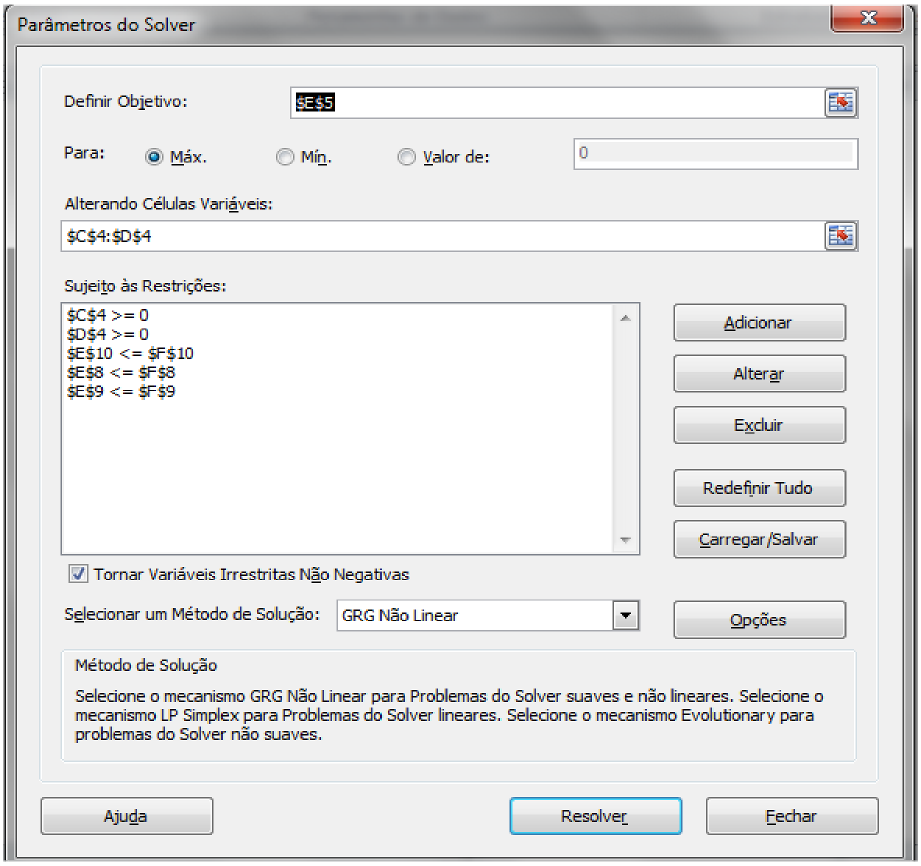
Figura 2 - Modelagem no Excel para PPL.

	A	B		
Produção			**Lucro Total**	
Lucro Unitário	350	300		
Restrições			**Usadas**	**Disponíveis**
Matéria prima X	1	1		200
Horas Disponíveis	9	6		1566
Matéria Prima Z	12	16		2880

Fonte: Criado pelo autor.

As células na cor amarela receberão as fórmulas e resultados da aplicação do modelo de programação linear. Para esta aplicação, será utilizado a ferramenta solver, disponível no Excel.

Figura 3 - Parâmetros do Solver PPL.



Fonte: Excel 2010.

Abaixo, a solução do problema após a resolução do Solver:

Figura 4 – Resultados do Solver na aplicação do PPL.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		**Produtos**	**A**	**B**			
4		**Produção**	122	78	**Lucro Total**		
5		**Lucro Unitário**	350	300	66100		
6							
7		**Restrições**			**Usadas**	**Disponíveis**	
8		**Matéria prima X**	1	1	200	200	
9		**Horas Disponíveis**	9	6	1566	1566	
10		**Matéria Prima Z**	12	16	2712	2880	
11							
12		**Fonte: Criado pelo autor.**					

Fonte: O autor.

O resultado apresentado pelo solver mostra a solução ótima para maximizar o lucro diante das restrições impostas. As quantidades ótimas de cada produto a ser produzido foi de 122 unidades do produto A e 78 do B. O lucro total que se pode esperar desse cenário é de $ 66.100,00.

Exemplo 2: resolução do método simplex com variáveis de folga

$$Max\ z = -2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

S.a.:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 \leq 3 \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq -2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3, Livre \end{cases}$$

Aplicando a forma padrão com as variáveis de folga tem-se:

$$Min\ z = 2x_1 + 3x_2 - 5\,(x_{3+} - x_{3-})$$

S.a.:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4(x_{3+} - x_{3-}) + S_1 = 3 \\ x_1 - 7x_2 + 3(x_{3+} - x_{3-}) - S_2 = 4 \\ -x_1 - 3x_2 - 2\,(x_{3+} - x_{3-}) + S_3 = -2 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_{3+} \geq 0, x_{3-} \geq 0$$

No exemplo acima houve troca de sinais, onde, na função original, o objetivo era maximizar e, para a função padrão com as variáveis de folga, houve a inversão, tendo como objetivo minimizar. A alteração está de acordo com o principio de que maximizar uma função é equivalente a minimizar o seu negativo

As variáveis de folga foram inclusas no problema sendo elas, $S_1, -S_2$ e S_3 .

Os passos que devem ser feitos para que a função esteja em sua forma padrão são:

- As restrições do tipo $\leq$ ou ≥ 0 podem ser restrições de igualdade, acrescentando uma variável de folga;
- Quando houve uma variável considerada livre (variável sem restrição de sinal), acrescenta-se duas variáveis não negativas, no exemplo as variáveis foram x_{3+}, ,x_{3-}.

Segundo Bazaraa (2010, tradução nossa), o método simplex também pode ser operacionalizado na forma matricial, para a sua resolução tal forma é também chamada de canônica, sendo do tipo $Ax = b$.

2.2 Programação Não Linear

Os problemas de programação não lineares são aqueles nos quais a função objetivo e/ou as restrições são descritos em funções não lineares.

> A definição de PNL (Programação Não Linear) é parecida com a definição do problema de programação linear. A diferença está basicamente no fato de que as funções usadas (tanto função-objetivo com restrições) possuem pelo menos ema relação não linear entre as variáveis. (Colin, 2018, p. 302).

Usualmente, um problema de programação não linear apresenta-se da seguinte forma:

Valores de decisão $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $que\ max.\ ou\ min\ z = f\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$
\text{S.a..}\quad
\begin{cases}
g_1\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)\ \ (\leq, =, ou \geq)\ b_1 \\
g_2\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)\ \ (\leq, =, ou \geq)\ b_2 \\
\quad\quad\quad . \\
\quad\quad\quad . \\
\quad\quad\quad . \\
g_m\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)\ \ (\leq, =, ou \geq)\ b_m
\end{cases}
$$

Onde $f\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é a função objetivo e $g_i\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)\ \ (\leq, =, ou \geq)\ b_i$ são as restrições do problema.

2.3 Multiplicadores de Lagrange

A otimização de funções e restrições não lineares foi concebida por Joseph Louis Lagrange por volta do início do século XIX. Em sua homenagem, a técnica foi batizada de Multiplicadores de Lagrange.

A técnica dos multiplicadores de Lagrange é utilizada, em muitos problemas de programação não linear, por exemplo, para obter a solução do problema de portfólio de mínima variância do modelo de Markowitz (Costa, Assunção 2005).

Sua finalidade consiste na solução de problemas de programação não linear com restrições de igualdade, a função pode ser escrita da seguinte forma:

$$Max\ (ou\ min)\ z = f\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\text{S.a..} \quad \begin{cases} g_1\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_1 \\ g_2\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_2 \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ g_m\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_m \end{cases}$$

A criação da técnica de otimização de Lagrange se relaciona com a função a ser otimizada com seu vínculo. Ackoff (1971).

Para sua aplicação, é associado ao modelo um multiplicador λ_i à $i - ésima$ restrição e forma-se a função denominada por alguns autores de Lagrangeana ou, para outros, chamada de a grande função, sendo da seguinte forma:

$$L\ (x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = f\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\ [b_i - g_i\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)]$$

Ela também objetiva detectar se há ponto de mínimo ou máximo local para a função, resultando na seguinte equação:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial L}{x_2} = \frac{\partial L}{x_3} =, \ldots, \frac{\partial L}{x_n} = 0$$

Segue exemplo dos multiplicadores de Lagrange aplicados na resolução do seguinte problema:

Exemplo 3

Maximizar $f(x, y) = x^2y$ onde os valores x e y estão sujeitos a x+y=4 (vínculo).

Tem-se:

Função Objetivo:

$$f(x, y) = x^2y$$

Vínculo:

$$\varphi = x + y - 4 = 0$$

Lagrangeano ou Grande Função:

$$g = f + \lambda\varphi$$

Resolvendo:

$$g = x^2 + \lambda(x + y - 4)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy + \lambda = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x^2 + \lambda = 0 \qquad (4)$$

Fazendo (3) $\lambda = -2xy$ que substituindo em (4) resulta em: $x = 2y$

Do vínculo $(x + y - 4 = 0)$:

Obtém-se os resultados:

$$x^* = 2{,}67$$

$$y^* = 1{,}33$$

Há também a solução para $x = 0$, λ = 0 e $y = 4$, porém a solução não é viável para o objetivos de maximização.

3 APRESENTAÇÃO DO ESTUDO DE CASO

Nesse capítulo será apresentado o estudo de caso, que consiste na aplicação de um modelo de programação linear inteira, tendo como objetivo encontrar o melhor *mix* de produção possível que maximize o lucro de uma empresa de metalurgia pesada.

A Companhia, objeto do estudo, está inserida na estrutura de mercado denominada oligopsônio, segundo Mankiw (2014), essa estrutura se caracteriza por haver poucos compradores de um determinado bem ou serviço. Sendo assim, os compradores exercem muita influência sobre os preços dos bens ou serviços.

Os dados utilizados para a realização do estudo foram extraídos dos livros contábeis da empresa, portanto, são reais. Foi observado a evolução dos gastos de fabricação e as horas de produção disponíveis num período de 21 meses. Essas duas variáveis são essências para a construção do modelo. Suas respectivas médias foram R$ 1.703.976,60 para os gastos diretos/indiretos de produção e 8.417,81 horas de produção disponíveis.

Por gastos diretos e indiretos de fabricação, entende-se por dispêndios que direta ou indiretamente estão ligados na produção efetiva de um produto ou serviço (MARTINS, 2003).

Os gastos diretos são aqueles que podem ser mensurados de forma inequívoca no custo de um bem ou serviço, tais como matéria prima, mão de obra direta, insumos diretos, etc. Já os indiretos não podem ser mensurados com exatidão, sendo necessário critério de rateio para que sejam alocados ao custo dos produtos, como exemplos tem-se energia elétrica, aluguel da fábrica, depreciação de máquinas e equipamentos, salários dos supervisores de produção, etc.

As horas disponíveis de produção correspondem ao total de horas pagas aos trabalhadores classificados como mão de obra direta. As horas de outros colaboradores como supervisores, ajudantes gerais, operadores de empilhadeira, assistentes de manutenção, etc., não estão classificados nessa categoria.

Os gastos fixos de produção são aqueles que não variam em função do volume de produção, ou seja, independentemente de produzir 1 ou 100 unidades de um bem ou serviço, eles se mantêm fixos, obviamente que o volume de gastos é suportado para um certo nível de capacidade produtiva. Caso não sejam apropriados aos produtos, há, portanto, uma perda no processo produtivo, uma vez que a empresa não poderá ativar os gastos em seu estoque sem que tenha havido produção efetiva.

Abaixo segue tabela 1 com as informações relativas aos gastos gerais de fabricação e as horas produtivas disponíveis:

Tabela 1 - Gastos gerais de Fabricação e Horas Produtivas Disponíveis

Meses	Gasto	Horas Disponíveis
1	1.494.401,18	7.994,91
2	1.691.358,73	8.514,52
3	1.714.892,75	8.760,84
4	1.559.833,28	7.646,33
5	1.733.128,93	8.026,18
6	1.628.612,35	7.934,20
7	1.665.319,03	7.630,17
8	1.756.095,82	8.744,02
9	1.837.113,20	9.096,72
10	2.004.192,81	8.914,28
11	2.123.910,32	8.982,03
12	1.929.109,96	8.970,05
13	1.536.771,27	8.619,14
14	1.696.511,74	8.411,69
15	1.732.365,37	8.313,63
16	1.505.608,80	8.028,24
17	1.620.538,97	8.641,22
18	1.487.288,45	8.197,87
19	1.615.634,32	8.535,92
20	1.692.610,36	8.133,17
21	1.758.210,94	8.678,84
TOTAL	**35.783.508,58**	**176.773,98**

Fonte: O autor.

A modelagem para o estudo considera que todo gasto de produção deverá ser totalmente alocado aos produtos, não havendo possibilidades para ociosidade ou perda. O total dos gastos gerais de fabricação, será uma das restrições do modelo.

Tecnicamente, o gasto de mão de obra direta é considerado variável, entretanto, na prática corrente, esse dispêndio é tratado como custo fixo, uma vez que, contratado um trabalhador, seus vencimentos deverão ser pagos, independentemente de ele produzir ou não em um determinado mês. Por esse motivo, as horas disponíveis para produção são um elemento importante na formulação do modelo, sendo também uma restrição. A meta é utilizá-las em sua totalidade no processo de elaboração dos produtos.

Os gastos com matéria prima e outros insumos não estão contidos nos gastos gerais de fabricação, isso porque seu volume efetivo depende diretamente do nível de produção, portanto, são classificados como gastos variáveis de produção.

É importante salientar que existem ainda outros gastos que ocorrem numa empresa, tais como gastos administrativos (salário dos administradores, dos gerentes, energia elétrica da área administrativa, material de escritório, depreciação dos bens administrativos, aluguel da área administrativa, etc.), gastos comerciais (comissão para vendedores, gasto com fretes dos produtos vendidos, gastos com propaganda, feiras e eventos, etc.), porém, esses, não são considerados gastos de produção, sendo classificados como despesas, assim também ocorre com os gastos financeiros, como despesas bancárias, despesa de juros sobre empréstimos, etc.

Os gastos administrativos e comerciais fazem parte do modelo, o lucro deve cobrir ambas as despesas. Eles também foram aferidos, onde a média mensal ficou em R$ 870.000,00 para as despesas administrativas e R$ 550.000,00 para as despesas comerciais.

A tabela 2, traz as informações necessárias ao entendimento e formulação matemática do modelo.

O portfólio da empresa é constituído de 18 produtos que serão produzidos e vendidos de acordo com a decisão da modelagem, esta informação está ilustrada na primeira coluna (x_i). Para efeito de sigilo, os produtos serão descritos como $x_1, x_2, \ldots, x_{18}$, correspondendo assim a cada um dos itens. A segunda coluna (h_i) corresponde as horas necessárias para a produção de cada item. Na terceira (g_i) é apresentado o valor do gasto de produção unitário, na quarta coluna, tem-se a margem de contribuição gerada por cada unidade produzida e vendida, o sub tópico 3.1 aborda de forma conceitual a definição de margem de contribuição.

Continuando a apresentação da tabela 2 (D_{max_i}), a quinta coluna traz a demanda de mercado por cada item. Ela representará mais uma restrição, isso porque a quantidade de produtos a serem produzidos não pode excedê-la.

Segue a tabela 2 com as informações descritas acima:

Tabela 2 - Portfólio dos Produtos Comercializáveis

Informações para cada unidade				
x_i	h_i	g_i	c_i	D_{maxi}
x1	*300,00*	*32.945,00*	*84.189,55*	*8*
x2	*385,24*	*32.945,00*	*88.987,46*	*8*
x3	*341,41*	*32.458,12*	*60.661,16*	*20*
x4	*321,40*	*50.332,15*	*96.766,53*	*20*
x5	*108,21*	*12.258,98*	*26.280,92*	*40*
x6	*104,72*	*11.450,85*	*23.159,59*	*72*
x7	*998,73*	*102.665,30*	*255.748,05*	*8*
x8	*111,65*	*11.478,69*	*26.280,92*	*30*
x9	*220,07*	*52.123,07*	*98.257,81*	*8*
x10	*194,11*	*40.675,25*	*56.237,54*	*35*
x11	*34,22*	*7.170,69*	*50.803,55*	*20*
x12	*214,63*	*44.975,28*	*136.804,00*	*15*
x13	*68,98*	*13.963,28*	*22.157,79*	*12*
x14	*90,19*	*18.899,99*	*40.632,82*	*18*
x15	*7,46*	*1.564,10*	*2.802,57*	*12*
x16	*109,02*	*22.845,87*	*23.159,60*	*50*
x17	*30,08*	*6.303,56*	*43.920,15*	*40*
x18	*65,25*	*13.673,32*	*24.554,40*	*10*

Fonte: O autor.

3.1 Margem de Contribuição

Um indicador muito utilizado para medir a performance de uma empresa é o EBIT[2], sigla em inglês que significa *Earnings Before Interest and Taxes*, é calculado através da fórmula:

Receita de Vendas (–) Despesas Variáveis (=) Vendas Líquidas (–) Custo dos Produtos vendidos (=) Resultado Bruto (–) Despesas Administrativas (–) Desp. Comerciais (=) **EBIT**.

Outro importante indicador de avaliação é a margem de contribuição, nele pode-se analisar quanto cada produto vendido contribui para o pagamento dos custos e despesas fixas de uma empresa. Em sua formulação, o preço de venda dos produtos ou serviços é deduzido dos custos e despesas variáveis. Abaixo a forma estrutural para o cálculo:

$$\boldsymbol{Receita\ Bruta\ de\ Vendas}$$

Despesas Variáveis

$$(-)\ Impostos\ sobre\ vendas$$

$$(-)\ Comissões$$

$$(-)\ Devoluções$$

$$(-)\ Fretes\ para\ entrega\ dos\ Produtos^{3}$$

$$(=)\ \boldsymbol{Receita\ Líquida\ de\ Vendas}$$

Custos Variáveis

$$(-)\ Custo\ de\ Matéria\ Prima$$

$$(-)\ Custo\ de\ Mão\ de\ Obra\ Direta$$

$$(-)\ Custo\ de\ Energia\ Elétrica$$

$$(-)\ Custos\ de\ Insumos\ de\ Produção$$

---

[2] Na contabilidade brasileira o EBIT é chamado de Resultado Operacional.

[3] Esta despesa de transporte não se confunde com o transporte de compras de matéria prima, este último é tratado como ativo num primeiro momento, pois agrega ao valor da matéria prima em questão e, depois, torna-se custo, quanto o produto cuja matéria prima foi utilizada for vendido.

$$(-)\ Outros\ Custos\ Variáveis\ de\ Produção$$

$$(=)\ \boldsymbol{Margem\ de\ Contribuição}$$

Custos e despesas Fixas	$\{$ $(-)\ Custos\ e\ despesas\ fixas$

As avaliações de decisão feitas pela Direção da companhia têm como um dos principais indicadores a margem de contribuição.

Partindo do conceito que os custos e despesas fixas não variam em função do volume de produção, os mesmos terão volumes e quantias fixas, daí surge a necessidade de saber quanto cada produto está contribuindo para paga-los.

Para ilustrar, segue análise da margem de contribuição do produto x_1 que é de R$ 84.189,55, isto quer dizer que o respectivo produto contribui em 43,14% para o pagamento dos custos e despesas fixas da companhia, neste caso os gastos gerais de fabricação e as despesas administrativas e comerciais.

Nota-se que a margem de contribuição do produto x_1 foi obtida da seguinte forma:

$$Preço\ de\ venda\ líquido -\ R\$\ 195.175{,}20$$

$$(-) Matéria\ Prima -\ R\$\ 110.985{,}65$$

$$(=)\ Margem\ de\ Contribuição\ =\ R\$\ 84.189{,}55$$

É importante destacar que o valor de margem de contribuição não é o custo de fabricação do produto, isso porque não foram alocados a ele os gastos gerais de fabricação.

Outro aspecto fundamental reside no volume, considerando que seja produzido e vendido duas unidades do produto x_1 os valores seriam o seguinte:

$$Receita\ de\ venda\ líquida -\ R\$\ 390.350{,}40$$

$$(-) Matéria\ Prima -\ R\$\ 221.971{,}30$$

$$(=)\ Margem\ de\ Contribuição\ =\ R\$\ 168.379{,}10$$

O valor de R$ 168.379,10 continua a representar os 43,14% de margem de contribuição, mas, os valores nominais da receita de vendas, matéria prima e margem de contribuição cresceram. Entretanto, os custos e despesas fixas permaneceram inalteradas independentemente do volume de produção e vendas do produto x_1.

Alguns cuidados devem ser tomados na hora de decidir quais produtos fabricar em detrimento de outros. Não necessariamente um produto que ofereça melhor margem de contribuição deverá ser totalmente privilegiado, alguns fatores como a demanda de mercado e o *mix* de produção devem ser levados em consideração, por esse motivo que o modelo de programação linear inteira ajuda na seleção do portfólio ótimo, isso será demonstrado adiante.

3.2 Formulações do Problema de Programação Linear Inteira

Apresentado os objetivos, finalidades e restrições do modelo de programação linear inteira, define-se agora as regras matemáticas para sua aplicação, abaixo a descrição do problema (os valores dos parâmetros são apresentados na Tablea2):

Função Objetivo:

$$\boldsymbol{Max\ L}: c_1x_1 + \cdots + c_{18}x_{18} - K - W - Z = Lucro \quad (1)$$

Onde:

L = Função a ser maximizada (margem de contribuição por produto) subtraindo as constantes $K, W\ e\ Z$, respeitando o conjunto de restrições;

c_i = margem de contribuição gerada por cada produto do portfólio (ver Tabela 2);

x_i = variável decisória que representa os itens do portfólio da empresa que deverão ser produzidos e vendidos de acordo com a escolha do modelo (ver Tabela 2);

K = constante que representa os gastos gerais de fabricação - 1.703.976,00;

W = constante que representa as despesas administrativas - 870.000,00;

Z = constante que representa as despesas comerciais - 550.000,00;

Sujeito às seguintes restrições:

$$h_1 x_1 + \cdots + h_{18} x_{18} \leq 8.417{,}81 \ (Restrição\ de\ horas\ pord.disponíveis) \quad (2)$$

Onde:

h_i = representa a quantidade de horas de produção de cada produto (ver Tabela 2).

$$g_1 x_1 + \cdots + g_{18} x_{18} \leq 1.703.976{,}00 \ (Rest.de\ gastos\ gerais\ de\ fabricação) \quad (3)$$

Onde:

g_i corresponde ao gasto geral de fabricação apropriado a cada item produzido (ver Tabela 2).

$$x_i \leq Dmax_i \ (Restrição\ de\ Absorção\ do\ Mercado\ pelos\ produtos) \quad (4)$$

Onde:

$Dmax_i$ = corresponde a produção dos itens, podendo ser igual à quantidade demanda dos itens, porém, não a excedendo (ver Tabela 2).

Onde:

$x_i \geq 0$

$$x_1; x_2; x_3; \ldots; x_{18} \in \mathbb{N} \quad (5)$$

A variável de decisão será a quantidade a ser produzida de cada item, respeitando as seguintes restrições:

1º a quantidade produzida de cada item não deve exceder a demanda de mercado, isso pode ser vista pela descrição da restrição acima, onde a quantidade produzida de $x_1, x_2, \ldots, x_{18}$ deve ser menor ou igual a demanda de mercado por cada item;

2º a somatória das horas padrão de produção deve ser igual ao total das horas produtivas disponíveis que são 8.417,81 horas. A intenção da companhia é não gerar excedente de horas extras e não gerar ociosidade;

3º os gastos gerais de fabricação devem ser apropriados totalmente aos produtos, sendo assim a somatória do gasto de fabricação deve ser igual ao total dos gastos gerais de fabricação que é de R$ 1.703.976,00;

4º a produção dos itens deve ser maior ou igual a zero;

5º por se tratar de um problema de programação linear inteira, as quantidades dos itens produzidos não devem ser fracionadas, matematicamente, devem pertencer ao conjunto dos números naturais.

O modelo proposto será resolvido utilizando o Software Excel com a aplicação da ferramenta solver (Método Simplex). Os resultados da modelagem serão apresentados e explicados no capítulo seguinte.

4 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS

O resultado encontrado pelo modelo de programação linear inteira apresentou o *mix* ótimo de produção, alcançando o objetivo de maximizar o lucro da companhia.

A tabela 3 explica os resultados. Na primeira coluna encontram-se os códigos dos produtos, a segunda traz as quantidades a serem produzidas dos itens escolhidos. De acordo com os cálculos da modelagem, o *mix* ótimo é composto por uma unidade do produto x_1, seis do produto x_9, vinte do item x_{11}, quinze para x_{12}, dezoito para o produto x_{14} e quarenta unidades do x_{17}.

O faturamento dos itens selecionados é de R$ 8.389.697,34, gerando uma margem de contribuição de R$ 6.233.874,81. As restrições do problema foram todas atendidas integralmente, onde o total dos gastos gerais de fabricação foi alocado no custo dos produtos, vide coluna quatro. As horas produtivas disponíveis também foram todas utilizadas, conforme apresentado na coluna cinco.

A restrição da demanda de mercado também foi satisfeita, onde as quantidades de produção dos itens selecionados são iguais ou menores que as quantidades absorvidas pelo mercado, posto na coluna seis.

Na quinta coluna estão os gastos com a matéria prima, eles estão diretamente ligados ao volume de produção de cada item, totalizando R$ 2.155,822,53.

O lucro otimizado pelo modelo foi de R$ 3.109.898,81, correspondendo a uma margem líquida de 37,07% do faturamento, esse valor é, portanto, o maior possível diante das variáveis e restrições impostas, sendo assim, o objetivo da modelagem foi cumprido.

A somatória das vendas líquidas é dada pelo preço de venda unitário dos produtos multiplicado pela quantidade produzida dos itens, o mesmo ocorre com o GGF (Gastos Gerais de Fabricação), com as horas utilizadas na produção e com a matéria prima.

A margem de contribuição gerada foi suficiente para cobrir os custos variáveis (no caso a matéria prima), os custos fixos (gastos gerais de fabricação) e também as despesas administrativas e comercias, gerando ainda lucro para a companhia.

Os valores financeiros estão devidamente apresentados no DRE (Demonstrativo do Resultado do Exercício) proforma (Figura 5).

Tabela 3 - Resultado da Programação Linear

Codigo Item	*Produção*	*Horas*	*GGF*	*Matéria Prima*	*Mercado*
X_1	1,00	300,00	32.945,13	110.986,07	8,00
X_2	-	-	-	-	8,00
X_3	-	-	-	-	20,00
X_4	-	-	-	-	20,00
X_5	-	-	-	-	40,00
X_6	-	-	-	-	72,00
X_7	-	-	-	-	8,00
X_8	-	-	-	-	30,00
X_9	6,000	1.333,78	314.313,92	241.508,22	8,00
X_{10}	-	-	-	-	35,00
X_{11}	20,00	697,78	144.996,73	383.856,16	20,00
X_{12}	15,00	3.232,78	676.212,14	879.863,16	15,00
X_{13}	-	-	-	-	12,00
X_{14}	18,00	1.636,86	341.782,78	206.119,18	18,00
X_{15}	-	-	-	-	12,00
X_{16}	-	-	-	-	50,00
X_{17}	40,00	1.216,64	253.725,32	291.824,44	40,00
X_{18}	-	-	-	-	10,00
		8.417,83	**1.763.976,01**	**2.114.157,23**	

Fonte: O autor.

Figura 5 - Demonstrativo do Resultado do Exercício

DRE

Vendas Líquidas	***8.389.697,34***	*100%*
(-) Custo Material	*2.155.822,53*	*25,70%*
(=) Margem Contribuição	***6.233.874,81***	*74,30%*
(-) Custos gerais Produção	*1.703.976,00*	*20,31%*
(=) Margem Bruta	***4.529.898,81***	*53,99%*
(-) Desp. Administrativas	*870.000,00*	*10,37%*
(-) Desp. Comercias	*550.000,00*	*6,56%*
(=) Resultado antes do IRPJ	***3.109.898,81***	*37,07%*

Fonte: O autor.

Os números que suportam o faturamento estão apresentados na tabela 4 abaixo:

Tabela 4 - Preço Líquido de Venda e Custo de Matéria Prima dos Produtos.

Codigo Item	***Custo Materia Prima***	***Preço Líquido de venda***
X_{1}	*110.985,65*	*195.175,20*
X_{2}	*110.985,65*	*199.973,11*
X_{3}	*94.338,84*	*155.000,00*
X_{4}	*42.887,03*	*139.653,56*
X_{5}	*13.719,08*	*40.000,00*
X_{6}	*13.719,08*	*36.878,67*
X_{7}	*125.163,95*	*380.912,00*
X_{8}	*13.719,08*	*40.000,00*
X_{9}	*40.252,33*	*138.510,14*
X_{10}	*19.012,46*	*75.250,00*
X_{11}	*19.192,81*	*69.996,36*
X_{12}	*58.657,54*	*195.461,54*
X_{13}	*3.522,21*	*25.680,00*
X_{14}	*11.451,07*	*52.083,89*
X_{15}	*2.331,49*	*5.134,06*
X_{16}	*13.719,08*	*36.878,68*
X_{17}	*7.295,61*	*51.215,76*
X_{18}	*8.005,60*	*32.560,00*

Fonte: O autor.

Para validar o alcance da otimização, pode-se apresentar de forma numérica a equação do problema, sendo escrito da seguinte forma:

$$1RV - 0{,}2570\,RV - 1.703.976{,}00 - 870.000{,}00 - 550.000{,}00 = 0{,}3707RV$$

Onde:

$1RV = Total\ da\ Receias\ de\ Vendas$;

0,2570 RV = Percentual dos gastos variáveis sobre a Receita de Vendas (No caso o percentual da matéria prima);

1.703.976,00 = Gastos Gerais de Fabricação;

870.000,00 = Gastos Administrativos;

550.000,00 = Gastos Comerciais;

0,3707 RV= Percentual de lucro otimizado apresentado pelo modelo.

Operando a equação tem-se:

$$0{,}3723RV = 3.123.976{,}00 \Rightarrow RV = 3.123.976{,}00/0{,}3723$$

$$RV = 8.391.018{,}00$$

A interpretação do resultado da equação diz que para que haja um lucro de 37,07% sobre a receita de vendas, subtraindo os custos e despesas apresentados, o faturamento deve ser de 8.391,018,00, gerando um lucro aproximado de R$ 3.109.898,81.

4.1 Fatores Positivos e Negativos dos Resultados da Modelagem

Encontrar o *mix* ótimo de produção através do modelo de programação linear inteira oferece aos tomadores de decisão da companhia uma visão dos produtos com maior margem de contribuição, cobrindo os custos e despesas fixas e, ainda, maximizando o lucro da empresa, atendendo também as restrições envolvidas no modelo.

O fator positivo desse estudo reside no fato dos produtos selecionados para produção serem absorvidos pelo mercado, sendo assim, os tomadores de decisão poderiam aderir a produção e venda destes, outro fator importante é que o departamento comercial, através dos resultados obtidos, pode direcionar seus esforços de venda para os produtos escolhidos.

Muitos dos negócios gerados no mercado onde a empresa atua se dá por força de contrato, se o departamento comercial conseguir se antecipar nas demandas dos clientes, o mix ótimo poderá ser ofertado de forma mais consistente, assim, caso a demanda pelos produtos sejam firmes ao longo de um exercício anual por exemplo, a Direção da empresa poderia priorizar a sua produção e oferta no portfólio selecionado pelo modelo, assim a maximização do lucro estaria assegura, nenhuma outra combinação de produção com a atual conjuntura (nível de gastos fixos de produção e horas disponíveis) seria capaz de maximizar o lucro como a seleção escolhida pelo modelo.

Contudo o processo de tomada de decisões pode não se restringir somente em conhecer o melhor *mix* de produção, outros aspectos devem ser levados em consideração.

No campo estratégico, caso a empresa decida ofertar seu *mix* ótimo de produção, ela poderá abrir espaço para outro concorrente atuar nas vendas dos produtos que deixar de produzir. Isso poderá criar uma nova forma de atuação no mercado, por isso é importante saber como o mercado irá reagir caso essa seja a opção estratégica definida pela empresa.

Perguntas devem ser feitas e analisadas, por exemplo:

Qual (is) concorrente (s) poderia ofertar os produtos que deixaram de ser produzidos pela empresa? Isso poderia criar uma nova força de marcado? A política de preços poderia sofrer alterações?

Outro concorrente poderia entrar nesse mercado ofertando os produtos que a empresa deixar de oferecer? Se sim, qual seria o impacto?

Pensando estrategicamente, não faria sentido ofertar pelo menos um dos produtos aos clientes para manter a posição da companhia do mercado?

Mais um ponto que deve ser analisado é que numa estrutura de marcado oligopsônista, os compradores exercem muita influência em relação aos preços dos produtos, se eles descobrem que a oferta dos produtos que maximizam o lucro da companhia está sendo priorizado, eles poderiam reduzir a demanda, comprando talvez de outro concorrente mesmo pagando um pouco mais caro, isso faria com que a empresa tenha que voltar a oferecer os outros produtos que ficaram preteridos, isso poderia gerar uma mudança nos preços e, consequentemente as margens de lucro e de contribuição seriam alteradas.

Um modelo de programação linear é extremamente útil para as empresas, entretanto, dependendo da estrutura de mercado na qual a empresa esteja, outros aspectos devem ser levados em consideração, a fim de não penalizar os futuros resultados baseando-se apenas na decisão do modelo de programação implementado.

Entretanto é indiscutível a contribuição que a pesquisa operacional oferece ao mundo dos negócios, sua aplicabilidade não pode ser ignorada em nenhuma hipótese, uma vez que os modelos trazem respostas precisas que auxiliam de forma indispensável na toma das decisões empresariais.

5 CONCLUSÃO

O trabalho teve a intenção de apresentar, de forma prática, a contribuição da Programação Linear Inteira como ferramenta auxiliadora na tomada de decisão para um problema de *mix* de produção em uma empresa metalúrgica. O foco foi maximizar o lucro dessa empresa mediante ao atendimento das restrições estabelecidas como alocar o total dos gastos gerais de fabricação ao custo dos produtos, apropriar todas as horas disponíveis de produção no processo de fabricação, não exceder a quantidade de produtos a demanda estabelecida de mercado e gerar um lucro capaz ainda de absorver os gastos administrativos e comerciais.

Vale destacar que o modelo poderá ser adaptado para outros cenários, entretanto, os ajustes devem convir com a nova necessidade, avaliando quais serão as restrições e variáveis de decisão.

Pode-se supor por exemplo que a empresa tenha que fornecer uma determinada quantidade de um produto qualquer de seu portfólio por força de contrato, diante dessa nova restrição o *mix* ótimo e a maximização do lucro seriam outros.

De acordo com os resultados apresentados, considera-se que o trabalho cumpriu com os objetivos propostos, sendo assim, este estudo configura-se em uma oportunidade de aplicação dos conceitos abordados em empresas similares ao da companhia objeto do estudo.

O software utilizado para a modelagem desse estudo foi o Excel 2010, o mesmo atendeu as necessidades, mostrando-se suficiente para os objetivos do modelo.

Softwares mais precisos que o Excel estão disponíveis no mercado, tais como o R, Matlab, Lindo, TORA, etc. Para problemas de maior porte numérico, recomenda-se realizar uma análise comparativa entre os softwares para melhor aproveitamento nas aplicações, verificando qual é o mais adequado para diferentes aplicações dos estudos de Pesquisa Operacional (problemas de programação linear inteira, mista, programação não linear, algoritmos genéticos, etc.).

Julga-se ser de grande importância a aplicação de ferramentas de pesquisa operacional para que a mesma possa servir de embasamento nas tomadas de decisão em níveis gerenciais. Para tanto, é fundamental que o departamento de programação dos modelos esteja em linha com o departamento de execução visando mapear as restrições envolvidas no processo de modo que o modelo matemático esteja em harmonia com a realidade, tornando assim a programação aderente aos objetivos desejados com a modelagem.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ackoff, R., & Sasieni, M. W. (1971). *Pesquisa Operacional .* Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Cinetíficos Editora .

Andrade, E. L. (1998). *Introdução à pesquisa operacional.* Rio de Janeiro: LCT.

Colin, E. C. (2018). *Pesquisa Operacional .* São Paulo: Atlas.

Costa, O. L., & Assunção, H. G. (2005). *Análise de Risco e Retorno em Investimentos Financeiros.* Barueri: Manole.

Dantzig, G. (1963). *Linear Programming and extentions.* Princeton: Princeton University Press.

Junior, L. S. (2011). *Álgebra Linear.* São Paulo: GENGAGE.

Luenberger, D. (1973). *Introduction to linear and nonlinear programming .* Wesley.

Mankiw, N. G. (2014). *Princípios de Microeconomia .* São Paulo: CENGAGE Learning.

Martins, E. (2003). *Contabilidade de Custos .* São Paulo: Atlas.

Mokhtar S. Bazaraa, J. J. (2010). *Linear Programming and Network Flows.* New Jersey: Wiley.

Ragsdale, C. T. (2007). *Modelagem de planilha e análise de decisão.* São Paulo: GENGAGE.

Sales, P. R. (2018). EGF 008 - Otimização e Programação Matemática 9. *1 Parte - programação Linear (Apostila)*. São Paulo.

Silva, E. M., Gonçalves, V., & Murolo, A. C. (1998). *Pesquisa Operacional: programação linear.* São Paulo: Atlas.

Taha, H. A. (2008). *Pesquisa Operacional.* São Paulo: Pearson Hall.

Winston, W. L. (1995). *Introduction to mahematical programming.* Belmont: Wadsworth Publishing Company.