

Ricardo Fibe Gambirasio

**Otimização da Carteira de Clientes
Através do Modelo de
Markowitz**

Trabalho de Formatura apresentado à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do Diploma de Engenheiro de
Produção – Área Mecânica.

São Paulo
2002

TF 2002
G1430

Ricardo Fibe Gambirasio

**Otimização da Carteira de Clientes
Através do Modelo de
Markowitz**

Trabalho de Formatura apresentado à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do Diploma de Engenheiro de
Produção – Área Mecânica.

Orientador:
Prof. Doutor Gregório Bouer

São Paulo
2002

À minha família

RESUMO

A proposta deste Trabalho de Formatura é implementar uma metodologia de recomendação de carteiras a clientes “private” com maior embasamento matemático do que o método “intuitivo” utilizado até então, dando assim maior respaldo às recomendações e maximizando sua eficácia. A sugestão de um estudo de otimização baseado no modelo de Markowitz como base para um Trabalho de Formatura foi prontamente aceita no banco, e os resultados já estão sendo aplicados.

Após uma análise do problema em questão e das alternativas propostas na literatura sobre otimização de carteiras, é feita uma descrição das alternativas de investimento e um levantamento de uma base de dados que permita a análise de cada ativo. Também é descrita a análise do cenário utilizado pelo banco para a determinação da rentabilidade esperada de cada ativo no período considerado, no caso 2002.

Feito isso, as soluções alternativas de seleção de carteiras são comparadas com a carteira obtida pelo modelo de Markowitz e demonstra-se que este produz sempre carteiras “dominantes” em relação às carteiras alternativas, isto é, com risco menor dado um mesmo retorno esperado ou, analogamente, com um retorno esperado maior dado um mesmo patamar de risco.

ABSTRACT

The objective of this paper is to achieve client's portfolio recommendations through a mathematically based method, rather than the more "intuitive" recommendations made thus far . The suggestion of a optimization study based on the Markowitz model was instantly accepted by the bank, and the results are already being applied.

After a careful analysis of the problem and of the available literature on the subject of portfolio optimization, a brief description of the investment alternatives and a gathering of data to allow the analysis of each asset are done. It is also shown the scenario analysis used by the bank to determine the expected returns for each asset in the range of 2002.

Later on, alternative solutions to the portfolio selection problem are compared to the portfolio obtained by the Markowitz model, which always produces "dominant" portfolios in comparison to the alternatives, that is, with a smaller risk to a given expected return or, likewise, with a higher expected return to a given level of risk.

Índice

1. INTRODUÇÃO	1
1.1 Foco do Problema	2
2. REVISÃO DA LITERATURA.....	6
2.1 Um Pouco da História dos Mercados Financeiros e dos Portfólios	6
2.2 O Dilema Risco versus Retorno	9
2.3 Teoria dos Portfólios	15
2.4 O Modelo de Markowitz.....	17
2.5 Modelos Alternativos	20
3. AS ALTERNATIVAS DE INVESTIMENTO.....	24
3.1 Os Fundos de Investimentos	24
3.2 Fundos de Renda Fixa Prefixados.....	25
3.3 Fundos de Renda Fixa DI (pós-fixados)	31
3.4 Fundos Cambiais.....	35
3.5 Fundos Mútuos de Investimentos em Ações.....	41
3.6 Investimentos no Exterior	46
3.7 Fundo de Investimento em Ações no Exterior.....	46
3.8 Fundos de Investimento em Títulos do Governo Americano.....	52
3.9 Fundos de Investimento em Títulos da Dívida Externa Brasileira.....	58
4. METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO	62
5. AS VARIÁVEIS ESSENCIAIS.....	65
5.1. Variância e Covariância.....	65
5.2 O Retorno Esperado.....	68
6. ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	72
6.1 A Carteira Ingênua	72
6.2 A Carteira Intuitiva	75
6.3 Análise de Sensibilidade.....	78
7. CONCLUSÃO	82
8. BIBLIOGRAFIA.....	84
9. APÊNDICES.....	86

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Efeito da diversificação na variância de um portfólio.....	11
Figura 2: Explicação gráfica do retorno medido pelo β	13
Figura 3: Exemplo de otimização no Excel pelo Solver	64
Figura 4: Enfoque moderno da administração de carteiras	68
Figura 5: A carteira ingênua	72
Figura 6: Otimização da carteira ingênua	73
Figura 7: Exemplo de carteira intuitiva	75
Figura 8: Otimização da carteira intuitiva	77
Figura 9: Hipótese 1 – Rentabilidades Iguais	79
Figura 10: Hipótese 2 – Covariâncias iguais	80

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Rentabilidade de LTNs de 6 meses.....	28
Tabela 2: Valor Presente de LTNs de 6 meses.....	29
Tabela 3: Variação do PU de LTNs de 6 meses.....	30
Tabela 4: Valor Presente da LFT.....	33
Tabela 5: Variação do PU da LFT.....	34
Tabela 6: Rentabilidade do Cupom Cambial de 6 meses.....	36
Tabela 7: Taxa de Câmbio PTAX (R\$/US\$).....	37
Tabela 8: Valor Presente do Cupom Cambial de 6 meses.....	38
Tabela 9: Valor Presente do Cupom Cambial de 6 meses em Reais (PU x PTAX).....	39
Tabela 10: Variação do PU do Papel Cambial em R\$.....	40
Tabela 11: Índice Bovespa.....	44
Tabela 12: Variação do Índice Bovespa.....	45
Tabela 13: Dow Jones Industrial Average.....	49
Tabela 14: Dow Jones Industrial Average em R\$.....	50
Tabela 15: Variação em R\$ do Dow Jones Industrial Average.....	51
Tabela 16: Rentabilidade de Treasury Notes de 10 anos.....	54
Tabela 17: Valor Presente dos T-Notes (em US\$).....	55
Tabela 18: Valor Presente dos T-Notes em R\$ (PU x PTAX).....	56
Tabela 19: Variação do PU dos T-Notes em R\$.....	57
Tabela 20: Cotação do C-Bond (% sobre o valor de face)	59
Tabela 21: Cotação do C-Bond (em R\$).....	60
Tabela 22: Variação do C-Bond em R\$.....	61
Tabela 23: Variâncias anualizadas.....	66
Tabela 24: Correlações entre os ativos considerados.....	67
Tabela 25: Covariâncias entre os ativos considerados.....	67

1. INTRODUÇÃO

Este Trabalho de Formatura tem como objetivo utilizar e aprofundar os conceitos de estatística e otimização aprendidos na faculdade de forma a aplicar um método científico para a otimização das carteiras de investimento de clientes utilizadas por uma grande instituição bancária, que preferiu não ser identificada. Até então, as decisões de alocação de ativos (ou “asset allocation”, como é chamada no banco) eram tomadas tendo como base tão somente a intuição dos profissionais da área e, embora estes profissionais sejam altamente qualificados, era clara a falta de um embasamento matemático que desse maior respaldo às recomendações e maximizasse sua eficácia. A sugestão de um estudo de otimização baseado em Markowitz como base para um Trabalho de Formatura foi prontamente aceita no banco, e os resultados já estão sendo aplicados.

É importante notar que, embora o modelo de Markowitz seja amplamente utilizado no mercado financeiro para a otimização de portfólios de ações, as carteiras de investimentos recomendadas a clientes com um escopo mais amplo – como títulos pré e pós-fixados, índices de ações e títulos da dívida externa – continua sendo feita de forma subjetiva pelos analistas. Assim, acredita-se que a contribuição inédita deste Trabalho seja ampliar a eficácia desse tipo de carteira através de uma utilização alternativa para o já consagrado modelo de Markowitz.

O modelo de Markowitz exige a utilização de um retorno esperado no período considerado para cada ativo. Como empiricamente está constatado que o rendimento histórico de um ativo é uma estimativa pobre para seu rendimento futuro (ou seja, não é porque a Bolsa teve um rendimento de 30% nos últimos 6 meses que isso se repetirá nos próximos seis meses), a determinação do retorno esperado de cada ativo continua sendo feita de forma subjetiva, após muito estudo e análise de diferentes cenários pelos profissionais do banco.

Assim, apesar do maior embasamento matemático oferecido por este modelo, as estimativas de retornos esperados continuam sendo feitas de forma subjetiva, o que torna necessário que a análise de cenários futuros seja feita de forma cuidadosa por profissionais muito experientes, de forma a propiciar uma maior eficácia das carteiras obtidas.

Apesar disso, este Trabalho de Formatura tem como objetivo mostrar a superioridade da utilização do modelo de Markowitz para a obtenção de carteiras “dominantes”, isto é, que apresentem menor risco do que as carteiras propostas com base apenas na intuição, mantendo entretanto o retorno esperado. Embora o uso mais comum do modelo de Markowitz seja para a construção de um portfólio diversificado de ações, pretende-se mostrar aqui sua eficácia também para auxiliar as decisões de alocação em ativos mais diversificados, como papéis soberanos pré e pós-fixados, papéis cambiais e índices de ações, como explicado em mais detalhe ao longo deste Trabalho.

1.1 Foco do Problema

Este Trabalho de Formatura foi realizado em uma empresa que, para garantir o sigilo de seus procedimentos perante a concorrência, preferiu não ter seu nome divulgado por escrito. Pode-se dizer que trata-se de uma das maiores instituições bancárias do mundo, com agências e escritórios em mais de 80 países na América, Europa, Ásia, Oceania e África, empregando mais de 170 mil funcionários e atendendo a 31 milhões de clientes. Com mais de um século de existência, esta instituição começou sua atuação no Brasil há menos de uma década e já conta com 4 milhões de clientes pessoa física e 300 mil clientes pessoa jurídica no país.

Seu segmento de administração de recursos de terceiros, que administra US\$ 320 bilhões no mundo todo, no Brasil já é responsável por mais de R\$ 20 bilhões. Deste total, pouco menos de R\$ 5 bilhões provém de clientes “private”, aqueles com patrimônio mínimo de R\$ 1 milhão. A empresa conta com mais de 800 clientes desta

categoria, que gozam de atendimento diferenciado, dado o expressivo volume que têm investido no banco.

Estes clientes usufruem de um serviço personalizado de alocação de ativos (ou “asset allocation”), através do qual analistas auxiliam os investidores a tomar as decisões sobre em que tipos de fundos investir. Via de regra, o cliente investe por conta própria seus recursos, ouvindo ou não as recomendações de analistas, e paga diferentes taxas sobre o montante investido em cada fundo (que costumam variar de 0,3%^{aa} a 5,0%^{aa}). No caso destes clientes especiais, eles podem escolher por usufruir dos serviços de “asset allocation”, através do qual o analista encarregado do cliente sugere uma carteira de acordo com as preferências e perfil de risco do cliente e, uma vez que se chegue a uma carteira que seja do agrado do cliente, os recursos são investidos nos diversos fundos e a tarifa a ser paga é única, independentemente dos fundos escolhidos, sendo igual a uma taxa de 0,5%^{aa} sobre o total investido. Tal serviço tem a vantagem de oferecer um atendimento mais personalizado ao cliente e com maior clareza sobre a taxa total que está sendo paga ao banco. Embora a taxa de 0,5%^{aa} possa parecer pequena, é preciso lembrar que estes clientes possuem montantes expressivos de dinheiro investido (acima de R\$ 1.000.000,00), e portanto essa taxa é mais do que suficiente para justificar o atendimento diferenciado.

Ao desenvolver este Trabalho de Formatura, o autor do mesmo estagiava no departamento de Estratégia de Investimentos desta instituição bancária. Entre outras responsabilidades, este departamento tem a função de orientar os analistas que dão o atendimento diferenciado e individual aos clientes “private” sobre quais as melhores alternativas de investimento e quais as carteiras recomendadas para os diferentes perfis de risco de cada cliente. É preciso deixar claro que o departamento de Estratégia de Investimentos, salvo algumas ocasiões excepcionais, não tem contato direto com o cliente, sendo responsável pela parte analítica das decisões de investimento e a partir delas orientando os analistas, que por sua vez têm o contato direto com o cliente.

Para a formulação da carteira de investimentos a ser recomendada ao cliente, os analistas da área de Estratégia de Investimentos se reúnem e analisam os rumos da economia mundial e de países onde há a possibilidade de investimento dos recursos do cliente, neste caso principalmente Brasil e Estados Unidos. Também analisam os rumos que cada mercado em particular (títulos da dívida externa brasileira, títulos da dívida interna pré ou pós-fixados, índices de ações como Ibovespa e Dow Jones) deve tomar e fazem estimativas sobre o rendimento que cada uma dessas alternativas deve apresentar ao longo do ano em questão.

Baseando-se nesse cenário, os analistas então decidem a alocação de ativos a ser apresentada na carteira recomendada aos clientes, procurando investir naqueles ativos que, de acordo com seu julgamento, apresentem bom potencial de rendimento no ano, levando em conta o patamar de risco que cada alternativa apresente. Geralmente, procura-se colocar a maior parte dos recursos do cliente em ativos que apresentem boa expectativa de rendimento e baixo risco, e uma parcela menor em ativos que apresentem ótima expectativa de rendimento e alto risco.

Esta metodologia para a recomendação de alocação de recursos a clientes, embora freqüentemente utilizada pela maioria das instituições financeiras, apresenta uma clara deficiência quanto a um embasamento matemático e estatístico que não só lhe dê maior respaldo e credibilidade junto aos clientes, mas que também permita um aumento de sua eficácia. Tal embasamento certamente se justifica tendo em vista o grande montante de recursos administrados por tal sistema, que chega quase a R\$ 5 bilhões, volume que certamente merece tratamento mais rigoroso do que a “intuição” dos analistas, ainda que estes sejam extremamente experientes e qualificados.

Acredita-se que esta é a contribuição inédita deste Trabalho de Formatura. Embora o Modelo de Markowitz seja amplamente utilizado para a determinação de portfólios de ações, tenta-se aqui mostrar como sua utilização também para determinar a alocação em ativos mais diversos, como títulos da dívida externa brasileira, títulos da dívida interna pré ou pós-fixados e índices de ações também

pode gerar “carteiras dominantes”, isto é, que apresentem menor risco para dado retorno esperado ou maior retorno esperado para dado risco.

2. REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Um Pouco da História dos Mercados Financeiros e dos Portfólios

Amsterdã, no século XVII, foi o palco do primeiro mercado de títulos financeiros de que se tem notícia. Seu surgimento representou um avanço considerável em relação às modalidades de negociação financeira até então existentes.

Segundo Homer (1977)¹, em 1688, quando o Holandês William de Orange assumiu o trono inglês, houve uma migração de especialistas comerciais de Amsterdã para Londres, ocasionando grande transformação financeira e política na capital inglesa. Não havia até então na Inglaterra um mercado financeiro comparável ao existente então em Amsterdã, Lyon e Antuérpia.

A chegada destes especialistas teve impacto tão formidável no nascente mercado inglês que, em 1697, o Parlamento inglês aventou a possibilidade de limitar o número de operadores de ações e commodities no país. Na época, eram negociadas ações da Companhia das Índias Ocidentais, de companhias de exploração comercial e títulos do governo, além de ações do recém criado Banco da Inglaterra.

No livro **Anglo-Dutch Commerce and Finance in the Eighteenth Century**², Charles Wilson (1941) descreve em detalhes o sistema representativo pelo qual os ricos burgueses de Amsterdã compravam e vendiam ações inglesas na Bolsa de Londres. Por este sistema, um imigrante holandês em Londres recebia o poder de representação para efetuar compras e vendas, assim como para recolher dividendos e registrar posições de ações em nome de holandeses. Segundo Wilson, no ano de 1730, um holandês de Haarlem, chamado David Leeuw, com a ajuda de outro holandês, Peter Crellius, residente em Londres, montou um portfólio de £40.000 em ativos ingleses, equivalente hoje a aproximadamente US\$ 2 milhões.

¹ HOMER, SYDNEY: **A History of Interest Rates**. New Jersey, Rutgers University Press, 1977.

² WILSON, CHARLES: **Anglo-Dutch Commerce and Finance in the Eighteenth Century**. Cambridge Press, 1941.

Existem fortes evidências de que, por volta de 1720, os ingleses, holandeses e franceses estariam realizando investimentos significativos tanto em seus países como em canais internacionais. Segundo Carswell (1960)³, o fluxo internacional de capitais não foi somente um fenômeno temporário e, já em 1776, os holandeses possuíam investimentos ao redor de £ 60 milhões na Inglaterra.

As Guerras Napoleônicas deram um novo impulso à cidade de Londres, encorajando os investidores do continente europeu a transferir seus recursos para a cidade, que se mostrava como o mais seguro refúgio financeiro.

Segundo Jenks (1963)⁴, a partir da reinstalação da monarquia na França, com a derrota de Napoleão e o conseqüente fim da guerra, os aliados impuseram uma indenização de 700 milhões de francos. Alexander Baring recebeu uma comissão para organizar linhas de financiamento com a finalidade de captar recursos. Embora estes recursos tenham sido subscritos por banqueiros franceses, eles foram colocadas em sua maior parte no mercado londrino. O sucesso dessa operação foi logo imitado e, em 1818, a Prússia levantou recursos de investidores através de uma emissão de títulos, colocados também no mercado de Londres.

Nos anos posteriores a 1820, o mercado londrino passou a emprestar cada vez mais recursos para governos de diversos países. Potências européias da época, como Espanha e Portugal, bem como novas Repúblicas que surgiam na América com a independência das metrópoles européias, recorreram a esses empréstimos. O sucesso destes financiamentos esteve ligado a alguns fatores, entre eles a intenção de apoiar o idealismo político do movimento liberal, além do fato de que freqüentemente estes recursos eram utilizados para comprar armas da própria Inglaterra para utilização nas guerras de independência. Estes surtos de financiamentos contribuíram para um forte desenvolvimento dos mercados internacionais.

³ CARSWELL, J.: *The South Sea Bubble*. Cresset Press, 1960.

⁴ JENKS, L.H.: *The migration of British Capital to 1875*. Nelson, 1963.

Durante os anos seguintes até o final do século XIX, os ativos negociados em mercados se multiplicaram diversas vezes. Entretanto, o fluxo de capitais entre a Inglaterra e o continente europeu foi bastante irregular, em função da utilização de títulos para financiar a importação de grãos de algumas safras muito ruins na Inglaterra.

Durante a primeira metade do século dezenove, os participantes do mercado de capitais londrino eram na sua maioria indivíduos ricos. Instituições não estavam presentes. Os principais tomadores de recursos eram governos e construtoras de estradas de ferro. Isso se devia em parte à falta de reconhecimento pela lei inglesa das companhias com risco ao capital. Segundo Jenkins (1973)⁵, somente em 1862 foram finalmente aprovadas na Inglaterra leis permitindo a incorporação de empresas a um baixo custo. A partir daí, houve uma avalanche de novas emissões em diferentes indústrias.

Em 1868 foi criado na Inglaterra o primeiro fundo mútuo de que se tem notícia, o “Foreign and Colonial Government Trust”. Este totalizava um montante de £ 1.000.000 a ser investido em 17 diferentes emissões negociadas no mercado londrino, entre elas títulos de diversos países, tais como Portugal, Turquia, Rússia, Estados Unidos e Egito. O capital do fundo foi levantado com a venda de 11.765 cotas de participação ao preço de £ 85 cada. O retorno prometido era de 7% ^{aa} e o valor de resgate após 24 anos era de £ 100.

O “Foreign and Colonial Government Trust” foi um sucesso, com cinco emissões subsequentes de cotas. Em 1871 foi criado um novo fundo, o “Submarine Cables Trust”, que, ainda que fosse considerado altamente agressivo na época, possuía somente investimentos em ativos de renda fixa. Finalmente, em 1872, surgiu o primeiro fundo com a característica de permitir investimentos tanto em renda fixa quanto em ações, o “Share Investment Trust”.

⁵ JENKINS, A.: *The Stock Exchange History*. Heinemann, 1973.

2.2 O Dilema Risco versus Retorno

Inicialmente, convém analisar a diferença entre risco e incerteza, já que estas duas palavras são freqüentemente consideradas sinônimos. Segundo Frank H. Knight (1997)⁶, risco e incerteza possuem definições distintas. Segundo o autor, a diferença fundamental entre risco e incerteza é que, no caso do risco, a distribuição de probabilidades do resultado é conhecida, ao contrário da incerteza, na qual não se sabe a distribuição de probabilidade dos possíveis resultados, geralmente por se tratar de uma situação única, não permitindo assim uma inferência segura sobre o resultado.

Apesar da existência desta distinção formal entre os termos risco e incerteza, alguns autores parecem não dar grande importância a essa diferença, como se percebe neste trecho do livro **Investments**, de Alexander e Sharpe (1990)⁷: “Isso significa que, tentando maximizar o retorno esperado e minimizar a incerteza (isto é, o risco), o investidor tem dois objetivos conflitantes...” no qual vemos que ambos os termos são tratados como tendo o mesmo significado. Neste Trabalho de Formatura, será utilizado, por consideração ao rigor conceitual, somente o termo risco, acreditando que, dentro do escopo do problema em questão, estaremos sempre tratando de ativos cuja distribuição de probabilidades dos retornos esperados é aproximadamente normal e pode ser estimada, com base em dados históricos.

Popularmente, o termo risco é bastante familiar, no sentido mais freqüentemente usado, como encontrado no **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa** (2001)⁸: “perigo, inconveniente mais ou menos previsível”. No mercado financeiro, o termo risco é usualmente entendido como uma medida da imprevisibilidade do retorno de determinado ativo e, como será feito neste Trabalho de Formatura, é associado ao

⁶ KNIGHT, FRANK H.: **Risk, Uncertainty and Profit**. Harper Torch Books, 1957.

⁷ ALEXANDER, GORDON J. & SHARPE, WILLIAM F.: **Investments**. New Jersey, Prentice Hall, 1990.

⁸ HOUAISS, ANTÔNIO & VILLAR, MAURO DE SALLES.: **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro, Objetiva, 2001.

conceito estatístico de variância. Assim, o risco é sempre um fator determinante no momento de seleção entre diversas alternativas de investimento.

O termo risco procura designar a previsibilidade de retorno de determinado ativo, classificando-o em diferentes escalas de “segurança”. Assim, títulos de renda fixa do governo são tidos como “mais seguros” (ou seja, apresentam grau de risco inferior) do que títulos de renda fixa de empresas privadas, pela observação com base em dados históricos de que o rendimento dos títulos do governo apresentam uma variância menor do que os de empresas privadas (a explicação para isso está no fato de que é muito mais comum empresas privadas enfrentarem dificuldades e “quebrarem”, ou seja, não honrarem suas dívidas, do que o mesmo acontecer com o governo de um país. Embora possível, um país “quebrar” é um evento relativamente raro e extraordinário). Já os títulos de renda fixa de uma empresa são “mais seguros” do que as ações da mesma empresa, uma vez que os títulos de renda fixa só apresentarão variação no seu rendimento se a empresa passar por sérias dificuldades e não puder honrá-los, enquanto o rendimento das ações é muito mais imprevisível, acompanhando de perto a variação das perspectivas de lucro desta empresa.

Tendo isso em mente, é natural que os investidores exijam um retorno esperado maior para aceitar um investimento com risco – e portanto variância dos rendimentos – sabidamente maior do que o de outras alternativas. Nota-se assim que o risco e a rentabilidade esperada de um investimento são diretamente proporcionais, ou seja, quanto maior o retorno esperado de um investimento, maior seu risco. Entende-se assim a que Alexander e Sharpe (1990)⁹ se referiam no trecho mencionado no início desta seção, quando diziam que o investidor, ao procurar maximizar a rentabilidade e minimizar o risco, tem dois objetivos conflitantes.

⁹ ALEXANDER, GORDON J. & SHARPE, WILLIAM F.: *Investments*. New Jersey, Prentice Hall, 1990.

Ainda com relação ao risco na área financeira, a maior parte das pessoas o associa apenas à probabilidade de queda no preço de determinado ativo, enquanto na verdade o risco é determinado pela distribuição de probabilidades do rendimento de um ativo. Assim, quanto maior o risco de um ativo, maior a probabilidade de sua rentabilidade ser diferente da esperada, mas não necessariamente menor do que a rentabilidade esperada.

O risco final de um ativo pode ser decomposto em dois componentes distintos, o risco residual e o risco sistêmico. O risco residual está ligado às características próprias de determinado ativo, e pode ser reduzido através da diversificação, ou seja, da criação de uma carteira composta de diversos ativos ao invés de concentrar todo o capital em um único ativo. O risco sistêmico é conhecido como risco de mercado e representa a parcela não diversificável do risco total, ou seja, o risco sistêmico não pode ser reduzido via diversificação do portfólio dentre todas as alternativas possíveis no mercado considerado. Afigura abaixo demonstra este conceito.

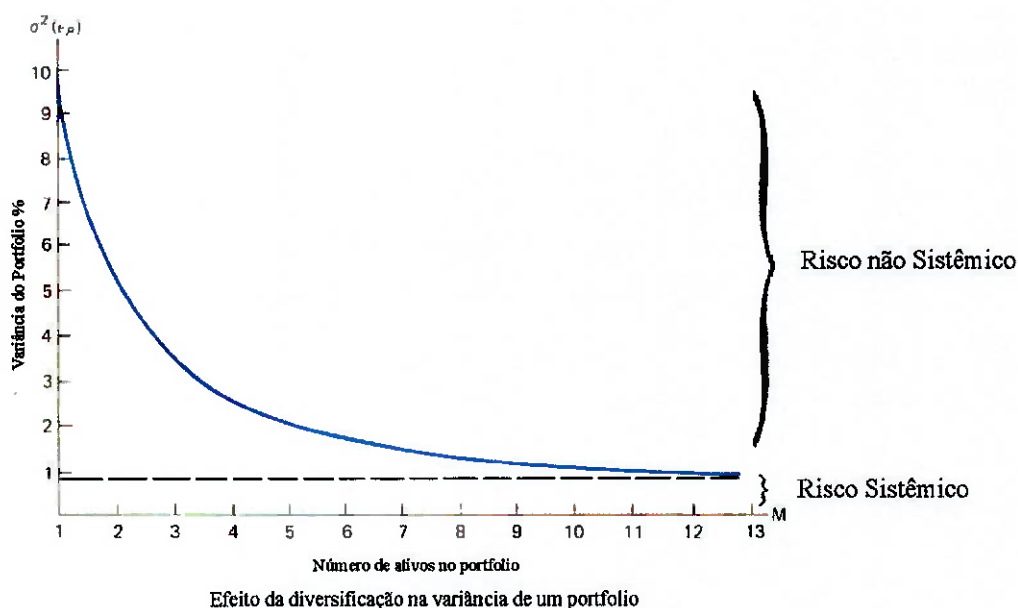


Figura 1: Efeito da diversificação na variância de um portfólio

Para Brealey e Myers (1981)¹⁰, “existe um risco considerado normal no portfólio do mercado como um todo, sendo que o valor futuro deste risco pode ser medido

¹⁰ BREALEY, R. & MYERS, S.: *Principles of Corporate Finance*. New York, McGraw Hill, 1981.

pela média do risco passado”. Ou seja, o mercado possui um risco intrínseco que tende a ser constante durante um período de tempo longo o bastante. Segundo os autores, “a medição deste risco corresponde à variabilidade existente no valor do portfólio do mercado, ou então ao seu comportamento ao longo do período de tempo analisado”.

A relação existente entre o comportamento de um ativo e o mercado ao qual ele pertence é chamada de sensibilidade deste ativo em relação ao mercado, e é representada por Beta (β). O Beta é uma medida de correlação entre o rendimento de um ativo em particular e o rendimento do mercado como um todo.

Ativos com Beta igual a 1 possuem um desempenho semelhante ao do mercado, possuindo assim o mesmo nível de risco que o mercado (risco sistêmico). Ativos com Beta maior que 1 são considerados agressivos, e possuem maior risco. Por exemplo: quando o mercado apresentar uma variação de 10% (positiva ou negativa), um ativo com Beta igual a 1,5 apresentará, em média, variação de 15% (positiva ou negativa, acompanhando a direção da variação do mercado). Assim, o Beta pode ser entendido como um índice que, ao ser multiplicado pela rentabilidade do mercado, indica a rentabilidade esperada do ativo que possui este Beta. Analogamente, um ativo dito defensivo, ou seja, com Beta menor que 1, apresentará variação menor do que a do mercado. Por exemplo, se o Beta de determinado ativo for 0,5, quando o mercado tiver rentabilidade de 1%, a rentabilidade deste ativo será de 0,5%.

Teoricamente é possível a existência de ativos com Beta negativo, ou seja, com um rendimento esperado inverso ao do mercado como um todo. Na prática, porém, não são usualmente encontrados ativos que sistematicamente apresentem rendimento positivo enquanto o mercado como um todo está tendo rendimento negativo, e vice-versa, que sistematicamente apresentem rendimento negativo enquanto o mercado como um todo apresenta rendimento positivo.

Assim, o retorno de um ativo i pode ser explicado pela fórmula:

$$r_{i,t} = \beta_i r_{m,t} + \varepsilon_{i,t} + A_i$$

sendo:

$r_{m,t}$ → retorno do mercado no instante t ;

β_i → beta do ativo i em relação ao mercado;

$\varepsilon_{i,t}$ → retorno específico do papel i no instante t ;

A_i → parcela do retorno inerente ao papel i , constante ao longo do tempo, independente do cenário.

A figura abaixo ilustra graficamente a fórmula:

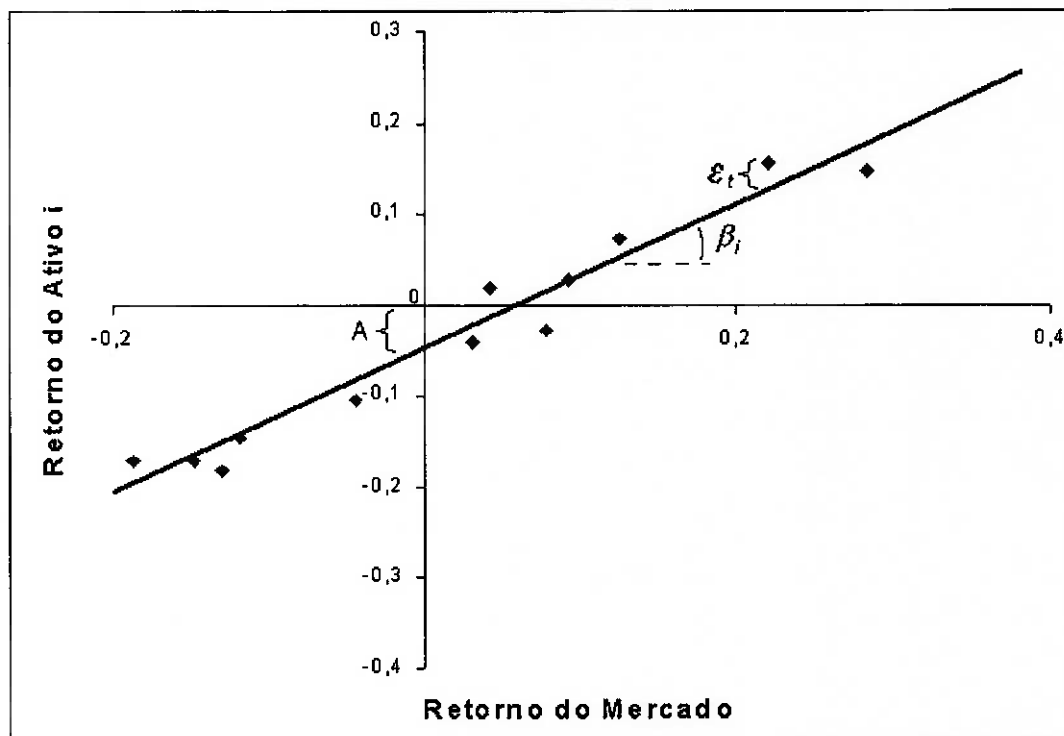


Figura 2: Explicação gráfica do retorno medido pelo β

Brealey e Myers (1981) afirmam ainda que “o risco de um ativo deve ser calculado levando-se em conta todas as possibilidades de resultado esperado, ponderados por suas probabilidades”. Entretanto, segundo eles, “para ativos reais não é possível calcular o risco desta forma, devendo-se então utilizar o desvio padrão da

rentabilidade histórica do ativo para resumir as inúmeras possibilidades existentes, sendo razoável supor que a distribuição de probabilidades segue uma curva normal”.

Em estatística, o desvio padrão é definido como a variabilidade de uma série de valores em torno de um valor médio esperado. Segundo Freund (1967)¹¹, ele representa “a distância média existente entre o valor médio de uma série e cada um dos seus elementos”. Deve-se notar que quanto maior a dispersão existente em uma série de valores de rentabilidade de determinado ativo, maior será seu desvio padrão e, conseqüentemente, menor o grau de certeza sobre seu valor em um momento futuro.

A diversificação através de um portfólio com diferentes ativos tem se mostrado como a forma mais eficiente de redução de risco, visando proteção contra a incerteza, sem entretanto sacrificar a rentabilidade. A diversificação pode ser feita de forma aleatória, distribuindo os recursos entre diversos ativos com pesos escolhidos ao acaso, o que geralmente é suficiente para reduzir de forma significativa o risco da carteira. Mas em 1952, Harry Markowitz, em seu artigo que mais tarde lhe renderia o prêmio Nobel, “**Portfolio Selection**”¹², propõe estratégias de diversificação que se tornaram um marco na moderna Teoria de Finanças e lhe renderam o prêmio Nobel de Economia em 1990. Nesse trabalho, Markowitz mostrou pela primeira vez e em termos formais a importância e a sabedoria contidas no ditado popular segundo o qual não se deve colocar todos os ovos em uma mesma cesta.

¹¹ FREUND, J.E.: *Modern Elementary Statistics*. New Jersey, Prentice Hall, 1967.

¹² MARKOWITZ, HARRY M.: *Portfolio Selection*. Journal of Finance, volume 7, 1952.

2.3 Teoria dos Portfólios

É natural supor que os investidores são avessos ao risco, mas também é natural supor que os investidores preferem obter o maior rendimento possível. Infelizmente para eles, quanto maior o retorno esperado de um ativo, maior o risco envolvido, o que faz com que o investidor seja obrigado a decidir entre investimentos com maior retorno e risco ou menor risco e menor retorno.

Colocados frente a esse dilema, os investidores geralmente optam por um portfólio diversificado ao invés de um único ativo isolado. Em um portfólio diversificado aleatoriamente, pode-se obter um risco final menor que o risco de cada ativo individualmente. O fato de o risco total de um portfólio ser menor do que a soma do risco das partes é a principal razão pela qual os investidores historicamente optam pela diversificação.

Um portfólio diversificado geralmente apresenta risco inferior para um dado nível de rentabilidade, quando comparado com um único ativo. Claro que, se compararmos o portfólio ao ativo que apresentou a maior rentabilidade no período em questão, essa regra falhará, uma vez que não é possível para um portfólio diversificado apresentar rentabilidade igual à do ativo mais rentável.

Quando Markowitz apresentou seu modelo para a construção de portfólios, este serviu como base para o que hoje é conhecido como “Moderna Teoria dos Portfólios”. Antes de Markowitz, acreditava-se que a forma mais eficiente de diversificação era investir em um grande número de diferentes ativos, de preferência com características muito diferentes entre si.

Os investidores, de forma geral, aplicavam seus recursos em diversos ativos sem se preocupar diretamente com os conceitos de risco e retorno. Deve-se lembrar, contudo, que o conceito de risco sempre esteve presente, embora não houvesse a preocupação específica de medi-lo.

Markowitz foi pioneiro em desenvolver uma medida específica de risco para os portfólios. A definição de “Portfólio Eficiente” também foi desenvolvida por ele.

Podemos determinar um conjunto de portfólios eficientes através do ferramental desenvolvido por Markowitz. Segundo ele, um Portfólio Eficiente é aquele que possui o menor risco para um dado retorno esperado ou, analogamente, possui o maior retorno esperado para um dado risco. Pode-se dizer também que a fronteira eficiente é formada por portfólios que dominam todos os outros portfólios possíveis. Um portfólio domina outro quando apresenta menor risco para o mesmo retorno esperado ou uma maior rentabilidade para um mesmo risco.

2.4 O Modelo de Markowitz

Os investidores aprenderam intuitivamente, ao longo do tempo, que é inteligente diversificar seus investimentos, como expresso no ditado popular “não coloque todos os seus ovos na mesma cesta”. Entretanto, Markowitz foi o primeiro a desenvolver formalmente o conceito de diversificação de portfólios. Esta diversificação, segundo ele, funciona para reduzir o risco final do conjunto de ativos, sem sacrificar sua rentabilidade. Através do modelo de Markowitz, os investidores podem, a partir de um grupo de ativos previamente selecionados, construir portfólios eficientes. Com esta ferramenta, pode ser determinado o peso ideal de cada ativo na carteira.

Markowitz parte de uma premissa básica: “o investidor considera o retorno esperado como algo desejável e a variância dos rendimentos como algo indesejado”.

A regra de que o investidor procura somente maximizar seu retorno esperado eliminaria a existência de carteiras diversificadas, uma vez que levaria o investidor a aplicar todos os seus recursos no ativo ou no grupo de ativos com o maior retorno esperado, independentemente do seu grau de risco, ignorando os demais ativos.

Levando-se em conta somente a maximização dos rendimentos, a fórmula da rentabilidade (R) a ser maximizada é:

$$R = \sum_{i=1}^n X_i R_i \quad (1)$$

Onde X_i é a fração da carteira que será composta pelo ativo i e R_i é a rentabilidade esperada de i .

Em um período de tempo longo o bastante, o investidor obteria o máximo rendimento escolhendo apenas o grupo de ativos com a maior rentabilidade esperada, sem a necessidade de fazer uma diversificação verdadeira.

A diversificação, segundo Markowitz, é tanto observável quanto mensurável. Assim, é natural supor que os investidores procuram não só maximizar a rentabilidade, mas também reduzir o grau de risco para níveis que considerem toleráveis.

Markowitz demonstra em seu artigo a fórmula de duas medidas básicas de estatística aplicadas à construção de portfólios: a média e a variância.

Para a rentabilidade média (ou rentabilidade esperada) de um portfólio, a fórmula é a apresentada anteriormente na equação (1). Já para a variância, é preciso levar-se em conta também a covariância entre dois ativos, o que torna possível que a variância total do portfólio seja menor que a soma ponderada da variância de seus componentes. Esta é uma das maiores contribuições do modelo de Markowitz para a Moderna Teoria dos Portfólios, a constatação dos efeitos da inter-relação entre os ativos de determinada carteira e sua contribuição para diminuir o risco total.

$$\begin{aligned} Var &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} \\ &= x_1 x_1 \sigma_{11} + 2x_1 x_2 \sigma_{12} + 2x_1 x_3 \sigma_{13} + \dots + 2x_1 x_n \sigma_{1n} + \dots + x_n x_n \sigma_{nn} \end{aligned} \quad (2)$$

Onde:

$$\sigma_{ii} = \sigma_i^2 = \text{Variância.}$$

$$\sigma_{ij} = \text{Co variância} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

$$\rho_{ij} = \text{Correlação}$$

O coeficiente de correlação entre dois ativos está diretamente relacionado com o comportamento da rentabilidade destes ativos ao longo do tempo. Uma correlação perfeitamente positiva tem coeficiente igual a +1, e significa que os ativos se comportam de forma idêntica. Um coeficiente de correlação igual a zero significa que não existe nenhuma relação identificável entre o comportamento de dois ativos. E uma correlação perfeitamente negativa (com coeficiente igual a -1) significa que os ativos se comportam de forma perfeitamente oposta.

Nota-se, pela fórmula da variância do portfólio, que quando a correlação entre dois ativos for perfeitamente negativa, é possível, com a distribuição de pesos apropriada para estes dois ativos, criar um portfólio com risco zero, ou seja, sem nenhuma variância em torno da média. Este portfólio terá sempre o rendimento real igual ao esperado. É fácil entender isto quando se percebe que, para uma rentabilidade acima da média obtida por um ativo, o ativo com correlação perfeitamente negativa terá uma rentabilidade abaixo da média, e vice-versa, de forma que a variância de ambos se cancelará mutuamente e teremos a variância total igual a zero.

Na prática, é muito difícil encontrar ativos com correlação perfeitamente negativa. Mas, como afirma Jack Francis (1991) em **Investments: Analysis and Management**¹³ é possível criar um portfólio com risco bastante menor que o risco sistêmico, desde que se utilize ativos com graus de correlação suficientemente pequenos (negativos).

Ainda segundo Francis, aplicar a diversificação de Markowitz a uma coletânea de investimentos potenciais utilizando um computador é chamado de “Análise de Portfólio de Markowitz”. Este é um método científico de construir um portfólio, e suas possibilidades são limitadas somente pela capacidade computacional.

Segundo o autor, é necessário utilizar a programação quadrática para minimizar o risco do portfólio (a equação do risco é uma equação quadrática). Muitas são as opções de programas disponíveis para realizar essa tarefa de minimização, entre eles GAMS, LINDO e LINGO. Entretanto, por razões de disponibilidade e custo para a empresa, será utilizado neste Trabalho de Formatura a ferramenta do Excel chamada Solver, que terá o objetivo de minimizar o risco do portfólio, dada a rentabilidade esperada.

¹³ FRANCIS, J.: **Investments: Analysis and Management**. New York, McGraw-Hill, 1991

Em 1956, Markowitz propôs um algoritmo para resolver o problema quadrático de forma paramétrica. Este algoritmo foi formalizado mais tarde, em 1959, por Wolfe¹⁴, e ficou assim batizado como algoritmo de Wolfe. Embora tal algoritmo seja sem dúvida interessante, a resolução através de um software de programação quadrática é mais rápida e prática para o problema em questão. Caso haja interesse, é feita uma breve descrição dos métodos para resolver o problema quadrático, com ênfase no algoritmo de Wolfe, no Apêndice II.

2.5 Modelos Alternativos

Além do modelo de Markowitz, que deu origem à Moderna Teoria dos Potfólios, há hoje em dia estudos que propõe alternativas para a otimização de carteiras. Alguns deles são baseados nos critérios Minimax ou de Maximin, oriundos da Teoria dos Jogos:

- Critério Minimax

Conforme Hazell & Norton (1986), este procedimento é baseado na hipótese de que o tomador de decisão deseja minimizar o “remorso” ou arrependimento que ele experimenta quando, depois de ter tomado a decisão, ele compara o rendimento obtido com o que ele poderia ter obtido se tivesse tido uma previsão mais correta.

Supondo que o t-ésimo “estado da natureza” seja previsível, o tomador de decisão poderia corretamente antecipar todos os retornos correspondentes ao estado (c_{jt} , onde $j=1, \dots, n$), onde ele adotaria a alternativa que maximiza a renda:

$$\sum_j c_{jt} X_j$$

Podemos denotar este máximo valor da renda por Y_t^* e a renda obtida na prática por Y_t . A diferença $Y_t^* - Y_t$ determina o grau de remorso ou arrependimento desde que a consequência de sua decisão seja conhecida.

Considerando esta mensuração do remorso ou arrependimento, o critério Minimax se concentra no maior destes remorsos ou arrependimentos sobre todos os “estados da natureza”, e seleciona a alternativa que tem o valor mínimo do remorso máximo.

Tem-se:

$$\text{Min } R$$

Sujeito a:

$$Y_t^* - \sum_j c_{jt} X_j \leq R \quad \text{para todo } t$$

$$\sum_j \bar{c}_j X_j = y$$

$$X_j, R \geq 0 \quad \text{para todo } j.$$

No modelo R é o mais alto valor para o grau de remorso ou arrependimento do empresário, sendo que a alternativa, ou o conjunto de alternativas, a ser escolhida é aquele que minimiza o valor de R. Como o valor da renda esperada é parametrizado (y), tem-se para cada alternativa o respectivo valor da renda esperada (y), ao qual está associado o valor mínimo do mais alto grau de remorso ou arrependimento que o tomador de decisão pode experimentar. Obtém-se a “fronteira de eficiência” da relação y, R.

Os valores de Y_t^* são calculados para cada “estado da natureza” através da programação linear. Sendo que, por este motivo, o modelo tem como limitação o fato de, cada vez que ocorrer mudanças nos valores de c_j , ser necessário recalcular os valores de Y_t^* .

- Critério Maximin

Segundo Hazel & Norton (1986)¹⁵, este critério consiste na seleção do “estado da natureza” que minimiza a renda em cada alternativa a ser escolhida. Ou seja, o tomador de decisão tem à sua escolha várias alternativas e, para cada uma delas, existem vários “estados da natureza”. O critério maximin assume que a estratégia apropriada para é selecionar o melhor entre os piores resultados de cada alternativa ou, da mesma forma, a alternativa que tem o máximo retorno sob o mínimo estado da natureza, que é a chamada estratégia maximin.

Nesta ótica, cabe a ele escolher a melhor combinação de atividades que lhe assegure uma renda mínima garantida diante da situação de incerteza com a qual se defronta.

M é o pior retorno possível que o tomador de decisão pode obter, onde o modelo fica:

$$\text{Max } M$$

Sujeito a:

$$\sum_j c_{jt} X_j \geq M \quad \text{para todo } t$$

$$\sum_j \bar{c}_j X_j = y$$

$$X_j, M \geq 0 \quad \text{para todo } j.$$

Parametrizando y tem-se a “fronteira de eficiência” representando, para cada nível de retorno esperado, referente às alternativas possíveis de serem escolhidas pelo tomador de decisão, o respectivo valor mínimo das possíveis perdas com as mesmas.

Um exemplo de modelo para a otimização de portfólios baseado no critério de Minimax é o artigo publicado por Xiaoqiang Cai, Kok-Lay Teo, Xiaoqi Yang e Xun Yu Zhou (2000) na revista *Management Science*, Vol.46, No. 7. Intitulado

¹⁵ HAZELL, P.B.R. & NORTON, R.D. *Mathematical Programming for Economic Analysis in Agriculture*. London:Mcmillan, 1986.

“Portfolio Optimization Under a Minimax Rule”. Este artigo se propõe a elaborar um novo modelo para a seleção de portfólios.

O objetivo do modelo é minimizar o risco máximo individual, e a medida de risco é uma função criada pelos autores, definida, no caso de uma distribuição normal, por:

$$w_{\infty}(x) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_j x_j$$

Onde σ_j é o desvio padrão do ativo j e x_j é a fração investida no ativo j .

Assim, o objetivo é minimizar a função de risco apresentada acima e maximizar o rentabilidade esperada, de forma semelhante ao modelo de Markowitz. Segundo os autores, a principal vantagem deste modelo em relação ao de Markowitz é a maior simplicidade da resolução, que permite traçar analiticamente toda a fronteira eficiente e facilita a visualização das consequências da introdução ou exclusão de diferentes ativos na análise.

Entretanto, ainda segundo os autores, o modelo não considera explicitamente a correlação entre os diversos ativos, o que pode enfraquecer o resultado da análise, uma vez que um grande avanço da teoria de Markowitz foi a demonstração de como a correlação entre diversos ativos poderia contribuir para a diminuição do risco de um portfólio para um patamar menor que o risco sistêmico. Por essa razão, decidiu-se neste Trabalho de Formatura utilizar para a otimização da carteira de clientes o modelo de Markowitz, ao invés desta alternativa.

Ainda assim, o artigo que propõe este modelo alternativo é muito interessante e, caso haja interesse, o Apêndice I contém o artigo na íntegra.

3. AS ALTERNATIVAS DE INVESTIMENTO

Será apresentada agora uma breve descrição de cada uma das alternativas de investimentos disponíveis ao cliente dentro da proposta de alocação de ativos, bem como um levantamento da variação diária de cada ativo ao longo do ano de 2001, que será utilizado como base para o cálculo da variância a ser levada em conta para a obtenção das carteiras otimizadas para 2002.

3.1 Os Fundos de Investimentos

Os recursos dos clientes devem ser alocados entre as diversas alternativas de fundos de investimentos, de acordo com a decisão de alocação de ativos. Segundo Eduardo Fortuna (1996), na obra **Mercado Financeiro: produtos e serviços**¹⁶, fundos de investimento são aplicações que se caracterizam pela aquisição de cotas de aplicações representativas do patrimônio do fundo, com variação diária.

O segredo dos fundos é a idéia de condomínio, ou seja, embora os aplicadores tenham o direito de resgatar suas cotas em prazo curto, nem todos o fazem ao mesmo tempo, de maneira que sempre há uma grande soma disponível, podendo assim ser aplicada nas opções mais rentáveis.

Tradicionalmente, os fundos podem ser classificados como de renda fixa ou de renda variável. A partir daí, existe uma diversidade enorme de tipos que são criados para atender aos diferentes interesses dos investidores, do mais conservador ao mais agressivo. Os representantes mais característicos dos fundos de renda variável são os fundos de investimento em ações, que são classificados como de renda variável justamente por não ter um componente de renda fixa, isto é, as ações não pagam uma quantia determinada de rendimentos, e sim seu valor varia de acordo com as

¹⁶ FORTUNA, EDUARDO: **Mercado Financeiro: produtos e serviços**. Rio de Janeiro, Qualitymark Editora, 1996

perspectivas de lucro e com a percepção de risco das empresas. Já os fundos de renda fixa se caracterizam por investir em títulos que paguem um rendimento determinado, embora o rendimento do fundo possa variar de acordo com as flutuações dos juros de mercado, como é o caso dos fundos de renda fixa prefixados, conforme explicado adiante.

As instituições financeiras estruturam seus fundos de acordo com algumas variáveis exógenas determinadas pelo Banco Central ou pela Comissão de Valores Mobiliários, como, por exemplo, os limites de composição da carteira de cada tipo de fundo, o que, por sua vez, vai determinar o perfil de liquidez do mesmo, isto é, quão rapidamente o investidor pode sacar seus recursos a partir do momento em que toma essa decisão. Entretanto, vai ser a variável endógena da escolha da composição risco / retorno desejada pela instituição que vai criar a “personalidade” de cada fundo e atrair os diferentes perfis de investidor

É importante notar que deve existir dentro da instituição financeira, de forma bastante consolidada, o conceito de “muralha da China”, que é a separação clara e formal entre a administração dos recursos da tesouraria da instituição e a administração de recursos de terceiros. Tal divisão tem o objetivo de evitar conflitos de interesse que possam levar a instituição a prejudicar os ganhos de seus clientes para favorecer seus próprios lucros. Um exemplo de tentativa de minimizar tais conflitos de interesse é a regra que autoriza o administrador de um fundo a aplicar apenas um percentual previamente definido do patrimônio em papéis da instituição ou de empresas coligadas.

3.2 Fundos de Renda Fixa Prefixados

Estes fundos investem principalmente em papéis prefixados, públicos ou privados, embora o gestor possa tomar a decisão de investir parte do patrimônio em papéis pós-fixados, caso considere necessário como medida defensiva em momentos turbulentos. Embora os papéis prefixados possam aparentemente dispor do menor risco de todos, uma vez que se sabe exatamente qual será o valor do papel no final do

prazo do investimento, é preciso notar que, no caso de um aumento na taxa de juros de mercado, há um aumento na taxa de desconto pela qual se traz o papel ao valor presente e assim ele pode apresentar rentabilidade negativa. Percebe-se assim que o risco de um papel prefixado é na verdade maior do que o de um papel pós-fixado que acompanhe as taxas de mercado, já que este não apresentará variação negativa por esta razão. É claro que o papel pós-fixado ainda pode apresentar rentabilidade negativa caso seu emissor perca credibilidade, o que fará com que ele seja negociado com deságio.

No caso em questão, a maior parte dos recursos do fundo está aplicada em LTNs (Letras do Tesouro Nacional). Estes papéis fazem parte da dívida do Tesouro Nacional e possuem valor definido no vencimento de R\$ 100.000,00, sendo negociados com deságio para embutir a taxa de juros praticada no mercado, de acordo com o prazo.

Conforme explicado mais adiante, quando da elaboração do cenário com o qual se trabalhará para cálculo das variáveis essenciais para o modelo, devido às turbulências observadas no final de 2001 e esperadas para 2002, o administrador do fundo prefixado decidiu encurtar o prazo médio de sua carteira para 6 meses, de forma a adotar uma postura mais defensiva. Está colocado abaixo (Tabela 1) um histórico da rentabilidade anual das LTNs com prazo de 6 meses ao longo de 2001, que será utilizado posteriormente para o cálculo da variância e das correlações utilizadas no modelo. Dada a rentabilidade da LTN de prazo igual a 6 meses, é possível calcular seu PU (valor presente), partindo do valor final de R\$ 100.000,00, trazidos a valor presente pela equação (3):

$$PU = \frac{V_f}{(1 + taxa)^{\frac{dias}{360}}} = \frac{R\$100.000}{(1 + taxa)^{0,5}} \quad (3)$$

Os resultados estão apresentados na Tabela 2. Finalmente, partindo da variação do PU, podemos calcular a flutuação diária desses papéis, que será posteriormente

utilizada para o cálculo de sua variância, de acordo com a equação (4), conforme mostrado na Tabela 3:

$$\text{Rentabilidade} = \frac{V_f - V_i}{V_i} \quad (4)$$

Rentabilidade Prefixada de LTNs com Prazo de 6 meses

Fonte: Bloomberg

02/jan/01	16,22	02/abr/01	19,19	03/jul/01	23,25	01/out/01	23,93
03/jan/01	15,86	03/abr/01	19,48	04/jul/01	24,32	02/out/01	24,02
04/jan/01	15,82	04/abr/01	19,46	05/jul/01	25,68	03/out/01	24,36
05/jan/01	15,86	05/abr/01	18,89	06/jul/01	24,44	04/out/01	24,64
08/jan/01	15,86	06/abr/01	18,92	10/jul/01	26,37	05/out/01	24,54
09/jan/01	15,63	09/abr/01	18,56	11/jul/01	26,51	08/out/01	24,66
10/jan/01	15,69	10/abr/01	18,27	12/jul/01	26,84	09/out/01	24,46
11/jan/01	15,66	11/abr/01	18,81	13/jul/01	26,53	10/out/01	24,1
12/jan/01	15,65	12/abr/01	19,19	16/jul/01	25,56	11/out/01	24,17
15/jan/01	15,63	16/abr/01	21,1	17/jul/01	24,93	15/out/01	23,75
16/jan/01	15,64	17/abr/01	20,49	18/jul/01	25,33	16/out/01	23,2
17/jan/01	15,57	18/abr/01	20,3	19/jul/01	25,21	17/out/01	22,83
18/jan/01	15,48	19/abr/01	21,04	20/jul/01	24,65	18/out/01	23,3
19/jan/01	15,45	20/abr/01	22,94	23/jul/01	23,81	19/out/01	22,88
22/jan/01	15,46	23/abr/01	22,36	24/jul/01	24,49	22/out/01	22,78
23/jan/01	15,34	24/abr/01	22,4	25/jul/01	24,18	23/out/01	22,72
24/jan/01	15,29	25/abr/01	22,73	26/jul/01	24,27	24/out/01	23,01
26/jan/01	15,15	26/abr/01	21,14	27/jul/01	24,43	25/out/01	22,76
29/jan/01	15,13	27/abr/01	20,34	30/jul/01	24,17	26/out/01	22,98
30/jan/01	15,07	30/abr/01	21,02	31/jul/01	24,68	29/out/01	23,16
31/jan/01	15,06	02/mai/01	21,64	01/ago/01	24,9	30/out/01	22,87
01/fev/01	15,22	03/mai/01	20,6	02/ago/01	24,78	31/out/01	22,81
02/fev/01	15,23	04/mai/01	20,31	03/ago/01	25	01/nov/01	22,57
05/fev/01	15,35	07/mai/01	20,74	06/ago/01	23,81	05/nov/01	21,6
06/fev/01	15,4	08/mai/01	20,96	07/ago/01	23,87	06/nov/01	21,16
07/fev/01	15,45	09/mai/01	21,21	08/ago/01	23,16	07/nov/01	20,37
08/fev/01	15,36	10/mai/01	20,5	09/ago/01	23,39	08/nov/01	20,35
09/fev/01	15,22	11/mai/01	21,61	10/ago/01	23,37	09/nov/01	20,43
12/fev/01	15,28	14/mai/01	22,34	13/ago/01	23,77	12/nov/01	20,61
13/fev/01	15,28	15/mai/01	21,84	14/ago/01	24,36	13/nov/01	20,42
14/fev/01	15,25	16/mai/01	21,21	15/ago/01	23,78	14/nov/01	20,45
15/fev/01	15,38	17/mai/01	21,31	16/ago/01	23,39	16/nov/01	20,21
16/fev/01	15,5	18/mai/01	21,25	17/ago/01	23,8	19/nov/01	19,79
19/fev/01	15,69	21/mai/01	20,96	20/ago/01	23,58	20/nov/01	20,18
20/fev/01	15,69	22/mai/01	21,53	21/ago/01	24,04	21/nov/01	19,9
21/fev/01	15,96	23/mai/01	22,07	22/ago/01	23,12	22/nov/01	20
22/fev/01	15,75	24/mai/01	21,37	23/ago/01	23,4	23/nov/01	19,62
23/fev/01	15,69	25/mai/01	21,08	24/ago/01	23,24	26/nov/01	20,03
28/fev/01	15,85	28/mai/01	21,04	27/ago/01	23,5	27/nov/01	20,33
01/mar/01	15,74	29/mai/01	21,07	28/ago/01	23,07	28/nov/01	20,83
02/mar/01	15,65	30/mai/01	20,9	29/ago/01	22,72	29/nov/01	21,54
05/mar/01	15,65	31/mai/01	21,33	30/ago/01	22,9	30/nov/01	21,25
06/mar/01	15,65	01/jun/01	21,46	31/ago/01	22,88	03/dez/01	21,05
07/mar/01	15,62	04/jun/01	20,54	03/set/01	22,74	04/dez/01	21
08/mar/01	15,77	05/jun/01	20,08	04/set/01	22,07	05/dez/01	20,87
09/mar/01	15,67	06/jun/01	19,69	05/set/01	22,21	06/dez/01	20,78
12/mar/01	15,88	07/jun/01	19,45	06/set/01	22,45	07/dez/01	20,58
13/mar/01	16,01	08/jun/01	19,37	10/set/01	22,73	10/dez/01	20,3
14/mar/01	16,21	11/jun/01	19,67	11/set/01	23,52	11/dez/01	20,31
15/mar/01	17,22	12/jun/01	19,78	12/set/01	23,41	12/dez/01	20,28
16/mar/01	17,48	13/jun/01	19,89	13/set/01	24,56	13/dez/01	20,21
19/mar/01	18,29	15/jun/01	20,54	14/set/01	24,8	14/dez/01	20,38
20/mar/01	17,37	18/jun/01	22,28	17/set/01	23,87	17/dez/01	20,34
21/mar/01	17,88	19/jun/01	22,14	18/set/01	23,37	18/dez/01	20
22/mar/01	21,1	20/jun/01	21,61	19/set/01	23,45	19/dez/01	19,81
23/mar/01	21,09	21/jun/01	21,02	20/set/01	23,83	20/dez/01	20,22
26/mar/01	19,3	22/jun/01	20,42	21/set/01	24,69	21/dez/01	19,88
27/mar/01	18,41	25/jun/01	20,67	24/set/01	24,82	26/dez/01	19,5
28/mar/01	18,59	26/jun/01	21,43	25/set/01	24,58	27/dez/01	19,53
29/mar/01	20	27/jun/01	22,19	26/set/01	24,67	28/dez/01	19,4
30/mar/01	19,62	28/jun/01	22,56	27/set/01	23,84		
		29/jun/01	22,6	28/set/01	23,48		
		02/jul/01	22,37				

Tabela 1: Rentabilidade de LTNs de 6 meses

Valor Presente de LTNs com Prazo de 6 meses

02/jan/01	92759,74892	02/abr/01	91596,75541	03/jul/01	90075,46982	01/out/01	89828,00927
03/jan/01	92903,74862	03/abr/01	91485,52676	04/jul/01	89687,00042	02/out/01	89795,40974
04/jan/01	92919,79002	04/abr/01	91493,1847	05/jul/01	89200,42303	03/out/01	89672,57549
05/jan/01	92903,74862	05/abr/01	91712,24752	06/jul/01	89643,7465	04/out/01	89571,79549
06/jan/01	92903,74862	06/abr/01	91700,67864	10/jul/01	88956,56555	05/out/01	89607,74933
09/jan/01	92996,10029	09/abr/01	91839,7948	11/jul/01	88907,33084	08/out/01	89564,60991
10/jan/01	92971,982	10/abr/01	91952,32221	12/jul/01	88791,80029	09/out/01	89636,54359
11/jan/01	92984,0388	11/abr/01	91743,11927	13/jul/01	88900,30398	10/out/01	89766,46215
12/jan/01	92988,05878	12/abr/01	91596,75541	16/jul/01	89243,03809	11/out/01	89741,15597
15/jan/01	92996,10029	16/abr/01	90871,54844	17/jul/01	89467,77358	15/out/01	89893,315
16/jan/01	92992,07927	17/abr/01	91101,28395	18/jul/01	89324,88797	16/out/01	90093,74627
17/jan/01	93020,23736	18/abr/01	91173,19756	19/jul/01	89367,68175	17/out/01	90229,33863
18/jan/01	93056,47823	19/abr/01	90894,06834	20/jul/01	89568,20248	18/out/01	90057,20449
19/jan/01	93068,56793	20/abr/01	90188,96348	23/jul/01	89871,5306	19/out/01	90210,97956
22/jan/01	93064,53751	23/abr/01	90402,46361	24/jul/01	89625,74249	22/out/01	90247,70892
23/jan/01	93112,9372	24/abr/01	90387,69076	25/jul/01	89737,54255	23/out/01	90269,76808
24/jan/01	93133,12604	25/abr/01	90266,09043	26/jul/01	89705,04137	24/out/01	90163,29837
26/jan/01	93189,72472	26/abr/01	90856,54447	27/jul/01	89647,3486	25/out/01	90255,06018
29/jan/01	93197,81867	27/abr/01	91158,0437	30/jul/01	89741,15597	26/out/01	90174,29501
30/jan/01	93222,11319	30/abr/01	90901,57869	31/jul/01	89557,42606	29/out/01	90108,37544
31/jan/01	93226,16413	02/mai/01	90669,61972	01/ago/01	89478,51767	30/out/01	90214,65048
01/fev/01	93161,41249	03/mai/01	91059,72745	02/ago/01	89521,53274	31/out/01	90236,6854
02/fev/01	93157,36999	04/mai/01	91169,40839	03/ago/01	89442,7191	01/nov/01	90324,98684
05/fev/01	93108,90101	07/mai/01	91006,91952	06/ago/01	89871,5306	05/nov/01	90684,53126
06/fev/01	93088,72792	08/mai/01	90924,12093	07/ago/01	89849,76203	06/nov/01	90849,04527
07/fev/01	93068,56793	09/mai/01	90830,30539	08/ago/01	90108,37544	07/nov/01	91146,68326
08/fev/01	93104,88534	10/mai/01	91097,50373	09/ago/01	90024,35488	08/nov/01	91154,25642
09/fev/01	93161,41249	11/mai/01	90680,80269	10/ago/01	90031,65169	09/nov/01	91123,97512
12/fev/01	93137,16538	14/mai/01	90409,85275	13/ago/01	89886,05177	12/nov/01	91055,95241
13/fev/01	93137,16538	15/mai/01	90595,1722	14/ago/01	89672,57549	13/nov/01	91127,75864
14/fev/01	93149,28657	16/mai/01	90830,30539	15/ago/01	89882,42082	14/nov/01	91116,40952
15/fev/01	93096,79558	17/mai/01	90792,8604	16/ago/01	90024,35488	16/nov/01	91207,3214
16/fev/01	93048,42104	18/mai/01	90815,32184	17/ago/01	89875,16023	19/nov/01	91367,07411
19/fev/01	92971,982	21/mai/01	90924,12093	20/ago/01	89955,12359	20/nov/01	91218,70453
20/fev/01	92971,982	22/mai/01	90710,64417	21/ago/01	89788,17022	21/nov/01	91325,153
21/fev/01	92863,68145	23/mai/01	90509,78384	22/ago/01	90123,01174	22/nov/01	91287,09292
22/fev/01	92947,88247	24/mai/01	90770,41563	23/ago/01	90020,70714	23/nov/01	91431,975
23/fev/01	92971,982	25/mai/01	90879,05321	24/ago/01	90079,12422	26/nov/01	91275,68417
28/fev/01	92907,75819	28/mai/01	90894,06834	27/ago/01	89984,25413	27/nov/01	91161,83146
01/mar/01	92951,89776	29/mai/01	90882,80629	28/ago/01	90141,31715	28/nov/01	90973,02004
02/mar/01	92988,05878	30/mai/01	90946,67995	29/ago/01	90269,76808	29/nov/01	90706,91238
05/mar/01	92988,05878	31/mai/01	90785,37696	30/ago/01	90203,63907	30/nov/01	90815,32184
06/mar/01	92988,05878	01/jun/01	90736,77965	31/ago/01	90210,97956	03/dez/01	90890,31386
07/mar/01	93000,12183	04/jun/01	91082,38758	03/set/01	90262,41323	04/dez/01	90909,09091
08/mar/01	92939,85345	05/jun/01	91256,67909	04/set/01	90509,78384	05/dez/01	90957,96576
09/mar/01	92980,01935	06/jun/01	91405,23436	05/set/01	90457,92638	06/dez/01	90991,84841
12/mar/01	92895,73104	07/jun/01	91497,01439	06/set/01	90369,23487	07/dez/01	91067,27895
13/mar/01	92843,66729	08/jun/01	91527,66922	10/set/01	90266,09043	10/dez/01	91173,19756
14/mar/01	92763,73988	11/jun/01	91412,87215	11/set/01	89976,96884	11/dez/01	91169,40839
15/mar/01	92363,23626	12/jun/01	91370,88799	12/set/01	90017,05985	12/dez/01	91180,77733
16/mar/01	92260,97313	13/jun/01	91328,96162	13/set/01	89600,5551	13/dez/01	91207,3214
19/mar/01	91944,54841	15/jun/01	91082,38758	14/set/01	89514,35925	14/dez/01	91142,89739
20/mar/01	92304,19683	18/jun/01	90432,03106	17/set/01	89849,76203	17/dez/01	91158,0437
21/mar/01	92104,3064	19/jun/01	90483,84397	18/set/01	90031,65169	18/dez/01	91287,09292
22/mar/01	90871,54844	20/jun/01	90680,80269	19/set/01	90002,4751	19/dez/01	91359,4478
23/mar/01	90875,30059	21/jun/01	90901,57869	20/set/01	89864,27265	20/dez/01	91203,52797
26/mar/01	91554,51749	22/jun/01	91127,75864	21/set/01	89553,83479	21/dez/01	91332,77073
27/mar/01	91897,94702	25/jun/01	91033,312	24/set/01	89507,18749	26/dez/01	91477,87075
28/mar/01	91828,17759	26/jun/01	90747,98749	25/set/01	89593,3626	27/dez/01	91466,39033
29/mar/01	91287,09292	27/jun/01	90465,32913	26/set/01	89561,01777	28/dez/01	91516,17005
30/mar/01	91431,975	28/jun/01	90328,67169	27/set/01	89860,64434		
		29/jun/01	90313,93498	28/set/01	89991,54119		
		02/jul/01	90398,76972				

Tabela 2: Valor Presente de LTNs de 6 meses

Variação do PU de LTNs com Prazo de 6 meses

02/jan/01		02/abr/01	0,18%	03/jul/01	-0,36%	01/out/01	-0,18%
03/jan/01	0,18%	03/abr/01	-0,12%	04/jul/01	-0,43%	02/out/01	-0,04%
04/jan/01	0,02%	04/abr/01	0,01%	05/jul/01	-0,54%	03/out/01	-0,14%
05/jan/01	-0,02%	05/abr/01	0,24%	06/jul/01	0,50%	04/out/01	-0,11%
08/jan/01	0,00%	06/abr/01	-0,01%	10/jul/01	-0,77%	05/out/01	0,04%
09/jan/01	0,10%	09/abr/01	0,15%	11/jul/01	-0,06%	08/out/01	-0,05%
10/jan/01	-0,03%	10/abr/01	0,12%	12/jul/01	-0,13%	09/out/01	0,08%
11/jan/01	0,01%	11/abr/01	-0,23%	13/jul/01	0,12%	10/out/01	0,14%
12/jan/01	0,00%	12/abr/01	-0,16%	16/jul/01	0,39%	11/out/01	-0,03%
15/jan/01	0,01%	16/abr/01	-0,79%	17/jul/01	0,25%	15/out/01	0,17%
16/jan/01	0,00%	17/abr/01	0,25%	18/jul/01	-0,16%	16/out/01	0,22%
17/jan/01	0,03%	18/abr/01	0,08%	19/jul/01	0,05%	17/out/01	0,15%
18/jan/01	0,04%	19/abr/01	-0,31%	20/jul/01	0,22%	18/out/01	-0,19%
19/jan/01	0,01%	20/abr/01	-0,78%	23/jul/01	0,34%	19/out/01	0,17%
22/jan/01	0,00%	23/abr/01	0,24%	24/jul/01	-0,27%	22/out/01	0,04%
23/jan/01	0,05%	24/abr/01	-0,02%	25/jul/01	0,12%	23/out/01	0,02%
24/jan/01	0,02%	25/abr/01	-0,13%	26/jul/01	-0,04%	24/out/01	-0,12%
26/jan/01	0,06%	26/abr/01	0,65%	27/jul/01	-0,06%	25/out/01	0,10%
29/jan/01	0,01%	27/abr/01	0,33%	30/jul/01	0,10%	26/out/01	-0,09%
30/jan/01	0,03%	30/abr/01	-0,28%	31/jul/01	-0,20%	29/out/01	-0,07%
31/jan/01	0,00%	02/mai/01	-0,26%	01/ago/01	-0,09%	30/out/01	0,12%
01/fev/01	-0,07%	03/mai/01	0,43%	02/ago/01	0,05%	31/out/01	0,02%
02/fev/01	0,00%	04/mai/01	0,12%	03/ago/01	-0,09%	01/nov/01	0,10%
05/fev/01	-0,05%	07/mai/01	-0,18%	06/ago/01	0,48%	05/nov/01	0,40%
06/fev/01	-0,02%	08/mai/01	-0,09%	07/ago/01	-0,02%	06/nov/01	0,18%
07/fev/01	-0,02%	09/mai/01	-0,10%	08/ago/01	0,29%	07/nov/01	0,33%
08/fev/01	0,04%	10/mai/01	0,29%	09/ago/01	-0,09%	08/nov/01	0,01%
09/fev/01	0,06%	11/mai/01	-0,48%	10/ago/01	0,01%	09/nov/01	-0,03%
12/fev/01	-0,03%	14/mai/01	-0,30%	13/ago/01	-0,16%	12/nov/01	-0,07%
13/fev/01	0,00%	15/mai/01	0,20%	14/ago/01	-0,24%	13/nov/01	0,08%
14/fev/01	0,01%	16/mai/01	0,26%	15/ago/01	0,23%	14/nov/01	-0,01%
15/fev/01	-0,06%	17/mai/01	-0,04%	16/ago/01	0,16%	16/nov/01	0,10%
16/fev/01	-0,05%	18/mai/01	0,02%	17/ago/01	-0,17%	19/nov/01	0,18%
19/fev/01	-0,08%	21/mai/01	0,12%	20/ago/01	0,09%	20/nov/01	-0,16%
20/fev/01	0,00%	22/mai/01	-0,23%	21/ago/01	-0,19%	21/nov/01	0,12%
21/fev/01	-0,12%	23/mai/01	-0,22%	22/ago/01	0,37%	22/nov/01	-0,04%
22/fev/01	0,09%	24/mai/01	0,29%	23/ago/01	-0,11%	23/nov/01	0,16%
23/fev/01	0,03%	25/mai/01	0,12%	24/ago/01	0,06%	26/nov/01	-0,17%
28/fev/01	-0,07%	28/mai/01	0,02%	27/ago/01	-0,11%	27/nov/01	-0,12%
01/mar/01	0,05%	29/mai/01	-0,01%	28/ago/01	0,17%	28/nov/01	-0,21%
02/mar/01	0,04%	30/mai/01	0,07%	29/ago/01	0,14%	29/nov/01	-0,29%
05/mar/01	0,00%	31/mai/01	-0,18%	30/ago/01	-0,07%	30/nov/01	0,12%
06/mar/01	0,00%	01/jun/01	-0,05%	31/ago/01	0,01%	03/dez/01	0,08%
07/mar/01	0,01%	04/jun/01	0,38%	03/set/01	0,06%	04/dez/01	0,02%
08/mar/01	-0,08%	05/jun/01	0,19%	04/set/01	0,27%	05/dez/01	0,05%
09/mar/01	0,04%	06/jun/01	0,16%	05/set/01	-0,06%	06/dez/01	0,04%
12/mar/01	-0,09%	07/jun/01	0,10%	06/set/01	-0,10%	07/dez/01	0,08%
13/mar/01	-0,06%	08/jun/01	0,03%	10/set/01	-0,11%	10/dez/01	0,12%
14/mar/01	-0,09%	11/jun/01	-0,13%	11/set/01	-0,32%	11/dez/01	0,00%
15/mar/01	-0,43%	12/jun/01	-0,05%	12/set/01	0,04%	12/dez/01	0,01%
16/mar/01	-0,11%	13/jun/01	-0,05%	13/set/01	-0,46%	13/dez/01	0,03%
19/mar/01	-0,34%	15/jun/01	-0,27%	14/set/01	-0,10%	14/dez/01	-0,07%
20/mar/01	0,39%	18/jun/01	-0,71%	17/set/01	0,37%	17/dez/01	0,02%
21/mar/01	-0,22%	19/jun/01	0,06%	18/set/01	0,20%	18/dez/01	0,14%
22/mar/01	-1,34%	20/jun/01	0,22%	19/set/01	-0,03%	19/dez/01	0,08%
23/mar/01	0,00%	21/jun/01	0,24%	20/set/01	-0,15%	20/dez/01	-0,17%
26/mar/01	0,75%	22/jun/01	0,25%	21/set/01	-0,35%	21/dez/01	0,14%
27/mar/01	0,38%	25/jun/01	-0,10%	24/set/01	-0,05%	26/dez/01	0,16%
28/mar/01	-0,08%	26/jun/01	-0,31%	25/set/01	0,10%	27/dez/01	-0,01%
29/mar/01	-0,59%	27/jun/01	-0,31%	26/set/01	-0,04%	28/dez/01	0,05%
30/mar/01	0,16%	28/jun/01	-0,15%	27/set/01	0,33%		
		29/jun/01	-0,02%	28/set/01	0,15%		
		02/jul/01	0,08%				

Tabela 3: Variação do PU de LTNs de 6 meses

3.3 Fundos de Renda Fixa DI (pós-fixados)

Os fundos de renda fixa DI investem principalmente em LFTs (Letras Financeiras do Tesouro), que se diferenciam das LTNs pelo fato de que são pós-fixadas, não têm um valor final determinado e seu valor é todo dia reajustado pela taxa do CDI (Certificado de Depósito Interbancário) diário. Outra opção disponível para o administrador do fundo é comprar títulos prefixados e fazer o “hedge” no mercado futuro de juros DI, garantindo assim que o fundo obtenha uma rentabilidade quase idêntica ao CDI, que é o parâmetro mais preciso do custo do dinheiro na economia.

Segundo Fortuna (1996), o Certificado de Depósito Interbancário foi criado em meados da década de 1980, para garantir a distribuição de recursos que atenda ao fluxo de recursos demandados pelas instituições financeiras. Suas características são idênticas às de um CDB, mas sua negociação é restrita ao mercado interbancário. Sua função é, portanto, transportar recursos de uma instituição que tenha dinheiro sobrando para outra que esteja com falta de dinheiro, colaborando para que o sistema fique mais fluido.

Neste mercado, as transações são realizadas exclusivamente por meio eletrônico, sem que haja incidência de qualquer tipo de imposto. A maioria das operações são negociadas por um único dia, embora possa haver CDIs mais longos, de 30 ou 60 dias.

A média diária das taxas de operações interbancárias de um dia é chamada de CDI over, e serve para indexar as LFTs e outros papéis que tenham como referência o CDI. É importante notar que a taxa do CDI geralmente é muito próxima à taxa Selic definida pelo Banco Central, uma vez que este regula a liquidez do sistema financeiro para obter os efeitos de política monetária desejados, de forma que, quando a Selic está acima do CDI, o Banco Central diminui a liquidez e causa um aumento do CDI, e quando a Selic está abaixo do CDI, o BC aumenta a liquidez do

sistema e causa uma queda nas taxas do CDI. De forma análoga ao que foi feito para as taxas prefixadas, foi feito um levantamento dos valores das LFTs no banco de dados Bloomberg do banco e em seguida obteve-se seu rendimento diário.

Observa-se que o rendimento diário do CDI é muito mais estável que o de papéis prefixados, uma vez que o CDI não precisa ser trazido a valor presente por taxas de juros de mercado que flutuam bastante, já que, como é pós-fixado, ele está sempre a valor presente.

Valor Presente da LFT

Fonte: Blomberg

03/jan/01	100,0579	02/abr/01	103,5019518	02/jul/01	107,4816321	01/out/01	112,0058158
04/jan/01	100,1158335	03/abr/01	103,5619829	03/jul/01	107,5533223	02/out/01	112,0835478
05/jan/01	100,1738006	04/abr/01	103,6220489	04/jul/01	107,6250604	03/out/01	112,1613338
08/jan/01	100,2318012	05/abr/01	103,682046	05/jul/01	107,6968463	04/out/01	112,2391738
09/jan/01	100,2898354	06/abr/01	103,7421816	06/jul/01	107,7687878	05/out/01	112,3169555
10/jan/01	100,3476024	09/abr/01	103,8022484	10/jul/01	107,8407773	08/out/01	112,3947912
11/jan/01	100,4054026	10/abr/01	103,8624537	11/jul/01	107,9131385	09/out/01	112,4726808
12/jan/01	100,4631357	11/abr/01	103,9226939	12/jul/01	107,985764	10/out/01	112,5505119
15/jan/01	100,520902	12/abr/01	103,982969	13/jul/01	108,0583305	11/out/01	112,6283968
16/jan/01	100,5787015	16/abr/01	104,0433831	16/jul/01	108,1307296	15/out/01	112,7063357
17/jan/01	100,6354279	17/abr/01	104,1038324	17/jul/01	108,203089	16/out/01	112,7843284
18/jan/01	100,691985	18/abr/01	104,1645249	18/jul/01	108,2767553	17/out/01	112,8622624
19/jan/01	100,7485739	19/abr/01	104,2267111	19/jul/01	108,351358	18/out/01	112,9403631
22/jan/01	100,8050939	20/abr/01	104,2889345	20/jul/01	108,4261204	19/out/01	113,0185178
23/jan/01	100,8615447	23/abr/01	104,3511949	23/jul/01	108,500826	22/out/01	113,0967266
24/jan/01	100,9181281	24/abr/01	104,4134926	24/jul/01	108,5755831	23/out/01	113,1749896
26/jan/01	100,9745413	25/abr/01	104,4758275	25/jul/01	108,6503917	24/out/01	113,2533067
29/jan/01	101,0308851	26/abr/01	104,5381995	26/jul/01	108,7251431	25/out/01	113,331678
30/jan/01	101,0872603	27/abr/01	104,6007134	27/jul/01	108,8000548	26/out/01	113,4099902
31/jan/01	101,1434648	30/abr/01	104,66316	30/jul/01	108,875018	29/out/01	113,4884699
01/fev/01	101,1997006	02/mai/01	104,7256439	31/jul/01	108,9500329	30/out/01	113,5670039
02/fev/01	101,2558664	03/mai/01	104,7880604	06/ago/01	109,0252084	31/out/01	113,6455923
05/fev/01	101,3121647	04/mai/01	104,8506189	07/ago/01	109,1005448	01/nov/01	113,724235
06/fev/01	101,3684943	07/mai/01	104,9132147	08/ago/01	109,1759333	05/nov/01	113,8029322
07/fev/01	101,4250579	08/mai/01	104,9758479	09/ago/01	109,2513739	06/nov/01	113,8816838
08/fev/01	101,4816531	09/mai/01	105,0386234	10/ago/01	109,3267573	07/nov/01	113,9604899
09/fev/01	101,5383813	10/mai/01	105,1014365	13/ago/01	109,4023021	08/nov/01	114,0393506
12/fev/01	101,5950397	11/mai/01	105,1642872	14/ago/01	109,4778991	09/nov/01	114,1182658
13/fev/01	101,6517297	14/mai/01	105,2270703	15/ago/01	109,5535483	12/nov/01	114,1972357
14/fev/01	101,7080448	15/mai/01	105,2899961	16/ago/01	109,6292498	13/nov/01	114,2762601
15/fev/01	101,765103	16/mai/01	105,3528542	17/ago/01	109,7051133	14/nov/01	114,3553393
16/fev/01	101,8221932	17/mai/01	105,4158552	20/ago/01	109,7810292	16/nov/01	114,4344732
19/fev/01	101,8792137	18/mai/01	105,4788939	21/ago/01	109,8569977	19/nov/01	114,5136619
20/fev/01	101,936266	21/mai/01	105,5418648	22/ago/01	109,9331286	20/nov/01	114,5929053
21/fev/01	101,9933503	22/mai/01	105,6049788	23/ago/01	110,0092023	21/nov/01	114,6722036
22/fev/01	102,0504666	23/mai/01	105,6693978	24/ago/01	110,0853287	22/nov/01	114,7515568
23/fev/01	102,1076149	24/mai/01	105,7342789	27/ago/01	110,1615077	23/nov/01	114,8309649
28/fev/01	102,164693	25/mai/01	105,7993054	28/ago/01	110,2376293	26/nov/01	114,9104279
01/mar/01	102,2217009	28/mai/01	105,864372	29/ago/01	110,3138035	27/nov/01	114,9899459
02/mar/01	102,2787406	29/mai/01	105,9294786	30/ago/01	110,3900304	28/nov/01	115,0695189
05/mar/01	102,3358122	30/mai/01	105,9946252	31/ago/01	110,4664203	29/nov/01	115,149147
06/mar/01	102,3929156	31/mai/01	106,0598119	03/set/01	110,542863	30/nov/01	115,2289454
07/mar/01	102,4499484	01/jun/01	106,1250387	04/set/01	110,6192482	03/dez/01	115,3087991
08/mar/01	102,507013	04/jun/01	106,1903056	05/set/01	110,6956861	04/dez/01	115,3887081
09/mar/01	102,5640069	05/jun/01	106,2556126	08/set/01	110,7721768	05/dez/01	115,4686724
12/mar/01	102,6210325	06/jun/01	106,3208536	10/set/01	110,8488311	06/dez/01	115,5486922
13/mar/01	102,6781924	07/jun/01	106,3860283	11/set/01	110,9255385	07/dez/01	115,6287675
14/mar/01	102,7353842	08/jun/01	106,4511365	12/set/01	111,002299	10/dez/01	115,7088982
15/mar/01	102,7928078	11/jun/01	106,5161782	13/set/01	111,0790016	11/dez/01	115,7890845
16/mar/01	102,8500689	12/jun/01	106,5813661	14/set/01	111,1558682	12/dez/01	115,8693263
19/mar/01	102,9076649	13/jun/01	106,6464873	17/set/01	111,2327881	13/dez/01	115,9495079
20/mar/01	102,9653961	15/jun/01	106,7117549	18/set/01	111,3097612	14/dez/01	116,0297449
21/mar/01	103,0231597	18/jun/01	106,7773827	19/set/01	111,3867875	17/dez/01	116,1100375
22/mar/01	103,0829131	19/jun/01	106,8431575	20/set/01	111,4638672	18/dez/01	116,1903857
23/mar/01	103,1427012	20/jun/01	106,9105756	21/set/01	111,5410002	19/dez/01	116,2707894
26/mar/01	103,202524	21/jun/01	106,981778	24/set/01	111,6181866	20/dez/01	116,3512488
27/mar/01	103,2623814	22/jun/01	107,0530279	25/set/01	111,695538	21/dez/01	116,4318802
28/mar/01	103,3221704	25/jun/01	107,1243252	26/set/01	111,772943	26/dez/01	116,5124511
29/mar/01	103,3819939	26/jun/01	107,19567	27/set/01	111,8505134	27/dez/01	116,5929612
30/mar/01	103,4419555	27/jun/01	107,2670623	28/set/01	111,9281377	28/dez/01	116,6735269
		28/jun/01	107,3385022				
		29/jun/01	107,4099896				

Tabela 4: Valor Presente da LFT

Variação do PU da LFT

03/jan/01		02/abr/01	0,0580%	02/jul/01	0,0667%	01/out/01	0,0694%
04/jan/01	0,0579%	03/abr/01	0,0580%	03/jul/01	0,0667%	02/out/01	0,0694%
05/jan/01	0,0579%	04/abr/01	0,0580%	04/jul/01	0,0667%	03/out/01	0,0694%
08/jan/01	0,0579%	05/abr/01	0,0579%	05/jul/01	0,0667%	04/out/01	0,0694%
09/jan/01	0,0579%	06/abr/01	0,0580%	06/jul/01	0,0668%	05/out/01	0,0693%
10/jan/01	0,0576%	09/abr/01	0,0579%	10/jul/01	0,0668%	08/out/01	0,0693%
11/jan/01	0,0576%	10/abr/01	0,0580%	11/jul/01	0,0671%	09/out/01	0,0693%
12/jan/01	0,0575%	11/abr/01	0,0580%	12/jul/01	0,0673%	10/out/01	0,0692%
15/jan/01	0,0575%	12/abr/01	0,0580%	13/jul/01	0,0672%	11/out/01	0,0692%
16/jan/01	0,0575%	16/abr/01	0,0581%	16/jul/01	0,0670%	15/out/01	0,0692%
17/jan/01	0,0564%	17/abr/01	0,0581%	17/jul/01	0,0668%	16/out/01	0,0692%
18/jan/01	0,0562%	18/abr/01	0,0583%	18/jul/01	0,0681%	17/out/01	0,0691%
19/jan/01	0,0562%	19/abr/01	0,0597%	19/jul/01	0,0689%	18/out/01	0,0692%
22/jan/01	0,0561%	20/abr/01	0,0597%	20/jul/01	0,0690%	19/out/01	0,0692%
23/jan/01	0,0560%	23/abr/01	0,0597%	23/jul/01	0,0689%	22/out/01	0,0692%
24/jan/01	0,0561%	24/abr/01	0,0597%	24/jul/01	0,0689%	23/out/01	0,0692%
26/jan/01	0,0559%	25/abr/01	0,0597%	25/jul/01	0,0688%	24/out/01	0,0692%
29/jan/01	0,0558%	26/abr/01	0,0597%	26/jul/01	0,0688%	25/out/01	0,0692%
30/jan/01	0,0558%	27/abr/01	0,0598%	27/jul/01	0,0689%	26/out/01	0,0691%
31/jan/01	0,0558%	30/abr/01	0,0597%	30/jul/01	0,0689%	29/out/01	0,0692%
01/fev/01	0,0556%	02/mai/01	0,0597%	31/jul/01	0,0689%	30/out/01	0,0692%
02/fev/01	0,0555%	03/mai/01	0,0596%	06/ago/01	0,0690%	31/out/01	0,0692%
05/fev/01	0,0556%	04/mai/01	0,0597%	07/ago/01	0,0691%	01/nov/01	0,0692%
06/fev/01	0,0556%	07/mai/01	0,0597%	08/ago/01	0,0691%	05/nov/01	0,0692%
07/fev/01	0,0558%	08/mai/01	0,0597%	09/ago/01	0,0691%	08/nov/01	0,0692%
08/fev/01	0,0558%	09/mai/01	0,0598%	10/ago/01	0,0690%	07/nov/01	0,0692%
09/fev/01	0,0559%	10/mai/01	0,0598%	13/ago/01	0,0691%	08/nov/01	0,0692%
12/fev/01	0,0558%	11/mai/01	0,0598%	14/ago/01	0,0691%	09/nov/01	0,0692%
13/fev/01	0,0558%	14/mai/01	0,0597%	15/ago/01	0,0691%	12/nov/01	0,0692%
14/fev/01	0,0554%	15/mai/01	0,0598%	16/ago/01	0,0691%	13/nov/01	0,0692%
15/fev/01	0,0561%	16/mai/01	0,0597%	17/ago/01	0,0692%	14/nov/01	0,0692%
16/fev/01	0,0561%	17/mai/01	0,0598%	20/ago/01	0,0692%	16/nov/01	0,0692%
19/fev/01	0,0560%	18/mai/01	0,0598%	21/ago/01	0,0692%	19/nov/01	0,0692%
20/fev/01	0,0560%	21/mai/01	0,0597%	22/ago/01	0,0693%	20/nov/01	0,0692%
21/fev/01	0,0560%	22/mai/01	0,0598%	23/ago/01	0,0692%	21/nov/01	0,0692%
22/fev/01	0,0560%	23/mai/01	0,0610%	24/ago/01	0,0692%	22/nov/01	0,0692%
23/fev/01	0,0560%	24/mai/01	0,0614%	27/ago/01	0,0692%	23/nov/01	0,0692%
28/fev/01	0,0559%	25/mai/01	0,0615%	28/ago/01	0,0691%	26/nov/01	0,0692%
01/mar/01	0,0558%	28/mai/01	0,0615%	29/ago/01	0,0691%	27/nov/01	0,0692%
02/mar/01	0,0558%	29/mai/01	0,0615%	30/ago/01	0,0691%	28/nov/01	0,0692%
05/mar/01	0,0558%	30/mai/01	0,0615%	31/ago/01	0,0692%	29/nov/01	0,0692%
06/mar/01	0,0558%	31/mai/01	0,0615%	03/set/01	0,0692%	30/nov/01	0,0693%
07/mar/01	0,0557%	01/jun/01	0,0615%	04/set/01	0,0691%	03/dez/01	0,0693%
08/mar/01	0,0557%	04/jun/01	0,0615%	05/set/01	0,0691%	04/dez/01	0,0693%
09/mar/01	0,0556%	05/jun/01	0,0615%	06/set/01	0,0691%	05/dez/01	0,0693%
12/mar/01	0,0556%	06/jun/01	0,0614%	10/set/01	0,0692%	06/dez/01	0,0693%
13/mar/01	0,0557%	07/jun/01	0,0613%	11/set/01	0,0692%	07/dez/01	0,0693%
14/mar/01	0,0557%	08/jun/01	0,0612%	12/set/01	0,0692%	10/dez/01	0,0693%
15/mar/01	0,0557%	11/jun/01	0,0611%	13/set/01	0,0691%	11/dez/01	0,0693%
16/mar/01	0,0559%	12/jun/01	0,0612%	14/set/01	0,0692%	12/dez/01	0,0693%
19/mar/01	0,0560%	13/jun/01	0,0611%	17/set/01	0,0692%	13/dez/01	0,0692%
20/mar/01	0,0561%	15/jun/01	0,0612%	18/set/01	0,0692%	14/dez/01	0,0692%
21/mar/01	0,0561%	18/jun/01	0,0615%	19/set/01	0,0692%	17/dez/01	0,0692%
22/mar/01	0,0580%	19/jun/01	0,0616%	20/set/01	0,0692%	18/dez/01	0,0692%
23/mar/01	0,0580%	20/jun/01	0,0631%	21/set/01	0,0692%	19/dez/01	0,0692%
26/mar/01	0,0580%	21/jun/01	0,0666%	24/set/01	0,0692%	20/dez/01	0,0692%
27/mar/01	0,0580%	22/jun/01	0,0666%	25/set/01	0,0693%	21/dez/01	0,0693%
28/mar/01	0,0579%	25/jun/01	0,0666%	26/set/01	0,0693%	28/dez/01	0,0692%
29/mar/01	0,0579%	26/jun/01	0,0666%	27/set/01	0,0694%	27/dez/01	0,0691%
30/mar/01	0,0580%	27/jun/01	0,0666%	28/set/01	0,0694%	28/dez/01	0,0691%
		28/jun/01	0,0666%				
		29/jun/01	0,0666%				

Tabela 5: Variação do PU da LFT

3.4 Fundos Cambiais

Os fundos cambiais investem em títulos da dívida pública ou privada, indexadas à variação do câmbio, e que, além disso, paguem um juro conhecido como o cupom cambial. Note-se que, embora muito utilizados como “hedge” cambial por pessoas que tenham dívidas em dólar ou que planejem viajar ou estudar no exterior, tais fundos cambiais não são “hedges” perfeitos, uma vez que possuem um componente de renda fixa, o cupom cambial, que faz com que o papel seja trazido a valor presente pelas taxas de mercado, que por sua vez flutuam bastante, fazendo com que o fundo cambial apresente rendimento não necessariamente idêntico ao do dólar.

No fundo cambial em questão, o principal papel da carteira é o NTN-D (Nota do Tesouro Nacional – Série D), indexado à PTAX (valor médio ponderado das taxas de negociação da moeda americana ao longo do dia, calculado e divulgado diariamente pelo Banco Central).

Conforme explicado na análise de cenário mais à frente, o prazo médio do cupom cambial no fundo é de 6 meses. Para o cálculo da variância e correlações, foi necessário trazer as NTN-Ds ao valor presente pelo seu cupom de 6 meses, para então multiplicá-las pelo taxa PTAX do dia, de forma que fosse possível obter a variação diária, em reais, dos papéis cambiais, conforme se observa nas tabelas a seguir:

Rentabilidade do Cupom Cambial de 6 meses

Fonte: Bloomberg

02/jan/01	8,172521	02/abr/01	8,221875	03/jul/01	6,232234	01/out/01	3,95543
03/jan/01	7,997592	03/abr/01	8,321154	04/jul/01	6,809129	02/out/01	3,693237
04/jan/01	7,911174	04/abr/01	8,347165	05/jul/01	6,967128	03/out/01	3,710577
05/jan/01	7,971376	05/abr/01	8,129401	06/jul/01	6,393039	04/out/01	4,381413
08/jan/01	7,919778	06/abr/01	8,184728	09/jul/01	6,393039	05/out/01	4,947731
09/jan/01	7,777357	09/abr/01	7,814994	10/jul/01	6,749649	08/out/01	4,408205
10/jan/01	7,717985	10/abr/01	7,704347	11/jul/01	7,022618	09/out/01	4,413428
11/jan/01	7,735147	11/abr/01	7,884576	12/jul/01	7,79627	10/out/01	4,89424
12/jan/01	7,622556	12/abr/01	7,970441	13/jul/01	7,306574	11/out/01	4,594938
15/jan/01	7,569626	16/abr/01	8,458076	16/jul/01	6,987303	15/out/01	4,531312
16/jan/01	7,671022	17/abr/01	8,538059	17/jul/01	6,624803	16/out/01	4,0485
17/jan/01	7,603223	18/abr/01	8,147289	18/jul/01	7,026127	17/out/01	3,933777
18/jan/01	7,481306	19/abr/01	8,85491	19/jul/01	6,521625	18/out/01	4,092707
19/jan/01	7,506966	20/abr/01	9,961273	20/jul/01	6,155225	19/out/01	3,72206
22/jan/01	7,357689	23/abr/01	9,888476	23/jul/01	5,732777	22/out/01	4,100926
23/jan/01	7,403516	24/abr/01	9,165242	24/jul/01	5,930573	23/out/01	4,017051
24/jan/01	7,294626	25/abr/01	8,684216	25/jul/01	5,453548	24/out/01	4,527734
25/jan/01	7,294626	26/abr/01	7,735209	26/jul/01	5,203385	25/out/01	4,580848
26/jan/01	7,28619	27/abr/01	8,791821	27/jul/01	4,74098	26/out/01	5,129705
29/jan/01	7,20243	30/abr/01	8,764889	30/jul/01	4,767962	29/out/01	5,021504
30/jan/01	7,11698	02/mai/01	8,812624	31/jul/01	5,080914	30/out/01	4,616303
31/jan/01	7,141678	03/mai/01	7,976229	01/ago/01	5,08167	31/out/01	4,466797
01/fev/01	7,042964	04/mai/01	7,739459	02/ago/01	4,790252	01/nov/01	4,381413
02/fev/01	7,047622	07/mai/01	7,731801	03/ago/01	5,007859	05/nov/01	4,478778
05/fev/01	7,097798	08/mai/01	8,000739	06/ago/01	4,558805	06/nov/01	4,510297
08/fev/01	7,127503	09/mai/01	7,989623	07/ago/01	4,58954	07/nov/01	4,510297
07/fev/01	7,208566	10/mai/01	7,724763	08/ago/01	4,659135	08/nov/01	3,933777
08/fev/01	7,255442	11/mai/01	7,976205	09/ago/01	4,784628	09/nov/01	4,793439
09/fev/01	7,176236	14/mai/01	7,832171	10/ago/01	4,48133	12/nov/01	4,2268
12/fev/01	7,172373	15/mai/01	7,695708	13/ago/01	3,892595	13/nov/01	3,849404
13/fev/01	7,106458	16/mai/01	7,244895	14/ago/01	3,577075	14/nov/01	4,018524
14/fev/01	7,197819	17/mai/01	7,087011	15/ago/01	3,037685	16/nov/01	4,091686
15/fev/01	7,205665	18/mai/01	7,190604	16/ago/01	3,35996	19/nov/01	4,297653
16/fev/01	7,470041	21/mai/01	6,712427	17/ago/01	4,340262	20/nov/01	4,6529
19/fev/01	7,433959	22/mai/01	6,770028	20/ago/01	3,422195	21/nov/01	4,443858
20/fev/01	7,685934	23/mai/01	6,811915	21/ago/01	3,903654	22/nov/01	3,733546
21/fev/01	7,613578	24/mai/01	6,542612	22/ago/01	3,50594	23/nov/01	3,996824
22/fev/01	7,628203	25/mai/01	6,389705	23/ago/01	3,901505	26/nov/01	4,297653
23/fev/01	7,744723	28/mai/01	6,052235	24/ago/01	4,044164	27/nov/01	3,880828
28/fev/01	7,463013	29/mai/01	5,858034	27/ago/01	3,923094	28/nov/01	3,690321
01/mar/01	7,339788	30/mai/01	6,506424	28/ago/01	3,547836	29/nov/01	4,464014
02/mar/01	7,194718	31/mai/01	6,460256	29/ago/01	3,142336	30/nov/01	4,156312
05/mar/01	7,125036	01/jun/01	6,551263	30/ago/01	3,324495	03/dez/01	3,744693
06/mar/01	7,227241	04/jun/01	5,979181	31/ago/01	3,473833	04/dez/01	3,797042
07/mar/01	7,215495	05/jun/01	5,847574	03/set/01	3,473833	05/dez/01	3,024925
08/mar/01	7,287704	06/jun/01	5,9267	04/set/01	3,473833	06/dez/01	3,309832
09/mar/01	7,268919	07/jun/01	5,932266	05/set/01	2,745374	07/dez/01	3,056562
12/mar/01	7,254101	08/jun/01	6,227733	06/set/01	3,533908	10/dez/01	2,554722
13/mar/01	7,338552	11/jun/01	6,23165	10/set/01	3,581519	11/dez/01	3,545888
14/mar/01	7,496346	12/jun/01	6,392177	11/set/01	3,592365	12/dez/01	2,35116
15/mar/01	8,809526	13/jun/01	6,629692	12/set/01	4,531778	13/dez/01	2,445774
16/mar/01	8,354471	15/jun/01	7,032463	13/set/01	4,713828	14/dez/01	2,571995
19/mar/01	8,729204	18/jun/01	7,403891	14/set/01	5,225699	17/dez/01	2,46107
20/mar/01	8,228713	19/jun/01	7,247495	17/set/01	5,293704	18/dez/01	2,346663
21/mar/01	8,462967	20/jun/01	6,586238	18/set/01	5,194336	19/dez/01	3,288715
22/mar/01	9,68122	21/jun/01	6,185702	19/set/01	5,021368	20/dez/01	2,088571
23/mar/01	9,637859	22/jun/01	5,911294	20/set/01	6,002509	21/dez/01	1,423363
26/mar/01	8,253264	25/jun/01	5,907173	21/set/01	6,080747	24/dez/01	1,423363
27/mar/01	7,964655	26/jun/01	6,056871	24/set/01	4,195114	26/dez/01	1,807203
28/mar/01	7,632671	27/jun/01	6,558394	25/set/01	4,643466	27/dez/01	2,443075
29/mar/01	9,516582	28/jun/01	6,510573	26/set/01	5,064886	28/dez/01	2,014713
30/mar/01	8,481378	29/jun/01	6,046065	27/set/01	4,074195	31/dez/01	2,050706
				28/set/01	3,626211		

Tabela 6: Rentabilidade do Cupom Cambial de 6 meses

Taxa de Câmbio PTAX (R\$ / US\$)

Fonte: Bloomberg

02/jan/01	1,9384	02/abr/01	2,1584	03/jul/01	2,3395	01/out/01	2,6866
03/jan/01	1,9422	03/abr/01	2,1732	04/jul/01	2,3907	02/out/01	2,7038
04/jan/01	1,9357	04/abr/01	2,1632	05/jul/01	2,4113	03/out/01	2,7287
05/jan/01	1,9484	05/abr/01	2,1589	06/jul/01	2,4943	04/out/01	2,7326
06/jan/01	1,9524	06/abr/01	2,1521	09/jul/01	2,4548	05/out/01	2,754
09/jan/01	1,9441	09/abr/01	2,1642	10/jul/01	2,4802	08/out/01	2,7828
10/jan/01	1,9429	10/abr/01	2,1422	11/jul/01	2,53	09/out/01	2,7797
11/jan/01	1,9463	11/abr/01	2,1384	12/jul/01	2,5423	10/out/01	2,7784
12/jan/01	1,9508	12/abr/01	2,1573	13/jul/01	2,5538	11/out/01	2,7799
15/jan/01	1,9475	16/abr/01	2,1825	16/jul/01	2,5979	15/out/01	2,779
16/jan/01	1,9516	17/abr/01	2,1888	17/jul/01	2,5304	16/out/01	2,7526
17/jan/01	1,9501	18/abr/01	2,175	18/jul/01	2,4696	17/out/01	2,7211
18/jan/01	1,9527	19/abr/01	2,1882	19/jul/01	2,5032	18/out/01	2,7425
19/jan/01	1,9553	20/abr/01	2,2364	20/jul/01	2,4573	19/out/01	2,7573
22/jan/01	1,9571	23/abr/01	2,2586	23/jul/01	2,4108	22/out/01	2,7176
23/jan/01	1,9586	24/abr/01	2,2538	24/jul/01	2,4247	23/out/01	2,7168
24/jan/01	1,9595	25/abr/01	2,3011	25/jul/01	2,4914	24/out/01	2,7438
25/jan/01	1,9738	26/abr/01	2,2541	26/jul/01	2,4836	25/out/01	2,7428
26/jan/01	1,974	27/abr/01	2,218	27/jul/01	2,4971	26/out/01	2,729
29/jan/01	1,9753	30/abr/01	2,1847	30/jul/01	2,4334	29/out/01	2,7246
30/jan/01	1,9714	02/mai/01	2,2239	31/jul/01	2,4313	30/out/01	2,7231
31/jan/01	1,9711	03/mai/01	2,2353	01/ago/01	2,4935	31/out/01	2,7071
01/fev/01	1,9739	04/mai/01	2,2187	02/ago/01	2,4877	01/nov/01	2,682
02/fev/01	1,9934	07/mai/01	2,1957	03/ago/01	2,4884	05/nov/01	2,6208
05/fev/01	1,9945	08/mai/01	2,2319	06/ago/01	2,469	06/nov/01	2,6003
06/fev/01	1,998	09/mai/01	2,2586	07/ago/01	2,4463	07/nov/01	2,6055
07/fev/01	2,0045	10/mai/01	2,2695	08/ago/01	2,4704	08/nov/01	2,5571
08/fev/01	1,9959	11/mai/01	2,2863	09/ago/01	2,4668	09/nov/01	2,5347
09/fev/01	1,9884	14/mai/01	2,3062	10/ago/01	2,4842	12/nov/01	2,5502
12/fev/01	1,9813	15/mai/01	2,3384	13/ago/01	2,491	13/nov/01	2,527
13/fev/01	1,9803	16/mai/01	2,3219	14/ago/01	2,514	14/nov/01	2,5299
14/fev/01	1,9894	17/mai/01	2,3036	15/ago/01	2,5005	16/nov/01	2,5392
15/fev/01	1,9812	18/mai/01	2,2941	16/ago/01	2,4877	19/nov/01	2,5154
16/fev/01	1,994	21/mai/01	2,3278	17/ago/01	2,5235	20/nov/01	2,535
19/fev/01	2,0027	22/mai/01	2,3062	20/ago/01	2,5306	21/nov/01	2,5411
20/fev/01	2,0063	23/mai/01	2,3427	21/ago/01	2,5353	22/nov/01	2,5383
21/fev/01	2,024	24/mai/01	2,3494	22/ago/01	2,5231	23/nov/01	2,5134
22/fev/01	2,0368	25/mai/01	2,3403	23/ago/01	2,5282	26/nov/01	2,4894
23/fev/01	2,0436	28/mai/01	2,3265	24/ago/01	2,55	27/nov/01	2,4604
28/fev/01	2,0452	29/mai/01	2,3425	27/ago/01	2,5585	28/nov/01	2,4857
01/mar/01	2,0428	30/mai/01	2,3596	28/ago/01	2,5564	29/nov/01	2,5072
02/mar/01	2,0355	31/mai/01	2,36	29/ago/01	2,5474	30/nov/01	2,5287
05/mar/01	2,0232	01/jun/01	2,3833	30/ago/01	2,5403	03/dez/01	2,4672
06/mar/01	2,0208	04/jun/01	2,3629	31/ago/01	2,5517	04/dez/01	2,4289
07/mar/01	2,0391	05/jun/01	2,3895	03/set/01	2,559	05/dez/01	2,4306
08/mar/01	2,0385	06/jun/01	2,3821	04/set/01	2,5642	08/dez/01	2,4435
09/mar/01	2,0599	07/jun/01	2,388	05/set/01	2,5669	07/dez/01	2,4005
12/mar/01	2,0552	08/jun/01	2,3619	06/set/01	2,5927	10/dez/01	2,3579
13/mar/01	2,0622	11/jun/01	2,3722	10/set/01	2,6013	11/dez/01	2,3417
14/mar/01	2,0763	12/jun/01	2,3906	11/set/01	2,6369	12/dez/01	2,3551
15/mar/01	2,0864	13/jun/01	2,4078	12/set/01	2,6741	13/dez/01	2,3847
16/mar/01	2,1217	15/jun/01	2,4079	13/set/01	2,6978	14/dez/01	2,384
19/mar/01	2,1277	18/jun/01	2,4586	14/set/01	2,6986	17/dez/01	2,358
20/mar/01	2,0929	19/jun/01	2,4675	17/set/01	2,6679	18/dez/01	2,343
21/mar/01	2,1	20/jun/01	2,4748	18/set/01	2,6793	19/dez/01	2,293
22/mar/01	2,1419	21/jun/01	2,4054	19/set/01	2,7065	20/dez/01	2,3202
23/mar/01	2,1586	22/jun/01	2,3296	20/set/01	2,7322	21/dez/01	2,3311
26/mar/01	2,1373	25/jun/01	2,2997	21/set/01	2,8007	24/dez/01	2,3378
27/mar/01	2,1236	26/jun/01	2,3139	24/set/01	2,7675	26/dez/01	2,3145
28/mar/01	2,117	27/jun/01	2,3236	25/set/01	2,7133	27/dez/01	2,3215
29/mar/01	2,1369	28/jun/01	2,2923	26/set/01	2,7264	28/dez/01	2,3204
30/mar/01	2,1616	29/jun/01	2,3049	27/set/01	2,705	31/dez/01	2,3204
				28/set/01	2,6713		

Tabela 7: Taxa de Câmbio PTAX (R\$/US\$)

Valor Presente do Cupom Cambial de 6 meses

02/jan/01	96148,28108	02/abr/01	96126,35462	03/jul/01	97022,36188	01/out/01	98079,08609
03/jan/01	96226,11761	03/abr/01	96082,29344	04/jul/01	96759,98965	02/out/01	98203,00649
04/jan/01	96264,64006	04/abr/01	96070,75947	05/jul/01	96688,50212	03/out/01	98194,79657
05/jan/01	96237,799	05/abr/01	96167,45024	06/jul/01	96949,01319	04/out/01	97878,74996
08/jan/01	96260,80259	06/abr/01	96142,85649	10/jul/01	96949,01319	05/out/01	97614,30652
09/jan/01	96324,38289	09/abr/01	96307,56855	11/jul/01	96786,94282	08/out/01	97866,19091
10/jan/01	96350,92527	10/abr/01	96357,02527	12/jul/01	96663,43293	09/out/01	97863,74314
11/jan/01	96343,25071	11/abr/01	96276,50593	13/jul/01	96315,9324	10/out/01	97639,19264
12/jan/01	96393,63302	12/abr/01	96238,2157	16/jul/01	96535,45222	11/out/01	97778,79179
15/jan/01	96417,34552	16/abr/01	96021,62514	17/jul/01	96679,38523	15/out/01	97808,54521
16/jan/01	96371,93573	17/abr/01	95986,23888	18/jul/01	96843,58971	16/out/01	98035,21106
17/jan/01	96402,29213	18/abr/01	96159,49667	19/jul/01	96661,8483	17/out/01	98089,3022
18/jan/01	96456,95162	19/abr/01	95846,44041	20/jul/01	96890,48024	18/out/01	98014,39163
19/jan/01	96445,43965	20/abr/01	95363,04733	23/jul/01	97057,54734	19/out/01	98189,36088
22/jan/01	96512,46832	23/abr/01	95394,62933	24/jul/01	97251,24741	22/out/01	98010,52232
23/jan/01	96491,87612	24/abr/01	95710,10861	25/jul/01	97160,41011	23/out/01	98050,03015
24/jan/01	96540,82701	25/abr/01	95921,67669	26/jul/01	97379,91741	24/out/01	97810,21919
26/jan/01	96540,82701	26/abr/01	96343,22299	27/jul/01	97495,62846	25/out/01	97785,37836
29/jan/01	96544,62248	27/abr/01	95874,22733	30/jul/01	97710,60076	26/out/01	97529,78731
30/jan/01	96582,33151	30/abr/01	95886,09682	31/jul/01	97698,01773	29/out/01	97580,01561
31/jan/01	96620,84695	02/mai/01	95865,06218	01/ago/01	97552,42712	30/out/01	97768,80697
01/fev/01	96609,70992	03/mai/01	96235,63627	02/ago/01	97552,0762	31/out/01	97838,7421
02/fev/01	96654,24593	04/mai/01	96341,32274	03/ago/01	97687,62847	01/nov/01	97878,74996
05/fev/01	96652,14303	07/mai/01	96344,74684	06/ago/01	97586,35531	05/nov/01	97833,13216
06/fev/01	96629,49931	08/mai/01	96224,71565	07/ago/01	97795,68533	06/nov/01	97818,37842
07/fev/01	96616,10136	09/mai/01	96229,68801	08/ago/01	97781,315	07/nov/01	97818,37842
08/fev/01	96579,56756	10/mai/01	96347,89404	09/ago/01	97748,79886	08/nov/01	98089,3022
09/fev/01	96558,4602	11/mai/01	96235,64696	10/ago/01	97690,24798	09/nov/01	97686,14101
12/fev/01	96594,1332	14/mai/01	96299,89764	13/ago/01	97831,93734	12/nov/01	97951,32112
13/fev/01	96595,87404	15/mai/01	96360,88991	14/ago/01	98108,74109	13/nov/01	98129,14069
14/fev/01	96625,58278	16/mai/01	96563,2081	15/ago/01	98258,05855	14/nov/01	98049,33591
15/fev/01	96584,40868	17/mai/01	96634,36599	16/ago/01	98514,90745	16/nov/01	98014,87232
16/fev/01	96580,87428	18/mai/01	96587,65917	17/ago/01	98361,20345	19/nov/01	97918,04461
19/fev/01	96462,00679	21/mai/01	96803,82131	20/ago/01	97898,04938	20/nov/01	97751,71065
20/fev/01	96478,20395	22/mai/01	96777,70561	21/ago/01	98331,60424	21/nov/01	97849,48567
21/fev/01	96365,26286	23/mai/01	96758,72774	22/ago/01	98103,51984	22/nov/01	98183,92467
22/fev/01	96397,65391	24/mai/01	96880,93692	23/ago/01	98291,81693	23/nov/01	98059,56487
23/fev/01	96391,10422	25/mai/01	96950,53225	24/ago/01	98104,53437	26/nov/01	97918,04461
28/fev/01	96338,96928	28/mai/01	97104,66342	27/ago/01	98037,25383	27/nov/01	98114,29751
01/mar/01	96485,16101	29/mai/01	97193,69389	28/ago/01	98094,34372	28/nov/01	98204,38733
02/mar/01	96520,51565	30/mai/01	96897,39428	29/ago/01	98271,93022	29/nov/01	97840,04534
05/mar/01	96585,8057	31/mai/01	96918,40246	30/ago/01	98464,91683	30/nov/01	97984,4599
06/mar/01	96617,21384	01/jun/01	96877,00391	31/ago/01	98378,08271	03/dez/01	98178,64977
07/mar/01	96571,15891	04/jun/01	97138,12594	03/set/01	98307,06528	04/dez/01	98153,88894
08/mar/01	96576,44669	05/jun/01	97198,49618	04/set/01	98307,06528	05/dez/01	98521,00797
09/mar/01	96543,94128	06/jun/01	97162,18633	05/set/01	98307,06528	06/dez/01	98385,06397
12/mar/01	96552,39433	07/jun/01	97159,6337	06/set/01	98654,94557	07/dez/01	98505,88449
13/mar/01	96559,06383	08/jun/01	97024,41734	10/set/01	98278,54007	10/dez/01	98746,6041
14/mar/01	96521,07136	11/jun/01	97022,62857	11/set/01	98255,95072	11/dez/01	98272,85461
15/mar/01	96450,20365	12/jun/01	96949,40593	12/set/01	98250,80694	12/dez/01	98844,75185
16/mar/01	95868,4269	13/jun/01	96841,36954	13/set/01	97808,32719	13/dez/01	98799,09717
19/mar/01	96067,52054	15/jun/01	96658,98721	14/set/01	97723,26798	14/dez/01	98738,28935
20/mar/01	95901,83027	18/jun/01	96491,70767	17/set/01	97485,29052	17/dez/01	98791,72224
21/mar/01	96123,3179	19/jun/01	96562,03761	18/set/01	97453,80451	18/dez/01	98846,92339
22/mar/01	96019,46013	20/jun/01	96861,10809	19/set/01	97499,82174	19/dez/01	98395,12069
23/mar/01	95484,71666	21/jun/01	97043,6178	20/set/01	97580,07879	20/dez/01	98971,79288
26/mar/01	95503,59656	22/jun/01	97169,25274	21/set/01	97127,43675	21/dez/01	98295,82685
27/mar/01	96112,41727	25/jun/01	97171,14322	24/set/01	97091,61282	26/dez/01	98295,82685
28/mar/01	96240,79444	26/jun/01	97102,54106	25/set/01	97966,21361	27/dez/01	99108,46436
29/mar/01	96389,10352	27/jun/01	96873,7623	26/set/01	97756,1169	28/dez/01	98800,39886
30/mar/01	95556,46155	28/jun/01	96895,50699	27/set/01	97559,86781		
		29/jun/01	97107,48826	28/set/01	98023,1083		

Tabela 8: Valor Presente do Cupom Cambial de 6 meses

Valor Presente do Cupom Cambial de 6 meses em R\$ (PU x PTAX)

02/jan/01	186373,828	02/abr/01	207479,1238	03/jul/01	226983,8156	01/out/01	263499,2727
03/jan/01	186890,3656	03/abr/01	208806,0401	04/jul/01	231324,1073	02/out/01	265521,289
04/jan/01	186339,4638	04/abr/01	207820,2669	05/jul/01	233144,9852	03/out/01	267944,1414
05/jan/01	187509,7276	05/abr/01	207615,9083	06/jul/01	241819,9236	04/out/01	267463,4722
08/jan/01	187939,591	06/abr/01	206909,0414	10/jul/01	237990,4376	05/out/01	268829,8002
09/jan/01	187264,2328	09/abr/01	208428,8398	11/jul/01	240050,9756	08/out/01	272342,0361
10/jan/01	187200,2127	10/abr/01	206416,0195	12/jul/01	244558,4853	09/out/01	272031,8468
11/jan/01	187512,8689	11/abr/01	205877,6803	13/jul/01	244863,9949	10/out/01	271280,7328
12/jan/01	188044,6993	12/abr/01	207614,7027	16/jul/01	246532,2379	11/out/01	271815,2633
15/jan/01	187772,7804	16/abr/01	209567,1969	17/jul/01	251163,3749	15/out/01	271809,9471
16/jan/01	188079,4698	17/abr/01	210094,6797	18/jul/01	245053,0194	16/out/01	269851,722
17/jan/01	187994,1099	18/abr/01	209146,9053	19/jul/01	238716,1006	17/out/01	266910,8002
18/jan/01	188351,4894	19/abr/01	209731,1809	20/jul/01	242536,2601	18/out/01	268804,469
19/jan/01	188579,7682	20/abr/01	213269,9191	23/jul/01	238499,5111	19/out/01	270737,5248
22/jan/01	188884,5517	23/abr/01	215458,3098	24/jul/01	234453,3073	22/out/01	266353,3955
23/jan/01	188988,9886	24/abr/01	215711,4428	25/jul/01	235584,8464	23/out/01	266382,3219
24/jan/01	189171,7505	25/abr/01	220725,3702	26/jul/01	242612,3262	24/out/01	268371,6794
26/jan/01	190552,2844	26/abr/01	217167,2589	27/jul/01	242140,1428	25/out/01	268205,7358
29/jan/01	190579,0848	27/abr/01	212649,0362	30/jul/01	243993,1412	26/out/01	266158,7896
30/jan/01	190779,0794	30/abr/01	209482,3553	31/jul/01	237738,3563	29/out/01	265866,5105
31/jan/01	190478,3377	02/mai/01	213194,3118	01/ago/01	237179,2161	30/out/01	266234,2383
01/fev/01	190427,3992	03/mai/01	215115,5178	02/ago/01	243246,102	31/out/01	264859,2587
02/fev/01	190785,816	04/mai/01	213752,4928	03/ago/01	243017,5084	01/nov/01	262510,8074
05/fev/01	192666,3819	07/mai/01	211544,1606	06/ago/01	242833,8866	05/nov/01	256401,0728
06/fev/01	192727,5384	08/mai/01	214763,9429	07/ago/01	241457,5471	06/nov/01	254357,1294
07/fev/01	193038,9705	09/mai/01	217344,3282	08/ago/01	239202,4309	07/nov/01	254865,785
08/fev/01	193593,7432	10/mai/01	218661,5455	09/ago/01	241478,6327	08/nov/01	250824,1546
09/fev/01	192721,0307	11/mai/01	220023,5597	10/ago/01	240982,3037	09/nov/01	247605,0616
12/fev/01	192067,7745	14/mai/01	222086,8239	13/ago/01	243034,0987	12/nov/01	249795,4591
13/fev/01	191385,4052	15/mai/01	225330,305	14/ago/01	244388,874	13/nov/01	247972,3385
14/fev/01	191347,6614	16/mai/01	224210,1129	15/ago/01	247020,7592	14/nov/01	248055,0149
15/fev/01	192145,0226	17/mai/01	222606,9255	16/ago/01	246336,5261	16/nov/01	248879,3638
16/fev/01	191346,0281	18/mai/01	221581,7489	17/ago/01	244693,1658	19/nov/01	246303,0494
19/fev/01	192345,2415	21/mai/01	225339,9352	20/ago/01	247045,7276	20/nov/01	247800,5865
20/fev/01	193216,8991	22/mai/01	223188,7447	21/ago/01	248837,9577	21/nov/01	248645,328
21/fev/01	193337,6269	23/mai/01	226876,6715	22/ago/01	248721,8538	22/nov/01	249220,256
22/fev/01	195108,8515	24/mai/01	227612,0732	23/ago/01	248000,0833	23/nov/01	246462,9104
23/fev/01	196329,4011	25/mai/01	226893,3306	24/ago/01	248027,8838	26/nov/01	243757,1803
28/fev/01	196878,3176	28/mai/01	225913,9994	27/ago/01	248994,9973	27/nov/01	241400,4176
01/mar/01	197290,5473	29/mai/01	227676,2279	28/ago/01	250974,3784	28/nov/01	244106,8456
02/mar/01	197172,1094	30/mai/01	228639,0915	29/ago/01	251222,3624	29/nov/01	245304,5617
05/mar/01	196600,4075	31/mai/01	228727,4298	30/ago/01	250829,5291	30/nov/01	247773,3037
06/mar/01	195475,9471	01/jun/01	230886,9634	31/ago/01	249909,8435	03/dez/01	242226,3847
07/mar/01	195150,9939	04/jun/01	229527,6778	03/set/01	250850,1385	04/dez/01	238405,9809
08/mar/01	196929,0325	05/jun/01	232255,8066	04/set/01	251567,7801	05/dez/01	239465,162
09/mar/01	196804,8243	06/jun/01	231450,0441	05/set/01	252078,9768	06/dez/01	240403,9038
12/mar/01	198888,2771	07/jun/01	232017,2053	06/set/01	253237,3798	07/dez/01	236463,3757
13/mar/01	198448,188	08/jun/01	229161,9713	10/set/01	254806,7708	10/dez/01	232834,6178
14/mar/01	199045,7534	11/jun/01	230157,0795	11/set/01	255593,2046	11/dez/01	230125,5436
15/mar/01	200259,5578	12/jun/01	231767,2498	12/set/01	259077,5528	12/dez/01	232789,2751
16/mar/01	200015,7131	13/jun/01	233174,6496	13/set/01	261549,2477	13/dez/01	235606,207
19/mar/01	203826,4583	15/jun/01	232745,1753	14/set/01	263637,8324	14/dez/01	235392,0818
20/mar/01	204050,3243	18/jun/01	237234,5125	17/set/01	263073,805	17/dez/01	232950,881
21/mar/01	201176,492	19/jun/01	238266,8278	18/set/01	259997,0051	18/dez/01	231598,3415
22/mar/01	201640,8663	20/jun/01	239711,8703	19/set/01	261231,2724	19/dez/01	225620,0117
23/mar/01	204518,7146	21/jun/01	233428,7183	20/set/01	264100,4833	20/dez/01	229634,3538
26/mar/01	206154,0635	22/jun/01	226365,4912	21/set/01	265371,5827	21/dez/01	231468,502
27/mar/01	205421,0694	25/jun/01	223464,4781	24/set/01	271924,48	26/dez/01	232133,784
28/mar/01	204376,9511	26/jun/01	224685,5697	25/set/01	271121,4962	27/dez/01	229386,5408
29/mar/01	204055,7322	27/jun/01	225095,8741	26/set/01	265241,672	28/dez/01	229365,1255
30/mar/01	204194,6027	28/jun/01	222113,5707	27/set/01	265987,2236		
		29/jun/01	223823,0497	28/set/01	265152,508		

Tabela 9: Valor Presente do Cupom Cambial de 6 meses em Reais (PU x PTAX)

Variação do PU do Papel Cambial em R\$

02/jan/01		02/abr/01	1,61%	03/jul/01	1,41%	01/out/01	-0,62%
03/jan/01	0,28%	03/abr/01	0,64%	04/jul/01	1,91%	02/out/01	0,77%
04/jan/01	-0,29%	04/abr/01	-0,47%	05/jul/01	0,79%	03/out/01	0,91%
05/jan/01	0,63%	05/abr/01	-0,10%	06/jul/01	3,72%	04/out/01	-0,18%
08/jan/01	0,23%	06/abr/01	-0,34%	10/jul/01	-1,58%	05/out/01	0,51%
09/jan/01	-0,36%	09/abr/01	0,73%	11/jul/01	0,87%	08/out/01	1,31%
10/jan/01	-0,03%	10/abr/01	-0,97%	12/jul/01	1,88%	09/out/01	-0,11%
11/jan/01	0,17%	11/abr/01	-0,26%	13/jul/01	0,12%	10/out/01	-0,28%
12/jan/01	0,28%	12/abr/01	0,84%	16/jul/01	0,68%	11/out/01	0,20%
15/jan/01	-0,14%	16/abr/01	0,94%	17/jul/01	1,88%	15/out/01	0,00%
16/jan/01	0,18%	17/abr/01	0,25%	18/jul/01	-2,43%	16/out/01	-0,72%
17/jan/01	-0,05%	18/abr/01	-0,45%	19/jul/01	-2,59%	17/out/01	-1,09%
18/jan/01	0,19%	19/abr/01	0,28%	20/jul/01	1,60%	18/out/01	0,71%
19/jan/01	0,12%	20/abr/01	1,69%	23/jul/01	-1,68%	19/out/01	0,72%
22/jan/01	0,16%	23/abr/01	1,03%	24/jul/01	-1,70%	22/out/01	-1,62%
23/jan/01	0,06%	24/abr/01	0,12%	25/jul/01	0,48%	23/out/01	0,01%
24/jan/01	0,10%	25/abr/01	2,32%	26/jul/01	2,98%	24/out/01	0,75%
26/jan/01	0,73%	26/abr/01	-1,61%	27/jul/01	-0,19%	25/out/01	-0,06%
29/jan/01	0,01%	27/abr/01	-2,08%	30/jul/01	0,77%	26/out/01	-0,76%
30/jan/01	0,10%	30/abr/01	-1,49%	31/jul/01	-2,56%	29/out/01	-0,11%
31/jan/01	-0,16%	02/mai/01	1,77%	01/ago/01	-0,24%	30/out/01	0,14%
01/fev/01	-0,03%	03/mai/01	0,90%	02/ago/01	2,56%	31/out/01	-0,52%
02/fev/01	0,19%	04/mai/01	-0,63%	03/ago/01	-0,09%	01/nov/01	-0,89%
05/fev/01	0,99%	07/mai/01	-1,03%	06/ago/01	-0,08%	05/nov/01	-2,33%
06/fev/01	0,03%	08/mai/01	1,52%	07/ago/01	-0,57%	06/nov/01	-0,80%
07/fev/01	0,16%	09/mai/01	1,20%	08/ago/01	-0,93%	07/nov/01	0,20%
08/fev/01	0,29%	10/mai/01	0,61%	09/ago/01	0,95%	08/nov/01	-1,59%
09/fev/01	-0,45%	11/mai/01	0,62%	10/ago/01	-0,21%	09/nov/01	-1,28%
12/fev/01	-0,34%	14/mai/01	0,94%	13/ago/01	0,85%	12/nov/01	0,88%
13/fev/01	-0,36%	15/mai/01	1,46%	14/ago/01	0,56%	13/nov/01	-0,73%
14/fev/01	-0,02%	16/mai/01	-0,50%	15/ago/01	1,08%	14/nov/01	0,03%
15/fev/01	0,42%	17/mai/01	-0,72%	16/ago/01	-0,28%	16/nov/01	0,33%
16/fev/01	-0,42%	18/mai/01	-0,46%	17/ago/01	-0,67%	19/nov/01	-1,04%
19/fev/01	0,52%	21/mai/01	1,70%	20/ago/01	0,96%	20/nov/01	0,61%
20/fev/01	0,45%	22/mai/01	-0,95%	21/ago/01	0,73%	21/nov/01	0,34%
21/fev/01	0,06%	23/mai/01	1,56%	22/ago/01	-0,05%	22/nov/01	0,23%
22/fev/01	0,92%	24/mai/01	0,41%	23/ago/01	-0,29%	23/nov/01	-1,11%
23/fev/01	0,63%	25/mai/01	-0,32%	24/ago/01	0,01%	26/nov/01	-1,10%
28/fev/01	0,28%	28/mai/01	-0,43%	27/ago/01	0,79%	27/nov/01	-0,97%
01/mar/01	0,21%	29/mai/01	0,78%	28/ago/01	0,39%	28/nov/01	1,12%
02/mar/01	-0,06%	30/mai/01	0,42%	29/ago/01	0,10%	29/nov/01	0,49%
05/mar/01	-0,29%	31/mai/01	0,04%	30/ago/01	-0,16%	30/nov/01	1,01%
06/mar/01	-0,57%	01/jun/01	0,94%	31/ago/01	-0,37%	03/dez/01	-2,24%
07/mar/01	-0,17%	04/jun/01	-0,59%	03/set/01	0,38%	04/dez/01	-1,58%
08/mar/01	0,91%	05/jun/01	1,19%	04/set/01	0,29%	05/dez/01	0,44%
09/mar/01	-0,06%	06/jun/01	-0,35%	05/set/01	0,20%	06/dez/01	0,39%
12/mar/01	1,06%	07/jun/01	0,25%	06/set/01	0,46%	07/dez/01	-1,64%
13/mar/01	-0,22%	08/jun/01	-1,23%	10/set/01	0,62%	10/dez/01	-1,53%
14/mar/01	0,30%	11/jun/01	0,43%	11/set/01	0,31%	11/dez/01	-1,16%
15/mar/01	0,61%	12/jun/01	0,70%	12/set/01	1,36%	12/dez/01	1,16%
16/mar/01	-0,12%	13/jun/01	0,61%	13/set/01	0,95%	13/dez/01	1,21%
19/mar/01	1,91%	15/jun/01	-0,18%	14/set/01	0,80%	14/dez/01	-0,09%
20/mar/01	0,11%	18/jun/01	1,93%	17/set/01	-0,21%	17/dez/01	-1,04%
21/mar/01	-1,41%	19/jun/01	0,44%	18/set/01	-1,17%	18/dez/01	-0,58%
22/mar/01	0,23%	20/jun/01	0,61%	19/set/01	0,47%	19/dez/01	-2,58%
23/mar/01	1,43%	21/jun/01	-2,62%	20/set/01	1,10%	20/dez/01	1,78%
26/mar/01	0,80%	22/jun/01	-3,03%	21/set/01	0,48%	21/dez/01	0,80%
27/mar/01	-0,36%	25/jun/01	-1,28%	24/set/01	2,47%	26/dez/01	0,29%
28/mar/01	-0,51%	26/jun/01	0,55%	25/set/01	-0,30%	27/dez/01	-1,18%
29/mar/01	-0,16%	27/jun/01	0,18%	26/set/01	-2,17%	28/dez/01	-0,01%
30/mar/01	0,07%	28/jun/01	-1,32%	27/set/01	0,28%		
		29/jun/01	0,77%	28/set/01	-0,31%		

Tabela 10: Variação do PU do Papel Cambial em R\$

3.5 Fundos Mútuos de Investimentos em Ações

É um fundo aberto aos investidores que se sintam atraídos pelo mercado de ações, mas que não tenham tempo ou conhecimento para investir e buscam alternativas mais agressivas para aplicar seu dinheiro.

Ao investidor é proporcionado maior conforto e segurança, com risco menor, uma vez que a carteira de um fundo de ações é sempre diversificada. Normalmente, as aplicações e resgates são feitos com a cota de D+1 e o crédito na conta, quando do resgate, ocorre entre D+2 e D+5, dependendo do critério da instituição responsável pelo fundo.

De acordo com Fortuna (1996), a característica fundamental de uma companhia aberta (Sociedade Anônima) é ter seu capital dividido em partes iguais denominadas ações. Pode-se conceituar a ação como o título representativo do valor da fração em que é dividido o Capital Social e do qual resulta, para o seu titular, o direito de participação na vida social da companhia.

Essa participação pode processar-se patrimonialmente, mediante recebimento periódico de dividendos, e politicamente, através da fiscalização dos negócios e influência nas deliberações sociais através do voto.

As ações são, portanto, títulos de propriedade, conferindo ao seu possuidor uma parcela de participação no controle e nos lucros da empresa. Este certificado pode ser vendido e, conseqüentemente, transferido o seu interesse de propriedade a terceiros. A responsabilidade dos sócios ou acionistas é limitada ao preço de emissão das ações subscritas ou adquiridas.

As ações no Brasil podem ser classificadas como ordinárias, com direito a voto, ou como preferenciais, que não possuem direito a voto mas usufruem de prioridade no pagamento de dividendos e no reembolso de capital.

Voltando aos fundos de investimento em ações, eles podem ser classificados como passivos ou ativos. Nos fundos passivos, o administrador procura criar uma carteira com rendimento semelhante a um “benchmark”, isto é, algum índice de ações representativo de determinado mercado (os índices de ações procuram medir a performance do mercado ao longo do tempo através de uma carteira representativa do mesmo), como por exemplo o Ibovespa. Devido ao fato de que muitas vezes algumas ações que fazem parte de certos índices possuem baixa liquidez, nem sempre é possível ao administrador do fundo manter a carteira com a composição exata do “benchmark”, especialmente quando há grande entrada ou saída de recursos do fundo. A solução utilizada é a criação de uma carteira com Beta igual a 1 em relação ao “benchmark”, composta somente por ações com maior liquidez, de forma que no longo prazo a rentabilidade do fundo e do “benchmark” seja semelhante. Já nos fundos ativos, o administrador procura, através de análises cuidadosas de cada ação, montar uma carteira que, no longo prazo, supere o “benchmark”.

Será analisado o investimento em um fundo de ações passivo cujo “benchmark” é o Ibovespa. O Ibovespa, ou Índice da Bolsa de Valores de São Paulo, é o valor atual, em moeda corrente, de uma carteira teórica de ações construída em 1968, a partir de uma aplicação hipotética, a partir da qual não foi feito nenhum investimento adicional, ocorrendo apenas a reaplicação dos dividendos recebidos.

A carteira teórica do Ibovespa é integrada por ações que, em conjunto, representam 80% do volume transacionado à vista nos doze meses anteriores na Bolsa de Valores de São Paulo. Como critério adicional, exige-se que a ação, para fazer parte do Ibovespa, apresente negociação em no mínimo 80% dos pregões do período. A participação de cada ação na carteira tem relação direta com a representatividade desse título no mercado à vista, em termos de números de negócios e volume em moeda corrente, ajustado ao tamanho da amostra.

Para que a representatividade do Índice se mantenha ao longo do tempo, é feita uma reavaliação quadrimestral do mercado, sempre com base nos 12 meses anteriores, na qual se identificam as alterações na participação relativa de cada ação.

Feito isso, monta-se uma nova carteira, atribuindo-se a cada papel um novo peso segundo a distribuição de mercado apurada pelo estudo de reavaliação. É importante notar que o montante investido na carteira hipotética não muda a cada reavaliação, somente a distribuição dos recursos para que a carteira mantenha a representatividade do mercado ao longo do tempo. Para fazer parte do Ibovespa a ação precisa, além de ter sido negociada em 80% dos pregões nos últimos 12 meses, ter também apresentado participação, em termos de volume, superior a 0,1% do total negociado.

A quantidade teórica de cada ação – resultante da divisão de sua parcela na composição do Índice pelo seu preço de fechamento no último dia do quadrimestre anterior – permanecerá constante nos quatro meses de vigência da carteira, somente sendo alterada caso ocorra a distribuição de proventos (dividendos, bonificações, subscrições) por parte da empresa. Dessa forma, embora a quantidade de ações permaneça constante no Índice, seu volume financeiro varia, sendo que a participação relativa em volume de determinada companhia no Índice sobe ou desce com a valorização ou desvalorização de suas ações.

Apresentamos a seguir, nas tabelas 11 e 12, o valor do índice Ibovespa ou longo de 2001, de acordo com a base de dados da Bloomberg, e sua variação diária.

Índice Ibovespa

Fonte: Bloomberg

02/jan/01	15425,34	02/abr/01	13981,3	02/jul/01	14555	01/out/01	10501,12
03/jan/01	16599,42	03/abr/01	13736,61	03/jul/01	14352,77	02/out/01	10350,83
04/jan/01	16675,06	04/abr/01	13854,76	04/jul/01	14056	03/out/01	10233,26
05/jan/01	16409,81	05/abr/01	14442,51	05/jul/01	14047,66	04/out/01	10061,92
06/jan/01	16562,14	06/abr/01	14484,51	06/jul/01	13906,76	05/out/01	10197,07
09/jan/01	16975,64	09/abr/01	14718,99	10/jul/01	13569,79	08/out/01	10094,56
10/jan/01	16918,57	10/abr/01	15047,76	11/jul/01	13811,84	09/out/01	10284,45
11/jan/01	17023,58	11/abr/01	14818,83	12/jul/01	13916	10/out/01	10462,25
12/jan/01	16850,09	12/abr/01	14969,37	13/jul/01	14078,46	11/out/01	10784,72
15/jan/01	16962,75	16/abr/01	14444,59	16/jul/01	13811,39	15/out/01	11329,32
16/jan/01	16720,98	17/abr/01	14336,9	17/jul/01	14168,65	16/out/01	11257,85
17/jan/01	17191,02	18/abr/01	14955,36	18/jul/01	13790,88	17/out/01	11271,49
18/jan/01	17521,46	19/abr/01	14431,08	19/jul/01	13761,51	18/out/01	10994,96
19/jan/01	17530,09	20/abr/01	13696,42	20/jul/01	14092,32	19/out/01	11331,57
22/jan/01	17391,67	23/abr/01	13892,65	23/jul/01	14067,72	22/out/01	11699,99
23/jan/01	17832,13	24/abr/01	14068	24/jul/01	13737,59	23/out/01	11613,44
24/jan/01	17771,76	25/abr/01	14162,75	25/jul/01	13955,89	24/out/01	11467,74
26/jan/01	17889,05	26/abr/01	14757,02	26/jul/01	13810,29	25/out/01	11723,75
29/jan/01	17883,38	27/abr/01	14927,95	27/jul/01	13910,26	26/out/01	11780,57
30/jan/01	17722,58	30/abr/01	14917,54	30/jul/01	13703,61	29/out/01	11377,02
31/jan/01	17672,77	02/mai/01	14897,24	31/jul/01	13754,16	30/out/01	11023,95
01/fev/01	17038,74	03/mai/01	15141,91	01/ago/01	13743,06	31/out/01	11364,71
02/fev/01	16914,96	04/mai/01	15092,76	02/ago/01	13822,72	01/nov/01	11387,81
05/fev/01	16731,24	07/mai/01	14875	03/ago/01	13838,42	05/nov/01	12164,66
06/fev/01	17006,77	08/mai/01	14747,41	06/ago/01	14046,82	06/nov/01	12415,57
07/fev/01	16812,35	09/mai/01	14778,98	07/ago/01	14035,91	07/nov/01	12615,83
08/fev/01	17243,3	10/mai/01	14993,46	08/ago/01	13919,18	08/nov/01	12553,64
09/fev/01	17138,4	11/mai/01	14493,2	09/ago/01	13834,19	09/nov/01	12730,71
12/fev/01	16917,06	14/mai/01	14132,94	10/ago/01	13915,09	12/nov/01	12567,12
13/fev/01	17095,78	15/mai/01	14226,33	13/ago/01	13771,36	13/nov/01	12918,09
14/fev/01	17120,05	16/mai/01	14714,25	14/ago/01	13829,49	14/nov/01	12825,62
15/fev/01	16937,19	17/mai/01	14793,51	15/ago/01	13658,6	16/nov/01	12882,82
16/fev/01	16259,05	18/mai/01	14884,06	16/ago/01	13509,47	19/nov/01	12987,23
19/fev/01	16060,76	21/mai/01	15127,91	17/ago/01	13044,21	20/nov/01	12638,13
20/fev/01	15910,57	22/mai/01	14828,87	20/ago/01	13115,48	21/nov/01	12793,79
21/fev/01	15593,86	23/mai/01	14691,61	21/ago/01	12891,7	22/nov/01	13019,43
22/fev/01	15910,36	24/mai/01	14523,21	22/ago/01	12952,23	23/nov/01	13423,86
23/fev/01	16157,75	25/mai/01	14310,06	23/ago/01	12750,79	26/nov/01	13759,53
28/fev/01	15891,41	28/mai/01	14302,02	24/ago/01	13001,12	27/nov/01	13602,88
01/mar/01	16416,58	29/mai/01	14453,91	27/ago/01	12995,85	28/nov/01	13019,2
02/mar/01	16581	30/mai/01	14489,36	28/ago/01	13018,1	29/nov/01	12736,39
05/mar/01	16537,24	31/mai/01	14649,98	29/ago/01	13076,99	30/nov/01	12931,71
06/mar/01	16324,33	01/jun/01	14791,97	30/ago/01	12892,39	03/dez/01	13336
07/mar/01	16395,21	04/jun/01	15103,86	31/ago/01	12840,6	04/dez/01	13146,64
08/mar/01	16226,71	05/jun/01	15394,82	03/set/01	12800,03	05/dez/01	13382,13
09/mar/01	16123,44	06/jun/01	15328,83	04/set/01	12766,88	06/dez/01	13539,03
12/mar/01	15527,26	07/jun/01	15464,06	05/set/01	12590,92	07/dez/01	13298,72
13/mar/01	15584,14	08/jun/01	15366,25	06/set/01	12255,29	10/dez/01	13446,18
14/mar/01	15244,9	11/jun/01	15224,19	10/set/01	11922,39	11/dez/01	13348,12
15/mar/01	15060,67	12/jun/01	15173,07	11/set/01	10827,96	12/dez/01	13562,94
16/mar/01	15237,03	13/jun/01	15403,4	12/set/01	11113,5	13/dez/01	13148,37
19/mar/01	14835,9	15/jun/01	14985,01	13/set/01	10306,26	14/dez/01	12959,17
20/mar/01	14903,36	18/jun/01	14355,42	14/set/01	10034,4	17/dez/01	12912,06
21/mar/01	14852,68	19/jun/01	14400,73	17/set/01	10544,99	18/dez/01	13397,36
22/mar/01	14067,27	20/jun/01	14571,24	18/set/01	10554,13	19/dez/01	13290,01
23/mar/01	14435,08	21/jun/01	14822,98	19/set/01	10744,53	20/dez/01	12918,14
26/mar/01	14712,04	22/jun/01	14682,1	20/set/01	10543,12	21/dez/01	13368,53
27/mar/01	14835,4	25/jun/01	14539,6	21/set/01	10418,75	26/dez/01	13358,42
28/mar/01	14631,88	26/jun/01	14459,99	24/set/01	10532,83	27/dez/01	13757
29/mar/01	14282,18	27/jun/01	14308	25/set/01	10229,05	28/dez/01	13577,57
30/mar/01	14438,45	28/jun/01	14390,97	26/set/01	10005,87		
		29/jun/01	14559,79	27/set/01	10404,72		
				28/set/01	10635,74		

Tabela 11: Índice Bovespa

Variação do Ibovespa

03/jan/01		02/abr/01	-2,1067%	02/jul/01	-0,0329%	01/out/01	2,6598%
04/jan/01	7,6114%	03/abr/01	-1,7501%	03/jul/01	-1,3894%	02/out/01	-1,4312%
05/jan/01	0,4557%	04/abr/01	0,8601%	04/jul/01	-2,0677%	03/out/01	-1,1359%
08/jan/01	-1,5907%	05/abr/01	4,2422%	05/jul/01	-0,0593%	04/out/01	-1,6743%
09/jan/01	0,9283%	06/abr/01	0,2908%	06/jul/01	-1,0030%	05/out/01	1,3432%
10/jan/01	2,4967%	09/abr/01	1,6188%	10/jul/01	-2,4231%	08/out/01	-1,0053%
11/jan/01	-0,3362%	10/abr/01	2,2336%	11/jul/01	1,7837%	09/out/01	1,8811%
12/jan/01	0,6207%	11/abr/01	-1,5214%	12/jul/01	0,7541%	10/out/01	1,7288%
15/jan/01	-1,0191%	12/abr/01	1,0159%	13/jul/01	1,1674%	11/out/01	3,0822%
16/jan/01	0,6686%	16/abr/01	-3,5057%	16/jul/01	-1,8970%	15/out/01	5,0497%
17/jan/01	-1,4253%	17/abr/01	-0,7455%	17/jul/01	2,5867%	16/out/01	-0,6308%
18/jan/01	2,8111%	18/abr/01	4,3138%	18/jul/01	-2,6662%	17/out/01	0,1212%
19/jan/01	1,9222%	19/abr/01	-3,5056%	19/jul/01	-0,2130%	18/out/01	-2,4534%
22/jan/01	0,0493%	20/abr/01	-5,0908%	20/jul/01	2,4039%	19/out/01	3,0615%
23/jan/01	-0,7896%	23/abr/01	1,4327%	23/jul/01	-0,1746%	22/out/01	3,2513%
24/jan/01	2,5326%	24/abr/01	1,2622%	24/jul/01	-2,3467%	23/out/01	-0,7397%
26/jan/01	-0,3385%	25/abr/01	0,6735%	25/jul/01	1,5891%	24/out/01	-1,2546%
29/jan/01	0,6600%	26/abr/01	4,1960%	26/jul/01	-1,0433%	25/out/01	2,2324%
30/jan/01	-0,0317%	27/abr/01	1,1583%	27/jul/01	0,7239%	26/out/01	0,4847%
31/jan/01	-0,8992%	30/abr/01	-0,0697%	30/jul/01	-1,4856%	29/out/01	-3,4256%
01/fev/01	-0,2811%	02/mai/01	-0,1361%	31/jul/01	0,3689%	30/out/01	-3,1034%
02/fev/01	-3,5876%	03/mai/01	1,6424%	06/ago/01	-0,0807%	31/out/01	3,0911%
05/fev/01	-0,7265%	04/mai/01	-0,3246%	07/ago/01	0,5796%	01/nov/01	0,2033%
06/fev/01	-1,0861%	07/mai/01	-1,4428%	08/ago/01	0,1136%	05/nov/01	6,8218%
07/fev/01	1,6468%	08/mai/01	-0,8577%	09/ago/01	1,5060%	06/nov/01	2,0626%
08/fev/01	-1,1432%	09/mai/01	0,2141%	10/ago/01	-0,0777%	07/nov/01	1,6130%
09/fev/01	2,5633%	10/mai/01	1,4513%	13/ago/01	-0,8317%	08/nov/01	-0,4930%
12/fev/01	-0,6084%	11/mai/01	-3,3365%	14/ago/01	-0,6106%	09/nov/01	1,4105%
13/fev/01	-1,2915%	14/mai/01	-2,4857%	15/ago/01	0,5848%	12/nov/01	-1,2850%
14/fev/01	1,0564%	15/mai/01	0,6608%	16/ago/01	-1,0329%	13/nov/01	2,7928%
15/fev/01	0,1420%	16/mai/01	3,4297%	17/ago/01	0,4221%	14/nov/01	-0,7158%
16/fev/01	-1,0681%	17/mai/01	0,5387%	20/ago/01	-1,2357%	16/nov/01	0,4460%
19/fev/01	-4,0039%	18/mai/01	0,6121%	21/ago/01	-1,0918%	19/nov/01	0,8105%
20/fev/01	-1,2196%	21/mai/01	1,6383%	22/ago/01	-3,4440%	20/nov/01	-2,6880%
21/fev/01	-0,9351%	22/mai/01	-1,9767%	23/ago/01	0,5464%	21/nov/01	1,2317%
22/fev/01	-1,9806%	23/mai/01	-0,9256%	24/ago/01	-1,7062%	22/nov/01	1,7637%
23/fev/01	2,0296%	24/mai/01	-1,1462%	27/ago/01	0,4695%	23/nov/01	3,1064%
28/fev/01	1,5549%	25/mai/01	-1,4677%	28/ago/01	-1,5553%	26/nov/01	2,5005%
01/mar/01	-1,6484%	28/mai/01	-0,0562%	29/ago/01	1,9833%	27/nov/01	-1,1385%
02/mar/01	3,3047%	29/mai/01	1,0620%	30/ago/01	-0,0405%	28/nov/01	-4,2909%
05/mar/01	1,0015%	30/mai/01	0,2453%	31/ago/01	0,1712%	29/nov/01	-2,1723%
06/mar/01	-0,2639%	31/mai/01	1,1085%	03/set/01	0,4524%	30/nov/01	1,5336%
07/mar/01	-1,2875%	01/jun/01	0,9692%	04/set/01	-1,4116%	03/dez/01	3,1263%
08/mar/01	0,4342%	04/jun/01	2,1085%	05/set/01	-0,4017%	04/dez/01	-1,4199%
09/mar/01	-1,0277%	05/jun/01	1,9264%	06/set/01	-0,3160%	05/dez/01	1,7913%
12/mar/01	-0,6364%	06/jun/01	-0,4287%	10/set/01	-0,2590%	06/dez/01	1,1725%
13/mar/01	-3,6976%	07/jun/01	0,8822%	11/set/01	-1,3783%	07/dez/01	-1,7749%
14/mar/01	0,3663%	08/jun/01	-0,6325%	12/set/01	-2,6657%	10/dez/01	1,1088%
15/mar/01	-2,1768%	11/jun/01	-0,9245%	13/set/01	-2,7164%	11/dez/01	-0,7293%
16/mar/01	-1,2072%	12/jun/01	-0,3358%	14/set/01	-9,1796%	12/dez/01	1,6094%
19/mar/01	1,1697%	13/jun/01	1,5180%	17/set/01	2,6371%	13/dez/01	-3,0566%
20/mar/01	-2,6326%	15/jun/01	-2,7162%	18/set/01	-7,2636%	14/dez/01	-1,4390%
21/mar/01	0,4547%	18/jun/01	-4,2015%	19/set/01	-2,6378%	17/dez/01	-0,3635%
22/mar/01	-0,3401%	19/jun/01	0,3156%	20/set/01	5,0884%	18/dez/01	3,7585%
23/mar/01	-5,2880%	20/jun/01	1,1840%	21/set/01	0,0867%	19/dez/01	-0,8013%
26/mar/01	2,6147%	21/jun/01	1,7276%	24/set/01	1,8040%	20/dez/01	-2,7981%
27/mar/01	1,9187%	22/jun/01	-0,9504%	25/set/01	-1,8745%	21/dez/01	3,4865%
28/mar/01	0,8385%	25/jun/01	-0,9706%	26/set/01	-1,1796%	26/dez/01	-0,0756%
29/mar/01	-1,3719%	26/jun/01	-0,5475%	27/set/01	1,0949%	27/dez/01	2,9837%
30/mar/01	-2,3900%	27/jun/01	-1,0511%	28/set/01	-2,8841%	28/dez/01	-1,3043%
		28/jun/01	0,5799%				
		29/jun/01	1,1731%				

Tabela 12: Variação do Índice Bovespa

3.6 Investimentos no Exterior

Além dos recursos investidos no Brasil, os clientes “private” dessa instituição, que são o objetivo desta análise, possuem, na sua absoluta maioria, recursos no exterior, seja por razões tributárias ou para diminuir a exposição de seu patrimônio ao risco Brasil. É importante notar que esse dinheiro no exterior é perfeitamente legal, sendo que a transferência é feita através da conta conhecida como CC-5, que permite a transferência de recursos para o exterior desde que sua procedência esteja completamente documentada e comprovada. Aproveitando a forte presença do banco ao redor do mundo, este oferece também opções de investimentos em suas filiais ao redor do globo. Por essa razão, serão colocadas também nesta análise algumas das alternativas de investimento mais comuns no exterior.

É importante notar que as recomendações de investimentos são feitas para brasileiros, que observam a rentabilidade com base na moeda local. Assim, os investimentos no exterior precisam levar em conta as flutuações de câmbio e os possíveis impactos que ela possa ter na rentabilidade e na variância do investimento em moeda local, o real.

3.7 Fundo de Investimento em Ações no Exterior

Uma das alternativas de investimento mais procuradas pelos clientes é a de investir em fundo de ações passivo que tenha como “benchmark” o tradicional índice Dow Jones Industrial Average, mais conhecido simplesmente como Dow Jones.

O Dow Jones Industrial Average (DJIA) é publicado pela Dow Jones Company, que também é dona do The Wall Street Journal. Segundo Jack Francis (1991)¹⁷, o DJIA é uma média de 30 ações listadas na New York Stock Exchange (NYSE), a bolsa de valores de Nova Iorque, o que representa apenas 2% das 1.500 ações lá listadas. O pequeno tamanho da amostra tem vantagens e desvantagens. A principal vantagem é que torna rápida e barata a construção do índice. A principal

¹⁷ FRANCIS, J.: *Investments: Analysis and Management*. New York, McGraw-Hill, 1991

desvantagem é que amostras pequenas estão mais sujeitas a erros estatísticos nas sua função de representar o mercado como um todo. Ainda assim, o DJIA, criado da forma como é hoje em 1928, uma época em que a utilização de quantidades muito grandes de ações seria inviável computacionalmente, é o mais conhecido e tradicional índice de ações do mercado americano, e é amplamente reconhecido e utilizado.

O DJIA é composto somente por ações de grandes e antigas companhias listadas por muito tempo na NYSE. Essas companhias são conhecidas como “blue-chips”, em uma analogia com as fichas mais valiosas de um jogo de pôquer. Não entram no Dow Jones companhias pequenas ou recém-listadas.

Em seu formato original, o DJIA foi calculado simplesmente somando-se os preços de 30 ações selecionadas e dividindo-se o total por 30. Claro que os subsequentes proventos (dividendos, bonificações, subscrições) tornaram o cálculo do índice mais complexo. O critério de seleção e manutenção de ações como parte do DJIA é bastante subjetivo e fica a cargo da empresa que o calcula. Via de regra, a empresa procura manter em seu índice ações das mais importantes e tradicionais companhias da NYSE.

Apesar das deficiências do índice, estudos estatísticos mostram que ele possui altíssima correlação com outros índices de mercados americanos. Com o S&P 500, calculado de forma muito mais científica pela Standard & Poor's e com uma base amostral bem mais ampla, a correlação é igual a 0,967, mostrando que os dois índices se movem de forma bastante parecida.

Como já explicado, é preciso levar em conta os efeitos da taxa de câmbio para estimar a rentabilidade e a variância em reais de um investimento em um fundo que tenha como “benchmark” o DJIA.

Os valores do DJIA ao longo de 2001 em dólar, segundo dados da Blommborg, e sua conversão para reais pela PTAX, mostrada na Tabela 7, bem como sua variação diária, aparecem nas tabelas a seguir.

Dow Jones Industrial Average (em US\$)

Fonte: Bloomberg

02/jan/01	10646,15	02/abr/01	9777,93	02/jul/01	10593,72	01/out/01	8836,83
03/jan/01	10945,75	03/abr/01	9485,71	03/jul/01	10571,11	02/out/01	8950,59
04/jan/01	10912,41	04/abr/01	9515,42	05/jul/01	10479,86	03/out/01	9123,78
05/jan/01	10662,01	05/abr/01	9918,05	06/jul/01	10252,68	04/out/01	9060,88
06/jan/01	10621,35	06/abr/01	9791,09	09/jul/01	10299,4	05/out/01	9119,77
09/jan/01	10572,55	09/abr/01	9845,15	10/jul/01	10175,64	08/out/01	9067,94
10/jan/01	10604,27	10/abr/01	10102,74	11/jul/01	10241,02	09/out/01	9052,44
11/jan/01	10609,55	11/abr/01	10013,47	12/jul/01	10478,99	10/out/01	9240,86
12/jan/01	10525,38	12/abr/01	10126,94	13/jul/01	10539,06	11/out/01	9410,45
16/jan/01	10652,66	16/abr/01	10158,56	16/jul/01	10472,12	12/out/01	9344,16
17/jan/01	10584,34	17/abr/01	10216,73	17/jul/01	10606,39	15/out/01	9347,62
18/jan/01	10678,28	18/abr/01	10615,83	18/jul/01	10589,83	16/out/01	9384,23
19/jan/01	10587,59	19/abr/01	10693,71	19/jul/01	10610	17/out/01	9232,97
22/jan/01	10578,24	20/abr/01	10579,85	20/jul/01	10576,65	18/out/01	9163,22
23/jan/01	10649,81	23/abr/01	10532,23	23/jul/01	10424,42	19/out/01	9204,11
24/jan/01	10646,97	24/abr/01	10454,34	24/jul/01	10241,12	22/out/01	9377,03
25/jan/01	10729,52	25/abr/01	10625,2	25/jul/01	10405,67	23/out/01	9340,08
26/jan/01	10659,98	26/abr/01	10692,35	26/jul/01	10455,63	24/out/01	9345,62
29/jan/01	10702,19	27/abr/01	10810,05	27/jul/01	10416,87	25/out/01	9462,9
30/jan/01	10881,2	30/abr/01	10734,97	30/jul/01	10401,72	26/out/01	9545,17
31/jan/01	10887,36	01/mai/01	10898,34	31/jul/01	10522,81	29/out/01	9269,5
01/fev/01	10983,63	02/mai/01	10876,68	01/ago/01	10510,01	30/out/01	9121,98
02/fev/01	10864,1	03/mai/01	10796,85	02/ago/01	10551,18	31/out/01	9075,14
05/fev/01	10965,85	04/mai/01	10951,24	03/ago/01	10512,78	01/nov/01	9263,9
06/fev/01	10957,42	07/mai/01	10935,17	06/ago/01	10401,31	02/nov/01	9323,54
07/fev/01	10946,72	08/mai/01	10883,51	07/ago/01	10458,74	05/nov/01	9441,03
08/fev/01	10880,55	09/mai/01	10866,98	08/ago/01	10293,5	06/nov/01	9591,12
09/fev/01	10781,45	10/mai/01	10910,44	09/ago/01	10298,56	07/nov/01	9554,37
12/fev/01	10946,77	11/mai/01	10821,31	10/ago/01	10416,25	08/nov/01	9587,52
13/fev/01	10903,32	14/mai/01	10877,33	13/ago/01	10415,91	09/nov/01	9608
14/fev/01	10795,41	15/mai/01	10872,97	14/ago/01	10412,17	12/nov/01	9554,37
15/fev/01	10891,02	16/mai/01	11215,92	15/ago/01	10345,95	13/nov/01	9750,95
16/fev/01	10799,82	17/mai/01	11248,58	16/ago/01	10392,52	14/nov/01	9823,61
20/fev/01	10730,88	18/mai/01	11301,74	17/ago/01	10240,78	15/nov/01	9872,39
21/fev/01	10526,58	21/mai/01	11337,92	20/ago/01	10320,07	16/nov/01	9866,99
22/fev/01	10526,81	22/mai/01	11257,24	21/ago/01	10174,14	19/nov/01	9976,46
23/fev/01	10441,9	23/mai/01	11105,51	22/ago/01	10276,9	20/nov/01	9901,38
26/fev/01	10642,53	24/mai/01	11122,42	23/ago/01	10229,15	21/nov/01	9834,68
27/fev/01	10636,88	25/mai/01	11005,37	24/ago/01	10423,17	23/nov/01	9959,71
28/fev/01	10495,28	29/mai/01	11039,14	27/ago/01	10382,35	26/nov/01	9982,75
01/mar/01	10450,14	30/mai/01	10872,64	28/ago/01	10222,03	27/nov/01	9872,6
02/mar/01	10466,31	31/mai/01	10911,94	29/ago/01	10090,9	28/nov/01	9711,86
05/mar/01	10562,3	01/jun/01	10990,41	30/ago/01	9919,58	29/nov/01	9829,42
06/mar/01	10591,22	04/jun/01	11061,52	31/ago/01	9949,75	30/nov/01	9851,56
07/mar/01	10729,6	05/jun/01	11175,84	04/set/01	9997,49	03/dez/01	9763,96
08/mar/01	10858,25	06/jun/01	11070,24	05/set/01	10033,27	04/dez/01	9893,84
09/mar/01	10644,62	07/jun/01	11090,74	06/set/01	9840,84	05/dez/01	10114,29
12/mar/01	10208,25	08/jun/01	10977	07/set/01	9605,85	06/dez/01	10099,14
13/mar/01	10290,8	11/jun/01	10922,09	10/set/01	9605,51	07/dez/01	10049,46
14/mar/01	9973,46	12/jun/01	10948,38	17/set/01	8920,7	10/dez/01	9921,45
15/mar/01	10031,28	13/jun/01	10871,62	18/set/01	8903,4	11/dez/01	9888,37
16/mar/01	9823,41	14/jun/01	10690,13	19/set/01	8759,13	12/dez/01	9894,81
19/mar/01	9959,11	15/jun/01	10623,64	20/set/01	8376,21	13/dez/01	9766,45
20/mar/01	9720,76	18/jun/01	10645,38	21/set/01	8235,81	14/dez/01	9811,15
21/mar/01	9487	19/jun/01	10596,67	24/set/01	8603,86	17/dez/01	9891,97
22/mar/01	9389,48	20/jun/01	10647,33	25/set/01	8659,97	18/dez/01	9998,39
23/mar/01	9504,78	21/jun/01	10715,43	26/set/01	8567,39	19/dez/01	10070,49
26/mar/01	9687,53	22/jun/01	10604,59	27/set/01	8681,42	20/dez/01	9985,18
27/mar/01	9947,54	25/jun/01	10504,22	28/set/01	8847,56	21/dez/01	10035,34
28/mar/01	9785,35	26/jun/01	10472,48			24/dez/01	10035,34
29/mar/01	9799,06	27/jun/01	10434,84			26/dez/01	10088,14
30/mar/01	9878,78	28/jun/01	10566,21			27/dez/01	10131,31
		29/jun/01	10502,4			28/dez/01	10136,99

Tabela 13: Dow Jones Industrial Average

Dow Jones Industrial Average (em R\$)

02/jan/01	20636,49716	02/abr/01	21104,88411	02/jul/01	24784,00794	01/out/01	23741,02748
03/jan/01	21258,83565	03/abr/01	20614,34497	03/jul/01	25272,35268	02/out/01	24200,60524
04/jan/01	21123,15204	04/abr/01	20583,75654	05/jul/01	25270,08642	03/out/01	24896,05849
05/jan/01	20773,86028	05/abr/01	21412,07815	06/jul/01	25573,25972	04/out/01	24759,76069
08/jan/01	20737,12374	06/abr/01	21071,40479	09/jul/01	25282,96712	05/out/01	25115,84658
09/jan/01	20554,09446	08/abr/01	21306,87363	10/jul/01	25237,62233	08/out/01	25234,26343
10/jan/01	20603,03618	10/abr/01	21642,08963	11/jul/01	25909,7806	09/out/01	25163,06747
11/jan/01	20649,36717	11/abr/01	21412,80425	12/jul/01	26840,73628	10/out/01	25674,80542
12/jan/01	20532,9113	12/abr/01	21846,84766	13/jul/01	26914,65143	11/out/01	26160,10996
16/jan/01	20746,05535	16/abr/01	22171,0572	16/jul/01	27205,52055	12/out/01	25967,42064
17/jan/01	20656,39794	17/abr/01	22362,37862	17/jul/01	26838,40926	15/out/01	25730,25881
18/jan/01	20823,71383	18/abr/01	23089,43025	18/jul/01	26103,25217	16/out/01	25535,42825
19/jan/01	20674,38699	19/abr/01	23399,97622	19/jul/01	26558,952	17/out/01	25321,42023
22/jan/01	20683,63267	20/abr/01	23660,77654	20/jul/01	25990,00205	18/out/01	25265,74651
23/jan/01	20842,74315	23/abr/01	23788,09468	23/jul/01	25131,19174	19/out/01	25013,08934
24/jan/01	20853,15544	24/abr/01	23561,99149	24/jul/01	24831,64366	22/out/01	25475,5151
25/jan/01	21024,49444	25/abr/01	24449,64772	25/jul/01	25924,68624	23/out/01	25627,3115
26/jan/01	21040,66852	26/abr/01	24101,62614	26/jul/01	25967,60267	24/out/01	25633,16654
29/jan/01	21126,12306	27/abr/01	23976,6909	27/jul/01	26011,46666	25/out/01	25824,2541
30/jan/01	21493,63436	30/abr/01	23452,68896	30/jul/01	25311,54545	26/out/01	26006,77018
31/jan/01	21463,3415	01/mai/01	24236,81833	31/jul/01	25584,10795	29/out/01	25241,77545
01/fev/01	21649,83309	02/mai/01	24312,6428	01/ago/01	26206,70994	30/out/01	24694,11206
02/fev/01	21444,84699	03/mai/01	23954,52736	02/ago/01	26248,17049	31/out/01	24338,52548
05/fev/01	21859,32539	04/mai/01	24045,63767	03/ago/01	26160,00175	01/nov/01	24278,82912
06/fev/01	21854,57419	07/mai/01	24406,20592	06/ago/01	25680,83439	02/nov/01	24244,00106
07/fev/01	21871,54656	08/mai/01	24581,49569	07/ago/01	25585,21566	05/nov/01	24598,60367
08/fev/01	21810,06248	09/mai/01	24662,61111	08/ago/01	25429,0624	06/nov/01	24525,45295
09/fev/01	21518,69606	10/mai/01	24944,53897	09/ago/01	25404,48781	07/nov/01	24217,46164
12/fev/01	21766,55747	11/mai/01	24956,10512	10/ago/01	25876,04825	08/nov/01	24450,0935
13/fev/01	21602,74792	14/mai/01	25435,54847	13/ago/01	25946,03181	09/nov/01	24279,416
14/fev/01	21378,15042	15/mai/01	25245,94904	14/ago/01	26176,19538	12/nov/01	24171,60066
15/fev/01	21666,59519	16/mai/01	25836,99331	15/ago/01	25870,04798	13/nov/01	24759,61224
16/fev/01	21396,60338	17/mai/01	25805,36738	16/ago/01	25853,472	14/nov/01	24710,30859
20/fev/01	21397,37472	18/mai/01	26308,19037	17/ago/01	25842,60833	15/nov/01	25026,50865
21/fev/01	21081,58177	21/mai/01	26147,5111	20/ago/01	26115,96914	16/nov/01	25073,00829
22/fev/01	21119,9389	22/mai/01	26372,33615	21/ago/01	25794,49714	19/nov/01	25323,24842
23/fev/01	21134,4056	23/mai/01	26091,28519	22/ago/01	25929,64639	20/nov/01	24886,12849
26/fev/01	21676,7051	24/mai/01	26029,79953	23/ago/01	25881,33703	21/nov/01	24482,45239
27/fev/01	21737,52797	25/mai/01	25603,99331	24/ago/01	26579,0835	23/nov/01	24504,87046
28/fev/01	21464,94666	29/mai/01	25859,18545	27/ago/01	26563,24248	26/nov/01	24814,12168
01/mar/01	21347,54599	30/mai/01	25655,08134	28/ago/01	26131,59749	27/nov/01	24752,58272
02/mar/01	21304,17401	31/mai/01	25752,1784	29/ago/01	25705,55866	28/nov/01	24558,38038
05/mar/01	21369,64536	01/jun/01	26193,44415	30/ago/01	25198,70907	29/nov/01	24251,14502
06/mar/01	21402,73738	04/jun/01	26137,26561	31/ago/01	25388,77708	30/nov/01	23928,45408
07/mar/01	21878,72736	05/jun/01	26704,68968	04/set/01	25583,57691	03/dez/01	23732,28118
08/mar/01	22134,54263	06/jun/01	26370,4187	05/set/01	25727,31093	04/dez/01	24175,59804
09/mar/01	21926,85274	07/jun/01	26484,68712	06/set/01	25260,4522	05/dez/01	24279,35315
12/mar/01	20979,9954	08/jun/01	25926,5763	07/set/01	24905,0873	06/dez/01	23812,76221
13/mar/01	21221,68776	11/jun/01	25909,3819	10/set/01	24986,81316	07/dez/01	23532,82048
14/mar/01	20707,895	12/jun/01	26173,19723	17/set/01	23522,99383	10/dez/01	23366,0069
15/mar/01	20929,26259	13/jun/01	26176,68664	18/set/01	23808,58194	11/dez/01	23580,79594
16/mar/01	20842,329	14/jun/01	25740,76403	19/set/01	23630,38091	12/dez/01	23589,22704
19/mar/01	21189,99835	15/jun/01	26119,2813	20/set/01	22604,04031	13/dez/01	23029,2891
20/mar/01	20344,5786	18/jun/01	26267,47515	21/set/01	21972,3175	14/dez/01	22967,52445
21/mar/01	19922,7	19/jun/01	26224,63892	24/set/01	23052,3221	17/dez/01	22682,28721
22/mar/01	20111,32721	20/jun/01	25611,08758	25/set/01	23438,20881	18/dez/01	23198,26448
23/mar/01	20517,01811	21/jun/01	24962,66573	26/set/01	23407,82296	19/dez/01	23475,31924
26/mar/01	20705,15787	22/jun/01	24387,37562	27/set/01	24314,05299	20/dez/01	23343,3538
27/mar/01	21124,59594	25/jun/01	24305,71466	28/set/01	24485,6223	21/dez/01	23226,79443
28/mar/01	20715,58595	26/jun/01	24333,85453			24/dez/01	23297,04181
29/mar/01	20939,61131	27/jun/01	23919,78373			26/dez/01	23408,52006
30/mar/01	21353,97085	28/jun/01	24354,05743			27/dez/01	23508,69172
		29/jun/01	24206,98176			28/dez/01	23521,8716

Tabela 14: Dow Jones Industrial Average em R\$

Variação em R\$ do Dow Jones Industrial Average

02/jan/01		02/abr/01	-1,1674%	02/jul/01	1,7654%	01/out/01	-3,0409%
03/jan/01	3,0157%	03/abr/01	-2,3234%	03/jul/01	1,9704%	02/out/01	1,9358%
04/jan/01	-0,6382%	04/abr/01	-0,1484%	05/jul/01	-0,0090%	03/out/01	2,8737%
05/jan/01	-1,6536%	05/abr/01	4,0242%	06/jul/01	1,1997%	04/out/01	-0,5475%
08/jan/01	-0,1768%	06/abr/01	-1,5910%	09/jul/01	-1,1351%	05/out/01	1,4382%
09/jan/01	-0,8826%	09/abr/01	1,1175%	10/jul/01	-0,1793%	08/out/01	0,4715%
10/jan/01	0,2381%	10/abr/01	1,5733%	11/jul/01	2,6633%	09/out/01	-0,2821%
11/jan/01	0,2249%	11/abr/01	-1,0594%	12/jul/01	2,8212%	10/out/01	2,0337%
12/jan/01	-0,5840%	12/abr/01	2,0270%	13/jul/01	1,0282%	11/out/01	1,8902%
16/jan/01	1,0381%	16/abr/01	1,4840%	16/jul/01	1,0807%	12/out/01	-0,7366%
17/jan/01	-0,4322%	17/abr/01	0,8629%	17/jul/01	-1,3494%	15/out/01	-0,9133%
18/jan/01	0,8100%	18/abr/01	3,2512%	18/jul/01	-2,7392%	16/out/01	-0,7572%
19/jan/01	-0,7171%	19/abr/01	1,3450%	19/jul/01	1,7458%	17/out/01	-0,8381%
22/jan/01	0,0447%	20/abr/01	1,1145%	20/jul/01	-2,1422%	18/out/01	-0,2199%
23/jan/01	0,7693%	23/abr/01	0,5381%	23/jul/01	-3,3044%	19/out/01	-1,0000%
24/jan/01	0,0500%	24/abr/01	-0,9505%	24/jul/01	-1,1919%	22/out/01	1,8487%
25/jan/01	0,8216%	25/abr/01	3,7673%	25/jul/01	4,4018%	23/out/01	0,5959%
26/jan/01	0,0769%	26/abr/01	-1,4234%	26/jul/01	0,1655%	24/out/01	0,0228%
29/jan/01	0,4061%	27/abr/01	-0,5184%	27/jul/01	0,1689%	25/out/01	0,7455%
30/jan/01	1,7396%	30/abr/01	-2,1855%	30/jul/01	-2,6908%	26/out/01	0,7068%
31/jan/01	-0,1409%	01/mai/01	3,3435%	31/jul/01	1,0768%	29/out/01	-2,9415%
01/fev/01	0,8689%	02/mai/01	0,3128%	01/ago/01	2,4335%	30/out/01	-2,1697%
02/fev/01	-0,9477%	03/mai/01	-1,4730%	02/ago/01	0,1582%	31/out/01	-1,4359%
05/fev/01	1,9337%	04/mai/01	0,3803%	03/ago/01	-0,3359%	01/nov/01	-0,2494%
06/fev/01	-0,0217%	07/mai/01	1,4995%	06/ago/01	-1,8317%	02/nov/01	-0,1435%
07/fev/01	0,0777%	08/mai/01	0,7182%	07/ago/01	-0,3723%	05/nov/01	1,4626%
08/fev/01	-0,2811%	09/mai/01	0,3300%	08/ago/01	-0,6103%	06/nov/01	-0,2974%
09/fev/01	-1,3359%	10/mai/01	1,1431%	09/ago/01	-0,0966%	07/nov/01	-1,2558%
12/fev/01	1,1518%	11/mai/01	0,0464%	10/ago/01	1,8562%	08/nov/01	0,9606%
13/fev/01	-0,7526%	14/mai/01	1,9211%	13/ago/01	0,2705%	09/nov/01	-0,8981%
14/fev/01	-1,0397%	15/mai/01	-0,7454%	14/ago/01	0,8871%	12/nov/01	-0,4441%
15/fev/01	1,3493%	16/mai/01	2,3411%	15/ago/01	-1,1696%	13/nov/01	2,4327%
16/fev/01	-1,2461%	17/mai/01	-0,1224%	16/ago/01	-0,0641%	14/nov/01	-0,1991%
20/fev/01	0,0036%	18/mai/01	1,9485%	17/ago/01	-0,0420%	15/nov/01	1,2796%
21/fev/01	-1,4758%	21/mai/01	-0,6108%	20/ago/01	1,0578%	16/nov/01	0,1858%
22/fev/01	0,1819%	22/mai/01	0,8598%	21/ago/01	-1,2309%	19/nov/01	0,9980%
23/fev/01	0,0685%	23/mai/01	-1,0657%	22/ago/01	0,5239%	20/nov/01	-1,7262%
26/fev/01	2,5680%	24/mai/01	-0,2357%	23/ago/01	-0,2634%	21/nov/01	-1,6221%
27/fev/01	0,2806%	25/mai/01	-1,6358%	24/ago/01	2,7754%	23/nov/01	0,0916%
28/fev/01	-1,2540%	29/mai/01	0,9967%	27/ago/01	-0,0596%	26/nov/01	1,2620%
01/mar/01	-0,5469%	30/mai/01	-0,7893%	28/ago/01	-1,6250%	27/nov/01	-0,2480%
02/mar/01	-0,2032%	31/mai/01	0,3785%	29/ago/01	-1,6304%	28/nov/01	-0,7846%
05/mar/01	0,3073%	01/jun/01	1,7135%	30/ago/01	-1,9718%	29/nov/01	-1,2510%
06/mar/01	0,1549%	04/jun/01	-0,2145%	31/ago/01	0,7543%	30/nov/01	-1,3306%
07/mar/01	2,2240%	05/jun/01	2,1709%	04/set/01	0,7673%	03/dez/01	-0,8198%
08/mar/01	1,1692%	06/jun/01	-1,2517%	05/set/01	0,5618%	04/dez/01	1,8680%
09/mar/01	-0,9383%	07/jun/01	0,4333%	06/set/01	-1,8146%	05/dez/01	0,4292%
12/mar/01	-4,3183%	08/jun/01	-2,1073%	07/set/01	-1,4068%	06/dez/01	-1,9218%
13/mar/01	1,1520%	11/jun/01	-0,0663%	10/set/01	0,3281%	07/dez/01	-1,1756%
14/mar/01	-2,4211%	12/jun/01	1,0182%	17/set/01	-5,8584%	10/dez/01	-0,7089%
15/mar/01	1,0690%	13/jun/01	0,0133%	18/set/01	1,2141%	11/dez/01	0,9192%
16/mar/01	-0,4154%	14/jun/01	-1,6653%	19/set/01	-0,7485%	12/dez/01	0,0358%
19/mar/01	1,6681%	15/jun/01	1,4705%	20/set/01	-4,3433%	13/dez/01	-2,3737%
20/mar/01	-3,9897%	18/jun/01	0,5674%	21/set/01	-2,7947%	14/dez/01	-0,1814%
21/mar/01	-2,0737%	19/jun/01	-0,1631%	24/set/01	4,9153%	17/dez/01	-1,3278%
22/mar/01	0,9468%	20/jun/01	-2,3396%	25/set/01	1,6740%	18/dez/01	2,2748%
23/mar/01	2,0172%	21/jun/01	-2,5318%	26/set/01	-0,1296%	19/dez/01	1,1943%
26/mar/01	0,9170%	22/jun/01	-2,3046%	27/set/01	3,8715%	20/dez/01	-0,5621%
27/mar/01	2,0258%	25/jun/01	-0,3348%	28/set/01	0,7056%	21/dez/01	-0,4993%
28/mar/01	-1,9362%	26/jun/01	0,1158%			24/dez/01	0,3024%
29/mar/01	1,0814%	27/jun/01	-1,7016%			26/dez/01	0,4785%
30/mar/01	1,9788%	28/jun/01	1,8155%			27/dez/01	0,4279%
		29/jun/01	-0,6039%			28/dez/01	0,0561%

Tabela 15: Variação em R\$ do Dow Jones Industrial Average

3.8 Fundos de Investimento em Títulos do Governo Americano

Outra alternativa disponível para o investidor é aplicar parte de seus recursos em títulos da dívida do governo dos Estados Unidos. Esses papéis da dívida pública americana são considerados como tendo o menor risco de crédito do mercado, dado o tamanho, a solidez e a importância da economia americana no mundo. Como consequência, as taxas pagas por esses papéis são consideravelmente menores do que aquelas pagas por papéis brasileiros. Ainda assim, como estão sendo analisadas alternativas de investimento do ponto de vista brasileiro, com referencial em reais, a taxa de câmbio é um fator que afeta bastante tanto a rentabilidade quanto a variância desses títulos, para o investidor brasileiro.

De acordo com Francis (1991)¹⁸, o Tesouro americano emite diferentes tipos de papéis, sendo os mais importantes os “Treasury Bills”, “Treasury Notes” e “Treasury Bonds”. “Treasury Bills” são títulos de prazo mais curto, com prazos de vencimento de 13, 26 ou 52 semanas a partir da emissão. Com ofertas semanais, estes papéis são vendidos com um deságio sobre seu valor de face que será pago integralmente no vencimento, embutindo dessa maneira os juros para o período considerado. Já as “Treasury Notes” são papéis com prazos mais longos, de um a dez anos, e pagam uma taxa de juros predefinida, ou seja, um cupom, a cada seis meses. Finalmente, os “Treasury Bonds”, que constituem aproximadamente 10% da dívida federal americana, são papéis com prazos mais longos, de dez a trinta anos. Estes papéis também pagam um cupom mas, principalmente por causa do longo prazo até o vencimento, muitas vezes podem embutir juros adicionais através de deságio, conforme as flutuações das taxas de juros do mercado.

Nas tabelas a seguir, será mostrada a variação ao longo de 2001 de papéis americanos com prazo médio de 10 anos, trazendo-os a valor presente e depois convertendo esse valor para reais pela PTAX que consta na Tabela 7, o que permitirá

¹⁸ FRANCIS, J.: *Investments: Analysis and Management*. New York, McGraw-Hill, 1991

a análise da variância e da correlação deste tipo de investimento tendo como referência a moeda brasileira, o real.

Rentabilidade de T-Notes de 10 anos

Fonte: Bloomberg

02/jan/01	4,92	02/abr/01	4,98	02/jul/01	5,37	01/out/01	4,55
03/jan/01	5,14	03/abr/01	4,94	03/jul/01	5,41	02/out/01	4,53
04/jan/01	5,03	04/abr/01	4,94	05/jul/01	5,44	03/out/01	4,5
05/jan/01	4,93	05/abr/01	4,98	06/jul/01	5,41	04/out/01	4,53
08/jan/01	4,94	08/abr/01	4,89	09/jul/01	5,37	05/out/01	4,52
09/jan/01	4,98	09/abr/01	4,93	10/jul/01	5,32	09/out/01	4,62
10/jan/01	5,1	10/abr/01	5,09	11/jul/01	5,31	10/out/01	4,61
11/jan/01	5,14	11/abr/01	5,12	12/jul/01	5,27	11/out/01	4,69
12/jan/01	5,25	12/abr/01	5,17	13/jul/01	5,27	12/out/01	4,68
16/jan/01	5,24	16/abr/01	5,28	16/jul/01	5,21	15/out/01	4,62
17/jan/01	5,19	17/abr/01	5,21	17/jul/01	5,22	16/out/01	4,59
18/jan/01	5,12	18/abr/01	5,14	18/jul/01	5,12	17/out/01	4,59
19/jan/01	5,19	19/abr/01	5,27	19/jul/01	5,13	18/out/01	4,58
22/jan/01	5,25	20/abr/01	5,29	20/jul/01	5,15	19/out/01	4,63
23/jan/01	5,3	23/abr/01	5,2	23/jul/01	5,13	22/out/01	4,63
24/jan/01	5,33	24/abr/01	5,22	24/jul/01	5,13	23/out/01	4,66
25/jan/01	5,29	25/abr/01	5,28	25/jul/01	5,2	24/out/01	4,61
26/jan/01	5,29	26/abr/01	5,2	26/jul/01	5,19	25/out/01	4,56
29/jan/01	5,32	27/abr/01	5,34	27/jul/01	5,13	26/out/01	4,53
30/jan/01	5,24	30/abr/01	5,35	30/jul/01	5,11	29/out/01	4,5
31/jan/01	5,19	01/mai/01	5,3	31/jul/01	5,07	30/out/01	4,44
01/fev/01	5,1	02/mai/01	5,31	01/ago/01	5,11	31/out/01	4,3
02/fev/01	5,17	03/mai/01	5,22	02/ago/01	5,17	01/nov/01	4,24
05/fev/01	5,18	04/mai/01	5,21	03/ago/01	5,2	02/nov/01	4,37
06/fev/01	5,22	07/mai/01	5,21	06/ago/01	5,19	05/nov/01	4,31
07/fev/01	5,1	08/mai/01	5,24	07/ago/01	5,2	06/nov/01	4,3
08/fev/01	5,1	09/mai/01	5,2	08/ago/01	4,99	07/nov/01	4,22
09/fev/01	5,03	10/mai/01	5,31	09/ago/01	5,04	08/nov/01	4,32
12/fev/01	5,05	11/mai/01	5,51	10/ago/01	4,99	09/nov/01	4,34
13/fev/01	5,07	14/mai/01	5,46	13/ago/01	4,97	13/nov/01	4,41
14/fev/01	5,13	15/mai/01	5,5	14/ago/01	4,97	14/nov/01	4,54
15/fev/01	5,19	16/mai/01	5,48	15/ago/01	5	15/nov/01	4,79
16/fev/01	5,11	17/mai/01	5,46	16/ago/01	4,95	16/nov/01	4,91
20/fev/01	5,11	18/mai/01	5,41	17/ago/01	4,84	19/nov/01	4,8
21/fev/01	5,14	21/mai/01	5,44	20/ago/01	4,91	20/nov/01	4,88
22/fev/01	5,15	22/mai/01	5,42	21/ago/01	4,87	21/nov/01	4,98
23/fev/01	5,1	23/mai/01	5,41	22/ago/01	4,91	23/nov/01	5,04
26/fev/01	5,05	24/mai/01	5,52	23/ago/01	4,89	26/nov/01	5,05
27/fev/01	4,96	25/mai/01	5,52	24/ago/01	4,93	27/nov/01	4,98
28/fev/01	4,92	29/mai/01	5,54	27/ago/01	4,94	28/nov/01	4,98
01/mar/01	4,87	30/mai/01	5,54	28/ago/01	4,85	29/nov/01	4,79
02/mar/01	4,95	31/mai/01	5,43	29/ago/01	4,78	30/nov/01	4,78
05/mar/01	4,98	01/jun/01	5,39	30/ago/01	4,79	03/dez/01	4,75
06/mar/01	4,99	04/jun/01	5,35	31/ago/01	4,85	04/dez/01	4,7
07/mar/01	4,92	05/jun/01	5,29	04/set/01	4,99	05/dez/01	4,92
08/mar/01	4,89	06/jun/01	5,27	05/set/01	4,97	06/dez/01	5,04
09/mar/01	4,95	07/jun/01	5,33	06/set/01	4,86	07/dez/01	5,2
12/mar/01	4,92	08/jun/01	5,38	07/set/01	4,8	10/dez/01	5,17
13/mar/01	4,95	11/jun/01	5,32	10/set/01	4,84	11/dez/01	5,13
14/mar/01	4,84	12/jun/01	5,27	13/set/01	4,64	12/dez/01	5,02
15/mar/01	4,81	13/jun/01	5,28	14/set/01	4,57	13/dez/01	5,13
16/mar/01	4,78	14/jun/01	5,26	17/set/01	4,63	14/dez/01	5,24
19/mar/01	4,82	15/jun/01	5,27	18/set/01	4,72	17/dez/01	5,26
20/mar/01	4,78	18/jun/01	5,27	19/set/01	4,69	18/dez/01	5,16
21/mar/01	4,77	19/jun/01	5,26	20/set/01	4,75	19/dez/01	5,08
22/mar/01	4,73	20/jun/01	5,24	21/set/01	4,7	20/dez/01	5,08
23/mar/01	4,8	21/jun/01	5,22	24/set/01	4,73	21/dez/01	5,12
26/mar/01	4,85	22/jun/01	5,14	25/set/01	4,72	24/dez/01	5,18
27/mar/01	5	25/jun/01	5,16	26/set/01	4,65	26/dez/01	5,22
28/mar/01	4,97	26/jun/01	5,24	27/set/01	4,58	27/dez/01	5,13
29/mar/01	4,98	27/jun/01	5,26	28/set/01	4,6	28/dez/01	5,15
30/mar/01	4,93	28/jun/01	5,35				
		29/jun/01	5,42				

Tabela 16: Rentabilidade de Treasury Notes de 10 anos

Valor Presente dos T-Notes (em US\$)

02/jan/01	97627,2057	02/abr/01	97599,30291	02/jul/01	97418,51609	01/out/01	97799,80332
03/jan/01	97525,01228	03/abr/01	97617,90211	03/jul/01	97400,0306	02/out/01	97809,15902
04/jan/01	97576,06885	04/abr/01	97617,90211	05/jul/01	97386,17339	03/out/01	97823,19761
05/jan/01	97622,55357	05/abr/01	97599,30291	06/jul/01	97400,0306	04/out/01	97809,15902
08/jan/01	97617,90211	06/abr/01	97641,16607	09/jul/01	97418,51609	05/out/01	97813,83788
09/jan/01	97599,30291	09/abr/01	97622,55357	10/jul/01	97441,63776	09/out/01	97767,07951
10/jan/01	97543,56903	10/abr/01	97548,20987	11/jul/01	97446,26407	10/out/01	97771,75233
11/jan/01	97525,01228	11/abr/01	97534,28933	12/jul/01	97464,77589	11/out/01	97734,38851
12/jan/01	97474,03577	12/abr/01	97511,10166	13/jul/01	97464,77589	12/out/01	97739,05665
16/jan/01	97478,66669	16/abr/01	97460,14695	16/jul/01	97492,56343	15/out/01	97767,07951
17/jan/01	97501,83122	17/abr/01	97492,56343	17/jul/01	97487,93052	16/out/01	97781,09998
18/jan/01	97534,28933	18/abr/01	97525,01228	18/jul/01	97534,28933	17/out/01	97781,09998
19/jan/01	97501,83122	19/abr/01	97464,77589	19/jul/01	97529,65047	18/out/01	97785,77481
22/jan/01	97474,03577	20/abr/01	97455,51866	20/jul/01	97520,37474	19/out/01	97762,40736
23/jan/01	97450,89103	23/abr/01	97497,197	23/jul/01	97529,65047	22/out/01	97762,40736
24/jan/01	97437,01211	24/abr/01	97487,93052	24/jul/01	97529,65047	23/out/01	97748,39492
25/jan/01	97455,51866	25/abr/01	97460,14695	25/jul/01	97497,197	24/out/01	97771,75233
26/jan/01	97455,51866	26/abr/01	97497,197	26/jul/01	97501,83122	25/out/01	97795,12648
29/jan/01	97441,63776	27/abr/01	97432,38711	27/jul/01	97529,65047	26/out/01	97809,15902
30/jan/01	97478,66669	30/abr/01	97427,76278	30/jul/01	97538,92885	29/out/01	97823,19761
31/jan/01	97501,83122	01/mai/01	97450,89103	31/jul/01	97557,49355	30/out/01	97851,29292
01/fev/01	97543,56903	02/mai/01	97446,26407	01/ago/01	97538,92885	31/out/01	97916,94291
02/fev/01	97511,10166	03/mai/01	97487,93052	02/ago/01	97511,10166	01/nov/01	97945,1191
05/fev/01	97506,46611	04/mai/01	97492,56343	03/ago/01	97497,197	02/nov/01	97884,1014
06/fev/01	97487,93052	07/mai/01	97492,56343	06/ago/01	97501,83122	05/nov/01	97912,24924
07/fev/01	97543,56903	08/mai/01	97478,66669	07/ago/01	97497,197	06/nov/01	97916,94291
08/fev/01	97543,56903	08/mai/01	97497,197	08/ago/01	97594,65477	07/nov/01	97954,51656
09/fev/01	97576,06885	10/mai/01	97446,26407	09/ago/01	97571,42403	08/nov/01	97907,55625
12/fev/01	97566,77987	11/mai/01	97353,86288	10/ago/01	97594,65477	09/nov/01	97898,17229
13/fev/01	97557,49355	14/mai/01	97376,93854	13/ago/01	97603,95171	13/nov/01	97865,34966
14/fev/01	97529,65047	15/mai/01	97358,4767	14/ago/01	97603,95171	14/nov/01	97804,48084
15/fev/01	97501,83122	16/mai/01	97367,70631	15/ago/01	97590,00729	15/nov/01	97687,74393
16/fev/01	97538,92885	17/mai/01	97376,93854	16/ago/01	97613,25131	16/nov/01	97631,85849
20/fev/01	97538,92885	18/mai/01	97400,0306	17/ago/01	97664,44667	19/nov/01	97683,08315
21/fev/01	97525,01228	21/mai/01	97400,0306	20/ago/01	97631,85849	20/nov/01	97645,82086
22/fev/01	97520,37474	22/mai/01	97395,41088	21/ago/01	97650,47631	21/nov/01	97599,30291
23/fev/01	97543,56903	23/mai/01	97400,0306	22/ago/01	97631,85849	23/nov/01	97571,42403
26/fev/01	97566,77987	24/mai/01	97349,24972	23/ago/01	97641,16607	26/nov/01	97566,77987
27/fev/01	97608,60118	25/mai/01	97349,24972	24/ago/01	97622,55357	27/nov/01	97599,30291
28/fev/01	97627,2057	29/mai/01	97340,02537	27/ago/01	97617,90211	28/nov/01	97599,30291
01/mar/01	97650,47631	30/mai/01	97340,02537	28/ago/01	97659,78922	29/nov/01	97687,74393
02/mar/01	97613,25131	31/mai/01	97390,7918	29/ago/01	97692,40538	30/nov/01	97692,40538
05/mar/01	97599,30291	01/jun/01	97409,27203	30/ago/01	97687,74393	03/dez/01	97706,39375
06/mar/01	97594,65477	04/jun/01	97427,76278	31/ago/01	97659,78922	04/dez/01	97729,72105
07/mar/01	97627,2057	05/jun/01	97455,51866	04/set/01	97594,65477	05/dez/01	97627,2057
08/mar/01	97641,16607	06/jun/01	97464,77589	05/set/01	97603,95171	06/dez/01	97571,42403
09/mar/01	97613,25131	07/jun/01	97437,01211	06/set/01	97655,13243	07/dez/01	97497,197
12/mar/01	97627,2057	08/jun/01	97413,89373	07/set/01	97683,08315	10/dez/01	97511,10166
13/mar/01	97613,25131	11/jun/01	97441,63776	10/set/01	97664,44667	11/dez/01	97529,65047
14/mar/01	97664,44667	12/jun/01	97464,77589	13/set/01	97757,73588	12/dez/01	97590,71434
15/mar/01	97678,42303	13/jun/01	97460,14695	14/set/01	97790,45031	13/dez/01	97529,65047
16/mar/01	97692,40538	14/jun/01	97469,4055	17/set/01	97762,40736	14/dez/01	97478,66669
19/mar/01	97673,76357	15/jun/01	97464,77589	18/set/01	97720,38812	17/dez/01	97469,4055
20/mar/01	97692,40538	18/jun/01	97464,77589	19/set/01	97734,38851	18/dez/01	97515,73787
21/mar/01	97697,06751	19/jun/01	97469,4055	20/set/01	97706,39375	19/dez/01	97552,85138
22/mar/01	97715,72266	20/jun/01	97478,66669	21/set/01	97729,72105	20/dez/01	97552,85138
23/mar/01	97683,08315	21/jun/01	97487,93052	24/set/01	97715,72266	21/dez/01	97534,28933
26/mar/01	97659,78922	22/jun/01	97525,01228	25/set/01	97720,38812	24/dez/01	97506,46611
27/mar/01	97590,00729	25/jun/01	97515,73787	26/set/01	97753,06506	26/dez/01	97487,93052
28/mar/01	97603,95171	26/jun/01	97478,66669	27/set/01	97785,77481	27/dez/01	97529,65047
29/mar/01	97599,30291	27/jun/01	97469,4055	28/set/01	97776,42582	28/dez/01	97520,37474
30/mar/01	97622,55357	28/jun/01	97427,76278				
		29/jun/01	97395,41088				

Tabela 17: Valor Presente dos T-Notes (em US\$)

Valor Presente dos T-Notes em R\$ (PU x PTAX)

02/jan/01	189240,5755	02/abr/01	210658,3354	02/jul/01	227910,8184	01/out/01	262748,9516
03/jan/01	189413,0788	03/abr/01	212143,2249	03/jul/01	232854,2532	02/out/01	264456,4042
04/jan/01	188877,9965	04/abr/01	211167,0458	05/jul/01	234827,2799	03/out/01	266930,1593
05/jan/01	190207,7834	05/abr/01	210707,1351	06/jul/01	242944,8963	04/out/01	267273,3079
08/jan/01	190589,1921	06/abr/01	210133,5535	09/jul/01	239142,9733	05/out/01	269379,3095
09/jan/01	189742,8048	09/abr/01	211274,7304	10/jul/01	241674,75	09/out/01	272066,2289
10/jan/01	189517,4003	10/abr/01	208967,7752	11/jul/01	246539,0481	10/out/01	271776,1399
11/jan/01	189812,8314	11/abr/01	208567,3243	12/jul/01	247784,6998	11/out/01	271545,225
12/jan/01	190152,349	12/abr/01	210360,6996	13/jul/01	248905,5447	12/out/01	271704,8036
16/jan/01	189839,7034	16/abr/01	212706,7707	16/jul/01	253275,9305	15/out/01	271694,7139
17/jan/01	190284,5738	17/abr/01	213391,7228	17/jul/01	246683,4594	16/out/01	269152,2558
18/jan/01	190201,8176	18/abr/01	212116,9017	18/jul/01	240870,6809	17/out/01	266072,1511
19/jan/01	190391,8258	19/abr/01	213272,4226	19/jul/01	244136,2211	18/out/01	268177,4874
22/jan/01	190590,9821	20/abr/01	217949,5219	20/jul/01	239636,8169	19/out/01	269560,2858
23/jan/01	190721,1388	23/abr/01	220207,1691	23/jul/01	235124,4814	22/out/01	265679,1182
24/jan/01	190840,1319	24/abr/01	219718,2978	24/jul/01	236480,1435	23/out/01	265562,8393
25/jan/01	190964,0888	25/abr/01	224265,5441	25/jul/01	242904,5166	24/out/01	268266,134
26/jan/01	192357,7027	26/abr/01	219768,4317	26/jul/01	242155,548	25/out/01	268232,4729
29/jan/01	192349,7929	27/abr/01	216105,0346	27/jul/01	243541,2902	26/out/01	266921,195
30/jan/01	192549,8103	30/abr/01	212850,4333	30/jul/01	237351,2295	29/out/01	266529,0842
31/jan/01	192215,1101	01/mai/01	216721,0386	31/jul/01	237191,5341	30/out/01	266458,8558
01/fev/01	192268,1289	02/mai/01	217821,6341	01/ago/01	243213,3191	31/out/01	265070,9561
02/fev/01	192477,1636	03/mai/01	216296,4715	02/ago/01	242578,3678	01/nov/01	262688,8094
05/fev/01	194369,3895	04/mai/01	214064,4215	03/ago/01	242612,025	02/nov/01	256534,653
06/fev/01	194439,6774	07/mai/01	217593,8523	06/ago/01	240732,0213	05/nov/01	254601,2217
07/fev/01	194892,0509	08/mai/01	220165,3166	07/ago/01	238507,393	06/nov/01	255122,5947
08/fev/01	195526,0841	09/mai/01	221269,8886	08/ago/01	241097,8351	07/nov/01	250479,4943
09/fev/01	194752,0758	10/mai/01	222791,3935	09/ago/01	240689,1888	08/nov/01	248166,2828
12/fev/01	194001,7851	11/mai/01	224517,4786	10/ago/01	242444,6414	09/nov/01	249659,919
13/fev/01	193290,662	14/mai/01	227706,2331	13/ago/01	243131,4437	13/nov/01	247305,7386
14/fev/01	193137,9688	15/mai/01	226056,6471	14/ago/01	245376,3346	14/nov/01	247435,5561
15/fev/01	193970,143	16/mai/01	224296,2482	15/ago/01	244023,8132	15/nov/01	248048,7194
16/fev/01	193244,1258	17/mai/01	223392,4347	16/ago/01	242832,4853	16/nov/01	245583,1768
20/fev/01	194492,6241	18/mai/01	226727,7912	17/ago/01	246456,2312	19/nov/01	247626,6158
21/fev/01	195313,3421	21/mai/01	224623,9506	20/ago/01	247067,1811	20/nov/01	248127,7954
22/fev/01	195655,1278	22/mai/01	228168,2291	21/ago/01	247573,2526	21/nov/01	247736,3106
23/fev/01	197428,1837	23/mai/01	228831,6319	22/ago/01	246334,9422	23/nov/01	245236,0172
26/fev/01	198724,0172	24/mai/01	227826,4491	23/ago/01	246856,3961	26/nov/01	242882,7418
27/fev/01	199472,9374	25/mai/01	226483,0295	24/ago/01	248937,5116	27/nov/01	240133,3249
28/fev/01	199667,1611	29/mai/01	228019,0094	27/ago/01	249755,4025	28/nov/01	242602,5872
01/mar/01	199480,393	30/mai/01	229683,5239	28/ago/01	249657,4852	29/nov/01	244922,7116
02/mar/01	198691,773	31/mai/01	229842,2687	29/ago/01	248861,6335	30/nov/01	247034,7855
05/mar/01	197462,9096	01/jun/01	232155,518	30/ago/01	248158,1759	03/dez/01	241061,2147
06/mar/01	197219,2784	04/jun/01	230212,0607	31/ago/01	249198,4841	04/dez/01	237375,7195
07/mar/01	199071,6351	05/jun/01	232869,9618	04/set/01	249744,7216	05/dez/01	237292,6862
08/mar/01	199041,517	06/jun/01	232170,8427	05/set/01	250276,053	06/dez/01	238415,7746
09/mar/01	201073,5364	07/jun/01	232679,5849	06/set/01	250670,9594	07/dez/01	234042,0214
12/mar/01	200643,4332	08/jun/01	230081,8756	07/set/01	253262,9297	10/dez/01	229921,4266
13/mar/01	201298,0469	11/jun/01	231151,0531	10/set/01	254054,5251	11/dez/01	228385,1825
14/mar/01	202780,6906	12/jun/01	232999,2933	13/set/01	257777,3737	12/dez/01	229812,3403
15/mar/01	203796,2618	13/jun/01	234664,5418	14/set/01	261501,4432	13/dez/01	232578,9575
16/mar/01	207273,9765	14/jun/01	234696,5815	17/set/01	263743,4226	14/dez/01	232389,1414
19/mar/01	207820,4688	15/jun/01	239626,898	18/set/01	263708,2394	17/dez/01	229832,8582
20/mar/01	204480,4352	18/jun/01	240494,3345	19/set/01	260745,6751	18/dez/01	228479,3738
21/mar/01	205163,8418	19/jun/01	241217,2847	20/set/01	261784,7408	19/dez/01	223688,6882
22/mar/01	208297,3064	20/jun/01	234475,1849	21/set/01	264505,49	20/dez/01	226342,1258
23/mar/01	210858,7033	21/jun/01	227107,8829	24/set/01	266978,8975	21/dez/01	227362,1819
26/mar/01	208728,2675	22/jun/01	224278,2707	25/set/01	273685,491	24/dez/01	227950,8165
27/mar/01	207242,1395	25/jun/01	225641,6659	26/set/01	270531,6078	26/dez/01	225635,8152
28/mar/01	206627,5658	26/jun/01	226501,4299	27/set/01	285322,1428	27/dez/01	226415,0836
29/mar/01	208559,9504	27/jun/01	223429,1182	28/set/01	266577,8473	28/dez/01	226286,2776
30/mar/01	211020,9118	28/jun/01	224561,2504				
		29/jun/01	224486,6825				

Tabela 18: Valor Presente dos T-Notes em R\$ (PU x PTAX)

Variação do PU dos T-Notes em R\$

02/jan/01		02/abr/01	1,01%	02/jul/01	1,53%	01/out/01	-1,44%
03/jan/01	0,09%	03/abr/01	0,70%	03/jul/01	2,17%	02/out/01	0,65%
04/jan/01	-0,28%	04/abr/01	-0,46%	05/jul/01	0,85%	03/out/01	0,94%
05/jan/01	0,70%	05/abr/01	-0,22%	06/jul/01	3,46%	04/out/01	0,13%
08/jan/01	0,20%	06/abr/01	-0,27%	09/jul/01	-1,56%	05/out/01	0,79%
09/jan/01	-0,44%	09/abr/01	0,54%	10/jul/01	1,06%	09/out/01	1,00%
10/jan/01	-0,12%	10/abr/01	-1,09%	11/jul/01	2,01%	10/out/01	-0,11%
11/jan/01	0,16%	11/abr/01	-0,19%	12/jul/01	0,51%	11/out/01	-0,08%
12/jan/01	0,18%	12/abr/01	0,86%	13/jul/01	0,45%	12/out/01	0,06%
16/jan/01	-0,16%	16/abr/01	1,12%	16/jul/01	1,76%	15/out/01	0,00%
17/jan/01	0,23%	17/abr/01	0,32%	17/jul/01	-2,60%	16/out/01	-0,94%
18/jan/01	-0,04%	18/abr/01	-0,60%	18/jul/01	-2,38%	17/out/01	-1,14%
19/jan/01	0,10%	19/abr/01	0,54%	19/jul/01	1,36%	18/out/01	0,79%
22/jan/01	0,10%	20/abr/01	2,19%	20/jul/01	-1,84%	19/out/01	0,52%
23/jan/01	0,07%	23/abr/01	1,04%	23/jul/01	-1,88%	22/out/01	-1,44%
24/jan/01	0,06%	24/abr/01	-0,22%	24/jul/01	0,58%	23/out/01	-0,04%
25/jan/01	0,06%	25/abr/01	2,07%	25/jul/01	2,72%	24/out/01	1,02%
26/jan/01	0,73%	26/abr/01	-2,01%	26/jul/01	-0,31%	25/out/01	-0,01%
29/jan/01	0,00%	27/abr/01	-1,67%	27/jul/01	0,57%	26/out/01	-0,49%
30/jan/01	0,10%	30/abr/01	-1,51%	30/jul/01	-2,54%	29/out/01	-0,15%
31/jan/01	-0,17%	01/mai/01	1,82%	31/jul/01	-0,07%	30/out/01	-0,03%
01/fev/01	0,03%	02/mai/01	0,51%	01/ago/01	2,54%	31/out/01	-0,52%
02/fev/01	0,11%	03/mai/01	-0,70%	02/ago/01	-0,26%	01/nov/01	-0,90%
05/fev/01	0,98%	04/mai/01	-1,03%	03/ago/01	0,01%	02/nov/01	-2,34%
06/fev/01	0,04%	07/mai/01	1,65%	06/ago/01	-0,77%	05/nov/01	-0,75%
07/fev/01	0,23%	08/mai/01	1,18%	07/ago/01	-0,92%	06/nov/01	0,20%
08/fev/01	0,33%	09/mai/01	0,50%	08/ago/01	1,09%	07/nov/01	-1,82%
09/fev/01	-0,40%	10/mai/01	0,69%	09/ago/01	-0,17%	08/nov/01	-0,92%
12/fev/01	-0,39%	11/mai/01	0,77%	10/ago/01	0,73%	09/nov/01	0,60%
13/fev/01	-0,37%	14/mai/01	1,42%	13/ago/01	0,28%	13/nov/01	-0,94%
14/fev/01	-0,08%	15/mai/01	-0,72%	14/ago/01	0,92%	14/nov/01	0,05%
15/fev/01	0,43%	16/mai/01	-0,78%	15/ago/01	-0,55%	15/nov/01	0,25%
16/fev/01	-0,37%	17/mai/01	-0,40%	16/ago/01	-0,49%	16/nov/01	-0,99%
20/fev/01	0,65%	18/mai/01	1,49%	17/ago/01	1,49%	19/nov/01	0,83%
21/fev/01	0,42%	21/mai/01	-0,93%	20/ago/01	0,25%	20/nov/01	0,20%
22/fev/01	0,17%	22/mai/01	1,58%	21/ago/01	0,20%	21/nov/01	-0,16%
23/fev/01	0,91%	23/mai/01	0,29%	22/ago/01	-0,50%	23/nov/01	-1,01%
26/fev/01	0,66%	24/mai/01	-0,44%	23/ago/01	0,21%	26/nov/01	-0,96%
27/fev/01	0,38%	25/mai/01	-0,59%	24/ago/01	0,84%	27/nov/01	-1,13%
28/fev/01	0,10%	29/mai/01	0,68%	27/ago/01	0,33%	28/nov/01	1,03%
01/mar/01	-0,09%	30/mai/01	0,73%	28/ago/01	-0,04%	29/nov/01	0,96%
02/mar/01	-0,40%	31/mai/01	0,07%	29/ago/01	-0,32%	30/nov/01	0,86%
05/mar/01	-0,62%	01/jun/01	1,01%	30/ago/01	-0,28%	03/dez/01	-2,42%
06/mar/01	-0,12%	04/jun/01	-0,84%	31/ago/01	0,42%	04/dez/01	-1,53%
07/mar/01	0,94%	05/jun/01	1,15%	04/set/01	0,22%	05/dez/01	-0,03%
08/mar/01	-0,02%	06/jun/01	-0,30%	05/set/01	0,21%	06/dez/01	0,47%
09/mar/01	1,02%	07/jun/01	0,22%	06/set/01	0,16%	07/dez/01	-1,83%
12/mar/01	-0,21%	08/jun/01	-1,12%	07/set/01	1,03%	10/dez/01	-1,76%
13/mar/01	0,33%	11/jun/01	0,46%	10/set/01	0,31%	11/dez/01	-0,67%
14/mar/01	0,74%	12/jun/01	0,80%	13/set/01	1,47%	12/dez/01	0,62%
15/mar/01	0,50%	13/jun/01	0,71%	14/set/01	1,44%	13/dez/01	1,20%
16/mar/01	1,71%	14/jun/01	0,01%	17/set/01	0,86%	14/dez/01	-0,08%
19/mar/01	0,26%	15/jun/01	2,10%	18/set/01	-0,01%	17/dez/01	-1,10%
20/mar/01	-1,62%	18/jun/01	0,36%	19/set/01	-1,12%	18/dez/01	-0,59%
21/mar/01	0,34%	19/jun/01	0,30%	20/set/01	0,40%	19/dez/01	-2,10%
22/mar/01	2,01%	20/jun/01	-2,80%	21/set/01	1,04%	20/dez/01	1,19%
23/mar/01	0,75%	21/jun/01	-3,14%	24/set/01	0,94%	21/dez/01	0,45%
26/mar/01	-1,01%	22/jun/01	-1,25%	25/set/01	2,51%	24/dez/01	0,26%
27/mar/01	-0,71%	25/jun/01	0,61%	26/set/01	-1,15%	26/dez/01	-1,02%
28/mar/01	-0,30%	26/jun/01	0,38%	27/set/01	-1,93%	27/dez/01	0,35%
29/mar/01	0,94%	27/jun/01	-1,38%	28/set/01	0,47%	28/dez/01	-0,06%
30/mar/01	1,18%	28/jun/01	0,51%				
		29/jun/01	-0,03%				

Tabela 19: Variação do PU dos T-Notes em R\$

3.9 Fundos de Investimento em Títulos da Dívida Externa Brasileira

Finalmente, outra opção popular de investimento entre os clientes “private” é a aplicação em fundos que comprem os títulos da dívida externa brasileira. Dentre esses papéis, o que é negociado em maior volume é o C-Bond.

No final dos anos 80 e começo dos anos 90, Nicholas Brady, então secretário do Tesouro da administração de George Bush pai, arquitetou uma enorme renegociação das dívidas externas dos países em desenvolvimento. Na época, o rombo passava de US\$ 1,3 trilhões de dólares, que esses países deviam essencialmente para bancos americanos e não tinham condições de pagar. O Plano Brady, como foi batizado, permitiu que os bancos americanos trocassem os papéis dos países emergentes por outros, garantidos pelo Tesouro americano, que puderam então ser vendidos livremente a preço de mercado. Esses novos papéis ficaram conhecidos como os “Bradies”, dos quais o C-Bond é o representante brasileiro mais conhecido.

Embora o investimento em C-Bonds submeta os recursos ao risco Brasil, há uma diferença fundamental entre aplicar nestes títulos e aplicar em papéis cambiais da dívida interna brasileira. Enquanto os papéis cambiais da dívida interna, no vencimento, são indexados ao dólar mas pagos em reais, no caso do C-Bond e de outros títulos da dívida externa o pagamento é feito em dólares, o que impede que o governo brasileiro simplesmente imprima dinheiro para saldar essa dívida e seus juros.

Nas tabelas a seguir serão apresentados o valor do C-Bond em dólares ao longo de 2001, seu valor convertido em reais pela Tabela 7 e finalmente a variação percentual de seu valor de negociação em reais.

Cotação do C-Bond (% sobre o valor de face em US\$)

Fonte: Bloomberg

02/jan/01	77,37	02/abr/01	76,72	02/jul/01	74,2	01/out/01	66,8
03/jan/01	77,78	03/abr/01	76,62	03/jul/01	74,1	02/out/01	66,57
04/jan/01	78,46	04/abr/01	76,89	04/jul/01	73,52	03/out/01	66,2
05/jan/01	78,72	05/abr/01	77,24	05/jul/01	72,81	04/out/01	65,27
08/jan/01	78,41	06/abr/01	77,83	06/jul/01	72,76	05/out/01	65,08
09/jan/01	78,55	09/abr/01	78,23	09/jul/01	73,04	08/out/01	64,89
10/jan/01	78,32	10/abr/01	78,75	10/jul/01	71,97	09/out/01	65,42
11/jan/01	78,4	11/abr/01	78,51	11/jul/01	70,31	10/out/01	66,42
12/jan/01	78,57	12/abr/01	78,28	12/jul/01	68,98	11/out/01	67
16/jan/01	78,38	16/abr/01	76,94	13/jul/01	69,59	12/out/01	66,44
17/jan/01	78,78	18/abr/01	77,44	16/jul/01	69,59	15/out/01	67,46
18/jan/01	79,12	19/abr/01	76,5	17/jul/01	71,44	16/out/01	68,57
19/jan/01	79,4	20/abr/01	74,55	18/jul/01	70,8	17/out/01	68,89
22/jan/01	79,43	23/abr/01	73,3	19/jul/01	71,04	18/out/01	68,68
23/jan/01	79,78	24/abr/01	73,63	20/jul/01	71,76	19/out/01	69,63
24/jan/01	79,87	25/abr/01	73,44	23/jul/01	72,69	22/out/01	70,1
25/jan/01	79,77	26/abr/01	74,51	24/jul/01	72,25	23/out/01	69,68
26/jan/01	80,35	27/abr/01	75,89	25/jul/01	72,43	24/out/01	69,29
29/jan/01	81,21	30/abr/01	75,54	26/jul/01	71,71	25/out/01	69,01
30/jan/01	81,12	01/mai/01	75,21	27/jul/01	71,23	26/out/01	68,93
31/jan/01	81,29	02/mai/01	74,48	30/jul/01	71,17	29/out/01	67,01
01/fev/01	81,44	03/mai/01	75,18	31/jul/01	70,97	30/out/01	67,18
02/fev/01	81	04/mai/01	75,93	01/ago/01	70,59	31/out/01	67,85
05/fev/01	80,68	07/mai/01	76,06	02/ago/01	71,56	01/nov/01	67,52
06/fev/01	80,63	08/mai/01	75,73	03/ago/01	71,38	02/nov/01	67,51
07/fev/01	80,36	09/mai/01	75,32	06/ago/01	72,08	05/nov/01	69,2
08/fev/01	80,81	10/mai/01	75,42	07/ago/01	72,51	06/nov/01	69,82
09/fev/01	80,92	11/mai/01	74,22	08/ago/01	73,47	07/nov/01	71,27
12/fev/01	80,99	14/mai/01	73,48	10/ago/01	73,08	08/nov/01	71,99
13/fev/01	81,13	15/mai/01	73,6	13/ago/01	72,99	12/nov/01	72,06
14/fev/01	80,97	16/mai/01	74,56	14/ago/01	72,21	13/nov/01	73,55
15/fev/01	81,3	17/mai/01	75,24	15/ago/01	72,5	14/nov/01	73,65
16/fev/01	80,89	18/mai/01	75,59	16/ago/01	72,98	15/nov/01	73,73
19/fev/01	80,34	21/mai/01	75,33	17/ago/01	71,53	16/nov/01	73,69
20/fev/01	79,71	22/mai/01	75,65	20/ago/01	70,61	19/nov/01	75,52
21/fev/01	78,8	23/mai/01	75,02	21/ago/01	69,96	20/nov/01	74,93
22/fev/01	79,22	24/mai/01	74,58	22/ago/01	72,3	22/nov/01	74,09
23/fev/01	79,42	25/mai/01	73,73	24/ago/01	72,23	23/nov/01	75,39
26/fev/01	79,79	28/mai/01	73,59	27/ago/01	72,19	26/nov/01	76,4
27/fev/01	79,46	29/mai/01	73,51	28/ago/01	72,85	27/nov/01	75,89
28/fev/01	79,1	30/mai/01	73,33	29/ago/01	73,2	28/nov/01	74,52
01/mar/01	79,66	31/mai/01	73,88	30/ago/01	72,51	29/nov/01	73,2
02/mar/01	80,16	01/jun/01	73,75	31/ago/01	72,48	30/nov/01	72,84
05/mar/01	80,78	04/jun/01	75,44	03/set/01	72,28	03/dez/01	74,98
06/mar/01	80,94	05/jun/01	75,84	04/set/01	73,23	04/dez/01	75,89
07/mar/01	81,29	06/jun/01	75,89	05/set/01	73,08	05/dez/01	76,34
08/mar/01	81,07	07/jun/01	76,11	06/set/01	72,5	06/dez/01	75,55
09/mar/01	81,06	08/jun/01	76,5	07/set/01	72,29	07/dez/01	75,91
12/mar/01	80,67	11/jun/01	76,68	11/set/01	72,28	10/dez/01	76,05
13/mar/01	80,37	12/jun/01	76,19	12/set/01	71,7	11/dez/01	76,64
14/mar/01	80,07	13/jun/01	75,65	13/set/01	69,9	12/dez/01	77,17
15/mar/01	79,51	14/jun/01	74,94	14/set/01	68,45	13/dez/01	76,84
16/mar/01	78,83	15/jun/01	74,88	17/set/01	68,5	14/dez/01	76,47
19/mar/01	78,02	18/jun/01	73,13	18/set/01	68,91	18/dez/01	76,22
20/mar/01	77,9	19/jun/01	73,62	19/set/01	68,84	19/dez/01	76,04
21/mar/01	78,25	20/jun/01	74,25	20/set/01	67,96	20/dez/01	75,11
22/mar/01	76,87	21/jun/01	75,11	21/set/01	66,83	21/dez/01	75,75
23/mar/01	75,94	22/jun/01	75,64	24/set/01	66,94	24/dez/01	75,31
26/mar/01	77,21	25/jun/01	76,02	25/set/01	66,79	25/dez/01	75,45
27/mar/01	77,73	26/jun/01	75,48	26/set/01	65,86	26/dez/01	75,59
28/mar/01	77,89	27/jun/01	74,99	27/set/01	66,18	27/dez/01	76,12
29/mar/01	77,18	28/jun/01	74,65	28/set/01	67,28	28/dez/01	76,95
30/mar/01	78,18	29/jun/01	74,09				

Tabela 20: Cotação do C-Bond (% sobre o valor de face)

Cotação do C-Bond (em R\$)

02/jan/01	149,974008	02/abr/01	165,592448	02/jul/01	173,5909	01/out/01	179,46488
03/jan/01	151,064316	03/abr/01	166,510584	03/jul/01	177,15087	02/out/01	179,991966
04/jan/01	151,875022	04/abr/01	166,328448	04/jul/01	177,278776	03/out/01	180,63994
05/jan/01	153,378048	05/abr/01	166,753436	05/jul/01	181,609983	04/out/01	178,356802
08/jan/01	153,087684	06/abr/01	167,497943	06/jul/01	178,611248	05/out/01	179,23032
09/jan/01	152,709055	09/abr/01	169,305366	09/jul/01	181,153808	08/out/01	180,575892
10/jan/01	152,167928	10/abr/01	168,69825	10/jul/01	182,0841	09/out/01	181,847974
11/jan/01	152,58992	11/abr/01	167,885784	11/jul/01	178,749113	10/out/01	184,541328
12/jan/01	153,274356	12/abr/01	168,873444	12/jul/01	176,161124	11/out/01	186,2533
16/jan/01	152,64505	16/abr/01	167,92155	13/jul/01	180,787861	12/out/01	184,63676
17/jan/01	153,747048	18/abr/01	169,500672	16/jul/01	176,090536	15/out/01	185,690396
18/jan/01	154,291912	19/abr/01	166,3875	17/jul/01	176,428224	16/out/01	186,585827
19/jan/01	155,04438	20/abr/01	163,13031	18/jul/01	177,22656	17/out/01	188,930825
22/jan/01	155,309479	23/abr/01	163,92812	19/jul/01	174,566592	18/out/01	189,371364
23/jan/01	156,137438	24/abr/01	166,300718	20/jul/01	172,999008	19/out/01	189,226488
24/jan/01	156,433382	25/abr/01	165,519072	23/jul/01	176,251443	22/out/01	190,44768
25/jan/01	156,309315	26/abr/01	171,454961	24/jul/01	180,00365	23/out/01	191,187984
26/jan/01	158,59483	27/abr/01	171,063649	25/jul/01	179,887148	24/out/01	190,048612
29/jan/01	160,30854	30/abr/01	167,54772	26/jul/01	179,067041	25/out/01	188,32829
30/jan/01	160,236336	01/mai/01	164,311287	27/jul/01	173,331082	26/out/01	187,806678
31/jan/01	160,255106	02/mai/01	165,636072	30/jul/01	173,035621	29/out/01	182,474931
01/fev/01	160,526384	03/mai/01	168,049854	31/jul/01	176,963695	30/out/01	181,862978
02/fev/01	159,8859	04/mai/01	168,465891	01/ago/01	175,606743	31/out/01	181,9737
05/fev/01	160,827512	07/mai/01	167,004942	02/ago/01	178,069904	01/nov/01	176,956416
06/fev/01	160,816535	08/mai/01	169,021787	03/ago/01	176,23722	02/nov/01	175,546253
07/fev/01	160,55928	09/mai/01	170,117752	06/ago/01	176,329304	05/nov/01	180,3006
08/fev/01	161,983645	10/mai/01	171,16569	07/ago/01	179,128704	06/nov/01	178,536722
09/fev/01	161,508228	11/mai/01	169,689186	08/ago/01	181,235796	07/nov/01	180,648069
12/fev/01	161,040516	14/mai/01	169,459576	10/ago/01	181,545336	08/nov/01	183,588898
13/fev/01	160,742869	15/mai/01	172,10624	13/ago/01	181,81809	12/nov/01	182,09562
14/fev/01	160,344891	16/mai/01	173,120864	14/ago/01	181,53594	13/nov/01	186,074145
15/fev/01	161,73822	17/mai/01	173,322864	15/ago/01	181,28625	14/nov/01	187,01208
16/fev/01	160,259268	18/mai/01	173,411019	16/ago/01	181,552346	15/nov/01	185,460442
19/fev/01	160,19796	21/mai/01	175,353174	17/ago/01	180,505955	16/nov/01	186,80415
20/fev/01	159,635217	22/mai/01	174,46403	20/ago/01	178,685666	19/nov/01	191,903872
21/fev/01	158,09644	23/mai/01	175,749354	21/ago/01	177,369588	20/nov/01	190,194819
22/fev/01	160,34128	24/mai/01	175,218252	22/ago/01	182,42013	22/nov/01	186,217806
23/fev/01	161,762656	25/mai/01	172,550319	24/ago/01	182,611886	23/nov/01	187,675866
26/fev/01	163,058844	28/mai/01	171,207135	27/ago/01	184,0845	26/nov/01	187,97456
27/fev/01	162,511592	29/mai/01	172,197175	28/ago/01	186,386725	27/nov/01	188,639773
28/fev/01	161,58548	30/mai/01	173,029468	29/ago/01	187,12848	28/nov/01	186,836544
01/mar/01	162,14793	31/mai/01	174,3568	30/ago/01	184,711974	29/nov/01	185,10084
02/mar/01	162,179712	01/jun/01	175,768375	31/ago/01	184,120944	30/nov/01	179,710848
05/mar/01	163,240224	04/jun/01	178,257176	03/set/01	184,436876	03/dez/01	182,118922
06/mar/01	165,044754	05/jun/01	181,21968	04/set/01	187,39557	04/dez/01	184,458234
07/mar/01	165,709665	06/jun/01	180,777569	05/set/01	187,391736	05/dez/01	186,53679
08/mar/01	166,996093	07/jun/01	181,75068	06/set/01	186,10025	06/dez/01	181,357775
09/mar/01	166,594512	08/jun/01	180,68535	07/set/01	187,426283	07/dez/01	178,988189
12/mar/01	166,357674	11/jun/01	181,900296	11/set/01	188,021964	10/dez/01	178,086285
13/mar/01	166,872231	12/jun/01	182,139814	12/set/01	189,06573	11/dez/01	180,494864
14/mar/01	167,058048	13/jun/01	182,15007	13/set/01	186,91959	12/dez/01	184,027299
15/mar/01	168,696367	14/jun/01	180,448026	14/set/01	184,86441	13/dez/01	183,18856
16/mar/01	167,726591	15/jun/01	184,099968	17/set/01	184,8541	14/dez/01	180,31626
19/mar/01	163,288058	18/jun/01	180,448275	18/set/01	183,844989	18/dez/01	178,58346
20/mar/01	163,59	19/jun/01	182,194776	19/set/01	184,443012	19/dez/01	174,35972
21/mar/01	167,603675	20/jun/01	178,60095	20/set/01	183,93374	20/dez/01	174,270222
22/mar/01	165,931582	21/jun/01	174,976256	21/set/01	182,592926	21/dez/01	176,580826
23/mar/01	162,306562	22/jun/01	173,949308	24/set/01	187,478858	24/dez/01	176,059718
26/mar/01	163,963156	25/jun/01	175,902678	25/set/01	184,841325	25/dez/01	174,629025
27/mar/01	164,55441	26/jun/01	175,385328	26/set/01	178,697938	26/dez/01	175,482185
28/mar/01	166,443141	27/jun/01	171,899577	27/set/01	180,378624	27/dez/01	176,628948
29/mar/01	166,832288	28/jun/01	172,060785	28/set/01	181,9924	28/dez/01	178,55478
30/mar/01	168,993888	29/jun/01	170,770041				

Tabela 21: Cotação do C-Bond (em R\$)

Variação do C-Bond em R\$

02/jan/01		02/abr/01	-0,7432%	02/jul/01	0,8893%	01/out/01	-2,9087%
03/jan/01	0,7270%	03/abr/01	0,5545%	03/jul/01	2,0508%	02/out/01	0,2937%
04/jan/01	0,5367%	04/abr/01	-0,1094%	04/jul/01	0,0722%	03/out/01	0,3600%
05/jan/01	0,9896%	05/abr/01	0,2555%	05/jul/01	2,4432%	04/out/01	-1,2639%
08/jan/01	-0,1893%	06/abr/01	0,4465%	06/jul/01	-1,6512%	05/out/01	0,4898%
09/jan/01	-0,2473%	09/abr/01	1,0791%	09/jul/01	1,4235%	08/out/01	0,7508%
10/jan/01	-0,3544%	10/abr/01	-0,3586%	10/jul/01	0,5135%	09/out/01	0,7045%
11/jan/01	0,2773%	11/abr/01	-0,4816%	11/jul/01	-1,8316%	10/out/01	1,4811%
12/jan/01	0,4485%	12/abr/01	0,5883%	12/jul/01	-1,4478%	11/out/01	0,9277%
16/jan/01	-0,4106%	16/abr/01	-0,5637%	13/jul/01	2,6264%	12/out/01	-0,8679%
17/jan/01	0,7219%	18/abr/01	0,9404%	16/jul/01	-2,5983%	15/out/01	0,5707%
18/jan/01	0,3544%	19/abr/01	-1,8367%	17/jul/01	0,1918%	16/out/01	0,4822%
19/jan/01	0,4877%	20/abr/01	-1,9576%	18/jul/01	0,4525%	17/out/01	1,2568%
22/jan/01	0,1710%	23/abr/01	0,4891%	19/jul/01	-1,5009%	18/out/01	0,2332%
23/jan/01	0,5331%	24/abr/01	1,4473%	20/jul/01	-0,8980%	19/out/01	-0,0765%
24/jan/01	0,1895%	25/abr/01	-0,4700%	23/jul/01	1,8800%	22/out/01	0,6454%
25/jan/01	-0,0793%	26/abr/01	3,5862%	24/jul/01	2,1289%	23/out/01	0,3887%
26/jan/01	1,4622%	27/abr/01	-0,2282%	25/jul/01	-0,0647%	24/out/01	-0,5959%
29/jan/01	1,0806%	30/abr/01	-2,0553%	26/jul/01	-0,4559%	25/out/01	-0,9052%
30/jan/01	-0,0450%	01/mai/01	-1,9316%	27/jul/01	-3,2032%	26/out/01	-0,2770%
31/jan/01	0,0117%	02/mai/01	0,8063%	30/jul/01	-0,1705%	29/out/01	-2,8390%
01/fev/01	0,1893%	03/mai/01	1,4573%	31/jul/01	2,2701%	30/out/01	-0,3354%
02/fev/01	-0,3990%	04/mai/01	0,2476%	01/ago/01	-0,7668%	31/out/01	0,0609%
05/fev/01	0,5889%	07/mai/01	-0,8672%	02/ago/01	1,4027%	01/nov/01	-2,7571%
06/fev/01	-0,0068%	08/mai/01	1,2077%	03/ago/01	-1,0292%	02/nov/01	-0,7969%
07/fev/01	-0,1600%	09/mai/01	0,6484%	06/ago/01	0,0523%	05/nov/01	2,7083%
08/fev/01	0,8871%	10/mai/01	0,6160%	07/ago/01	1,5876%	06/nov/01	-0,9783%
09/fev/01	-0,2935%	11/mai/01	-0,8626%	08/ago/01	1,1763%	07/nov/01	1,1826%
12/fev/01	-0,2896%	14/mai/01	-0,1353%	10/ago/01	0,1708%	08/nov/01	1,6279%
13/fev/01	-0,1848%	15/mai/01	1,5618%	13/ago/01	0,1502%	12/nov/01	-0,8134%
14/fev/01	-0,2476%	16/mai/01	0,5895%	14/ago/01	-0,1552%	13/nov/01	2,1849%
15/fev/01	0,8690%	17/mai/01	0,1167%	15/ago/01	-0,1375%	14/nov/01	0,5041%
16/fev/01	-0,9144%	18/mai/01	0,0509%	16/ago/01	0,1468%	15/nov/01	-0,8297%
19/fev/01	-0,0383%	21/mai/01	1,1200%	17/ago/01	-0,5764%	16/nov/01	0,7245%
20/fev/01	-0,3513%	22/mai/01	-0,5071%	20/ago/01	-1,0084%	19/nov/01	2,7300%
21/fev/01	-0,9639%	23/mai/01	0,7367%	21/ago/01	-0,7365%	20/nov/01	-0,8906%
22/fev/01	1,4199%	24/mai/01	-0,3022%	22/ago/01	2,8475%	22/nov/01	-2,0910%
23/fev/01	0,8865%	25/mai/01	-1,5226%	24/ago/01	0,1051%	23/nov/01	0,7830%
26/fev/01	0,8013%	28/mai/01	-0,7784%	27/ago/01	0,8064%	26/nov/01	0,1592%
27/fev/01	-0,3356%	29/mai/01	0,5783%	28/ago/01	1,2506%	27/nov/01	0,3539%
28/fev/01	-0,5699%	30/mai/01	0,4833%	29/ago/01	0,3980%	28/nov/01	-0,9559%
01/mar/01	0,3481%	31/mai/01	0,7671%	30/ago/01	-1,2914%	29/nov/01	-0,9290%
02/mar/01	0,0196%	01/jun/01	0,8096%	31/ago/01	-0,3200%	30/nov/01	-2,9119%
05/mar/01	0,6539%	04/jun/01	1,4160%	03/set/01	0,1716%	03/dez/01	1,3400%
06/mar/01	1,1054%	05/jun/01	1,6619%	04/set/01	1,6042%	04/dez/01	1,2845%
07/mar/01	0,4029%	06/jun/01	-0,2440%	05/set/01	-0,0020%	05/dez/01	1,1268%
08/mar/01	0,7763%	07/jun/01	0,5383%	06/set/01	-0,6892%	06/dez/01	-2,7764%
09/mar/01	-0,2405%	08/jun/01	-0,5861%	07/set/01	0,7125%	07/dez/01	-1,3066%
12/mar/01	-0,1422%	11/jun/01	0,6724%	11/set/01	0,3178%	10/dez/01	-0,5039%
13/mar/01	0,3093%	12/jun/01	0,1317%	12/set/01	0,5551%	11/dez/01	1,3525%
14/mar/01	0,1114%	13/jun/01	0,0056%	13/set/01	-1,1351%	12/dez/01	1,9571%
15/mar/01	0,9807%	14/jun/01	-0,9344%	14/set/01	-1,2065%	13/dez/01	-0,4569%
16/mar/01	-0,5749%	15/jun/01	2,0238%	17/set/01	0,1027%	14/dez/01	-1,5689%
19/mar/01	-2,6463%	18/jun/01	-1,9835%	18/set/01	-0,5459%	18/dez/01	-0,9610%
20/mar/01	0,1849%	19/jun/01	0,9679%	19/set/01	0,3253%	19/dez/01	-2,3651%
21/mar/01	2,4535%	20/jun/01	-1,9725%	20/set/01	-0,2761%	20/dez/01	-0,0513%
22/mar/01	-0,9976%	21/jun/01	-2,0295%	21/set/01	-0,7290%	21/dez/01	1,3259%
23/mar/01	-2,1846%	22/jun/01	-0,5869%	24/set/01	2,6759%	24/dez/01	-0,2951%
26/mar/01	1,0207%	25/jun/01	1,1230%	25/set/01	-1,4068%	25/dez/01	-0,8126%
27/mar/01	0,3606%	26/jun/01	-0,2941%	26/set/01	-3,3236%	26/dez/01	0,4886%
28/mar/01	1,1478%	27/jun/01	-1,9875%	27/set/01	0,9405%	27/dez/01	0,6534%
29/mar/01	0,2338%	28/jun/01	0,0938%	28/set/01	0,8947%	28/dez/01	1,0904%
30/mar/01		29/jun/01	-0,7502%				

Tabela 22: Variação do C-Bond em R\$

4. METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO

Para se resolver o problema de otimização, poderia ser utilizado um algoritmo, como o de Wolfe mostrado no Anexo II. Entretanto, a utilização de um software de otimização se faz necessária dado o extenso volume de cálculos envolvidos em um problema que envolve expressivo número de incógnitas e poucas equações. Assim, só se torna viável a aplicação sistemática dessa metodologia de otimização de carteiras se houver um software apropriado para a resolução do problema de otimização. Qualquer que seja o programa escolhido, a programação deve seguir alguns parâmetros básicos, que são:

Minimizar, de acordo com a equação (2) que determina a variância do portfólio:

$$x_1x_1\sigma_{11} + 2x_1x_2\sigma_{12} + 2x_1x_3\sigma_{13} + \dots + 2x_1x_n\sigma_{1n} + \dots + x_nx_n\sigma_{nn}$$

Este parâmetro ordena ao programa que minimize a variância, e portanto, o risco da carteira, calculado de acordo com a fórmula de Markowitz (x_i é a fração da carteira aplicada no ativo i , σ_{ii} é a variância do ativo i e σ_{ij} é a covariância entre os ativos i e j). O objetivo de minimizar a equação (2) deve estar sujeito às seguintes restrições:

Restrição 1:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1$$

Esta restrição indica que a somatória de todas as frações investidas nos diferentes ativos seja igual a 100% dos recursos disponíveis.

Restrição 2:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0$$

Esta restrição garante que não se tenha um investimento negativo em nenhum ativo (na prática, existem instrumentos no mercado financeiro que permitiriam um valor negativo – o que equivaleria a ficar “vendido” no ativo – mas esses instrumentos, embora à disposição dos bancos através de suas tesourarias, não estão ao alcance dos clientes de fundos, daí a necessidade deste parâmetro para garantir que o programa encontre a resolução que seja a melhor possível apenas com a alternativa de ficar “comprado” no ativo.

Restrição 3:

$$x_1 * R_1 + x_2 * R_2 + x_3 * R_3 + \dots + x_n * R_n = R_{desejado}$$

Este parâmetro fixa a rentabilidade esperada do portfólio, calculada pela média das rentabilidades esperadas de cada ativo ponderadas pelo seu peso na carteira (“ x_i ” é a fração da carteira aplicada no ativo i e “ R_i ” é a rentabilidade esperada do ativo i). O analista deve testar diferentes valores de rentabilidade desejada, analisando o risco mínimo obtido para cada rentabilidade e analisando qual alternativa melhor se encaixa nas expectativas do cliente e em sua tolerância ao risco.

Note-se que seria equivalente inverter o processo e procurar fixar a variância da carteira e maximizar a rentabilidade esperada, uma vez que o objetivo final do método é obter uma carteira dominante, ou seja, com o menor risco para sua rentabilidade esperada, ou então com a maior rentabilidade esperada para seu patamar de risco. Aqui optou-se por fixar o valor da rentabilidade por ser um número menos abstrato que a variância, e assim de mais fácil manipulação pelo analista que estiver estudando as possibilidades para o cliente.

Como já dito anteriormente, embora tenha-se considerado a utilização de programas mais específicos de otimização como GAMS, LINGO ou LINDO, optou-se pela utilização do Solver do Excel, pela sua disponibilidade imediata na empresa e menor custo.

a análise da variância e da correlação deste tipo de investimento tendo como referência a moeda brasileira, o real.

Rentabilidade de T-Notes de 10 anos

Fonte: Bloomberg

02/jan/01	4,92	02/abr/01	4,98	02/jul/01	5,37	01/out/01	4,55
03/jan/01	5,14	03/abr/01	4,94	03/jul/01	5,41	02/out/01	4,53
04/jan/01	5,03	04/abr/01	4,94	05/jul/01	5,44	03/out/01	4,5
05/jan/01	4,93	05/abr/01	4,98	06/jul/01	5,41	04/out/01	4,53
08/jan/01	4,94	06/abr/01	4,89	09/jul/01	5,37	05/out/01	4,52
09/jan/01	4,98	09/abr/01	4,93	10/jul/01	5,32	09/out/01	4,62
10/jan/01	5,1	10/abr/01	5,09	11/jul/01	5,31	10/out/01	4,61
11/jan/01	5,14	11/abr/01	5,12	12/jul/01	5,27	11/out/01	4,69
12/jan/01	5,25	12/abr/01	5,17	13/jul/01	5,27	12/out/01	4,88
16/jan/01	5,24	16/abr/01	5,28	16/jul/01	5,21	15/out/01	4,62
17/jan/01	5,19	17/abr/01	5,21	17/jul/01	5,22	16/out/01	4,59
18/jan/01	5,12	18/abr/01	5,14	18/jul/01	5,12	17/out/01	4,59
19/jan/01	5,19	19/abr/01	5,27	19/jul/01	5,13	18/out/01	4,58
22/jan/01	5,25	20/abr/01	5,29	20/jul/01	5,15	19/out/01	4,63
23/jan/01	5,3	23/abr/01	5,2	23/jul/01	5,13	22/out/01	4,63
24/jan/01	5,33	24/abr/01	5,22	24/jul/01	5,13	23/out/01	4,66
25/jan/01	5,29	25/abr/01	5,28	25/jul/01	5,2	24/out/01	4,61
26/jan/01	5,29	26/abr/01	5,2	26/jul/01	5,19	25/out/01	4,56
29/jan/01	5,32	27/abr/01	5,34	27/jul/01	5,13	26/out/01	4,53
30/jan/01	5,24	30/abr/01	5,35	30/jul/01	5,11	29/out/01	4,5
31/jan/01	5,19	01/mai/01	5,3	31/jul/01	5,07	30/out/01	4,44
01/fev/01	5,1	02/mai/01	5,31	01/ago/01	5,11	31/out/01	4,3
02/fev/01	5,17	03/mai/01	5,22	02/ago/01	5,17	01/nov/01	4,24
05/fev/01	5,18	04/mai/01	5,21	03/ago/01	5,2	02/nov/01	4,37
06/fev/01	5,22	07/mai/01	5,21	06/ago/01	5,19	05/nov/01	4,31
07/fev/01	5,1	08/mai/01	5,24	07/ago/01	5,2	06/nov/01	4,3
08/fev/01	5,1	09/mai/01	5,2	08/ago/01	4,99	07/nov/01	4,22
09/fev/01	5,03	10/mai/01	5,31	09/ago/01	5,04	08/nov/01	4,32
12/fev/01	5,05	11/mai/01	5,51	10/ago/01	4,99	09/nov/01	4,34
13/fev/01	5,07	14/mai/01	5,46	13/ago/01	4,97	13/nov/01	4,41
14/fev/01	5,13	15/mai/01	5,5	14/ago/01	4,97	14/nov/01	4,54
15/fev/01	5,19	16/mai/01	5,48	15/ago/01	5	15/nov/01	4,79
16/fev/01	5,11	17/mai/01	5,46	16/ago/01	4,95	16/nov/01	4,91
20/fev/01	5,11	18/mai/01	5,41	17/ago/01	4,84	19/nov/01	4,8
21/fev/01	5,14	21/mai/01	5,41	20/ago/01	4,91	20/nov/01	4,88
22/fev/01	5,15	22/mai/01	5,42	21/ago/01	4,87	21/nov/01	4,98
23/fev/01	5,1	23/mai/01	5,41	22/ago/01	4,91	23/nov/01	5,04
26/fev/01	5,05	24/mai/01	5,52	23/ago/01	4,89	26/nov/01	5,05
27/fev/01	4,96	25/mai/01	5,52	24/ago/01	4,93	27/nov/01	4,98
28/fev/01	4,92	29/mai/01	5,54	27/ago/01	4,94	28/nov/01	4,98
01/mar/01	4,87	30/mai/01	5,54	28/ago/01	4,85	29/nov/01	4,79
02/mar/01	4,95	31/mai/01	5,43	29/ago/01	4,78	30/nov/01	4,78
05/mar/01	4,98	01/jun/01	5,39	30/ago/01	4,79	03/dez/01	4,75
06/mar/01	4,99	04/jun/01	5,35	31/ago/01	4,85	04/dez/01	4,7
07/mar/01	4,92	05/jun/01	5,29	04/set/01	4,99	05/dez/01	4,92
08/mar/01	4,89	06/jun/01	5,27	05/set/01	4,97	06/dez/01	5,04
09/mar/01	4,95	07/jun/01	5,33	06/set/01	4,86	07/dez/01	5,2
12/mar/01	4,92	08/jun/01	5,38	07/set/01	4,8	10/dez/01	5,17
13/mar/01	4,95	11/jun/01	5,32	10/set/01	4,84	11/dez/01	5,13
14/mar/01	4,84	12/jun/01	5,27	13/set/01	4,64	12/dez/01	5,02
15/mar/01	4,81	13/jun/01	5,28	14/set/01	4,57	13/dez/01	5,13
16/mar/01	4,78	14/jun/01	5,26	17/set/01	4,63	14/dez/01	5,24
19/mar/01	4,82	15/jun/01	5,27	18/set/01	4,72	17/dez/01	5,26
20/mar/01	4,78	18/jun/01	5,27	19/set/01	4,69	18/dez/01	5,16
21/mar/01	4,77	19/jun/01	5,26	20/set/01	4,75	19/dez/01	5,08
22/mar/01	4,73	20/jun/01	5,24	21/set/01	4,7	20/dez/01	5,08
23/mar/01	4,8	21/jun/01	5,22	24/set/01	4,73	21/dez/01	5,12
26/mar/01	4,85	22/jun/01	5,14	25/set/01	4,72	24/dez/01	5,18
27/mar/01	5	25/jun/01	5,16	26/set/01	4,65	26/dez/01	5,22
28/mar/01	4,97	26/jun/01	5,24	27/set/01	4,58	27/dez/01	5,13
29/mar/01	4,98	27/jun/01	5,26	28/set/01	4,6	28/dez/01	5,15
30/mar/01	4,93	28/jun/01	5,35				
		29/jun/01	5,42				

Tabela 16: Rentabilidade de Treasury Notes de 10 anos

Valor Presente dos T-Notes (em US\$)

02/jan/01	97627,2057	02/abr/01	97599,30291	02/jul/01	97418,51609	01/out/01	97799,80332
03/jan/01	97525,01228	03/abr/01	97617,90211	03/jul/01	97400,0306	02/out/01	97809,15902
04/jan/01	97576,06885	04/abr/01	97617,90211	05/jul/01	97386,17339	03/out/01	97823,19761
05/jan/01	97622,55357	05/abr/01	97599,30291	06/jul/01	97400,0306	04/out/01	97809,15902
08/jan/01	97617,90211	06/abr/01	97641,16607	09/jul/01	97418,51609	05/out/01	97813,83788
09/jan/01	97599,30291	09/abr/01	97622,55357	10/jul/01	97441,63776	09/out/01	97767,07951
10/jan/01	97543,56903	10/abr/01	97548,20987	11/jul/01	97446,26407	10/out/01	97771,75233
11/jan/01	97525,01228	11/abr/01	97534,28933	12/jul/01	97464,77589	11/out/01	97734,38851
12/jan/01	97474,03577	12/abr/01	97511,10166	13/jul/01	97464,77589	12/out/01	97739,05665
16/jan/01	97478,66669	16/abr/01	97460,14695	16/jul/01	97492,56343	15/out/01	97767,07951
17/jan/01	97501,83122	17/abr/01	97492,56343	17/jul/01	97487,93052	16/out/01	97781,09998
18/jan/01	97534,28933	18/abr/01	97525,01228	18/jul/01	97534,28933	17/out/01	97781,09998
19/jan/01	97501,83122	19/abr/01	97464,77589	19/jul/01	97529,65047	18/out/01	97785,77481
22/jan/01	97474,03577	20/abr/01	97455,51866	20/jul/01	97520,37474	19/out/01	97762,40736
23/jan/01	97450,89103	23/abr/01	97497,197	23/jul/01	97529,65047	22/out/01	97762,40736
24/jan/01	97437,01211	24/abr/01	97487,93052	24/jul/01	97529,65047	23/out/01	97748,39492
25/jan/01	97455,51866	25/abr/01	97460,14695	25/jul/01	97497,197	24/out/01	97771,75233
26/jan/01	97455,51866	26/abr/01	97497,197	26/jul/01	97501,83122	25/out/01	97795,12648
29/jan/01	97441,63776	27/abr/01	97432,38711	27/jul/01	97529,65047	26/out/01	97809,15902
30/jan/01	97478,66669	30/abr/01	97427,76278	30/jul/01	97538,92885	29/out/01	97823,19761
31/jan/01	97501,83122	01/mai/01	97460,89103	31/jul/01	97557,49355	30/out/01	97851,29292
01/fev/01	97543,56903	02/mai/01	97446,26407	01/ago/01	97538,92885	31/out/01	97916,94291
02/fev/01	97511,10166	03/mai/01	97487,93052	02/ago/01	97511,10166	01/nov/01	97945,1191
05/fev/01	97506,46611	04/mai/01	97492,56343	03/ago/01	97497,197	02/nov/01	97894,1014
06/fev/01	97487,93052	07/mai/01	97492,56343	06/ago/01	97501,83122	05/nov/01	97912,24924
07/fev/01	97543,56903	08/mai/01	97478,66669	07/ago/01	97497,197	06/nov/01	97916,94291
08/fev/01	97543,56903	09/mai/01	97497,197	08/ago/01	97594,65477	07/nov/01	97954,51656
09/fev/01	97576,06885	10/mai/01	97446,26407	09/ago/01	97571,42403	08/nov/01	97907,55625
12/fev/01	97566,77987	11/mai/01	97353,86288	10/ago/01	97594,65477	09/nov/01	97898,17229
13/fev/01	97567,49355	14/mai/01	97376,93854	13/ago/01	97603,95171	13/nov/01	97865,34966
14/fev/01	97529,65047	15/mai/01	97358,4767	14/ago/01	97603,95171	14/nov/01	97804,48084
15/fev/01	97501,83122	16/mai/01	97367,70631	15/ago/01	97590,00729	15/nov/01	97687,74393
16/fev/01	97538,92885	17/mai/01	97376,93854	16/ago/01	97613,25131	16/nov/01	97631,85849
20/fev/01	97538,92885	18/mai/01	97400,0306	17/ago/01	97664,44667	19/nov/01	97683,08315
21/fev/01	97525,01228	21/mai/01	97400,0306	20/ago/01	97631,85849	20/nov/01	97645,82086
22/fev/01	97520,37474	22/mai/01	97395,41088	21/ago/01	97650,47631	21/nov/01	97599,30291
23/fev/01	97543,56903	23/mai/01	97400,0306	22/ago/01	97631,85849	23/nov/01	97571,42403
26/fev/01	97566,77987	24/mai/01	97349,24972	23/ago/01	97641,16607	26/nov/01	97566,77987
27/fev/01	97608,60118	25/mai/01	97349,24972	24/ago/01	97622,55357	27/nov/01	97599,30291
28/fev/01	97627,2057	29/mai/01	97340,02537	27/ago/01	97617,90211	28/nov/01	97599,30291
01/mar/01	97650,47631	30/mai/01	97340,02537	28/ago/01	97659,78922	29/nov/01	97687,74393
02/mar/01	97613,25131	31/mai/01	97390,7918	29/ago/01	97692,40538	30/nov/01	97692,40538
05/mar/01	97599,30291	01/jun/01	97409,27203	30/ago/01	97687,74393	03/dez/01	97706,39375
06/mar/01	97594,65477	04/jun/01	97427,76278	31/ago/01	97659,78922	04/dez/01	97729,72105
07/mar/01	97627,2057	05/jun/01	97455,51866	04/set/01	97594,65477	05/dez/01	97627,2057
08/mar/01	97641,16607	06/jun/01	97464,77589	05/set/01	97603,95171	06/dez/01	97571,42403
09/mar/01	97613,25131	07/jun/01	97437,01211	06/set/01	97655,13243	07/dez/01	97497,197
12/mar/01	97627,2057	08/jun/01	97413,89373	07/set/01	97683,08315	10/dez/01	97511,10166
13/mar/01	97613,25131	11/jun/01	97441,63776	10/set/01	97664,44667	11/dez/01	97529,65047
14/mar/01	97664,44667	12/jun/01	97464,77589	13/set/01	97757,73588	12/dez/01	97580,71434
15/mar/01	97678,42303	13/jun/01	97460,14695	14/set/01	97790,45031	13/dez/01	97529,65047
16/mar/01	97692,40538	14/jun/01	97469,4055	17/set/01	97762,40736	14/dez/01	97478,66669
19/mar/01	97673,76357	15/jun/01	97464,77589	18/set/01	97720,38812	17/dez/01	97469,4055
20/mar/01	97692,40538	18/jun/01	97464,77589	19/set/01	97734,38851	18/dez/01	97515,73787
21/mar/01	97697,06751	19/jun/01	97469,4055	20/set/01	97706,39375	19/dez/01	97552,85138
22/mar/01	97715,72266	20/jun/01	97478,66669	21/set/01	97729,72105	20/dez/01	97552,85138
23/mar/01	97683,08315	21/jun/01	97487,93052	24/set/01	97715,72266	21/dez/01	97534,28933
26/mar/01	97659,78922	22/jun/01	97525,01228	25/set/01	97720,38812	24/dez/01	97506,46611
27/mar/01	97590,00729	25/jun/01	97515,73787	26/set/01	97753,06506	26/dez/01	97487,93052
28/mar/01	97603,95171	26/jun/01	97478,66669	27/set/01	97785,77481	27/dez/01	97529,65047
29/mar/01	97599,30291	27/jun/01	97469,4055	28/set/01	97776,42582	28/dez/01	97520,37474
30/mar/01	97622,55357	28/jun/01	97427,76278				
		29/jun/01	97395,41088				

Tabela 17: Valor Presente dos T-Notes (em US\$)

Valor Presente dos T-Notes em R\$ (PU x PTAX)

02/jan/01	189240,5755	02/abr/01	210658,3354	02/jul/01	227910,6184	01/out/01	262748,9516
03/jan/01	189413,0788	03/abr/01	212143,2249	03/jul/01	232854,2532	02/out/01	264456,4042
04/jan/01	188877,9965	04/abr/01	211167,0458	05/jul/01	234827,2799	03/out/01	266930,1593
05/jan/01	190207,7834	05/abr/01	210707,1351	06/jul/01	242944,8963	04/out/01	267273,3079
06/jan/01	190589,1921	06/abr/01	210133,5535	09/jul/01	239142,9733	05/out/01	269379,3095
09/jan/01	189742,8048	09/abr/01	211274,7304	10/jul/01	241674,75	09/out/01	272066,2289
10/jan/01	189517,4003	10/abr/01	208967,7752	11/jul/01	246539,0481	10/out/01	271776,1399
11/jan/01	189812,9314	11/abr/01	208567,3243	12/jul/01	247784,6998	11/out/01	271545,225
12/jan/01	190152,349	12/abr/01	210360,6996	13/jul/01	248905,5447	12/out/01	271704,8036
16/jan/01	189839,7034	16/abr/01	212706,7707	16/jul/01	253275,9305	15/out/01	271694,7139
17/jan/01	190284,5738	17/abr/01	213391,7228	17/jul/01	246683,4594	16/out/01	269152,2558
18/jan/01	190201,6176	18/abr/01	212116,9017	18/jul/01	240870,6809	17/out/01	266072,1511
19/jan/01	190391,8258	19/abr/01	213272,4226	19/jul/01	244136,2211	18/out/01	268177,4874
22/jan/01	190590,9821	20/abr/01	217949,5219	20/jul/01	239636,8169	19/out/01	269560,2858
23/jan/01	190721,1388	23/abr/01	220207,1691	23/jul/01	235124,4814	23/out/01	265679,1182
24/jan/01	190840,1319	24/abr/01	219718,2978	24/jul/01	236480,1435	23/out/01	265562,8393
25/jan/01	190964,0888	25/abr/01	224265,5441	25/jul/01	242904,5166	24/out/01	268266,134
26/jan/01	192357,7027	26/abr/01	219768,4317	26/jul/01	242155,548	25/out/01	268232,4729
29/jan/01	192349,7929	27/abr/01	216105,0346	27/jul/01	243541,2902	26/out/01	266921,195
30/jan/01	192549,6103	30/abr/01	212850,4333	30/jul/01	237351,2295	29/out/01	266529,0842
31/jan/01	192215,1101	01/mai/01	216721,0366	31/jul/01	237191,5341	30/out/01	266458,8558
01/fev/01	192268,1289	02/mai/01	217821,6341	01/ago/01	243213,3191	31/out/01	265070,9561
02/fev/01	192477,1636	03/mai/01	216296,4715	02/ago/01	242578,3676	01/nov/01	262688,8094
05/fev/01	194369,3895	04/mai/01	214064,4215	03/ago/01	242612,025	02/nov/01	256534,653
06/fev/01	194439,6774	07/mai/01	217593,6523	06/ago/01	240732,0213	05/nov/01	254601,2217
07/fev/01	194892,0509	08/mai/01	220165,3166	07/ago/01	238507,393	06/nov/01	255122,5947
08/fev/01	195526,0841	09/mai/01	221269,8886	08/ago/01	241097,8351	07/nov/01	250479,4943
09/fev/01	194752,0758	10/mai/01	222791,3935	09/ago/01	240689,1888	08/nov/01	248166,2828
12/fev/01	194001,7851	11/mai/01	224517,4786	10/ago/01	242444,6414	09/nov/01	249659,919
13/fev/01	193290,662	14/mai/01	227706,2331	13/ago/01	243131,4437	13/nov/01	247305,7386
14/fev/01	193137,9668	15/mai/01	226056,6471	14/ago/01	245376,3346	14/nov/01	247435,5561
15/fev/01	193970,143	16/mai/01	224296,2482	15/ago/01	244023,8132	15/nov/01	248048,7194
16/fev/01	193244,1258	17/mai/01	223392,4347	16/ago/01	242832,4853	16/nov/01	245583,1768
20/fev/01	194492,6241	18/mai/01	226727,7912	17/ago/01	246456,2312	19/nov/01	247626,6158
21/fev/01	195313,3421	21/mai/01	224623,9506	20/ago/01	247067,1811	20/nov/01	248127,7954
22/fev/01	195655,1278	22/mai/01	228168,2291	21/ago/01	247573,2526	21/nov/01	247736,3106
23/fev/01	197428,1837	23/mai/01	228831,6319	22/ago/01	246334,9422	23/nov/01	245236,0172
26/fev/01	198724,0172	24/mai/01	227826,4491	23/ago/01	246856,3961	26/nov/01	242882,7418
27/fev/01	199472,9374	25/mai/01	226483,0295	24/ago/01	248937,5116	27/nov/01	240133,3249
28/fev/01	199667,1611	29/mai/01	228019,0094	27/ago/01	249755,4025	28/nov/01	242602,5872
01/mar/01	199480,393	30/mai/01	229683,5239	28/ago/01	249657,4852	29/nov/01	244922,7116
02/mar/01	198691,773	31/mai/01	229842,2687	29/ago/01	248861,6335	30/nov/01	247034,7855
05/mar/01	197462,9096	01/jun/01	232155,518	30/ago/01	248156,1759	03/dez/01	241061,2147
06/mar/01	197219,2784	04/jun/01	230212,0607	31/ago/01	249198,4841	04/dez/01	237375,7195
07/mar/01	199071,6351	05/jun/01	232869,9618	04/set/01	249744,7216	05/dez/01	237292,6862
08/mar/01	199041,517	06/jun/01	232170,8427	05/set/01	250276,053	06/dez/01	238415,7746
09/mar/01	201073,5364	07/jun/01	232679,5849	06/set/01	250670,9594	07/dez/01	234042,0214
12/mar/01	200643,4332	08/jun/01	230081,8756	07/set/01	253262,9297	10/dez/01	229921,4266
13/mar/01	201298,0469	11/jun/01	231151,0531	10/set/01	254054,5251	11/dez/01	228385,1825
14/mar/01	202780,6906	12/jun/01	232999,2933	13/set/01	257777,3737	12/dez/01	229812,3403
15/mar/01	203796,2618	13/jun/01	234684,5418	14/set/01	261501,4432	13/dez/01	232578,9575
16/mar/01	207273,9765	14/jun/01	234696,5815	17/set/01	263743,4226	14/dez/01	232389,1414
19/mar/01	207820,4668	15/jun/01	239626,898	18/set/01	263708,2394	17/dez/01	229832,8582
20/mar/01	204460,4352	18/jun/01	240494,3345	19/set/01	260745,5751	18/dez/01	228479,3738
21/mar/01	205163,8418	19/jun/01	241217,2847	20/set/01	261784,7408	19/dez/01	223688,6882
22/mar/01	209297,3064	20/jun/01	234475,1849	21/set/01	264505,49	20/dez/01	226342,1258
23/mar/01	210858,7033	21/jun/01	227107,8829	24/set/01	266978,8975	21/dez/01	227362,1819
26/mar/01	208728,2675	22/jun/01	224278,2707	25/set/01	273685,491	24/dez/01	227950,6165
27/mar/01	207242,1395	25/jun/01	225641,6659	26/set/01	270531,8076	26/dez/01	225635,8152
28/mar/01	206627,5658	26/jun/01	226501,4299	27/set/01	265322,1428	27/dez/01	226415,0836
29/mar/01	208559,9504	27/jun/01	223429,1182	28/set/01	266577,6473	28/dez/01	226286,2778
30/mar/01	211020,9118	28/jun/01	224561,2504				
		29/jun/01	224486,6825				

Tabela 18: Valor Presente dos T-Notes em R\$ (PU x PTAX)

Variação do PU dos T-Notes em R\$

02/jan/01		02/abr/01	1,01%	02/jul/01	1,53%	01/out/01	-1,44%
03/jan/01	0,09%	03/abr/01	0,70%	03/jul/01	2,17%	02/out/01	0,65%
04/jan/01	-0,28%	04/abr/01	-0,46%	05/jul/01	0,85%	03/out/01	0,94%
05/jan/01	0,70%	05/abr/01	-0,22%	06/jul/01	3,46%	04/out/01	0,13%
08/jan/01	0,20%	06/abr/01	-0,27%	09/jul/01	-1,56%	05/out/01	0,79%
09/jan/01	-0,44%	09/abr/01	0,54%	10/jul/01	1,06%	09/out/01	1,00%
10/jan/01	-0,12%	10/abr/01	-1,09%	11/jul/01	2,01%	10/out/01	-0,11%
11/jan/01	0,16%	11/abr/01	-0,19%	12/jul/01	0,51%	11/out/01	-0,08%
12/jan/01	0,18%	12/abr/01	0,86%	13/jul/01	0,45%	12/out/01	0,06%
16/jan/01	-0,16%	16/abr/01	1,12%	16/jul/01	1,76%	15/out/01	0,00%
17/jan/01	0,23%	17/abr/01	0,32%	17/jul/01	-2,60%	16/out/01	-0,94%
18/jan/01	-0,04%	18/abr/01	-0,60%	18/jul/01	-2,36%	17/out/01	-1,14%
19/jan/01	0,10%	19/abr/01	0,54%	19/jul/01	1,36%	18/out/01	0,79%
22/jan/01	0,10%	20/abr/01	2,19%	20/jul/01	-1,84%	19/out/01	0,52%
23/jan/01	0,07%	23/abr/01	1,04%	23/jul/01	-1,88%	22/out/01	-1,44%
24/jan/01	0,06%	24/abr/01	-0,22%	24/jul/01	0,58%	23/out/01	-0,04%
25/jan/01	0,06%	25/abr/01	2,07%	25/jul/01	2,72%	24/out/01	1,02%
26/jan/01	0,73%	26/abr/01	-2,01%	26/jul/01	-0,31%	25/out/01	-0,01%
29/jan/01	0,00%	27/abr/01	-1,67%	27/jul/01	0,57%	28/out/01	-0,49%
30/jan/01	0,10%	30/abr/01	-1,51%	30/jul/01	-2,54%	29/out/01	-0,15%
31/jan/01	-0,17%	01/mai/01	1,82%	31/jul/01	-0,07%	30/out/01	-0,03%
01/fev/01	0,03%	02/mai/01	0,51%	01/ago/01	2,54%	31/out/01	-0,52%
02/fev/01	0,11%	03/mai/01	-0,70%	02/ago/01	-0,26%	01/nov/01	-0,90%
05/fev/01	0,98%	04/mai/01	-1,03%	03/ago/01	0,01%	02/nov/01	-2,34%
06/fev/01	0,04%	07/mai/01	1,65%	06/ago/01	-0,77%	05/nov/01	-0,75%
07/fev/01	0,23%	08/mai/01	1,18%	07/ago/01	-0,92%	06/nov/01	0,20%
08/fev/01	0,33%	09/mai/01	0,50%	08/ago/01	1,09%	07/nov/01	-1,82%
09/fev/01	-0,40%	10/mai/01	0,69%	09/ago/01	-0,17%	08/nov/01	-0,92%
12/fev/01	-0,39%	11/mai/01	0,77%	10/ago/01	0,73%	09/nov/01	0,60%
13/fev/01	-0,37%	14/mai/01	1,42%	13/ago/01	0,28%	13/nov/01	-0,94%
14/fev/01	-0,08%	15/mai/01	-0,72%	14/ago/01	0,92%	14/nov/01	0,05%
15/fev/01	0,43%	16/mai/01	-0,78%	15/ago/01	-0,55%	15/nov/01	0,25%
16/fev/01	-0,37%	17/mai/01	-0,40%	16/ago/01	-0,49%	16/nov/01	-0,99%
20/fev/01	0,65%	18/mai/01	1,49%	17/ago/01	1,49%	19/nov/01	0,83%
21/fev/01	0,42%	21/mai/01	-0,93%	20/ago/01	0,25%	20/nov/01	0,20%
22/fev/01	0,17%	22/mai/01	1,58%	21/ago/01	0,20%	21/nov/01	-0,16%
23/fev/01	0,91%	23/mai/01	0,29%	22/ago/01	-0,50%	23/nov/01	-1,01%
26/fev/01	0,66%	24/mai/01	-0,44%	23/ago/01	0,21%	26/nov/01	-0,96%
27/fev/01	0,38%	25/mai/01	-0,59%	24/ago/01	0,84%	27/nov/01	-1,13%
28/fev/01	0,10%	29/mai/01	0,68%	27/ago/01	0,33%	28/nov/01	1,03%
01/mar/01	-0,09%	30/mai/01	0,73%	28/ago/01	-0,04%	29/nov/01	0,96%
02/mar/01	-0,40%	31/mai/01	0,07%	29/ago/01	-0,32%	30/nov/01	0,86%
05/mar/01	-0,82%	01/jun/01	1,01%	30/ago/01	-0,28%	03/dez/01	-2,42%
06/mar/01	-0,12%	04/jun/01	-0,84%	31/ago/01	0,42%	04/dez/01	-1,53%
07/mar/01	0,94%	05/jun/01	1,15%	04/set/01	0,22%	05/dez/01	-0,03%
08/mar/01	-0,02%	06/jun/01	-0,30%	05/set/01	0,21%	06/dez/01	0,47%
09/mar/01	1,02%	07/jun/01	0,22%	06/set/01	0,16%	07/dez/01	-1,83%
12/mar/01	-0,21%	08/jun/01	-1,12%	07/set/01	1,03%	10/dez/01	-1,76%
13/mar/01	0,33%	11/jun/01	0,46%	10/set/01	0,31%	11/dez/01	-0,67%
14/mar/01	0,74%	12/jun/01	0,80%	13/set/01	1,47%	12/dez/01	0,62%
15/mar/01	0,50%	13/jun/01	0,71%	14/set/01	1,44%	13/dez/01	1,20%
16/mar/01	1,71%	14/jun/01	0,01%	17/set/01	0,86%	14/dez/01	-0,08%
19/mar/01	0,26%	15/jun/01	2,10%	18/set/01	-0,01%	17/dez/01	-1,10%
20/mar/01	-1,62%	18/jun/01	0,36%	19/set/01	-1,12%	18/dez/01	-0,59%
21/mar/01	0,34%	19/jun/01	0,30%	20/set/01	0,40%	19/dez/01	-2,10%
22/mar/01	2,01%	20/jun/01	-2,80%	21/set/01	1,04%	20/dez/01	1,19%
23/mar/01	0,75%	21/jun/01	-3,14%	24/set/01	0,94%	21/dez/01	0,45%
26/mar/01	-1,01%	22/jun/01	-1,25%	25/set/01	2,51%	24/dez/01	0,26%
27/mar/01	-0,71%	25/jun/01	0,61%	26/set/01	-1,15%	26/dez/01	-1,02%
28/mar/01	-0,30%	26/jun/01	0,38%	27/set/01	-1,93%	27/dez/01	0,35%
29/mar/01	0,94%	27/jun/01	-1,36%	28/set/01	0,47%	28/dez/01	-0,06%
30/mar/01	1,18%	28/jun/01	0,51%				
		29/jun/01	-0,03%				

Tabela 19: Variação do PU dos T-Notes em R\$

3.9 Fundos de Investimento em Títulos da Dívida Externa Brasileira

Finalmente, outra opção popular de investimento entre os clientes “private” é a aplicação em fundos que comprem os títulos da dívida externa brasileira. Dentre esses papéis, o que é negociado em maior volume é o C-Bond.

No final dos anos 80 e começo dos anos 90, Nicholas Brady, então secretário do Tesouro da administração de George Bush pai, arquitetou uma enorme renegociação das dívidas externas dos países em desenvolvimento. Na época, o rombo passava de US\$ 1,3 trilhões de dólares, que esses países deviam essencialmente para bancos americanos e não tinham condições de pagar. O Plano Brady, como foi batizado, permitiu que os bancos americanos trocassem os papéis dos países emergentes por outros, garantidos pelo Tesouro americano, que puderam então ser vendidos livremente a preço de mercado. Esses novos papéis ficaram conhecidos como os “Bradies”, dos quais o C-Bond é o representante brasileiro mais conhecido.

Embora o investimento em C-Bonds submeta os recursos ao risco Brasil, há uma diferença fundamental entre aplicar nestes títulos e aplicar em papéis cambiais da dívida interna brasileira. Enquanto os papéis cambiais da dívida interna, no vencimento, são indexados ao dólar mas pagos em reais, no caso do C-Bond e de outros títulos da dívida externa o pagamento é feito em dólares, o que impede que o governo brasileiro simplesmente imprima dinheiro para saldar essa dívida e seus juros.

Nas tabelas a seguir serão apresentados o valor do C-Bond em dólares ao longo de 2001, seu valor convertido em reais pela Tabela 7 e finalmente a variação percentual de seu valor de negociação em reais.

Cotação do C-Bond (% sobre o valor de face em US\$)

Fonte: Bloomberg

02/jan/01	77,37	02/abr/01	76,72	02/jul/01	74,2	01/out/01	66,8
03/jan/01	77,78	03/abr/01	76,62	03/jul/01	74,1	02/out/01	66,57
04/jan/01	78,46	04/abr/01	76,89	04/jul/01	73,52	03/out/01	66,2
05/jan/01	78,72	05/abr/01	77,24	05/jul/01	72,81	04/out/01	65,27
08/jan/01	78,41	06/abr/01	77,83	06/jul/01	72,76	05/out/01	65,08
09/jan/01	78,55	09/abr/01	78,23	09/jul/01	73,04	08/out/01	64,89
10/jan/01	78,32	10/abr/01	78,75	10/jul/01	71,97	09/out/01	65,42
11/jan/01	78,4	11/abr/01	78,51	11/jul/01	70,31	10/out/01	66,42
12/jan/01	78,57	12/abr/01	78,28	12/jul/01	68,98	11/out/01	67
16/jan/01	78,38	16/abr/01	76,94	13/jul/01	69,59	12/out/01	66,44
17/jan/01	78,78	18/abr/01	77,44	16/jul/01	69,59	15/out/01	67,46
18/jan/01	79,12	19/abr/01	76,5	17/jul/01	71,44	16/out/01	68,57
19/jan/01	79,4	20/abr/01	74,55	18/jul/01	70,8	17/out/01	68,89
22/jan/01	79,43	23/abr/01	73,3	19/jul/01	71,04	18/out/01	68,68
23/jan/01	79,78	24/abr/01	73,63	20/jul/01	71,76	19/out/01	69,63
24/jan/01	79,87	25/abr/01	73,44	23/jul/01	72,69	22/out/01	70,1
25/jan/01	79,77	26/abr/01	74,51	24/jul/01	72,25	23/out/01	69,68
26/jan/01	80,35	27/abr/01	75,89	25/jul/01	72,43	24/out/01	69,29
29/jan/01	81,21	30/abr/01	75,54	26/jul/01	71,71	25/out/01	69,01
30/jan/01	81,12	01/mai/01	75,21	27/jul/01	71,23	26/out/01	68,93
31/jan/01	81,29	02/mai/01	74,48	30/jul/01	71,17	29/out/01	67,01
01/fev/01	81,44	03/mai/01	75,18	31/jul/01	70,97	30/out/01	67,18
02/fev/01	81	04/mai/01	75,93	01/ago/01	70,59	31/out/01	67,85
05/fev/01	80,68	07/mai/01	76,06	02/ago/01	71,56	01/nov/01	67,52
06/fev/01	80,63	08/mai/01	75,73	03/ago/01	71,38	02/nov/01	67,51
07/fev/01	80,36	09/mai/01	75,32	06/ago/01	72,08	05/nov/01	69,2
08/fev/01	80,81	10/mai/01	75,42	07/ago/01	72,51	06/nov/01	69,82
09/fev/01	80,92	11/mai/01	74,22	08/ago/01	73,47	07/nov/01	71,27
12/fev/01	80,99	14/mai/01	73,48	10/ago/01	73,08	08/nov/01	71,99
13/fev/01	81,13	15/mai/01	73,6	13/ago/01	72,99	12/nov/01	72,06
14/fev/01	80,97	16/mai/01	74,56	14/ago/01	72,21	13/nov/01	73,55
15/fev/01	81,3	17/mai/01	75,24	15/ago/01	72,5	14/nov/01	73,65
16/fev/01	80,89	18/mai/01	75,59	16/ago/01	72,98	15/nov/01	73,73
19/fev/01	80,34	21/mai/01	75,33	17/ago/01	71,53	16/nov/01	73,69
20/fev/01	79,71	22/mai/01	75,65	20/ago/01	70,61	19/nov/01	75,52
21/fev/01	78,8	23/mai/01	75,02	21/ago/01	69,96	20/nov/01	74,93
22/fev/01	79,22	24/mai/01	74,58	22/ago/01	72,3	22/nov/01	74,09
23/fev/01	79,42	25/mai/01	73,73	24/ago/01	72,23	23/nov/01	75,39
26/fev/01	79,79	28/mai/01	73,59	27/ago/01	72,19	26/nov/01	76,4
27/fev/01	79,46	29/mai/01	73,51	28/ago/01	72,85	27/nov/01	75,89
28/fev/01	79,1	30/mai/01	73,33	29/ago/01	73,2	28/nov/01	74,52
01/mar/01	79,66	31/mai/01	73,88	30/ago/01	72,51	29/nov/01	73,2
02/mar/01	80,16	01/jun/01	73,75	31/ago/01	72,48	30/nov/01	72,84
05/mar/01	80,78	04/jun/01	75,44	03/set/01	72,28	03/dez/01	74,98
06/mar/01	80,94	05/jun/01	75,84	04/set/01	73,23	04/dez/01	75,89
07/mar/01	81,29	06/jun/01	75,89	05/set/01	73,08	05/dez/01	76,34
08/mar/01	81,07	07/jun/01	76,11	06/set/01	72,5	06/dez/01	75,55
09/mar/01	81,06	08/jun/01	76,5	07/set/01	72,29	07/dez/01	75,91
12/mar/01	80,67	11/jun/01	76,68	11/set/01	72,28	10/dez/01	76,05
13/mar/01	80,37	12/jun/01	76,19	12/set/01	71,7	11/dez/01	76,64
14/mar/01	80,07	13/jun/01	75,65	13/set/01	69,9	12/dez/01	77,17
15/mar/01	79,51	14/jun/01	74,94	14/set/01	68,45	13/dez/01	76,84
16/mar/01	78,83	15/jun/01	74,88	17/set/01	68,5	14/dez/01	76,47
19/mar/01	78,02	18/jun/01	73,13	18/set/01	68,91	18/dez/01	76,22
20/mar/01	77,9	19/jun/01	73,62	19/set/01	68,84	19/dez/01	76,04
21/mar/01	78,25	20/jun/01	74,25	20/set/01	67,96	20/dez/01	75,11
22/mar/01	76,87	21/jun/01	75,11	21/set/01	66,83	21/dez/01	75,75
23/mar/01	75,94	22/jun/01	75,64	24/set/01	66,94	24/dez/01	75,31
26/mar/01	77,21	25/jun/01	76,02	25/set/01	66,79	25/dez/01	75,45
27/mar/01	77,73	26/jun/01	75,48	26/set/01	65,86	26/dez/01	75,59
28/mar/01	77,89	27/jun/01	74,99	27/set/01	66,16	27/dez/01	76,12
29/mar/01	77,18	28/jun/01	74,65	28/set/01	67,28	28/dez/01	76,95
30/mar/01	78,18	29/jun/01	74,09				

Tabela 20: Cotação do C-Bond (% sobre o valor de face)

Cotação do C-Bond (em R\$)

02/jan/01	149,974008	02/abr/01	165,592448	02/jul/01	173,5909	01/out/01	179,46488
03/jan/01	151,064316	03/abr/01	166,510584	03/jul/01	177,15087	02/out/01	179,991966
04/jan/01	151,875022	04/abr/01	166,328448	04/jul/01	177,278776	03/out/01	180,63994
05/jan/01	153,378048	05/abr/01	166,753436	05/jul/01	181,609983	04/out/01	178,356802
06/jan/01	153,087684	06/abr/01	167,497943	06/jul/01	178,611248	05/out/01	179,23032
09/jan/01	152,709055	09/abr/01	169,305386	09/jul/01	181,153808	08/out/01	180,575892
10/jan/01	152,167928	10/abr/01	168,69825	10/jul/01	182,0841	09/out/01	181,847974
11/jan/01	152,58992	11/abr/01	167,885784	11/jul/01	178,749113	10/out/01	184,541328
12/jan/01	153,274356	12/abr/01	168,873444	12/jul/01	176,161124	11/out/01	186,2533
16/jan/01	152,64505	16/abr/01	167,92155	13/jul/01	180,787861	12/out/01	184,63676
17/jan/01	153,747048	18/abr/01	169,500672	16/jul/01	176,090536	15/out/01	185,690396
18/jan/01	154,291912	19/abr/01	166,3875	17/jul/01	176,428224	16/out/01	186,585827
19/jan/01	155,04438	20/abr/01	163,13031	18/jul/01	177,22656	17/out/01	188,930825
22/jan/01	155,309479	23/abr/01	163,92812	19/jul/01	174,566592	18/out/01	189,371364
23/jan/01	156,137438	24/abr/01	166,300718	20/jul/01	172,999008	19/out/01	189,226488
24/jan/01	156,433382	25/abr/01	165,519072	23/jul/01	176,251443	22/out/01	190,44768
25/jan/01	156,309315	26/abr/01	171,454961	24/jul/01	180,00365	23/out/01	191,187984
26/jan/01	158,59483	27/abr/01	171,063649	25/jul/01	179,887148	24/out/01	190,048612
29/jan/01	160,30854	30/abr/01	167,54772	26/jul/01	179,067041	25/out/01	188,32829
30/jan/01	160,236336	01/mai/01	164,311287	27/jul/01	173,331082	26/out/01	187,806678
31/jan/01	160,255106	02/mai/01	165,636072	30/jul/01	173,035621	29/out/01	182,474931
01/fev/01	160,526384	03/mai/01	168,049854	31/jul/01	176,963695	30/out/01	181,862978
02/fev/01	159,8859	04/mai/01	168,465891	01/ago/01	175,606743	31/out/01	181,9737
05/fev/01	160,827512	07/mai/01	167,004942	02/ago/01	178,069904	01/nov/01	176,956416
06/fev/01	160,816535	08/mai/01	169,021787	03/ago/01	176,23722	02/nov/01	175,546253
07/fev/01	160,55928	09/mai/01	170,117752	06/ago/01	176,329304	05/nov/01	180,3006
08/fev/01	161,983845	10/mai/01	171,16569	07/ago/01	179,128704	06/nov/01	178,536722
09/fev/01	161,508228	11/mai/01	169,689186	08/ago/01	181,235796	07/nov/01	180,848069
12/fev/01	161,040516	14/mai/01	169,459576	10/ago/01	181,545336	08/nov/01	183,588898
13/fev/01	160,742869	15/mai/01	172,10624	13/ago/01	181,81809	12/nov/01	182,09562
14/fev/01	160,344891	16/mai/01	173,120864	14/ago/01	181,53594	13/nov/01	186,074145
15/fev/01	161,73822	17/mai/01	173,322864	15/ago/01	181,28625	14/nov/01	187,01208
16/fev/01	160,259268	18/mai/01	173,411019	16/ago/01	181,552346	15/nov/01	185,460442
19/fev/01	160,19796	21/mai/01	175,353174	17/ago/01	180,505955	16/nov/01	186,80415
20/fev/01	159,635217	22/mai/01	174,46403	20/ago/01	178,685666	19/nov/01	191,903872
21/fev/01	158,09644	23/mai/01	175,749354	21/ago/01	177,369588	20/nov/01	190,194819
22/fev/01	160,34128	24/mai/01	175,218252	22/ago/01	182,42013	22/nov/01	186,217806
23/fev/01	161,762656	25/mai/01	172,550319	24/ago/01	182,611886	23/nov/01	187,675866
26/fev/01	163,058844	28/mai/01	171,207135	27/ago/01	184,0845	26/nov/01	187,97456
27/fev/01	162,511592	29/mai/01	172,197175	28/ago/01	186,386725	27/nov/01	188,639773
28/fev/01	161,58548	30/mai/01	173,029468	29/ago/01	187,12848	28/nov/01	186,836544
01/mar/01	162,14793	31/mai/01	174,3568	30/ago/01	184,711974	29/nov/01	185,10084
02/mar/01	162,179712	01/jun/01	175,768375	31/ago/01	184,120944	30/nov/01	179,710848
05/mar/01	163,240224	04/jun/01	178,257176	03/set/01	184,436876	03/dez/01	182,118922
06/mar/01	165,044754	05/jun/01	181,21968	04/set/01	187,39557	04/dez/01	184,458234
07/mar/01	165,709665	06/jun/01	180,777569	05/set/01	187,391736	05/dez/01	186,53679
08/mar/01	166,996093	07/jun/01	181,75068	06/set/01	186,10025	06/dez/01	181,357775
09/mar/01	166,594512	08/jun/01	180,68535	07/set/01	187,426283	07/dez/01	178,988189
12/mar/01	166,357674	11/jun/01	181,900296	11/set/01	188,021964	10/dez/01	178,086285
13/mar/01	166,872231	12/jun/01	182,139814	12/set/01	189,06573	11/dez/01	180,494864
14/mar/01	167,058048	13/jun/01	182,15007	13/set/01	186,91959	12/dez/01	184,027298
15/mar/01	168,696367	14/jun/01	180,448026	14/set/01	184,66441	13/dez/01	183,18656
16/mar/01	167,726591	15/jun/01	184,099968	17/set/01	184,8541	14/dez/01	180,31626
19/mar/01	163,288058	18/jun/01	180,448275	18/set/01	183,844989	18/dez/01	178,58346
20/mar/01	163,59	19/jun/01	182,194776	19/set/01	184,443012	19/dez/01	174,35972
21/mar/01	167,603675	20/jun/01	178,60095	20/set/01	183,93374	20/dez/01	174,270222
22/mar/01	165,931582	21/jun/01	174,976256	21/set/01	182,592926	21/dez/01	176,580825
23/mar/01	162,306562	22/jun/01	173,949308	24/set/01	187,478858	24/dez/01	176,059718
26/mar/01	163,963156	25/jun/01	175,902678	25/set/01	184,841325	25/dez/01	174,629025
27/mar/01	164,55441	26/jun/01	175,385328	26/set/01	178,697938	26/dez/01	175,482185
28/mar/01	166,443141	27/jun/01	171,899577	27/set/01	180,378624	27/dez/01	176,628848
29/mar/01	166,832288	28/jun/01	172,060785	28/set/01	181,9924	28/dez/01	178,55478
30/mar/01	168,993888	29/jun/01	170,770041				

Tabela 21: Cotação do C-Bond (em R\$)

Variação do C-Bond em R\$

02/jan/01		02/abr/01	-0,7432%	02/jul/01	0,8893%	01/out/01	-2,9087%
03/jan/01	0,7270%	03/abr/01	0,5545%	03/jul/01	2,0508%	02/out/01	0,2937%
04/jan/01	0,5367%	04/abr/01	-0,1094%	04/jul/01	0,0722%	03/out/01	0,3600%
05/jan/01	0,9896%	05/abr/01	0,2555%	05/jul/01	2,4432%	04/out/01	-1,2639%
06/jan/01	-0,1893%	06/abr/01	0,4465%	06/jul/01	-1,6512%	05/out/01	0,4898%
09/jan/01	-0,2473%	09/abr/01	1,0791%	09/jul/01	1,4235%	08/out/01	0,7508%
10/jan/01	-0,3544%	10/abr/01	-0,3586%	10/jul/01	0,5135%	09/out/01	0,7045%
11/jan/01	0,2773%	11/abr/01	-0,4816%	11/jul/01	-1,8316%	10/out/01	1,4811%
12/jan/01	0,4485%	12/abr/01	0,5883%	12/jul/01	-1,4478%	11/out/01	0,9277%
16/jan/01	-0,4106%	16/abr/01	-0,5637%	13/jul/01	2,6264%	12/out/01	-0,8679%
17/jan/01	0,7219%	18/abr/01	0,9404%	16/jul/01	-2,5983%	15/out/01	0,5707%
18/jan/01	0,3544%	19/abr/01	-1,8367%	17/jul/01	0,1918%	16/out/01	0,4822%
19/jan/01	0,4877%	20/abr/01	-1,9576%	18/jul/01	0,4525%	17/out/01	1,2568%
22/jan/01	0,1710%	23/abr/01	0,4891%	19/jul/01	-1,5009%	18/out/01	0,2332%
23/jan/01	0,5331%	24/abr/01	1,4473%	20/jul/01	-0,8980%	19/out/01	-0,0765%
24/jan/01	0,1895%	25/abr/01	-0,4700%	23/jul/01	1,8800%	22/out/01	0,6454%
25/jan/01	-0,0793%	26/abr/01	3,5862%	24/jul/01	2,1289%	23/out/01	0,3887%
26/jan/01	1,4622%	27/abr/01	-0,2282%	25/jul/01	-0,0647%	24/out/01	-0,5959%
29/jan/01	1,0806%	30/abr/01	-2,0553%	26/jul/01	-0,4559%	25/out/01	-0,9052%
30/jan/01	-0,0450%	01/mai/01	-1,9316%	27/jul/01	-3,2032%	26/out/01	-0,2770%
31/jan/01	0,0117%	02/mai/01	0,8063%	30/jul/01	-0,1705%	29/out/01	-2,8390%
01/fev/01	0,1693%	03/mai/01	1,4573%	31/jul/01	2,2701%	30/out/01	-0,3354%
02/fev/01	-0,3990%	04/mai/01	0,2476%	01/ago/01	-0,7668%	31/out/01	0,0609%
05/fev/01	0,5889%	07/mai/01	-0,8672%	02/ago/01	1,4027%	01/nov/01	-2,7571%
06/fev/01	-0,0068%	08/mai/01	1,2077%	03/ago/01	-1,0292%	02/nov/01	-0,7969%
07/fev/01	-0,1600%	09/mai/01	0,6484%	06/ago/01	0,0523%	05/nov/01	2,7083%
08/fev/01	0,8871%	10/mai/01	0,6160%	07/ago/01	1,5876%	06/nov/01	-0,9783%
09/fev/01	-0,2935%	11/mai/01	-0,8626%	08/ago/01	1,1763%	07/nov/01	1,1826%
12/fev/01	-0,2896%	14/mai/01	-0,1353%	10/ago/01	0,1708%	08/nov/01	1,6279%
13/fev/01	-0,1848%	15/mai/01	1,5618%	13/ago/01	0,1502%	12/nov/01	-0,8134%
14/fev/01	-0,2476%	16/mai/01	0,5895%	14/ago/01	-0,1552%	13/nov/01	2,1849%
15/fev/01	0,8690%	17/mai/01	0,1167%	15/ago/01	-0,1375%	14/nov/01	0,5041%
16/fev/01	-0,9144%	18/mai/01	0,0509%	16/ago/01	0,1468%	15/nov/01	-0,8297%
19/fev/01	-0,0383%	21/mai/01	1,1200%	17/ago/01	-0,5764%	16/nov/01	0,7245%
20/fev/01	-0,3513%	22/mai/01	-0,5071%	20/ago/01	-1,0084%	19/nov/01	2,7300%
21/fev/01	-0,9639%	23/mai/01	0,7367%	21/ago/01	-0,7365%	20/nov/01	-0,8906%
22/fev/01	1,4199%	24/mai/01	-0,3022%	22/ago/01	2,8475%	22/nov/01	-2,0910%
23/fev/01	0,8865%	25/mai/01	-1,5226%	24/ago/01	0,1051%	23/nov/01	0,7830%
26/fev/01	0,8013%	28/mai/01	-0,7784%	27/ago/01	0,8064%	26/nov/01	0,1592%
27/fev/01	-0,3356%	29/mai/01	0,5783%	28/ago/01	1,2506%	27/nov/01	0,3539%
28/fev/01	-0,5699%	30/mai/01	0,4833%	29/ago/01	0,3980%	28/nov/01	-0,9559%
01/mar/01	0,3481%	31/mai/01	0,7671%	30/ago/01	-1,2914%	29/nov/01	-0,9290%
02/mar/01	0,0196%	01/jun/01	0,8096%	31/ago/01	-0,3200%	30/nov/01	-2,9119%
05/mar/01	0,6539%	04/jun/01	1,4160%	03/set/01	0,1716%	03/dez/01	1,3400%
06/mar/01	1,1054%	05/jun/01	1,8619%	04/set/01	1,6042%	04/dez/01	1,2845%
07/mar/01	0,4029%	06/jun/01	-0,2440%	05/set/01	-0,0020%	05/dez/01	1,1268%
08/mar/01	0,7763%	07/jun/01	0,5383%	06/set/01	-0,6892%	06/dez/01	-2,7764%
09/mar/01	-0,2405%	08/jun/01	-0,5861%	07/set/01	0,7125%	07/dez/01	-1,3066%
12/mar/01	-0,1422%	11/jun/01	0,6724%	11/set/01	0,3178%	10/dez/01	-0,5039%
13/mar/01	0,3093%	12/jun/01	0,1317%	12/set/01	0,5551%	11/dez/01	1,3525%
14/mar/01	0,1114%	13/jun/01	0,0056%	13/set/01	-1,1351%	12/dez/01	1,9571%
15/mar/01	0,9807%	14/jun/01	-0,9344%	14/set/01	-1,2065%	13/dez/01	-0,4589%
16/mar/01	-0,5749%	15/jun/01	2,0238%	17/set/01	0,1027%	14/dez/01	-1,5669%
19/mar/01	-2,6463%	18/jun/01	-1,9835%	18/set/01	-0,5459%	18/dez/01	-0,9610%
20/mar/01	0,1849%	19/jun/01	0,9679%	19/set/01	0,3253%	19/dez/01	-2,3651%
21/mar/01	2,4535%	20/jun/01	-1,9725%	20/set/01	-0,2761%	20/dez/01	-0,0513%
22/mar/01	-0,9976%	21/jun/01	-2,0295%	21/set/01	-0,7290%	21/dez/01	1,3259%
23/mar/01	-2,1846%	22/jun/01	-0,5869%	24/set/01	2,6759%	24/dez/01	-0,2951%
26/mar/01	1,0207%	25/jun/01	1,1230%	25/set/01	-1,4068%	25/dez/01	-0,8126%
27/mar/01	0,3606%	26/jun/01	-0,2941%	26/set/01	-3,3236%	26/dez/01	0,4886%
28/mar/01	1,1478%	27/jun/01	-1,9875%	27/set/01	0,9405%	27/dez/01	0,6534%
29/mar/01	0,2338%	28/jun/01	0,0938%	28/set/01	0,8947%	28/dez/01	1,0904%
30/mar/01		29/jun/01	-0,7502%				

Tabela 22: Variação do C-Bond em R\$

4. METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO

Para se resolver o problema de otimização, poderia ser utilizado um algoritmo, como o de Wolfe mostrado no Anexo II. Entretanto, a utilização de um software de otimização se faz necessária dado o extenso volume de cálculos envolvidos em um problema que envolve expressivo número de incógnitas e poucas equações. Assim, só se torna viável a aplicação sistemática dessa metodologia de otimização de carteiras se houver um software apropriado para a resolução do problema de otimização. Qualquer que seja o programa escolhido, a programação deve seguir alguns parâmetros básicos, que são:

Minimizar, de acordo com a equação (2) que determina a variância do portfólio:

$$x_1x_1\sigma_{11} + 2x_1x_2\sigma_{12} + 2x_1x_3\sigma_{13} + \dots + 2x_1x_n\sigma_{1n} + \dots + x_nx_n\sigma_{nn}$$

Este parâmetro ordena ao programa que minimize a variância, e portanto, o risco da carteira, calculado de acordo com a fórmula de Markowitz (x_i é a fração da carteira aplicada no ativo i , σ_{ii} é a variância do ativo i e σ_{ij} é a covariância entre os ativos i e j). O objetivo de minimizar a equação (2) deve estar sujeito às seguintes restrições:

Restrição 1:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1$$

Esta restrição indica que a somatória de todas as frações investidas nos diferentes ativos seja igual a 100% dos recursos disponíveis.

Restrição 2:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0$$

Esta restrição garante que não se tenha um investimento negativo em nenhum ativo (na prática, existem instrumentos no mercado financeiro que permitiriam um valor negativo – o que equivaleria a ficar “vendido” no ativo – mas esses instrumentos, embora à disposição dos bancos através de suas tesourarias, não estão ao alcance dos clientes de fundos, daí a necessidade deste parâmetro para garantir que o programa encontre a resolução que seja a melhor possível apenas com a alternativa de ficar “comprado” no ativo.

Restrição 3:

$$x_1 * R_1 + x_2 * R_2 + x_3 * R_3 + \dots + x_n * R_n = R_{desejado}$$

Este parâmetro fixa a rentabilidade esperada do portfólio, calculada pela média das rentabilidades esperadas de cada ativo ponderadas pelo seu peso na carteira (“ x_i ” é a fração da carteira aplicada no ativo i e “ R_i ” é a rentabilidade esperada do ativo i). O analista deve testar diferentes valores de rentabilidade desejada, analisando o risco mínimo obtido para cada rentabilidade e analisando qual alternativa melhor se encaixa nas expectativas do cliente e em sua tolerância ao risco.

Note-se que seria equivalente inverter o processo e procurar fixar a variância da carteira e maximizar a rentabilidade esperada, uma vez que o objetivo final do método é obter uma carteira dominante, ou seja, com o menor risco para sua rentabilidade esperada, ou então com a maior rentabilidade esperada para seu patamar de risco. Aqui optou-se por fixar o valor da rentabilidade por ser um número menos abstrato que a variância, e assim de mais fácil manipulação pelo analista que estiver estudando as possibilidades para o cliente.

Como já dito anteriormente, embora tenha-se considerado a utilização de programas mais específicos de otimização como GAMS, LINGO ou LINDO, optou-se pela utilização do Solver do Excel, pela sua disponibilidade imediata na empresa e menor custo.

As restrições do solver devem seguir os parâmetros indicados acima, ficando com a seguinte configuração:

Microsoft Excel - Markowitz OffShore.xls

Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Ferramentas Dados Janela Ajuda

Barra de fórmulas: $=G33*I33+G34*I34+G35*I35+G36*I36+G37*I37+G38*I38+G39*I39+G40*I40$

Moderado

	Retorno Esperado (E)	Variação (var)	Fração (x)
Pré380	4,66%	0,017%	0,0%
Pré180	4,81%	0,002%	58,1%
DI	4,22%	0,000%	0,0%
Dólar	5,49%	0,293%	0,0%
Ibov	7,69%	1,772%	11,8%
Dow Jones	2,50%	0,874%	0,0%
C-Bond	1,33%	0,242%	0,0%
	6,81%	0,513%	30,1%
	5,63%	0,063%	100,0%

Parâmetros do Solver

Definir célula de destino: $\$G\41

Igual a: ☐ Máx ☒ Min ☐ Valor de: 0

Células variáveis: $\$I\$33:\$I\40

Submeter às restrições:

- $\$I\$41 = \$D\41
- $\$I\$17 = 1$
- $\$I\$21:\$I\$28 \geq 0$
- $\$I\$29 = 1$
- $\$I\$33:\$I\$40 \geq 0$
- $\$I\$41 = 1$

Agressivo

	Esperado (E)	Variação (var)	Fração (x)
	4,66%	0,017%	0,0%
	4,81%	0,002%	0,0%
	4,22%	0,000%	0,0%
	5,49%	0,293%	0,0%
	7,69%	1,772%	100,0%
	2,50%	0,874%	0,0%
	1,33%	0,242%	0,0%
	6,81%	0,513%	0,0%
	7,69%	1,772%	100,0%

Pronto

Barra de tarefas: Iniciar TI Microsoft E... Microsoft Wor... Meu computador 03:55

Figura 3: Exemplo de otimização no Excel pelo Solver

Onde as células variáveis representam as frações $x_1, x_2, \dots, x_n$, as restrições implicam na obrigatoriedade de todas as frações serem positivas e de sua soma ser igual a 1. Outra restrição importante é igualar o valor da célula que calcula a rentabilidade ao valor de retorno que se espera obter da carteira. Por fim, a célula destino deve ser aquela que retorna o valor da variância da carteira, a qual o solver deve minimizar.

5. AS VARIÁVEIS ESSENCIAIS

5.1. Variância e Covariância

Para que seja feita uma comparação do modelo de Markowitz aplicado da forma proposta com as soluções alternativas, são necessárias três variáveis chave. As duas primeiras são a variância de cada ativo e a covariância entre cada par de ativos que serão utilizados no modelo. Essas variâncias e covariâncias podem ser facilmente calculadas pelas fórmulas:

$$Var(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1} = \sigma_x^2 \quad (5)$$

$$Co\ var(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)(\bar{y} - y_i)}{n} = \sigma_{xy} \quad (6)$$

$$Correl(x, y) = \frac{Co\ var(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = \rho_{xy} \quad (7)$$

Além disso, este cálculo já é feito diariamente pelo departamento de controle de risco do banco e, para evitar que se faça o mesmo trabalho duas vezes, recomenda-se que o analista, ao fazer novos estudos com este modelo, utilize os dados já calculados pelo departamento de risco, evitando assim o trabalho de calcular toda vez as variâncias e as correlações envolvidas.

Os valores utilizados para as variâncias, correlações e covariâncias calculados para cada ativos se encontram nas tabelas a seguir, calculados com base nos dados encontrados nas tabelas 3, 5, 10, 12, 15, 19 e 22, utilizando-se a equação (5) para

obter a variância e o desvio padrão da rentabilidade de cada ativo, bem como as equações (6) e (7) para se obter a covariância e a correlação entre eles.

Variância (var)	
Pré180	0,0071309%
DI	0,0000024%
Cupom Cambial	1,1703202%
Ibov	7,0883925%
Dow Jones	3,4974342%
C-Bond	0,9698017%
T-Notes 10y	2,0516714%

Tabela 23: Variâncias anualizadas

Observe-se que o Ibovespa é o ativo com a maior variância, seguido pelo Dow Jones. Tal fato é esperado, dada a natureza mais volátil de índices de ações quando comparados com títulos de renda fixa. É também mostrado que o mercado de ações brasileiro, representado pelo Ibovespa, é bastante mais volátil que o mercado americano, mesmo levando-se em conta os efeitos da taxa de câmbio na obtenção da rentabilidade em reais do Dow Jones.

Os ativos com a menor variância são os de renda fixa em reais, prefixado 180 dias e DI. Tal fato se deve à grande instabilidade na taxa de câmbio observada em 2001, como decorrência principalmente dos atentados de 11 de setembro e da crise argentina.

Entre os ativos de renda fixa com referencial em dólar, observamos surpreendentemente que os Treasury Notes apresentam a maior variância, enquanto o C-Bond apresenta a menor. Analisando tal fato, observa-se que a variância no rendimento dos T-Notes deve-se na maior parte à variação cambial, uma vez que a oscilação das taxas de juros pagas por este papel é pequena. Já no caso do C-Bond e dos papéis cambiais, há uma correlação negativa entre o PU dos papéis em dólar e a taxa de câmbio, uma vez que, em momentos de estresse no mercado, a taxa de câmbio e as taxas de juros sobem. O aumento da taxa de juros faz com que o PU destes papéis diminua, já que passam a ser trazidos a valor presente por uma taxa

maior. Essa diminuição do PU em dólar, entretanto, é compensada por um aumento na taxa de câmbio, que contribui para diminuir a variação da rentabilidade destes papéis. Quando o mercado se acalma, o mecanismo inverso entra em ação. Assim, enquanto os T-Notes sofrem com a variância da taxa de câmbio quase que em sua totalidade, o C-Bond e os papéis cambiais têm sua variância em reais atenuada pelo seu componente de renda fixa.

Correlação (ρ)	Pré180	DI	Cupom Cambial	Ibov	Dow Jones	C-Bond	T-Notes 10y
Pré180	100,00%	15,72%	-30,69%	55,19%	-4,95%	18,21%	-31,03%
DI	15,72%	100,00%	-6,22%	8,71%	8,10%	22,42%	-3,74%
Cupom Cambial	-30,69%	-6,22%	100,00%	-9,08%	39,60%	54,40%	74,47%
Ibov	55,19%	8,71%	-9,08%	100,00%	34,41%	42,88%	-15,07%
Dow Jones	-4,95%	8,10%	39,60%	34,41%	100,00%	36,91%	16,55%
C-Bond	18,21%	22,42%	54,40%	42,88%	36,91%	100,00%	51,81%
T-Notes 10y	-31,03%	-3,74%	74,47%	-15,07%	16,55%	51,81%	100,00%

Tabela 24: Correlações entre os ativos considerados

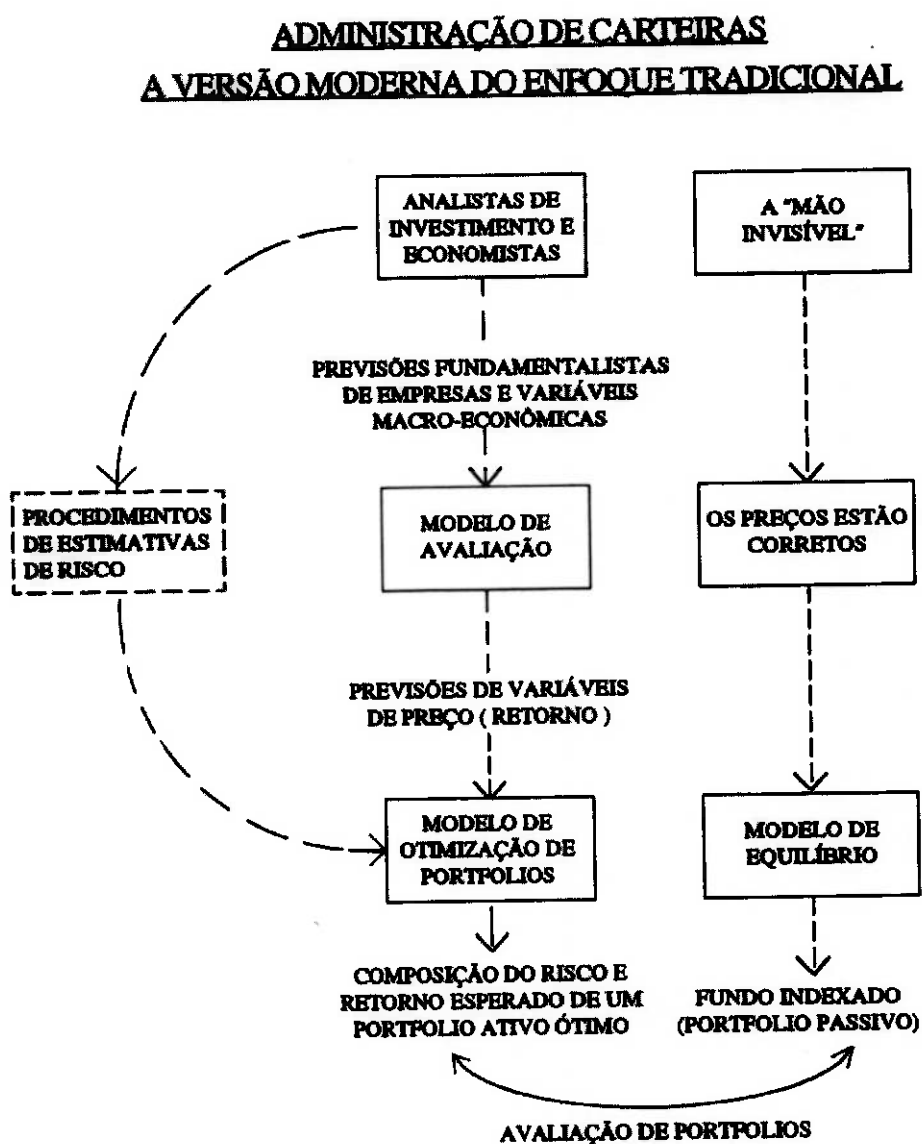
Covariância	Pré180	DI	Cupom Cambial	Ibov	Dow Jones	C-Bond	T-Notes 10y
Pré180	varPré180	0,000021%	-0,028039%	0,124090%	-0,007812%	0,015146%	-0,037535%
DI	0,000021%	varDI	-0,000105%	0,000360%	0,000235%	0,000343%	-0,000083%
Cupom Cambial	-0,028039%	-0,000105%	varDóI	-0,261469%	0,801236%	0,579550%	1,153988%
Ibov	0,124090%	0,000360%	-0,261469%	varIbov	1,713097%	1,124233%	-0,574821%
Dow Jones	-0,007812%	0,000235%	0,801236%	1,713097%	varDJ	0,679751%	0,443249%
C-Bond	0,015146%	0,000343%	0,579550%	1,124233%	0,679751%	varC	0,730780%
T-Notes 10y	-0,037535%	-0,000083%	1,153988%	-0,574821%	0,443249%	0,730780%	varIN

Tabela 25: Covariâncias entre os ativos considerados

As covariâncias nada mais são do que o produto da correlação entre cada par de ativos e seus desvios padrão, conforme pode-se inferir da equação (7). Observa-se alta correlação entre os ativos indexados ao dólar, como seria de se esperar, e baixa correlação entre os títulos DI e os demais ativos. Este comportamento da correlação do DI se deve principalmente ao fato de estes papéis apresentarem variância muito pequena, tendo um rendimento praticamente estável, salvo em situações de estresse muito grande. Como os outros ativos são muito mais sensíveis a mudanças, a correlação entre eles e os títulos DI é pouco observável. Note-se também a alta correlação entre o C-Bond e o Ibovespa. Embora o Ibovespa tenha uma correlação negativa com a taxa de câmbio (como pode ser observado pela sua correlação com os T-Notes), tanto o C-Bond quanto o Ibovespa são fortemente influenciados pelo chamado risco Brasil, daí a alta correlação observada entre eles.

5.2 O Retorno Esperado

A terceira variável chave, a parte mais delicada deste modelo, é a determinação da rentabilidade esperada de cada ativo, uma vez que a rentabilidade histórica não é um determinante confiável da rentabilidade futura.



FONTE: ELTON & GRUBER, MODERN PORTFOLIO THEORY AND INVESTMENT ANALYSIS

Figura 4: Enfoque moderno da administração de carteiras

Utilizaremos como rentabilidade esperada as estimativas do banco, elaboradas em janeiro de 2002, para o comportamento destes ativos ao longo do ano de 2002.

Estas estimativas são feitas com base em um cenário exaustivamente discutido dentro do banco para o desenrolar dos eventos nacionais e mundiais ao longo do ano e seus possíveis impactos na economia e nos mercados do país.

Cabe frisar que, embora esta seja a parte mais delicada do modelo, pois depende fortemente de opiniões subjetivas, não há alternativa que não seja afetada por um erro de julgamento do analista. Assim, o modelo de Markowitz apresenta a vantagem de considerar explicitamente a variância de cada ativo, que serve como medida da imprevisibilidade de seus retornos e, portanto, da probabilidade de erro por parte do analista. Assim, os ativos menos suscetíveis a erro (menor variância) serão preferidos pelo modelo, de forma a minimizar a chance de que erros de julgamento tenham forte impacto no desempenho de longo prazo da carteira, ao contrário das outras alternativas.

Para 2002, esperava-se, no cenário internacional, um ano tenso, como consequência dos atentados de 11 de setembro de 2001, além das dificuldades apresentadas pela Argentina, o que levaria a um aumento da aversão ao risco e a uma consequente fuga de capital dos países emergentes, entre eles o Brasil. No caso particular dos Estados Unidos, a expectativa para o mercado de ações não era das melhores, dados os crescentes sinais da desaceleração da economia americana e do “estouro da bolha” das empresas de alta tecnologia.

No cenário interno, esperava-se um ambiente turbulento, como consequência principalmente das eleições presidenciais e da forte possibilidade de vitória de um candidato de esquerda, o que geraria desconfiança dos mercados e incentivaria a fuga de capitais do país. Entretanto, era vista no banco como mais provável a vitória do candidato do governo, o que deveria restaurar em parte a confiança no país e a

tranquilidade dos mercados, revertendo assim no final de 2002 a deterioração observada durante o ano.

Dentro desse cenário, temos a expectativa para cada ativo estudado:

- Para os fundos DI, a expectativa era de uma queda moderada da taxa Selic ao longo do ano, fazendo com que a rentabilidade média dos papéis indexados ao CDI ficasse em 16,87%.
- Para os fundos prefixados, é preciso observar o prazo médio dos papéis que fazem parte da carteira do fundo. Tendo em vista as recentes deteriorações do cenário externo e as turbulências eleitorais que provavelmente decorreriam da eleição presidencial no final do ano, o gestor do fundo decidiu encurtar o prazo médio dos papéis prefixados que compõe o fundo de 18 para 6 meses, de forma a adotar uma postura mais defensiva. Assim, ao analisarmos a rentabilidade esperada do fundo prefixado, devemos pensar em papéis prefixados com prazo de 180 dias. Para estes papéis, a expectativa de rentabilidade do banco ao longo de 2002 é de 20%, não muito maior que a expectativa para os papéis DI pós-fixados em virtude do prazo relativamente curto de 6 meses.
- Para os fundos cambiais, deve-se levar em conta dois fatores. O primeiro deles é a taxa de câmbio. No dia 2 de janeiro de 2002, a taxa de câmbio era de R\$ 2,3066 / US\$. A expectativa do banco era de que, dadas as tensões explicitadas na descrição do cenário, a taxa de câmbio encerrasse o ano no patamar de R\$ 2,80 / US\$. Assim, a rentabilidade de um investimento em dólar seria de $(2,80 - 2,3066) / 2,3066 = 21,4\%$. Além disso, é preciso também levar em conta o cupom cambial (a taxa de juros paga pelo papel, além da indexação ao dólar). Para o prazo de 6 meses, a expectativa do banco era de que o cupom cambial pagasse 8% ao longo de 2002. Assim, a rentabilidade esperada do fundo cambial em 2002 é igual a $((1 + 21,4\%) \times (1 + 8\%)) - 1 = 31,1\%$.

- Para o Ibovespa, que iniciou o ano em 13.872 pontos, a expectativa era de uma rentabilidade moderada, em torno de 15% ao longo de 2002, encerrando o ano em 15.953 pontos.
- Para o Dow Jones Industrial Average, a expectativa também não era das mais otimistas, de uma rentabilidade de 5% no ano, em dólar. Levando-se em conta uma valorização esperada do dólar frente o real de 21,4%, explicada anteriormente, o rendimento esperado do Dow Jones em reais para 2002 é de $((1+5\%) \times (1+21,4\%)) - 1 = 27,5\%$.
- Para os Treasury Notes, a expectativa era de uma queda gradual nas taxas de juros, devido à provável decisão do *Federal Reserve* (Banco Central americano) de cortar as taxas de juros para reanimar a economia ao longo de 2002. Assim, a expectativa era de que estes papéis pagassem uma taxa média de juros em 2002 de 4,5%. Convertendo-se essa taxa para reais, obtemos uma rentabilidade de $((1+4,5\%) \times (1+21,4\%))-1 = 26,9\%$.
- Finalmente, para o C-Bond, a expectativa diante do aumento da aversão ao risco e das turbulência eleitorais era de uma queda acentuada, que seria porém revertida, na opinião do banco, pela vitória do candidato governista, fazendo com que o papel encerrasse o ano com uma rentabilidade total igual a zero. Assim, a rentabilidade de um investimento em C-Bond seria igual à rentabilidade esperada do dólar no ano, de 21,4%.

6. ANÁLISE DOS RESULTADOS

6.1 A Carteira Ingênua

Para mostrar a superioridade de seu modelo, Markowitz o comparou com portfólios criados utilizando o que ele chamou de “diversificação ingênua”, ou seja, carteiras nas quais o total de ativos era distribuído de forma uniforme entre um determinado número de ativos disponíveis, método bastante utilizado na época para a diminuição do risco.

Em uma primeira etapa, será feita a análise da performance de uma carteira ingênua onde os recursos do cliente sejam igualmente distribuídos entre os sete ativos disponíveis, 14,29% em fundo DI, 14,29% em fundo prefixado, 14,29% em fundo cambial, 14,29% em fundo Ibovespa, 14,29% em fundo Dow Jones, 14,29% em fundo de T-Notes de longo prazo e 14,29% em fundo de investimento em C-Bonds:

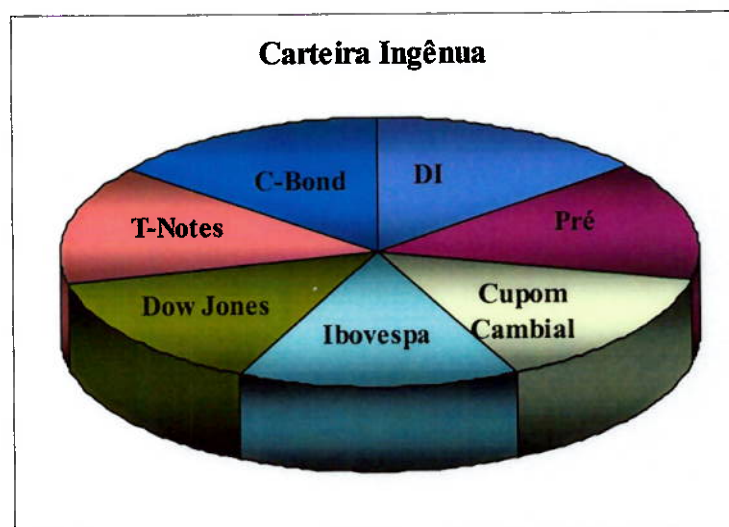


Figura 5: A carteira ingênua

Com base nas estimativas expressas no tópico anterior, de acordo com o cenário previsto pelo banco, pode-se calcular a rentabilidade esperada desta carteira

ingênua, calculada pela rentabilidade esperada de cada ativo ponderada por sua participação na carteira, de acordo com a equação (1):

$$14,29\% \times 16,87\% + 14,29\% \times 20,00\% + 14,29\% \times 31,10\% + 14,29\% \times 15,00\% + 14,29\% \times 27,50\% + 14,29\% \times 26,90\% + 14,29\% \times 21,40\% = 22,68\%$$

Assim, a rentabilidade esperada desta carteira ingênua é de 22,68%. Já seu risco deve ser calculado pela equação (2):

$$\begin{aligned} Var &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} \\ &= x_1 x_1 \sigma_{11} + 2x_1 x_2 \sigma_{12} + 2x_1 x_3 \sigma_{13} + \dots + 2x_1 x_n \sigma_{1n} + \dots + x_n x_n \sigma_{nn} \end{aligned}$$

O que leva, utilizando os dados das tabelas 23, 24 e 25, a um desvio padrão de 7,52 %.

Resta agora determinar se, utilizado o modelo de Markowitz, pode-se obter outra carteira que apresente um risco menor do que o da carteira ingênua, mantendo a mesma rentabilidade. Analogamente, seria possível procurar por uma carteira com o mesmo risco mas com rentabilidade maior que a da carteira ingênua. Utilizando o Solver do Excel da forma descrita em “Metodologia de Resolução”, obtém-se a seguinte carteira:

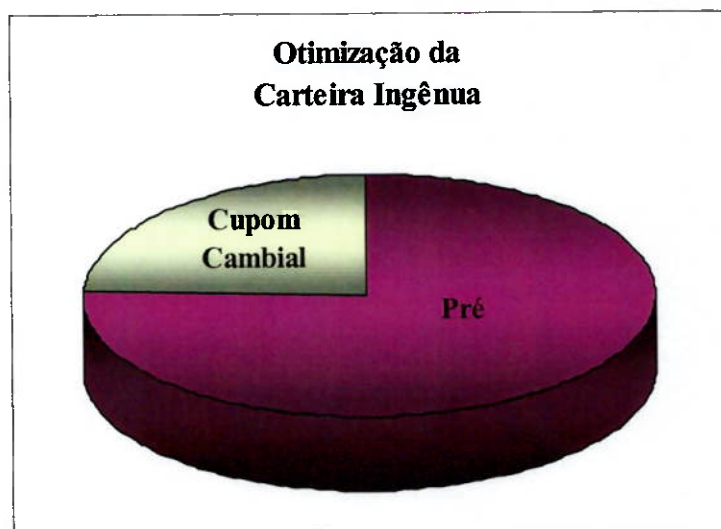


Figura 6: Otimização da carteira ingênua

Com a seguinte composição: 75,84% do total de recursos em fundos prefixados e 24,16% em papéis cambiais, e 0% nos demais ativos. Utilizando-se as mesmas fórmulas, conclui-se que esta carteira possui a mesma rentabilidade esperada que a carteira ingênua, de 22,68%, mas um desvio padrão bem menor, de 2,49%, contra 7,52% na carteira original. É possível assim observar que a carteira obtida pelo modelo de Markowitz “domina” a carteira ingênua, criada pela diversificação sem nenhum critério.

Observa-se também o fato de que o modelo indicou investimento zero em todos os outros ativos, o que parece contrariar a proposta de diversificação do modelo de Markowitz. Tal fato realmente não é característico do modelo de Markowitz, e será melhor estudo mais a frente, quando será feita uma análise de sensibilidade da forma proposta de utilização do modelo.

É compreensível que, para os ativos em dólar, o modelo tenha optado pelos papéis cambiais de 6 meses, que apresentam variância menor que os T-Notes e maior rendimento esperado que os mesmos. Para os ativos em reais, que não sofrem influência da taxa de câmbio, o modelo optou pelos papéis prefixados, por oferecerem boa rentabilidade com relativamente baixo risco. É curioso que o modelo não tenha optado pelo fundo DI, que apresenta o menor risco de todos, uma vez que a idéia é justamente minimizar o risco. Tal fato talvez seja explicado pela baixa correlação do DI com os outros ativos, o que impede a diminuição do risco sistêmico através de correlações fortemente negativas, como aquela existente entre os papéis cambiais e os papéis prefixados, como será mostrado mais adiante na análise de sensibilidade.

Também nota-se que ativos como o Ibovespa, que apresenta o menor rendimento esperado no ano, não precisa necessariamente receber 0% dos recursos, uma vez que a correlação negativa entre dois ativos (por exemplo, o Ibovespa e o Dólar) pode contribuir para diminuir bastante o risco da carteira como um todo, o que poderia levar a recomendações de investimentos em um ativo como o Ibovespa mesmo em um ano em que a rentabilidade esperada do mesmo seja baixa. Entretanto, dada a

grande variância do Ibovespa, o modelo de Markowitz encontrou a solução ótima neste caso investindo a maior parte dos recursos em ativos prefixados.

6.2 A Carteira Intuitiva

Pode-se agora comparar o resultado obtido com a “carteira intuitiva” com aquele obtido pelo modelo de Markowitz. É claro que a carteira intuitiva varia de acordo com cada administrador, mas via de regra o administrador procura, para um cliente com perfil de risco moderado, manter entre 60% e 80% dos recursos em ativos considerados de baixo risco (fundos DI e prefixados) e o restante nos ativos de risco mais alto com as melhores perspectivas de rentabilidade. Para o cenário considerado para 2002, seria obtida uma carteira similar a esta:

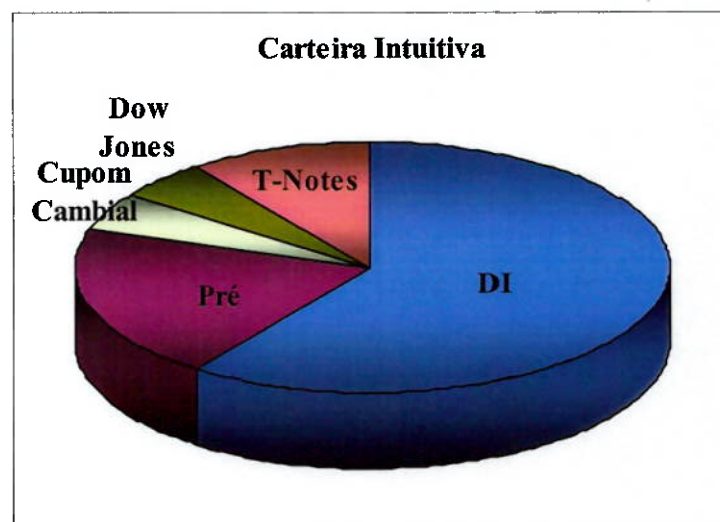


Figura 7: Exemplo de carteira intuitiva

A carteira acima é típica das recomendações que eram feitas no final de 2001 a clientes conservadores, que não desejavam correr muitos riscos mas ao mesmo tempo queriam apostar na alta do dólar. Assim, a maior fatia corresponde a investimentos em fundo DI (60%), para diminuir a exposição ao risco, e a outra grande fatia em fundo prefixado (20%), com rentabilidade esperada um pouco maior mas ainda assim com um patamar de risco bastante moderado. Os 20% restantes dos recursos são destinados à aposta em dólar, de acordo com desejo do cliente e recomendação do analista. Parte destes recursos (5%), é aplicada em papéis cambiais

e, para minimizar a exposição ao risco Brasil, a outra parte vai para fundos de investimento no exterior, sendo 5% em fundos que acompanhem o Dow Jones e 10% em fundos que invistam em T-Notes de longo prazo. O C-Bond foi deixado de fora por apresentar exposição ao risco Brasil e menor rentabilidade esperada que os papéis cambiais de 6 meses. O investimento em Ibovespa foi desprezado graças à baixa rentabilidade esperada para o ano, acompanhada do maior risco dentre os ativos disponíveis.

Com base nas estimativas de retorno esperado, de acordo com o cenário previsto pelo banco, pode-se calcular a rentabilidade esperada desta carteira, calculada pela rentabilidade esperada de cada ativo ponderada por sua participação na carteira, de acordo com a equação (1):

$$60\% \times 16,87\% + 20\% \times 20,00\% + 5\% \times 31,10\% + 0\% \times 15,00\% + 5\% \times 27,50\% + 10\% \times 26,90\% + 0\% \times 21,40\% = 19,74\%$$

Assim, a rentabilidade esperada desta carteira é de 19,74%. Já seu risco deve ser calculado pela equação (2):

$$\begin{aligned} Var &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} \\ &= x_1 x_1 \sigma_{11} + 2x_1 x_2 \sigma_{12} + 2x_1 x_3 \sigma_{13} + \dots + 2x_1 x_n \sigma_{1n} + \dots + x_n x_n \sigma_{nn} \end{aligned}$$

O que leva, utilizando os dados das tabelas 23, 24 e 25, a um desvio padrão de 2,24 %.

Observa-se que, em relação a carteira ingênua do item anterior, esta carteira apresenta rentabilidade esperada menor (19,74%, contra 22,68%), mas ao mesmo tempo houve uma significativa diminuição no desvio padrão, que antes era de 7,52% na carteira ingênua e agora, nesta carteira intuitiva, caiu para 2,24%, o que demonstra que a técnica de diversificação intuitiva utilizada no banco tem seu mérito. Porém, pode-se mostrar que é possível, através do modelo de Markowitz, criar uma carteira

que domine (isto é, com menor risco para a mesma rentabilidade) a carteira criada a partir da intuição dos analistas.

Utilizando o modelo de Markowitz para gerar uma carteira com a mesma rentabilidade esperada (19,74%), obtém-se a seguinte carteira recomendada:

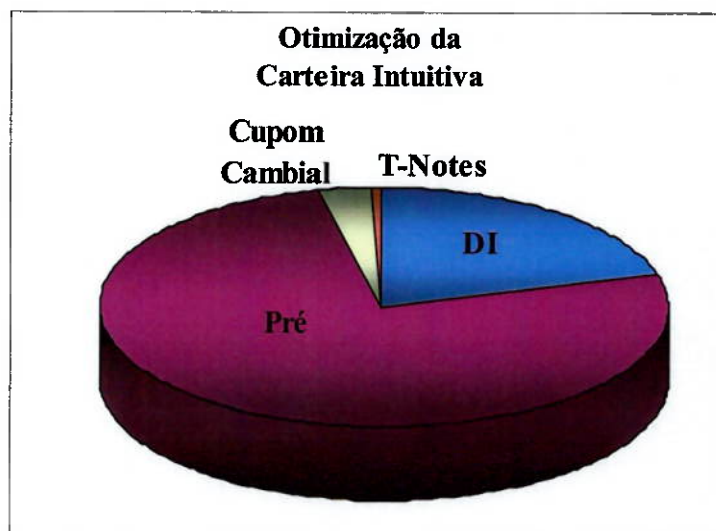


Figura 8: Otimização da carteira intuitiva

O resultado obtido indica o investimento de 76% dos recursos em fundo prefixado, 20,5% em fundo DI, 3% em fundo cambial e 0,5% em T-Notes de longo prazo. Esta carteira possui a mesma rentabilidade esperada de 19,74% que a carteira intuitiva, mas com um desvio padrão menor, de 0,63%, ante 2,24% na anterior.

Assim, esta carteira obtida pelo modelo de Markowitz domina a carteira diversificada de acordo com a intuição do analista. A “diversificação intuitiva” é o método mais freqüentemente utilizado no mercado para a recomendação de alocação de ativos a clientes, e acredita-se que esse método possa ser substituído pelo modelo de Markowitz com grande vantagem.

Cabe notar que, nos dois casos analisados, o modelo indicou investir uma fração significativamente maior dos recursos em fundo prefixado, ao invés de fundo DI, o que é curioso, uma vez que esse é o fundo com o menor risco e portanto

supostamente uma opção interessante para minimizar o risco. Por que isso aconteceu?

Por que no primeiro caso estudado, o DI, o mais seguro dos fundos, não recebeu recomendação de investimentos se a idéia é minimizar o risco? Por que a diversificação da carteira diminuiu se a idéia de modelo de Markowitz é reduzir o risco através da diversificação? Estas questões são melhor analisadas no item seguinte.

6.3 Análise de Sensibilidade

Analisando as variáveis computadas pelo modelo de Markowitz, pode-se perceber que, enquanto o DI apresenta pequena correlação com os outros ativos, o fundo prefixado apresenta correlação negativa com o fundo cambial, o que contribui para a diminuição do risco de uma carteira formada por estes dois ativos, como mostra a tabela 24:

Correlação (ρ)	Pré180	DI	Cupom Cambial	Ibov	Dow Jones	C-Bond	T-Notes 10y
Pré180	100,00%	15,72%	-30,69%	55,19%	-4,95%	18,21%	-31,03%
DI	15,72%	100,00%	-6,22%	8,71%	8,10%	22,42%	-3,74%
Cupom Cambial	-30,69%	-6,22%	100,00%	-9,08%	39,60%	54,40%	74,47%
Ibov	55,19%	8,71%	-9,08%	100,00%	34,41%	42,88%	-15,07%
Dow Jones	-4,95%	8,10%	39,60%	34,41%	100,00%	36,91%	16,55%
C-Bond	18,21%	22,42%	54,40%	42,88%	36,91%	100,00%	51,81%
T-Notes 10y	-31,03%	-3,74%	74,47%	-15,07%	16,55%	51,81%	100,00%

Tabela 24: Correlação entre os ativos considerados

A explicação para essa forte correlação negativa (-30,7%) se dá através do seguinte raciocínio: com uma piora do cenário, o preço do dólar tende a subir, o que aumenta a rentabilidade dos fundos cambiais. Ao mesmo tempo, as taxas de juro que o governo ou empresas brasileiras são obrigadas a pagar por suas dívidas aumenta com o agravamento do cenário. Entretanto, um papel prefixado já contém uma taxa de juro fixa, como diz o próprio nome. Assim, a correção no juro pago pelo papel se dá através de um deságio no seu valor de mercado, de forma que a rentabilidade do fundo prefixado cai quando ocorre um aumento nas taxas de juros prefixadas.

Assim, o risco de uma carteira composta somente por fundos prefixados e cambiais pode ser menor do que o risco de uma carteira que, além desses dois ativos, seja composta também por fundos DI, ainda que o risco do fundo DI seja o menor de todos.

Mas é preciso notar também que a rentabilidade esperada dos papéis cambiais é maior do que a dos papéis DI (20% versus 16,87%). É possível que essa diferença seja o motivo pelo qual o modelo estudado no item 6.1, para a otimização da carteira ingênua, tenha indicado 0% de investimento nos papéis DI e 75,84% nos papéis prefixados.

Para testar qual das duas hipóteses é verdadeira, será feito o exercício de otimização da carteira ingênua proposta no item 6.1, modificando-se inicialmente a rentabilidade do fundo DI e depois sua correlação com os papéis cambiais, de forma que possa ser observado qual dos dois fatores mais influi para a predominância dos papéis prefixados.

Em primeiro lugar, será otimizada a carteira do item 6.1 igualando a rentabilidade do fundo DI a do fundo prefixado (20%). A carteira obtida é mostrada a seguir:

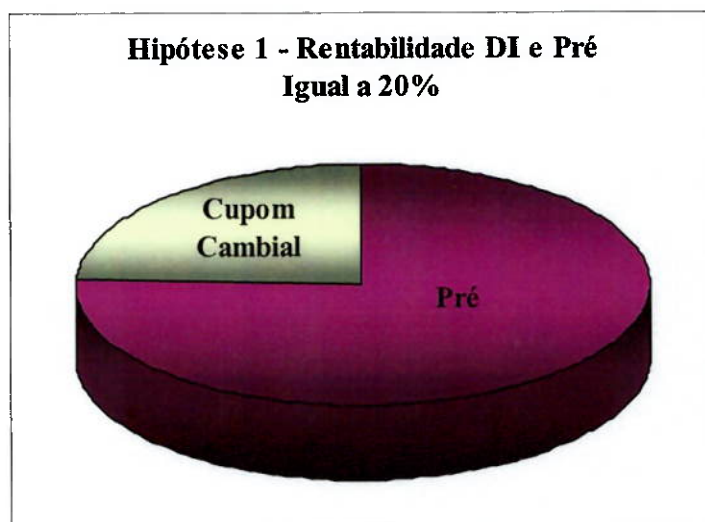


Figura 9: Hipótese 1 – Rentabilidades Iguais

O resultado obtido é rigorosamente idêntico ao do item 6.1, com 0% de investimento em DI e 75,84% em Pré. Esse resultado é de se estranhar, uma vez que o fundo DI apresenta variância significativamente menor que o fundo prefixado (0,0000024%, contra 0,0071309%). Se ambos apresentam a mesma rentabilidade esperada (20%), não seria razoável supor que o modelo indicaria o investimento em DI e não em Pré?

Assim, a resposta deve estar na terceira variável essencial para o modelo de Markowitz, a covariância (ou, de forma análoga, a correlação) entre cada par de ativos. Essa foi a grande contribuição de Markowitz para a Moderna Teoria dos Portfólios, a constatação de que correlações negativas entre dois ativos poderiam contribuir significativamente para a diminuição do risco total da carteira.

Para testar essa hipótese, será agora alterada a correlação entre o fundo DI e o fundo cambial, de forma a igualar a covariância entre os dois fundos e entre os fundos prefixado e cambial (fazendo ambas iguais a $-0,028\%$) e mantendo-se iguais as rentabilidades esperadas de ambos (em 20%).

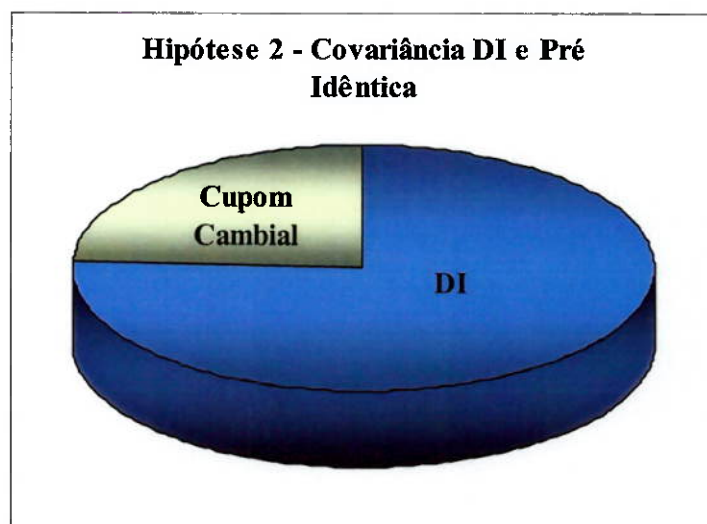


Figura 10: Hipótese 2 – Covariâncias iguais

Observa-se aqui uma troca entre o prefixado e o DI, uma vez que, tendo a mesma covariância e retorno, o DI tem a vantagem de apresentar menor variância. Nesta nova carteira, o desvio padrão diminui para 2,41%, ante 2,49% na original. Porém, se mantida a covariância original entre o fundo DI e o fundo cambial, de

0,00002%, o risco total desta carteira sobe para 2,61%, demonstrando assim que o fato de o fundo pré e o fundo cambial apresentarem correlação e covariância fortemente negativa é a razão pela qual a carteira ótima opta pelo prefixado ao invés do DI, ainda que a variância do DI seja menor.

7. CONCLUSÃO

As carteiras obtidas obviamente não são a alternativa mais rentável para o cliente, pois a melhor alternativa seria simplesmente aplicar 100% dos recursos no ativo que apresentar a melhor rentabilidade no período considerado. Entretanto, tendo em vista as claras dificuldades em predizer qual a melhor alternativa de investimento, dado o grande número de fatores imprevisíveis possíveis de ocorrer em qualquer horizonte de tempo, a alternativa de ponderar cada investimento levando em conta sua suscetibilidade histórica a eventos imprevisíveis, bem como a correlação historicamente observada entre os diferentes ativos, pode reduzir em muito o risco da carteira como um todo. Isso significa obter uma carteira que, embora não tenha a maior rentabilidade esperada possível, possua uma rentabilidade esperada com menor variância, ou seja, com maior probabilidade de apresentar rentabilidade próxima àquela esperada pelo analista.

O ponto fraco do modelo é aquele inerente a qualquer operação no mercado financeiro, a impossibilidade de prever o futuro com um grau elevado de certeza. Assim, embora a variância e a correlação histórica sejam um bom indicativo da variância e da correlação futura, o mesmo não pode ser dito sobre a rentabilidade esperada. Prova disso é a observação empírica, como citado na introdução deste trabalho, de que, após um semestre no qual a bolsa apresentou rentabilidade de 30%, a probabilidade de que isso se repita no semestre seguinte não é significativa a ponto de ser um indicativo de rentabilidade futura melhor do que as previsões de um analista experiente.

Dessa forma, a eficácia da metodologia aqui proposta depende fortemente na capacidade do analista de inferir corretamente as tendências do mercado para determinar com alguma precisão a rentabilidade esperada de cada ativo. Mesmo que o analista se equivoque em seu julgamento, o modelo de Markowitz contribui para reduzir o desvio total da carteira em relação à rentabilidade esperada, de forma mais

precisa do que uma carteira intuitiva. Isso porque a variância histórica de cada ativo é um bom indicativo da suscetibilidade do ativo a eventos imprevistos, e portanto da probabilidade de erro do analista (Ex.: Papéis pós-fixados apresentam variância pequena e, portanto, a probabilidade de acerto de sua rentabilidade futura é maior do que a do Ibovespa, que apresenta elevada variância).

Da mesma forma, a correlação histórica entre dois ativos tende a se manter, o que permite que a variação negativa de um ativo seja compensado pela variação positiva do outro ativo (Ex.: É observado historicamente que o Ibovespa e a cotação do dólar se movem em sentidos opostos, em períodos suficientemente longos). Assim, com um cálculo correto dos riscos pelo método de Markowitz, é possível diminuir o risco total de uma carteira para um patamar menor que o risco sistêmico, utilizando ativos com correlação negativa.

O fato de o modelo de Markowitz utilizar a medida de correlação entre os ativos como forma de diminuir o risco total de uma carteira foi amplamente demonstrado aqui e foi fator determinante na sua escolha dentre as alternativas analisadas.

Mostrou-se neste Trabalho de Formatura a possibilidade de criação de carteiras “dominantes” em relação as carteiras usualmente criadas com base na intuição dos analistas do banco. Com base nestes resultados, o modelo de Markowitz, na forma como foi aqui apresentado, teve ótima aceitação na instituição bancária em questão e a implementação da metodologia aqui proposta já foi iniciada, e deve virar o procedimento padrão do banco a partir de 2003.

8. BIBLIOGRAFIA

ALEXANDER, GORDON J. & SHARPE, WILLIAM F.: **Investments**. New Jersey, Prentice Hall, 1990.

BREALEY, R. & MYERS, S.: **Principles of Corporate Finance**. New York, McGraw Hill, 1981.

CARSWELL, J.: **The South Sea Bubble**. Cresset Press, 1960.

DIAS, F.: **Programação Quadrática Aplicada à Teoria Moderna de Finanças**. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística – Universidade de São Paulo, 2001.

ELTON, E. J. & GRUBER, M. J.: **Modern Portfolio Theory and Investment Analysis**. John Wiley & Sons Inc, 1991.

FORTUNA, EDUARDO: **Mercado Financeiro: produtos e serviços**. Rio de Janeiro, Qualitymark Editora, 1996.

FRANCIS, J.: **Investments: Analysis and Management**. New York, McGraw-Hill, 1991.

FREUND, J.E.: **Modern Elementary Statistics**. New Jersey, Prentice Hall, 1967.

HAZELL, P.B.R. & NORTON, R.D. **Mathematical Programming for Economic Analysis in Agriculture**. London:Mcmillan, 1986.

HOMER, SYDNEY: **A History of Interest Rates**. New Jersey, Rutgers University Press, 1977.

HOUAISS, ANTÔNIO & VILLAR, MAURO DE SALLES.: **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro, Objetiva, 2001.

JENKINS,A.: **The Stock Exchange History**. Heinemann, 1973.

JENKS, L.H.: **The migration of British Capital to 1875**. Nelson, 1963.

KNIGHT, FRANK H.: **Risk, Uncertainty and Profit**. Harper Torch Books, 1957.

KOK-LAY, T. et al.: **Portfolio Optmization Under a Minimax Rule**. Management Science, Vol.46, No. 7, 2000.

MARKOWITZ, HARRY M.: **Portfolio Selection**. Journal of Finance, volume 7, 1952.

MARKOWITZ, H. **Portfólio Selection: Efficient Diversification Of Investments** New York, John Wiley,1959.

VON NEUMAN, J. & MORGENSTERN, O. **Theory of games and economic behavior**. Princeton University Press. 1947.

WILSON, CHARLES: **Anglo-Dutch Commerce and Finance in the Eighteenth Century**. Cambridge Press, 1941.

WOLFE, P.: **The Simplex Method for Quadratic Programming**, Econometrica 27, 1959.

9. APÊNDICES

- **Apêndice I** – Artigo mencionado no Trabalho de Formatura na íntegra, publicado na revista Management Science, Vol. 46, No 7, julho de 2000, de autoria de Xiaoqiang Cai, Kok-Lay Teo, Xiaoqi Yang e Xun Yu Zhou, intitulado **Portfolio Optimization Under a Minimax Rule**

- **Apêndice II** – Métodos para Resolver o Problema Quadrático: o Algoritmo de Wolfe

Apêndice I – Artigo mencionado no Trabalho de Formatura na íntegra, publicado na revista Management Science, Vol. 46, No 7, julho de 2000, de autoria de Xiaoqiang Cai, Kok-Lay Teo, Xiaoqi Yang e Xun Yu Zhou, intitulado **Portfolio Optimization Under a Minimax Rule**

Portfolio Optimization Under a Minimax Rule

Xiaoqiang Cai • Kok-Lay Teo • Xiaoqi Yang • Xun Yu Zhou

Department of Systems Engineering and Engineering Management,

The Chinese University of Hong Kong, Shatin, N.T., Hong Kong

Department of Applied Mathematics, The Hong Kong Polytechnic University, Kowloon, Hong Kong

Department of Applied Mathematics, The Hong Kong Polytechnic University, Kowloon, Hong Kong

Department of Systems Engineering and Engineering Management,

The Chinese University of Hong Kong, Shatin, N.T., Hong Kong

xqcai@se.cuhk.edu.hk • mateokl@polyu.edu.hk • mayangxq@polyu.edu.hk • xyzhou@se.cuhk.edu.hk

This paper provides a new portfolio selection rule. The objective is to minimize the maximum individual risk and we use an l_∞ function as the risk measure. We provide an explicit analytical solution for the model and are thus able to plot the entire efficient frontier. Our selection rule is very conservative. One of the features of the solution is that it does not explicitly involve the covariance of the asset returns.

(Portfolio Selection; Risk Averse Measures; Bicriteria Piecewise Linear Program; Efficient Frontier; Kuhn-Tucker Conditions)

1. Introduction

The portfolio selection problem is of both theoretical and practical interest. Markowitz (1952) laid the foundations for this line of research with his mean-variance (M-V) model. While Markowitz used the portfolio variance as a risk measure, other risk definitions have been proposed. Konno (1990) and Konno and Yamazaki (1991) used the mean absolute deviation as their risk measure. The mean absolute deviation corresponds to an l_1 function, whereas the variance corresponds to an l_2 function. In this paper we propose a more conservative portfolio selection rule whereby the investor minimizes the maximum risk of the individual assets. This risk measure corresponds to an l_∞ function.

The classic M-V model can be solved analytically for the efficient frontier (see Merton 1972) when short selling is permitted. It has been found that the composition of the optimal portfolio can be very sensitive to estimation errors in the expected returns of the underlying assets; see Chopra and Ziemba

(1998), Hensel and Turner (1998), Chopra et al. (1992) and Best and Grauer (1991a, 1991b, 1992). In the case of large-scale optimization problems the relationships between the inputs and the optimal portfolio tends to be obscured (Best and Grauer 1991a). Our model provides a clear connection between the expected returns of the assets and their importance in the optimal portfolio. Under our decision rule there are two steps in the solution. First we rank the individual assets in terms of their expected returns and risks. Second, we compute the optimal properties based on the information contained in the rankings. The ranking rule consists of inequalities among the expected returns. This enables us to see more clearly how the composition of the portfolio varies. There are two important differences between our model and conventional models, such as the M-V model. In our model we do not allow for short selling. We impose this restriction to obtain a simple analytical solution. It is a weakness of the model. In our model correlations among the

assets are not taken into account. This is in contrast to the M-V approach where diversification helps to reduce risk. However, we argue that total portfolio risk—under the conventional definition—will be kept small if our risk measure is kept small. In some respects our approach is related to that of Young (1998). In both models there is no short selling and the asset correlations do not enter explicitly into the solutions. The main differences are:

(i) Our model minimizes the expected absolute deviation of the future returns from their mean while Young's model maximises the minimum portfolio return over a set of past returns.

(ii) Young's solution involves linear programming whereas we are able to provide an analytical solution.

2. A New Risk Measure Based on l_∞

In this section, we introduce our risk measure and formulate the corresponding portfolio optimization problem with this measure. Assume that an investor has initial wealth M_0 , which is to be invested in n possible assets S_j , $j = 1, \dots, n$. Let R_j be the return rate of the asset S_j , which is a random variable. Let $x_j \geq 0$ be the allocation from M_0 for investment to S_j . (Note that by assuming $x_j \geq 0$ we are concerned with the situation where short selling is not allowed). Thus, the feasible region for the portfolio optimization problem is

$$\mathcal{F} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : \sum_{j=1}^n x_j = M_0, x_j \geq 0, \right. \\ \left. j = 1, \dots, n \right\}. \quad (2.1)$$

Let $E(R)$ denote the mathematical expectation of a random variable R . Define

$$r_j = E(R_j) \quad \text{and} \quad q_j = E(|R_j - r_j|).$$

Namely, r_j and q_j denote the expected return rate of the asset S_j and the expected absolute deviation of R_j from its mean, respectively.

The expected return of a portfolio $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ is given by

$$r(x_1, \dots, x_n) = E \left[\sum_{j=1}^n R_j x_j \right] \\ = \sum_{j=1}^n E(R_j) x_j = \sum_{j=1}^n r_j x_j. \quad (2.2)$$

The l_∞ measure we propose is defined as follows.

DEFINITION 2.1. The l_∞ risk function¹ is defined as

$$w_\infty(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq j \leq n} E(|R_j x_j - r_j x_j|). \quad (2.3)$$

Let $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$. Then $w_\infty(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq j \leq n} E(|R_j - E(R_j)|) x_j = \max_{1 \leq j \leq n} q_j x_j$. This function is explicitly known if the distribution of each random variable R_j is given. For example, if R_j is normally distributed, then it is easy to verify (see Konno and Yamazaki 1991) that

$$w_\infty(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_j x_j, \quad (2.4)$$

where σ_j is the standard deviation of R_j . Historical data can also be used to estimate r_j and q_j .

We assume that investors wish to maximize expected return while minimizing their risk level. This is an optimization problem with two criteria in conflict. Under the l_∞ risk measure as defined above, our portfolio optimization problem can be formulated as a bicriteria piecewise linear program as follows, which is denoted as POL_∞ (the Portfolio Optimization problem with the l_∞ risk measure).

DEFINITION 2.2. The bicriteria portfolio optimization problem POL_∞ under the l_∞ risk measure is formulated as:²

$$\text{Minimize} \quad \left(\max_{1 \leq j \leq n} q_j x_j, - \sum_{j=1}^n r_j x_j \right) \\ \text{subject to} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{F},$$

where a feasible portfolio $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{F}$ is said

¹ See, for example, Başer and Bernhard (1995), for more discussion on the l_∞ notation and other related minimax measures.

² Minimize (A, B) indicates that A and B are the two criteria to be minimized.

to be efficient if there exists no $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{F}$ such that

$$\max_{1 \leq j \leq n} q_j y_j \leq \max_{1 \leq j \leq n} q_j x_j, \quad \sum_{j=1}^n r_j y_j \geq \sum_{j=1}^n r_j x_j,$$

and at least one of the inequalities holds strictly. Accordingly, the function value $(\max_{1 \leq j \leq n} q_j x_j, -\sum_{j=1}^n r_j x_j)$ is said to be an efficient point.

In words, an efficient point is such that there exists no solution better than it with respect to both criteria. The efficient frontier is the collection of all efficient points.

By a simple transformation, one can show that POL_∞ is equivalent to the following Bicriteria Linear Programming (BLP) problem

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} \quad \left(y, -\sum_{j=1}^n r_j x_j \right) \\ &\text{subject to} \quad q_j x_j \leq y, \quad j = 1, \dots, n, \\ &\quad \quad \quad x \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Now we convert the bicriteria linear programming problem BLP into a parametric optimization problem with a single criterion. For a fixed λ , where $0 < \lambda < 1$, the Parametric Optimization problem of BLP, denoted as $\text{PO}(\lambda)$, is as follows:

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} \quad F_\lambda(x, y) = \lambda y + (1 - \lambda) \left(-\sum_{j=1}^n r_j x_j \right) \\ &\text{subject to} \quad q_j x_j \leq y, \quad j = 1, \dots, n, \\ &\quad \quad \quad x \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

The equivalence relation between BLP and $\text{PO}(\lambda)$ is given below (cf. Yu 1974 for proof).

PROPOSITION 2.1. Consider the problems BLP and $\text{PO}(\lambda)$. The pair (x, y) is an efficient solution of BLP if and only if there exists a $\lambda \in (0, 1)$ such that (x, y) is an optimal solution of $\text{PO}(\lambda)$.

One can think of λ as an investor's risk tolerance parameter—the larger the λ , the more risk the investor

is to tolerate. Because of the equivalence between POL_∞ and BLP, there exists the same equivalence relationship between POL_∞ and $\text{PO}(\lambda)$. Thus, an optimal solution for $\text{PO}(\lambda)$ gives, accordingly, an efficient solution for POL_∞ . To obtain the efficient frontier of POL_∞ , one has to know the optimal solutions of $\text{PO}(\lambda)$ for all $\lambda \in (0, 1)$.

In §3 and §4 below, we will show that an optimal solution for $\text{PO}(\lambda)$ can be derived analytically, and consequently the whole efficient frontier of POL_∞ can also be determined analytically.

3. A Simple Optimal Investment Strategy

Consider the problem $\text{PO}(\lambda)$ with a given $\lambda \in (0, 1)$. Note that the parameters $r_j = E(R_j)$ and $q_j = E(|R_j - E(R_j)|)$, $j = 1, 2, \dots, n$, are constants in $\text{PO}(\lambda)$.

We assume that

$$r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n. \quad (3.1)$$

Furthermore, to avoid ambiguity, we assume that there do not exist two assets S_i and S_j , $i \neq j$, such that $r_i = r_j$ and $q_i = q_j$ (if such two assets do exist in the original problem, we may treat them as a single aggregate asset).

3.1. All Assets Are Risky

In this subsection we consider the case where all the assets are risky. We present our main result and provide some discussion of its meaning.

THEOREM 3.1. For any $\lambda \in (0, 1)$, an optimal solution to $\text{PO}(\lambda)$ is given by

$$x_j^* = \begin{cases} \frac{M_0}{q_j} \left(\sum_{i \in \mathcal{T}^*(\lambda)} \frac{1}{q_i} \right)^{-1}, & j \in \mathcal{T}^*(\lambda), \\ 0, & j \notin \mathcal{T}^*(\lambda); \end{cases} \quad (3.2)$$

$$y^* = M_0 \left(\sum_{i \in \mathcal{T}^*(\lambda)} \frac{1}{q_i} \right)^{-1}, \quad (3.3)$$

where $\mathcal{T}^*(\lambda)$ is the set of assets to be invested, which is determined by the following rule:

(a) If there exists an integer $k \in [0, n - 2]$ such that

$$\frac{r_n - r_{n-1}}{q_n} < \frac{\lambda}{1 - \lambda}, \quad (3.4)$$

$$\frac{r_n - r_{n-2}}{q_n} + \frac{r_{n-1} - r_{n-2}}{q_{n-1}} < \frac{\lambda}{1 - \lambda}, \quad (3.5)$$

$$\frac{r_n - r_{n-k}}{q_n} + \frac{r_{n-1} - r_{n-k}}{q_{n-1}} + \dots + \frac{r_{n-k+1} - r_{n-k}}{q_{n-k+1}} < \frac{\lambda}{1 - \lambda}, \quad (3.6)$$

and

$$\frac{r_n - r_{n-k-1}}{q_n} + \frac{r_{n-1} - r_{n-k-1}}{q_{n-1}} + \dots + \frac{r_{n-k+1} - r_{n-k-1}}{q_{n-k+1}} + \frac{r_{n-k} - r_{n-k-1}}{q_{n-k}} \geq \frac{\lambda}{1 - \lambda}, \quad (3.7)$$

then

$$\mathcal{T}^*(\lambda) = \{n, n-1, \dots, n-k\}. \quad (3.8)$$

(b) Otherwise, if the condition above is not satisfied by any integer $k \in [0, n-2]$, then

$$\mathcal{T}^*(\lambda) = \{n, n-1, \dots, 1\}. \quad (3.9)$$

The proof of this theorem is given in Appendix A. We now discuss the meaning of the results by examining how changes in the portfolio affect its expected return and risk.

Suppose we have a portfolio x^0 , in which $x_j^0 > 0$ if $j \in \mathcal{T}^0$ and $x_j^0 = 0$ if $j \notin \mathcal{T}^0$. Namely, $\mathcal{T}^0(\lambda)$ is the set of assets to be invested. Assume there is an asset S_h that is not included in $\mathcal{T}^0(\lambda)$. We will now analyse how the performance of the portfolio will change if the allocation x_h to the asset S_h is increased. Let us construct a new portfolio x' as follows:

$$x'_j = \begin{cases} x_j^0 - \Delta_j, & \text{if } j \in \mathcal{T}^0(\lambda); \\ \Delta_h, & \text{if } j = h; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.10)$$

Further, suppose y^0 is the corresponding risk of the portfolio x^0 (that is, (x^0, y^0) constitutes a solution for the problem $\text{PO}(\lambda)$). We construct a new solution (x', y') for $\text{PO}(\lambda)$ by creating x' as above and setting

$$y' = y^0 - \Delta_y. \quad (3.11)$$

To meet the constraints of the problem $\text{PO}(\lambda)$, we should have

$$\sum_{i=1}^n x'_i = \sum_{i=1}^n x_i^0 - \sum_{j \in \mathcal{T}^0(\lambda)} \Delta_j + \Delta_h = M_0,$$

$$x'_j q_j = (x_j^0 - \Delta_j) q_j \leq y^0 - \Delta_y, \quad \text{for } j \in \mathcal{T}^0(\lambda),$$

$$x'_h q_h = \Delta_h q_h \leq y^0 - \Delta_y.$$

Thus, we can choose Δ_j , Δ_h and Δ_y as positive numbers satisfying

$$\Delta_h = \sum_{j \in \mathcal{T}^0(\lambda)} \Delta_j, \quad (3.12)$$

$$\Delta_j = \frac{\Delta_y}{q_j}, \quad j \in \mathcal{T}^0(\lambda), \quad (3.13)$$

$$\Delta_h = (y^0 - \Delta_y) / q_h. \quad (3.14)$$

Recall $F_\lambda(x, y)$ is the objective function of the problem $\text{PO}(\lambda)$. We have

$$\begin{aligned} F_\lambda(x', y') &= \lambda(y^0 - \Delta_y) - (1 - \lambda) \sum_{j \in \mathcal{T}^0(\lambda)} r_j(x_j^0 - \Delta_j) \\ &\quad - (1 - \lambda)r_h \Delta_h \\ &= F_\lambda(x^0, y^0) - \lambda \Delta_y + (1 - \lambda) \sum_{j \in \mathcal{T}^0(\lambda)} r_j \Delta_j \\ &\quad - (1 - \lambda)r_h \sum_{j \in \mathcal{T}^0(\lambda)} \Delta_j \\ &= F_\lambda(x^0, y^0) - \Delta_F, \end{aligned} \quad (3.15)$$

where

$$\Delta_F = \lambda \Delta_y - (1 - \lambda) \sum_{j \in \mathcal{T}^0(\lambda)} r_j \Delta_j + (1 - \lambda) \sum_{j \in \mathcal{T}^0(\lambda)} r_h \Delta_j. \quad (3.16)$$

It is easy to see that in the above equation, $\{\lambda \Delta_y\}$ indicates the decrease in the risk, $\{(1 - \lambda) \sum_{j \in \mathcal{T}^0(\lambda)} r_j \Delta_j\}$ is the decrease in the expected return due to the decreases in the allocations to the assets $j \in \mathcal{T}^0(\lambda)$, and $\{(1 - \lambda) \sum_{j \in \mathcal{T}^0(\lambda)} r_h \Delta_j\}$ indicates the increase in the expected return due to the addition of the asset S_h to the set of assets to be invested.

From (3.13), we can rewrite (3.16) as

$$\Delta_F = \left\{ \lambda - (1 - \lambda) \sum_{j \in \mathcal{T}^0(\lambda)} \frac{r_j - r_h}{q_j} \right\} \Delta_y. \quad (3.17)$$

Define $\mathcal{T}_a = \{j: j \in \mathcal{T}^0(\lambda) \text{ and } r_j > r_h\}$ and $\mathcal{T}_b = \{j:$

$j \in \mathcal{T}^0(\lambda)$ and $r_j < r_h$. Then, (3.17) can be rewritten as

$$\Delta_F = \Delta_F^a + \Delta_F^b, \quad (3.18)$$

where

$$\Delta_F^a = \left\{ \lambda - (1 - \lambda) \sum_{j \in \mathcal{T}_a} \frac{r_j - r_h}{q_j} \right\} \Delta_{y'}, \quad (3.19)$$

and

$$\Delta_F^b = \left\{ (1 - \lambda) \sum_{j \in \mathcal{T}_b} \frac{r_h - r_j}{q_j} \right\} \Delta_{y'}. \quad (3.20)$$

We now have the following few scenarios.

Case 1: $\Delta_F^a > 0$. From (3.19), we can see that $\Delta_F^a > 0$ means that the decrease in the risk value, $\{\lambda \Delta_{y'}\}$, is greater than the decrease in the net expected return. This together with $\Delta_F^b \geq 0$ gives us $\Delta_F > 0$. Thus, it follows from (3.15) that $F_\lambda(x', y') < F_\lambda(x^0, y^0)$. This means that the portfolio x^0 can still be improved if the asset S_h is included into the set of assets to be invested. This justifies (3.6).

Case 2: $\Delta_F^a \leq 0$ and the set $\mathcal{T}_b$ is empty. In this case, $\Delta_F = \Delta_F^a \leq 0$. This means that increasing the allocation for the asset S_h will either result in a decrease in the net expected return that is greater than the decrease in the risk value (if $\Delta_F^a < 0$), or yield no benefit (if $\Delta_F^a = 0$). Hence, the asset S_h should not be included in the set of assets to be invested. This justifies (3.7).

Case 3: $\Delta_F^a \leq 0$ and the set $\mathcal{T}_b$ is not empty. As $\mathcal{T}_b$ is not empty, there must exist at least one element $m \in \mathcal{T}_b$ such that $r_m < r_h$. We can show, following a similar idea as above (that is, altering the portfolio by removing the asset S_m and then increasing the allocations to other assets accordingly), that in this case the asset S_m should not be included in the set $\mathcal{T}^0(\lambda)$ for investment. This, together with the observation that the asset S_m must meet the condition (3.7) (this is because $r_m < r_h$ and $\Delta_F^a \leq 0$), justifies (3.7).

The above gives a justification of the ranking rule of Theorem 3.1. We now provide several remarks regarding the optimal portfolio as determined by the theorem.

REMARK 3.1. It may be a bit surprising to observe that the investment strategy given by Theorem 3.1

always suggests including those assets with higher return rates first. In other words, an asset with a higher return rate should always be considered before an asset with a lower return rate is considered for selection. The reason for this apparently counterintuitive result is that the actual amount invested in a particular asset also depends on the risk of that asset. Hence, it is possible that the actual investment to an asset with a high return rate is nearly zero, even if it may have been selected according to the rules given by Theorem 3.1. To see this more clearly, consider an example which we assume satisfies $(r_n - r_{n-1})/q_n < \lambda/(1 - \lambda)$ and $(r_n - r_{n-2})/q_n + (r_{n-1} - r_{n-2})/q_{n-1} \geq \lambda/(1 - \lambda)$. Thus, it follows from Theorem 3.1 that an optimal investment strategy is to select assets S_n and S_{n-1} only. Further, according to Theorem 3.1, the actual amounts of investment for the assets will be respectively:

$$x_n^* = \frac{M_0}{q_n(1/(q_{n-1}) + 1/q_n)} = \frac{M_0}{q_n/(q_{n-1}) + 1}, \quad \text{and} \quad (3.21)$$

$$x_{n-1}^* = \frac{M_0}{q_{n-1}(1/(q_{n-1}) + 1/q_n)} = \frac{M_0}{1 + (q_{n-1})/q_n}. \quad (3.22)$$

Clearly, if q_n is much greater than q_{n-1} , then it is possible that x_n^* is nearly zero while x_{n-1}^* is nearly equal to M_0 .

The optimal strategy as described in Theorem 3.1 is a two-phase decision. In the first phase, the assets are selected according to their return rates. Then in the second phase, the actual amounts allocated to those selected assets are determined based on their risks. When the transaction cost for investing an asset is taken into consideration, a very small allocation of funding to the asset may mean that it should in fact be omitted. Thus, under the investment strategy of Theorem 3.1, an asset may be eliminated in either Phase 1 or Phase 2. In Phase 1, it may be eliminated if its return rate is too low, while in Phase 2, it may also be eliminated if its risk is too high.

REMARK 3.2. The optimal investment strategy given by Theorem 3.1 has the property that $x_j^* q_j = y^*$ for all $j \in \mathcal{T}^*(\lambda)$ (and $x_j^* = 0$ for all $j \notin \mathcal{T}^*(\lambda)$). This means that, for the assets selected for investment, we

shall invest them with the amounts such that they have the same risk y^* (note that $E(|R_j x_j - r_j x_j|) = q_j x_j$ represents the risk of investing an amount x_j in asset S_j ; see Definition 2.1). Note that our problem under the l_∞ measure is to minimize the maximum individual risk, namely, $w_\infty(x) = \max_{1 \leq j \leq n} E(|R_j x_j - r_j x_j|)$. Theorem 3.1 implies that to achieve this objective, an optimal investment strategy should invest the assets in such a way that their risks are equal. One can see that, if this is not the case, that is, there exists some asset whose risk is less than that of another asset, then the allocation to this asset can be increased. Such a change of allocation will not increase the maximum risk, while the overall expected return will be increased (for details, see the proof of Lemma 4.1 in §4—the part on the inefficiency of the solution (x^*, y^*) if the risks of the assets selected under (x^*, y^*) are unequal).

REMARK 3.3. Another property of the optimal portfolio given by Theorem 3.1 is that the amounts of x_j^* , $j \in \mathcal{T}^*(\lambda)$, do not depend on the return rates r_j , as long as the set $\mathcal{T}^*(\lambda)$ is selected. This indicates that the expected return rates determine the set of investable assets, but do not influence the magnitudes of the allocations. This property does not seem to exist in portfolio solutions under other models such as the classic M-V model. Why is this a sensible property? The answer is: (i) the information of the expected return rates is exploited already in the selecting rules of Theorem 3.1 when determining the set of investable assets; and (ii) after the assets selected for investment have been determined using the selecting rules, how to minimize the risk of the investment will become the major concern. Under our model, the maximum individual risk is to be minimized. As we discussed above, to achieve this goal, a sensible way is to have all the assets invested carrying the same risk. This leads to the allocations that are independent of the expected return rates.

REMARK 3.4. It is easy to see from Theorem 3.1 that a case where we invest all fund M_0 in a single asset is when

$$\frac{r_n - r_{n-1}}{q_n} \geq \frac{\lambda}{1 - \lambda}. \quad (3.25)$$

Nevertheless, it should be noted that there exist other cases where almost all the fund M_0 should be invested in a single asset. See Remark 3.1 above. A case where all the fund is invested in a single riskless asset will be further addressed in §3.2 below.

REMARK 3.5. Note that the case where we will select all the assets S_j , $j = 1, 2, \dots, n$, for investment is when Condition (3.7) is not satisfied by any $0 \leq k \leq n - 2$. In this case, $\mathcal{T}^*(\lambda) = \{n, n - 1, \dots, 2, 1\}$ and the proportions of the assets in the efficient portfolio are given by (3.2). More specifically, if we assume $M_0 = 1$, from (3.2) we have

$$x_i^* = \frac{1/q_i}{\sum_{k=1}^n 1/q_k}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.26)$$

There exists an interesting relationship³ between this portfolio and the global minimum variance (GMV) portfolio under the M-V model (see, e.g., Haugen 1997). This is analysed as follows.

Suppose the variance of asset S_i is σ_i^2 , $i = 1, 2, \dots, n$, and assume that the assets are uncorrelated. In this case we can show that the proportions of the assets, $x_i^\diamond$, in the GMV portfolio are given below:

$$x_i^\diamond = \frac{1/\sigma_i^2}{\sum_{k=1}^n 1/\sigma_k^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.27)$$

Moreover, in the situation when the asset returns are normal, we have $q_i = \sqrt{(2/\pi)} \sigma_i$ (see (2.4)), and thus (3.26) can be rewritten as

$$x_i^* = \frac{1/\sigma_i}{\sum_{k=1}^n 1/\sigma_k}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.28)$$

This has a clear analogy with (3.27). Under our model, the efficient portfolio uses $1/\sigma$, while in the M-V model, the GMV portfolio uses $1/\sigma^2$.

REMARK 3.6. In recent years, it has been shown (see Chopra and Ziemba 1998, Hensel and Turner 1998, Chopra et al. 1992, and Best and Grauer 1991a, 1991b, 1992) that the composition of an efficient M-V portfolio can be extremely sensitive to errors in problem inputs. In particular, it has been found that errors in

³ We are very grateful to Professor P. P. Boyle, the department editor for Finance, for pointing out this relationship. The material here has been based on a note kindly provided by him.

the asset means can be much more damaging than errors in other parameters. Therefore, a similar question we may face is how sensitive the solution of our model could be to changes in the asset means. We now discuss this question. Assume that $m = n - k - 1$ is the asset that satisfies the Condition (3.7). In other words, $\mathcal{T}^*(\lambda) = \{n, n-1, \dots, m+1\}$ and asset S_m is the first one excluded from the set $\mathcal{T}^*(\lambda)$ (see Theorem 3.1). Let us analyse the following three categories of assets, where δ_i denotes a perturbation of r_i .

(a) *On the assets S_j with $j < m$:* All these assets are not selected for investment by Theorem 3.1. Furthermore, this solution remains unchanged as long as $r_j + \delta_j \leq r_m$. This means that the optimal portfolio is unchanged as long as the perturbations are within the following ranges:

$$-\infty \leq \delta_j \leq r_m - r_j, \quad \text{for } j < m. \quad (3.29)$$

(b) *On the asset S_m :* Clearly, if (i) $r_m + \delta_m \leq r_{m+1}$ and (ii)

$$\frac{r_n - r_m - \delta_m}{q_n} + \frac{r_{n-1} - r_m - \delta_m}{q_{n-1}} + \dots + \frac{r_{m+1} - r_m - \delta_m}{q_{m+1}} \geq \frac{\lambda}{1 - \lambda},$$

then the optimal portfolio is unchanged. Let $\zeta_m = \sum_{k=m+1}^n (r_k - r_m)/q_k - \lambda/(1 - \lambda)$. Then, to satisfy the above two conditions, it is sufficient for us to have

$$-\infty \leq \delta_m \leq \min \left\{ \frac{\zeta_m}{\sum_{k=m+1}^n 1/q_k}, r_{m+1} - r_m \right\}. \quad (3.30)$$

(c) *On the assets S_j with $j > m$:* Let $\zeta_j = \lambda/(1 - \lambda) - \sum_{k=j+1}^n (r_k - r_j)/q_k$, for $j > m$. Bear in mind that we want to determine an interval for δ_j such that the conditions of Theorem 3.1 remain satisfied. After some development, we can show that a sufficient condition is as follows:

$$\max \left\{ \frac{-\zeta_j}{\sum_{k=j}^n 1/q_k}, -\zeta_m q_j, r_{j-1} - r_j \right\} \leq \delta_j \leq \min \{ \zeta_{m+1} q_j, r_{j+1} - r_j \}, \quad \text{if } j > m+1; \quad (3.31)$$

$$\max \left\{ \frac{-\zeta_j}{\sum_{k=j}^n 1/q_k}, -\zeta_m q_j, r_{j-1} - r_j \right\} \leq \delta_j \leq r_{j+1} - r_j, \quad \text{if } j = m+1. \quad (3.32)$$

In summary, the analysis above indicates that if the

perturbation δ_i of an asset mean r_i is within the interval of (3.29)–(3.32), then the optimal portfolio under our model will remain unchanged. Note that (3.29)–(3.32) are sufficient conditions, and in many cases these may not be satisfied at all (but the portfolio may still remain unchanged if they are not satisfied). Generally speaking, because the ranking rule for selecting the assets to be invested under our model is given by a set of inequalities (3.4)–(3.7), our model exhibits some robustness against errors in the problem inputs.

On the other hand, we should emphasize that our model can also be quite sensitive in some cases to errors of the problem parameters, such as the means. To illustrate, let us consider an example in which there are three assets with estimated means $r_1 < r_2 < r_3$. Suppose $(r_3 - r_2)/q_3 < \lambda/(1 - \lambda)$ and $(r_3 - r_1)/q_3 + (r_2 - r_1)/q_2 \geq \lambda/(1 - \lambda)$. Then, by Theorem 3.1, we choose Assets 2 and 3 and $x_1^* = 0$, $x_2^* = q_3/(q_2 + q_3)$, and $x_3^* = q_2/(q_2 + q_3)$. Further, suppose q_2 is much greater than q_3 . Then, $x_2^* \approx 0$, and $x_3^* \approx M_0$. However, there is an error in r_1 and the actual mean r'_1 of Asset 1 satisfies $r_2 < r'_1 < r_3$ and $(r_3 - r'_1)/q_3 < \lambda/(1 - \lambda)$ and $(r_3 - r_2)/q_3 + (r'_1 - r_2)/q_1 \geq \lambda/(1 - \lambda)$. In this case, we should actually choose Assets 1 and 3 and the portfolio should be: $x_2^{**} = 0$, $x_1^{**} = q_3/(q_1 + q_3)$, and $x_3^{**} = q_1/(q_1 + q_3)$. Further, suppose q_3 is much greater than q_1 . Then, $x_1^{**} \approx M_0$, and $x_3^{**} \approx 0$. In this example, an error in the estimation of r_1 has changed the portfolio almost completely.

3.2. Inclusion of a Riskless Asset

We now consider the case where there exists a riskless asset. Without loss of generality, we may assume that this riskless asset has the lowest return, namely, $i = 1$ (recall our Assumption (3.1) and note that all risky assets could be eliminated from consideration if their returns are not greater than that of the riskless asset).

Under the assumption above, we have $q_1 = 0$. To generalize the result in §3.1, we first assume that $q_1 = \epsilon > 0$, where ϵ is a sufficiently small number. We then obtain our result by letting $\epsilon \rightarrow 0^+$. Let us now consider the following two cases.

Case 1. According to the rule given in Theorem 3.1 (with $q_1 = \epsilon > 0$), we find that $1 \notin \mathcal{T}^*(\lambda)$. In this case,

it is obvious that the optimal solution for $PO(\lambda)$ as given in Theorem 3.1 is unchanged.

Case 2. According to the rule given in Theorem 3.1 (with $q_1 = \epsilon > 0$), we find that $1 \in \mathcal{T}^*(\lambda)$. In this case, the optimal solution for $PO(\lambda)$ becomes

$$\begin{aligned} x_j^* &= 0, \quad \forall j \notin \mathcal{T}^*(\lambda), \\ x_j^* &= \frac{M_0}{q_j} \left(\frac{1}{\epsilon} + \sum_{l=n-k, l \neq 1}^n \frac{1}{q_l} \right)^{-1}, \quad j \in \mathcal{T}^*(\lambda), \\ y^* &= M_0 \left(\frac{1}{\epsilon} + \sum_{l=n-k, l \neq 1}^n \frac{1}{q_l} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Letting $\epsilon \rightarrow 0^+$, we obtain $x_j^* = 0$ for all $j > 1$, $x_1^* = M_0$ and $y^* = 0$.

Clearly, the case where the riskless asset S_1 is selected into the set $\mathcal{T}^*(\lambda)$ for investment happens only when

$$\frac{r_n - r_1}{q_n} + \frac{r_{n-1} - r_1}{q_{n-1}} + \dots + \frac{r_2 - r_1}{q_2} < \frac{\lambda}{1 - \lambda}. \quad (3.33)$$

Combining Case 1 with Case 2 above, we have the following result.

THEOREM 3.2. *Given any $\lambda \in (0, 1)$. If (3.33) is not satisfied, then the set $\mathcal{T}^*(\lambda)$ of assets to be selected should be determined by (3.4)–(3.8) and the optimal solution should be computed by (3.2) and (3.3). Otherwise, if (3.33) is satisfied, the optimal investment strategy should be to invest all fund M_0 in the riskless asset (where $y^* = 0$).*

4. Tracing Out the Efficient Frontier

We now discuss how to determine the efficient frontier of the problem POL_∞ . Corresponding to the results in §3.1 and §3.2 respectively, let us carry out our analysis in the following two subsections.

4.1. No Riskless Assets Are Involved

First, define:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{q_n} + \frac{1}{q_{n-1}} + \dots + \frac{1}{q_{n-k+1}}, \\ k &= 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{r_n - r_{n-k}}{q_n} + \frac{r_{n-1} - r_{n-k}}{q_{n-1}} + \dots + \frac{r_{n-k+1} - r_{n-k}}{q_{n-k+1}}, \\ k &= 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (4.2)$$

It is easy to verify that

$$\begin{cases} \beta_k = \beta_{k-1} + \alpha_k(r_{n-k+1} - r_{n-k}), \\ k = 1, 2, \dots, n-1 \\ \beta_0 = 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

where α_k can be computed by the following recursive relation:

$$\begin{cases} \alpha_k = \alpha_{k-1} + \frac{1}{q_{n-k+1}}, & k = 1, 2, \dots, n-1 \\ \alpha_0 = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

It is clear that (3.4)–(3.7) reduce to determining an integer $k \in [0, n-2]$ such that:

$$\begin{aligned} \beta_1 &< \frac{\lambda}{1 - \lambda}, \quad \dots, \quad \beta_k < \frac{\lambda}{1 - \lambda}, \\ \beta_{k+1} &\geq \frac{\lambda}{1 - \lambda}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Because $q_j = E(|R_j - E(R_j)|) > 0$ for any j , $\alpha_k > 0$ for $k = 1, 2, \dots, n-1$ (see (4.4)). Thus, noting that $r_j \leq r_{j+1}$ for $j = 1, 2, \dots, n-1$, we know that

$$\beta_0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_{n-1}. \quad (4.6)$$

Therefore, the Conditions (4.5) reduce to:

$$\beta_k < \frac{\lambda}{1 - \lambda}, \quad \beta_{k+1} \geq \frac{\lambda}{1 - \lambda}, \quad (4.7)$$

Or, equivalently,

$$\frac{\beta_k}{1 + \beta_k} < \lambda \leq \frac{\beta_{k+1}}{1 + \beta_{k+1}}. \quad (4.8)$$

Letting

$$\underline{\lambda}_k = \frac{\beta_k}{1 + \beta_k} \quad \text{and} \quad \bar{\lambda}_k = \frac{\beta_{k+1}}{1 + \beta_{k+1}}, \quad (4.9)$$

we see that the Conditions (4.5) (or (3.4)–(3.7)) are further equivalent to

$$\lambda \in (\underline{\lambda}_k, \bar{\lambda}_k]. \quad (4.10)$$

Bear in mind that we want to determine the efficient

frontier, namely, all the efficient points, corresponding to all possible $\lambda \in (0, 1)$. Recall Theorem 3.1. Given an integer $k \in [0, n - 2]$, it is clear that for all values of λ in an interval $(\underline{\lambda}_k, \bar{\lambda}_k]$, the set $\mathcal{T}^*(\lambda)$ of assets selected for investment remains unchanged, and thus the optimal solution of $\text{PO}(\lambda)$ as given by (3.2) and (3.3) remains unchanged. According to the discussions in §2, such a solution corresponds to an efficient point of POL_∞ . Now the question is whether there exist other efficient points for $\lambda \in (\underline{\lambda}_k, \bar{\lambda}_k]$. This is equivalent to asking whether there exist other optimal solutions for $\text{PO}(\lambda)$ when $\lambda \in (\underline{\lambda}_k, \bar{\lambda}_k]$.

Our main idea to analyse the efficient frontier consists of the following arguments:

(1) For all $\lambda \in (\underline{\lambda}_k, \bar{\lambda}_k)$, the solution given by (3.2) and (3.3) is the *unique* optimum for $\text{PO}(\lambda)$. Thus, there is only one efficient point for POL_∞ .

(2) For $\lambda = \bar{\lambda}_k$, there are *multiple* efficient points for POL_∞ , which, however, can be determined analytically.

The following two lemmas establish these arguments respectively. For notational convenience, we let $\bar{\lambda}_{n-1} = 1$ below.

LEMMA 4.1. *For any $k = 0, 1, \dots, n - 1$, if $\lambda \in (\underline{\lambda}_k, \bar{\lambda}_k)$, then the solution given by (3.2) and (3.3) is the unique optimal solution for $\text{PO}(\lambda)$.*

The proof of this lemma is given in Appendix B.

By substituting (3.2) and (3.3) into the objective functions of POL_∞ (Definition 2.2), one can see that, corresponding to the solution (x^*, y^*) for $\lambda \in (\underline{\lambda}_k, \bar{\lambda}_k)$, the efficient point of the problem POL_∞ is equal to

$$P_k^* = (y^*, z^*), \quad (4.11)$$

where y^* is given by (3.3), while

$$z^* = -M_0 \left(\sum_{l \in \mathcal{T}^*(\lambda)} \frac{r_l}{q_l} \right) \left(\sum_{l \in \mathcal{T}^*(\lambda)} \frac{1}{q_l} \right)^{-1}. \quad (4.12)$$

Using the notation above, we have

LEMMA 4.2. *For any $k = 0, 1, \dots, n - 2$, if $\lambda = \bar{\lambda}_k$, then $(y^* - \Delta_y, z^* + \Delta_y \bar{\lambda}_k / (1 - \bar{\lambda}_k))$, where*

$$0 \leq \Delta_y \leq \frac{y^*}{1 + \sum_{j \in \mathcal{T}^*(\lambda)} (q_{n-k-1}) / q_j}, \quad (4.13)$$

is an efficient point of the problem POL_∞ .

The proof of this lemma is given in Appendix C.

REMARK 4.1. From Lemma 4.2 and its proof we can see that any solutions which select the assets in $\mathcal{T}^*(\bar{\lambda}_k)$ as well as the asset $l = n - k - 1$ are optimal to $\text{PO}(\lambda)$. The inclusion of an asset which is not in $\mathcal{T}^*(\bar{\lambda}_k)$ decreases the total return, which, however, also reduces the risk. If $\lambda \neq \bar{\lambda}_k$ for $0 \leq k < n - 2$ or $\lambda \in (\bar{\lambda}_{n-2}, 1)$, then such a solution will be dominated by the solution given by (3.2) and (3.3) (Lemma 4.1 implies this fact). However, if $\lambda = \bar{\lambda}_k$ for $0 \leq k \leq n - 2$, the reduction in risk (with a weight equal to $\bar{\lambda}_k$) is just balanced by the reduction in total return (with a weight equal to $1 - \bar{\lambda}_k$), and thus generates an undominated (efficient) point.

In summary, we have the following result on the efficient frontier.

THEOREM 4.1. *The efficient frontier of the problem POL_∞ can be determined by considering n intervals $(\underline{\lambda}_k, \bar{\lambda}_k)$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, as well as $n - 1$ endpoints $\bar{\lambda}_k$, $k = 0, 1, \dots, n - 2$. Specifically, the efficient frontier consists of*

(1) *the efficient point (y^*, z^*) corresponding to each $(\underline{\lambda}_k, \bar{\lambda}_k)$ with $k = 0, 1, \dots, n - 1$, where y^* and z^* are given by (3.3) and (4.12) respectively; and*

(2) *the multiple efficient points $(y^* - \Delta_y, z^* + \Delta_y \bar{\lambda}_k / (1 - \bar{\lambda}_k))$ corresponding to each $\bar{\lambda}_k$ with $k = 0, 1, \dots, n - 2$, where Δ_y is governed by (4.13).*

4.2. Riskless Assets Are Involved

Similar to §3.2, we assume, without loss of generality, that there is only one riskless asset S_{i_0} ; namely, $q_j > 0$ for $j \neq i_0$ and $q_{i_0} = 0$.

According to Theorem 3.2, the optimal solution for $\text{PO}(\lambda)$ is to allocate all fund M_0 to the riskless asset S_{i_0} when (3.22) is satisfied, i.e., $\beta_{n-i_0} < \lambda / (1 - \lambda)$. This is equivalent to $\lambda \in (\underline{\lambda}_{n-i_0}, 1)$. In this case, it is easy to see that any other solution with an $x_k > 0$ (and thus $x_{i_0} < M_0$), where $k < i_0$, will be worse than the solution with $x_k = 0$ and $x_{i_0}^* = M_0$ (because $r_k \leq r_{i_0}$ but $q_k > q_{i_0} = 0$, any reallocation of the fund M_0 from the asset S_{i_0} to the asset S_k will increase the objective function value of $\text{PO}(\lambda)$). This means that the optimal solution for $\text{PO}(\lambda)$ is unique when $\lambda \in (\underline{\lambda}_{n-i_0}, 1)$.

When $\lambda \notin (\underline{\lambda}_{n-i_0}, 1)$, the asset S_{i_0} is not selected by

the rule of Theorem 3.1 and the relevant analysis in §4.2 above is still valid. Therefore, we have

THEOREM 4.2. *The efficient frontier of the problem POL_x can be determined by considering $n - i_0 + 1$ intervals $(\lambda_k, \bar{\lambda}_k)$, $k = 0, 1, \dots, n - i_0 - 1$, and $(\lambda_{n-i_0}, 1)$, as well as $n - i_0$ endpoints $\bar{\lambda}_k$, $k = 0, 1, \dots, n - i_0 - 1$. Specifically, the efficient frontier consists of*

(1) *the efficient point (y^*, z^*) corresponding to each $(\lambda_k, \bar{\lambda}_k)$ with $k = 0, 1, \dots, n - i_0 - 1$ or $(\lambda_{n-i_0}, 1)$ with $k = n - i_0$, where y^* and z^* are given by (3.3) and (4.12) respectively; and*

(2) *the multiple efficient points $(y^* - \Delta_y, z^* + (\bar{\lambda}_k/(1 - \bar{\lambda}_k))\Delta_y)$ corresponding to each $\bar{\lambda}_k$ with $k = 0, 1, \dots, n - i_0 - 1$, where Δ_y is governed by (4.13).*

5. Total Portfolio Risk and Covariances

At first sight, it seems that neither our new risk measure $w_*(x)$, nor the optimal solution derived, depends on the covariances between assets. Also, it seems that only the risks of the individual assets, rather than the risk of the entire portfolio, are taken care of. This feature of our approach is in marked contrast to the conventional approach which explicitly takes account of the covariances between the assets.

We should point out here that the total portfolio risk is in fact contained in our model, albeit in an implicit way. To be more specific, we will show in the following that the total portfolio risk is bounded above by our risk criterion $w_*(x)$.

It is well known that the total portfolio risk is usually modeled as a kind of *deviation* of the actual total return from the expected total return. For example, in Markowitz's M-V model, the total portfolio risk is defined to be the variance as follows:

$$w_2(x) = E \left[\sum_{j=1}^n R_j x_j - \sum_{j=1}^n r_j x_j \right]^2, \quad (5.1)$$

which is the expected squared deviation of the actual total return $\sum_{j=1}^n R_j x_j$ from the expected total return $\sum_{j=1}^n r_j x_j$. Now, instead of considering the expectation of the deviation, let us consider the probability that

this deviation is greater than a prespecified level, namely, $P(|\sum_{j=1}^n r_j x_j - \sum_{j=1}^n R_j x_j| \geq \xi)$, where ξ is a given positive number. Clearly, to make this probability as small as possible is also a way to ensure the deviation of the actual total return from the expected total return as small as possible. This is an alternative measure of the total portfolio risk. By using the Markov inequality (cf. e.g., Leon-Garcia 1994, p. 137), one can obtain

$$\begin{aligned} P \left(\left| \sum_{j=1}^n r_j x_j - \sum_{j=1}^n R_j x_j \right| \geq \xi \right) \\ \leq \frac{1}{\xi} E \left[\left| \sum_{j=1}^n R_j x_j - \sum_{j=1}^n r_j x_j \right| \right] \\ \leq \frac{1}{\xi} \sum_{j=1}^n E |R_j - r_j| x_j \leq \frac{n}{\xi} w_*(x). \end{aligned} \quad (5.2)$$

The above inequality indicates that the total portfolio risk is bounded by $w_*(x)$ multiplied by a constant n/ξ which is independent of the choice of the portfolios. The total portfolio risk will be small if $w_*(x)$ is kept small (nevertheless, it may not be true the other way around).

The analysis above shows that the total portfolio risk is compressed by the risk $w_*(x)$, and what we propose to do is to minimize $w_*(x)$. Note that the covariances among assets are involved in the total portfolio risk. Nevertheless, we do not have to deal with the covariances directly. The advantage of doing so is obvious even from the implementation point of view: The optimal investment strategy under our model is much easier to compute and implement, and the whole efficient frontier is also much easier to construct.

An interesting question is how the compositions of the portfolios under the I_* model and the M-V model would change, and compare to each other, when the assets to be invested have different degree (or tightness) of correlations. To examine this question, we will now consider a simple example which contains two assets. Let $\sigma_1^2 = E[(R_1 - r_1)^2]$, $\sigma_2^2 = E[(R_2 - r_2)^2]$, and $\text{COV}(R_1, R_2) = E[(R_1 - r_1)(R_2 - r_2)]$. Further, let ρ be the correlation coefficient; that is, define ρ

= $\text{COV}(R_1, R_2)/(\sigma_1\sigma_2)$. Then, the M-V model can be formulated as follows:

$$\text{Minimize } (w_2(x), -(r_1x_1 + r_2x_2)) \quad (5.3)$$

$$\text{subject to } x_1 + x_2 = M_0, \quad (5.4)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad (5.5)$$

where $w_2(x)$ is the variance of the total portfolio (see (5.1) above). In this two-asset problem, one can see that $w_2(x) = \sigma_1^2x_1^2 + \sigma_2^2x_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2x_1x_2$. Introducing a parameter τ , where $0 < \tau < 1$, we can convert the above bicriteria problem to a parametric optimization problem as follows:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & \tau(\sigma_1^2x_1^2 + \sigma_2^2x_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2x_1x_2) \\ & - (1 - \tau)(r_1x_1 + r_2x_2) \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\text{subject to } x_1 + x_2 = M_0, \quad (5.7)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (5.8)$$

Denote the optimal solution for the above problem as $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ ($\hat{x}$ corresponds to an efficient point for the multicriteria model given by (5.3)–(5.5); cf. Yu 1974). Applying Kuhn-Tucker conditions, after some simplification we can obtain the following results:

(a) Let $A_1 = (\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)M_0 + ((1 - \tau)/2\tau)(r_1 - r_2)$ and $A_2 = (\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)M_0 + ((1 - \tau)/2\tau)(r_2 - r_1)$. If $A_1 > 0$ and $A_2 > 0$, then

$$\hat{x}_1 = \frac{A_1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}, \quad (5.9)$$

$$\hat{x}_2 = \frac{A_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}; \quad (5.10)$$

(b) If $A_1 \leq 0$, then $\hat{x}_1 = 0$ and $\hat{x}_2 = M_0$;

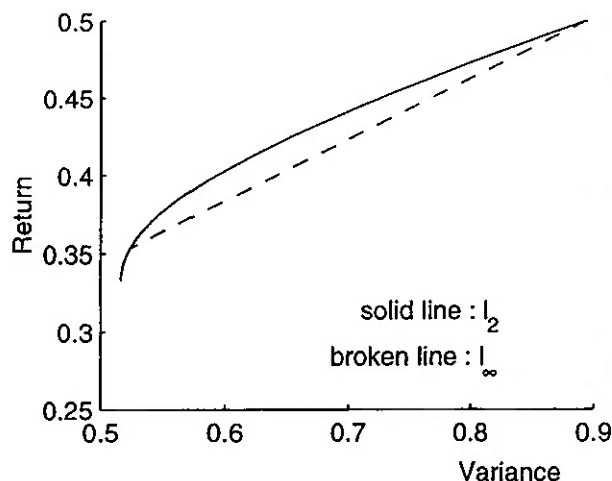
(c) If $A_2 \leq 0$, then $\hat{x}_1 = M_0$ and $\hat{x}_2 = 0$.

Now, let us consider the following two cases.

Case 5.1. $\rho = 0$, namely, assume that the two assets are not correlated. Moreover, assume that the parameters in this case have been so chosen that the two assets are all selected under both the I_∞ and the M-V models. It follows from (5.9) and (5.10) that

$$\hat{x}_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} M_0 + \left(\frac{1 - \tau}{2\tau} \right) \left(\frac{r_1 - r_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right), \quad (5.11)$$

Figure 5.1 Efficient Frontiers of I_2 and I_∞ Models in M-V Space ($r_1 = 0.5, r_2 = 0.25$)



$$\hat{x}_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} M_0 + \left(\frac{1 - \tau}{2\tau} \right) \left(\frac{r_2 - r_1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right). \quad (5.12)$$

On the other hand, it is easy to see from Theorem 3.1 that

$$x_1^* = \frac{q_2}{q_1 + q_2} M_0, \quad (5.13)$$

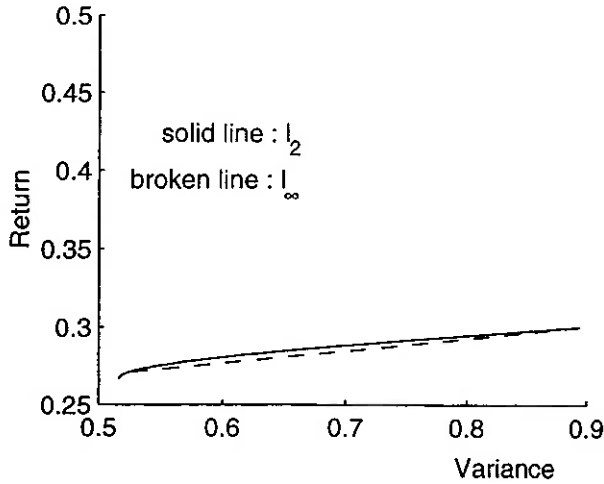
$$x_2^* = \frac{q_1}{q_1 + q_2} M_0. \quad (5.14)$$

Note that the role of q_i is similar to that of σ_i^2 . Therefore, comparing (5.11) and (5.12) with (5.13) and (5.14), we can see that the relevant solution $\hat{x}_i$ under the M-V model has an additional term (i.e., the term $((1 - \tau)/2\tau)((r_1 - r_2)/(\sigma_1^2 + \sigma_2^2))$ for x_1 and $((1 - \tau)/2\tau)((r_2 - r_1)/(\sigma_1^2 + \sigma_2^2))$ for x_2). This can be regarded as a compensative term, which makes use of the information given by the return rates r_1 and r_2 to fine-tune the portfolio $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$.

The effect of the compensation reduces when the difference between r_1 and r_2 decreases. This argument is illustrated by Figures 5.1 and 5.2, where we show the efficient frontiers of the I_∞ and M-V models,⁴ in the

⁴ In each of the figures, we assumed the two assets follow independent normal distributions, with $\sigma_1^2 = 0.8$, $\sigma_2^2 = 0.4$, and $\rho = 0$. The values of q_1 and q_2 were computed by the relation $q_i = \sqrt{(2/\pi)} \sigma_i$; see (2.4). We altered only the values of r_1 and r_2 in the two figures.

Figure 5.2 Efficient Frontiers of l_2 and l_∞ Models in M-V Space
($r_1 = 0.3, r_2 = 0.25$)



M-V space. The two figures consider respectively the two situations: the difference between r_1 and r_2 is large (Figure 5.1), and small (Figure 5.2). Note that the l_∞ solution is always dominated by the M-V solution in the M-V space, and therefore the efficient frontier of the l_∞ model is always below that of the M-V model. Nevertheless, from the two figures we see that the l_∞ frontier tends to approach the M-V frontier when the difference between r_1 and r_2 decreases.

Case 5.2. $\sigma_1^2 \approx \sigma_2^2 \approx \sigma^2$, namely, assume the variances of the two assets are close to each other. In this case, from (5.9) and (5.10) we have

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &\approx \frac{\sigma^2(1-\rho)M_0}{2\sigma^2(1-\rho)} + \frac{1-\tau}{2\tau} \frac{r_1-r_2}{2\sigma^2(1-\rho)} \\ &= \frac{1}{2} M_0 + \left(\frac{1-\tau}{4\tau\sigma^2} \right) \frac{r_1-r_2}{1-\rho}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_2 &\approx \frac{\sigma^2(1-\rho)M_0}{2\sigma^2(1-\rho)} + \frac{1-\tau}{2\tau} \frac{r_2-r_1}{2\sigma^2(1-\rho)} \\ &= \frac{1}{2} M_0 + \left(\frac{1-\tau}{4\tau\sigma^2} \right) \frac{r_2-r_1}{1-\rho}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Thus, if $\rho \approx 1$, namely, the two assets are highly correlated, the portfolio $\hat{x}$ under the M-V model can be very sensitive to the parameters. It is possible that a small difference in some parameters will cause $\hat{x}$ to allocate all the fund M_0 to an asset (e.g., Asset 1) and

nothing to the other asset. The allocation under the l_∞ model remains as (5.13) and (5.14) (More specifically, $x_1^* \approx x_2^* \approx \frac{1}{2} M_0$, if $q_1 \approx q_2$).

REMARK 5.1. In summary, we have the following observations:

(i) In situations in which the assets have low or no correlations, the allocation to each asset under the M-V model may be further tuned by the information on the return rates. As compared to the portfolio under the l_∞ model, the portfolio under the M-V model may yield a higher return.

(ii) In situations in which the assets are highly correlated and the variances of the assets are close to each other, the generation of a portfolio under the M-V model can be highly sensitive to the parameters. A small error in the estimation of the parameters may result in a totally different portfolio. Nevertheless, in these situations a diversification in the portfolio of the l_∞ model is still maintained—this should be a desirable feature to avoid the risk of generating a wrong portfolio due to some small difference in the parameters.

(iii) A special case of (ii) above is when $\tau = 1$. For the M-V model, this corresponds to the global minimum variance portfolio (see also Remark 3.5). In this case, (5.15) and (5.16) reduce to $\hat{x}_1 \approx \hat{x}_2 \approx \frac{1}{2} M_0$, and now the portfolio under our l_∞ model and that under the M-V model become nearly identical. Since the global minimum variance portfolio is the most conservative solution under the M-V model, this also tends to affirm the argument that our model is a very conservative one.

6. Concluding Remarks

This article addresses the problem of portfolio selection for cautious investors. A portfolio optimization model with a new l_∞ risk measure has been proposed. A simple scheme has been derived, which generates the efficient portfolio under the l_∞ model analytically. We have also shown how the whole efficient frontier of the l_∞ model can be traced out analytically. A simple example is discussed to show the portfolio compositions of the l_∞ model as compared to the M-V model. The analysis indicates that the l_∞ model would be more stable when assets to be invested are highly correlated. Nevertheless, the M-V model may generate

higher returns when the assets have no or low correlations.

The new I_* model and the related techniques are easy to manipulate and implement in practice. For example, our selection of the efficient portfolio is based on a simple ranking rule, which evaluates one asset at a time, to determine whether or not it should be included into the portfolio. This not only allows a portfolio manager to evaluate which of the current assets are investable, but also enables him to assess the impact of the introduction of any new asset on the efficient portfolio. Also, from the ranking rule, a portfolio manager can see the desirable characteristics of those good assets. Besides, our selection of the optimal portfolio does not involve the correlations among stocks. This releases a portfolio manager from the requirement to relate his portfolio selection to those complicated covariance matrices. The whole efficient frontier of our model can be constructed analytically. This is useful, as it makes it easy to examine the various possible trade-offs between return and risk.

As revealed by recent research in the portfolio selection literature, a common problem with portfolio selection models is their sensitivity to errors in problem parameters, particularly in the means. We have shown that, due to the feature that the ranking rule under our model consists of a set of *inequalities*, our model exhibits some robustness to the errors in the problem inputs. Some conditions under which perturbations in the means would not change the efficient portfolio have been given in Remark 3.6. However, the sensitivity analysis in Remark 3.6 is still very brief and preliminary. Moreover, as we have shown in Remark 3.6, in certain situations our model can also be very sensitive to errors in the means. As our model relies heavily on the means, and there is widespread evidence that the means are very difficult to estimate (see the references cited in Remark 3.6), a more thorough sensitivity analysis on the model is an important topic for further research. Both theoretical analysis and computational evaluation should be helpful.

Our model has the restriction that short selling is not allowed, and all of our results have been obtained with this assumption. While it is well known that the

removal of this restriction makes the derivation of an optimal portfolio for the M-V model much easier, it is not clear whether this is also true in our model. As short selling also represents an important class of market situations, it is an interesting topic for further research to investigate how the investment strategy of our model would change if short selling were allowed. Furthermore, it would be more interesting to generalize the model to include the constraints that some x_i are subject to upper bounds U_i , some x_i are subject to lower bounds L_i , and some x_i are subject to no restriction.⁵

⁵ We wish to express our sincere gratitude to Professor Phelim Boyle, the department editor for Finance, who provided many valuable suggestions, including a detailed analysis revealing a relationship of our portfolio to the global minimum variance portfolio under the M-V model, and drew our attention to related work in this area. This has led to significant improvements in the paper. The helpful comments and suggestions from the anonymous referees and Professor Robert Heinkel, former department editor, are also much appreciated. Finally, we gratefully acknowledge the support of an RGC Direct Grant (X. Cai); two research grants from the PolyU Research Committee (K.-L. Teo and X. Q. Yang), and a CUHK Mainline Research Grant (X. Y. Zhou).

Appendix A—Proof of Theorem 3.1

We apply the Kuhn-Tucker (K-T) conditions to PO(λ). First, let us introduce the Lagrangian of PO(λ):

$$L(x, y, \mu, \lambda_0, \gamma) = \lambda y + (1 - \lambda) \left(- \sum_{j=1}^n r_j x_j \right) + \sum_{j=1}^n \mu_j (q_j x_j - y) \\ + \lambda_0 \left(\sum_{j=1}^n x_j - M_0 \right) - \sum_{j=1}^n \gamma_j x_j.$$

Then, the K-T conditions (see, for example, Zeleny 1981) that an optimal solution (x, y) must satisfy can be written as follows:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \lambda - \sum_{j=1}^n \mu_j = 0, \quad (A.1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = -(1 - \lambda)r_j + \mu_j q_j + \lambda_0 - \gamma_j = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (A.2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = M_0, \quad (A.3)$$

$$(q_j x_j - y) \mu_j = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (A.4)$$

$$\gamma_j x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{A.5})$$

$$\mu_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (\text{A.7})$$

Define $\mathcal{T}^*(\lambda) = \{j: \mu_j > 0\}$. We let $x_j = 0$, for $j \notin \mathcal{T}^*(\lambda)$. (This is a conjecture, but we shall show in the following that this is in fact correct in terms of satisfying the K-T conditions.) Then, from (A.4) we have $x_j = y/q_j$, if $j \in \mathcal{T}^*(\lambda)$. Thus, from (A.3) we obtain

$$y = M_0 \left(\sum_{j \in \mathcal{T}^*(\lambda)} \frac{1}{q_j} \right)^{-1}. \quad (\text{A.8})$$

Therefore,

$$x_j = \begin{cases} \frac{M_0}{q_j} \left(\sum_{j \in \mathcal{T}^*(\lambda)} \frac{1}{q_j} \right)^{-1}, & j \in \mathcal{T}^*(\lambda), \\ 0, & j \notin \mathcal{T}^*(\lambda). \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

From (A.5), it follows that if $x_j > 0$, then $\gamma_j = 0$. Thus $\gamma_j = 0$, $\forall j \in \mathcal{T}^*(\lambda)$. For $j \in \mathcal{T}^*(\lambda)$, it is clear from (A.2) that

$$\mu_j = \frac{1}{q_j} [(1-\lambda)r_j - \lambda_0 + \gamma_j] = \frac{1}{q_j} [(1-\lambda)r_j - \lambda_0]. \quad (\text{A.10})$$

This together with (A.1) gives us $\lambda = \sum_{j \in \mathcal{T}^*(\lambda)} (1/q_j) [(1-\lambda)r_j - \lambda_0]$. Therefore,

$$\lambda_0 = \left(\sum_{j \in \mathcal{T}^*(\lambda)} \frac{1}{q_j} \right)^{-1} \left((1-\lambda) \sum_{j \in \mathcal{T}^*(\lambda)} \frac{r_j}{q_j} - \lambda \right). \quad (\text{A.11})$$

Thus, from (A.10),

$$\mu_j = \frac{1}{q_j} \left[(1-\lambda)r_j - \left(\sum_{j \in \mathcal{T}^*(\lambda)} \frac{1}{q_j} \right)^{-1} \times \left((1-\lambda) \sum_{j \in \mathcal{T}^*(\lambda)} \frac{r_j}{q_j} - \lambda \right) \right], \quad j \in \mathcal{T}^*(\lambda), \quad (\text{A.12})$$

and for $j \notin \mathcal{T}^*(\lambda)$,

$$\gamma_j = -(1-\lambda)r_j + \mu_j q_j + \lambda_0 = -(1-\lambda)r_j + \lambda_0. \quad (\text{A.13})$$

Clearly, if one can correctly determine the set $\mathcal{T}^*(\lambda)$ which ensures that μ_j and γ_j as expressed by (A.12) and (A.13) are all nonnegative, then y and x_j as given by (A.8) and (A.9), respectively, will be a solution satisfying all the K-T Conditions (A.1)–(A.7).

Our argument is, if there exists an integer $k \in [0, n-2]$ such that (3.4)–(3.7) hold, then $\mathcal{T}^*(\lambda)$ as given by (3.8) is the set that ensures $\mu_j \geq 0$ and $\gamma_j \geq 0$. The following analysis proves this argument.

By (A.12), it follows that, for any $j \in \mathcal{T}^*(\lambda) = \{n, n-1, \dots, n-k\}$,

$$\begin{aligned} \mu_j &= \left(\sum_{l \in \mathcal{T}^*(\lambda)} \frac{q_l}{q_l} \right)^{-1} \left[(1-\lambda) \sum_{l \in \mathcal{T}^*(\lambda)} \frac{r_l - r_l}{q_l} + \lambda \right] \\ &= \left(\sum_{l \in \mathcal{T}^*(\lambda)} \frac{q_l}{q_l} \right)^{-1} (1-\lambda) \left\{ \left[- \sum_{l=j+1}^n \frac{r_l - r_j}{q_l} + \frac{\lambda}{(1-\lambda)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=n-k}^j \frac{r_l - r_l}{q_l} \right\} > 0, \quad (\text{by (3.6)}). \end{aligned}$$

On the other hand, for $j = 1, 2, \dots, n-k-1$, from (A.13) and (A.10), we have

$$\begin{aligned} \gamma_j &= -(1-\lambda)r_j + \left(\sum_{l \in \mathcal{T}^*(\lambda)} \frac{1}{q_l} \right)^{-1} \left((1-\lambda) \sum_{l \in \mathcal{T}^*(\lambda)} \frac{r_l}{q_l} - \lambda \right) \\ &= \left(\sum_{l \in \mathcal{T}^*(\lambda)} \frac{1}{q_l} \right)^{-1} \left((1-\lambda) \sum_{l \in \mathcal{T}^*(\lambda)} \frac{r_l - r_j}{q_l} - \lambda \right) \\ &\geq \left(\sum_{l \in \mathcal{T}^*(\lambda)} \frac{1}{q_l} \right)^{-1} \left((1-\lambda) \sum_{l \in \mathcal{T}^*(\lambda)} \frac{r_l - r_{n-k-1}}{q_l} - \lambda \right) \\ &\geq 0 \quad (\text{by (3.7)}). \end{aligned}$$

The above shows that the K-T Conditions (A.6) and (A.7) are satisfied. This together with the fact that the solution given by (A.8) and (A.9) with the set $\mathcal{T}^*(\lambda)$ of (3.8) also satisfies (A.1)–(A.5) implies that all the K-T conditions are satisfied.

In the case where there does not exist any integer $k \in [0, n-2]$ such that (3.4)–(3.7) hold, we can show that the solution given by (A.8) and (A.9) with $\mathcal{T}^*(\lambda) = \{n, n-1, \dots, 2, 1\}$, will satisfy all K-T conditions. To do this, we may introduce a dummy asset S_0 with $r_0 = -L$ and $q_0 = L$, where L is a sufficiently large positive number. (K-T conditions can be applied even if some parameters, such as an r_j , are negative). Following a similar analysis to the one above, one can show that all the K-T conditions are satisfied.

In summary, because PO(λ) is a convex programming problem, the K-T conditions become necessary and sufficient for optimality and therefore the solution given by (A.8) and (A.9), or equivalently, (3.2) and (3.3), which has been shown to satisfy all the conditions, is optimal. This completes the proof. $\square$

Appendix B—Proof of Lemma 4.1

We first consider $k = 0, 1, \dots, n-2$. Suppose that (x^0, y^0) , where $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, is an optimal solution for PO(λ). Let $\mathcal{T}^0(\lambda)$ be a set such that $x_j^0 > 0$ if $j \in \mathcal{T}^0(\lambda)$ and $x_j^0 = 0$ if $j \notin \mathcal{T}^0(\lambda)$. We shall first show that, if $\mathcal{T}^0(\lambda) \neq \mathcal{T}^*(\lambda)$ ($\mathcal{T}^*(\lambda)$ is the set determined by Theorem 3.1), then we can find a solution better than (x^0, y^0) which leads to a contradiction. Note that it will be sufficient for us to consider the following two cases.

Case 1. $\mathcal{T}^0(\lambda) \neq \mathcal{T}^*(\lambda)$ and there exists at least one h such that $h \in \mathcal{T}^*(\lambda)$ but $h \notin \mathcal{T}^0(\lambda)$, namely, $x_h^0 = 0$.

In this case, by constructing a solution (x', y') for PO(λ) as (3.10) and (3.11), we can show, after some development, that

$$F_\lambda(x', y') = F_\lambda(x^0, y^0) + \Delta_y(1 - \lambda) \left\{ \left(-\frac{\lambda}{1 - \lambda} + \sum_{j > m} \frac{r_j - r_m}{q_j} \right) - \sum_{j \leq m} \frac{r_m - r_j}{q_j} \right\}. \quad (B.1)$$

Because $\sum_{j > m} ((r_j - r_m)/q_j) < \lambda/(1 - \lambda)$ if $m \in \mathcal{T}^*(\lambda)$ (see (3.4)–(3.6)) and $r_m \geq r_j$ if $j \leq m$, (B.1) gives us $F_\lambda(x', y') < F_\lambda(x^0, y^0)$, implying that a feasible solution (x^1, y^1) exists which is better than the solution (x^0, y^0) . This contradicts the fact that the solution (x^0, y^0) is optimal. This means that we must have $\mathcal{T}^0(\lambda) \supseteq \mathcal{T}^*(\lambda)$. We now consider the following case, the result of which will eliminate the possibility that $\mathcal{T}^0(\lambda) \supset \mathcal{T}^*(\lambda)$.

Case 2. $\mathcal{T}^0(\lambda) \supset \mathcal{T}^*(\lambda)$, namely, there is an m with $x_m^0 > 0$, $m \in \mathcal{T}^0(\lambda)$ but $m \notin \mathcal{T}^*(\lambda)$.

In this case, we can construct a solution (x'', y'') for $\text{PO}(\lambda)$ as follows:

$$x_j'' = \begin{cases} x_j^0 + \Delta_j, & j \in \mathcal{T}^*(\lambda), \\ x_m^0 - \Delta_m, & j = m, \\ x_j^0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$y'' = y^0 + \Delta_y,$$

where Δ_y , Δ_m , and Δ_j are selected to be positive numbers such that

$$\Delta_j = \frac{\Delta_y}{q_j}, \quad j \in \mathcal{T}^*(\lambda), \quad (B.2)$$

$$\Delta_m = \sum_{j \in \mathcal{T}^*(\lambda)} \Delta_j. \quad (B.3)$$

It is not hard to show that the Relations (B.2) and (B.3) together with the feasibility of (x^0, y^0) ensure that (x'', y'') is a feasible solution. Similar to (B.1), one can derive

$$\begin{aligned} F_\lambda(x'' + \Delta_m, y'' + \Delta_y) \\ = F_\lambda(x^0, y^0) - \Delta_y(1 - \lambda) \left(-\frac{\lambda}{1 - \lambda} + \sum_{j \in \mathcal{T}^*(\lambda)} \frac{r_j - r_m}{q_j} \right). \end{aligned} \quad (B.4)$$

Because $\sum_{j \in \mathcal{T}^*(\lambda)} ((r_j - r_m)/q_j) > \lambda/(1 - \lambda)$ (bearing in mind that $\lambda \in (\lambda_m, \bar{\lambda}_m)$), we have $F_\lambda(x'', y'') < F_\lambda(x^0, y^0)$, which is again a contradiction.

Combining the results of Cases 1 and 2, we see that $\mathcal{T}^0(\lambda) = \mathcal{T}^*(\lambda)$, namely, any optimal solution (x^0, y^0) must have the same set of assets selected for investment as that in the solution (x^*, y^*) . After the set $\mathcal{T}^0(\lambda)$ has been fixed, all assets S_j , $j \in \mathcal{T}^0(\lambda)$, should be invested such that their risks are equal, namely, x_j^0 should be determined such that $q_j x_j^0 = y^0$ for all $j \in \mathcal{T}^0(\lambda)$. If this is not true, that is, there exists an asset S_m in $\mathcal{T}^0(\lambda)$ such that $\delta = y^0 - x_m^0 q_m > 0$, then we can increase the allocation to asset S_m by a positive amount Δ_m to construct a new solution (x', y') as follows:

$$x_j' = \begin{cases} x_j^0 - \Delta_j, & j \in \mathcal{T}^0(\lambda) \text{ and } j \neq m, \\ x_j^0 + \Delta_m, & j = m, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$y' = y^0 - \Delta_y,$$

where

$$\Delta_j = \frac{\Delta_y}{q_j}, \quad \forall j \in \mathcal{T}^0(\lambda) - \{m\},$$

$$\Delta_m = \sum_{j \in \mathcal{T}^0(\lambda) - \{m\}} \Delta_j, \quad \text{and}$$

$$\Delta_y = \frac{\delta}{q_m} \left(\sum_{j \in \mathcal{T}^0(\lambda)} \frac{1}{q_j} \right)^{-1}.$$

It is easy to see that such a solution (x', y') is feasible. Similar to the analysis in Case 1 above, we can show that $F_\lambda(x', y') < F_\lambda(x^0, y^0)$.

Clearly, if $\mathcal{T}^0(\lambda) = \mathcal{T}^*(\lambda)$, and $q_j x_j^0 = y^0$ for all $j \in \mathcal{T}^0(\lambda)$, then the solution (x^0, y^0) is exactly the same as (x^*, y^*) . This proves the uniqueness of (x^*, y^*) .

What remains to be considered is $k = n - 1$. According to (3.9), the set $\mathcal{T}^*(\lambda)$ becomes $\{n, n - 1, \dots, 2, 1\}$ when $\lambda \in (\lambda_{n-1}, 1)$. Thus, Case 2 above is impossible now. As for Case 1, the proof remains the same. In summary, the solution given by (3.2) and (3.3) must be the only optimum for $\text{PO}(\lambda)$, if $\lambda \in (\lambda_k, \bar{\lambda}_k)$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$. This completes the proof. $\square$

Appendix C—Proof of Lemma 4.2

Case 1 in the proof for Lemma 4.1 continues to be impossible even if $\lambda = \bar{\lambda}_k$, since $0 < \lambda < 1$ and thus (B.1) still implies $F_\lambda(x^1, y^1) < F_\lambda(x^0, y^0)$. Nevertheless, it is possible to have Case 2, namely, to have an asset S_l , where $l \notin \mathcal{T}^*(\lambda)$, to be selected in an optimal solution. This is shown below.

Clearly (x^*, y^*) remains an optimal solution for $\text{PO}(\lambda)$ when $\lambda = \bar{\lambda}_k$. Now, we can construct a new solution (x^0, y^0) from (x^*, y^*) , by increasing the value of x_l , where $l = n - k - 1$, to Δ_l and, accordingly, decreasing the values of all x_j by Δ_j for $j \in \mathcal{T}^*(\lambda)$ and y by Δ_y such that

$$q_j(x_j^* - \Delta_j) = y^* - \Delta_y, \quad j \in \mathcal{T}^*(\lambda), \quad (C.1)$$

$$q_l \Delta_l \leq y^* - \Delta_y, \quad (C.2)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{T}^*(\lambda)} (x_j^* - \Delta_j) + \Delta_l = M_0. \quad (C.3)$$

where Δ_l , Δ_j , and Δ_y are all positive, satisfying:

$$\Delta_j = \frac{\Delta_y}{q_j}, \quad j \in \mathcal{T}^*(\lambda), \quad (C.4)$$

$$\Delta_y \leq y^* - q_l \Delta_l, \quad (C.5)$$

$$\Delta_l = \sum_{j \in \mathcal{T}^*(\lambda)} \Delta_j. \quad (C.6)$$

Similar to (B.1), we can show that

$$F_{\lambda}(x^0 + \Delta_x, y^0 + \Delta_y) = F_{\lambda}(x^0, y^0) + \Delta_y(1 - \lambda) \left(-\frac{\lambda}{1 - \lambda} + \sum_{j \in \mathcal{J}^*(\lambda)} \frac{r_j - r_l}{q_j} \right). \quad (C.7)$$

Because $\sum_{j \in \mathcal{J}^*(\lambda)} ((r_j - r_l)/q_j) = \lambda/(1 - \lambda)$ when $\lambda = \bar{\lambda}_k$, we have $F_{\lambda}(x^0 + \Delta_x, y^0 + \Delta_y) = F_{\lambda}(x^0, y^0)$. This means that all points $(y^* - \Delta_y, z^* + (\bar{\lambda}_k/(1 - \bar{\lambda}_k))\Delta_y)$ are efficient points for the bicriteria problem POL_{ω} , as long as Δ_y satisfies (C.4)–(C.6). Note that $(y^* - \Delta_y, z^* + (\bar{\lambda}_k/(1 - \bar{\lambda}_k))\Delta_y)$ is the value of the objective function under the solution (x^0, y^0) , as $y^0 = y^* - \Delta_y$ and

$$\begin{aligned} z^0 &= - \sum_{j \in \mathcal{J}^*(\lambda)} r_j(x_j^* - \Delta_j) - r_l \Delta_l \\ &= z^* + \sum_{j \in \mathcal{J}^*(\lambda)} r_j \Delta_j - \sum_{j \in \mathcal{J}^*(\lambda)} r_l \Delta_j \\ &= z^* + \sum_{j \in \mathcal{J}^*(\lambda)} (r_j - r_l) \frac{\Delta_y}{q_j} \\ &= z^* + \beta_{k+1} \Delta_y \\ &= z^* + \frac{\bar{\lambda}_k}{1 - \bar{\lambda}_k} \Delta_y \quad (\text{cf. (4.2) and (4.9)}). \end{aligned}$$

It can be seen that Δ_y within the range of (4.13) satisfies (C.4)–(C.6). This completes the proof. $\square$

References

- Bašer, T., P. Bernhard. 1995. *H*-Optimal Control and Related Minimax Design Problems—A Dynamic Game Approach*. Birkhauser, Boston, MA.
- Best, M. J., R. R. Grauer. 1991a. Sensitivity analysis for mean-variance portfolio problems. *Management Sci.* 37 981–989.
- . 1991b. On the sensitivity of mean-variance-efficient portfolios to changes in asset means: Some analytical and computational results. *Rev. Financial Stud.* 4 315–342.
- , ——. 1992. Positively weighted minimum-variance portfolios and the structure of asset expected returns. *J. Financial Quant. Anal.* 27 513–537.
- Chopra, V. K., C. R. Hensel, A. L. Turner. 1992. Massaging mean-variance inputs: Returns from alternative global investment strategies in the 1980s. *Management Sci.* 38 845–855.
- , W. T. Ziemba. 1998. The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choices. W. T. Ziemba and J. M. Mulvey, eds. *Worldwide Asset and Liability Modeling*. Cambridge University Press, Cambridge 53–61.
- Haugen, R. A. 1997. *Modern Investment Theory*, 4th ed. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Hensel, C. R., A. L. Turner. 1998. Making superior asset allocation decisions: A practitioner's guide. W. T. Ziemba and J. M. Mulvey, eds. *Worldwide Asset and Liability Modeling*. Cambridge University Press, Cambridge 62–83.
- Konno, H. 1990. Piecewise linear risk function and portfolio optimization. *J. Oper. Res. Soc. Japan* 33 139–156.
- , H. Yamazaki. 1991. Mean-absolute deviation portfolio optimization models and its applications to Tokyo stock market. *Management Sci.* 37 519–531.
- Leon-Garcia, Alberto. 1994. *Probability and Random Processes for Electrical Engineering*, 2nd ed. Addison-Wesley, Reading, MA.
- Markowitz, H. M. 1952. Portfolio selection. *J. Finance* 7 77–91.
- Merton, R. C. 1972. An analytic derivation of the efficient portfolio frontier. *J. Financial Quant. Anal.* 7 1851–1872.
- Young, M. R. 1998. A minimax portfolio selection rule with linear programming solution. *Management Sci.* 44 673–683.
- Yu, P. L. 1974. Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives. *J. Optim. Theory and Appl.* 14 319–376.
- Zeleny, M. 1981. *Multiple Criteria Decision Making*. McGraw-Hill, New York.

Accepted by Phelim P. Boyle; received March 1996. This paper was with the authors 6 months for 6 revisions.

Apêndice II – Métodos para Resolver o Problema Quadrático: o Algoritmo de Wolfe

Apêndice II- Métodos para Resolver o Problema Quadrático

2.1. Formulação de um Modelo Quadrático

O problema modelado pode ser reduzido ao seguinte problema de programação quadrática (QP):

$$\begin{aligned} \min \quad & x'Cx + \lambda x'r \\ \text{s.a.} \quad & x \in \mathfrak{F}, \mathfrak{F} = \{x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} \end{aligned}$$

2.1.1

onde C é uma matriz n por n e possui as seguintes propriedades:

- C é positiva definida
- Existe algum $q \in \mathbb{R}^n$ tal que $r = Cq$.

Além disso, r é um vetor onde cada componente i seja o retorno do ativo i menos o retorno de um ativo sem risco. As restrições de igualdade propostas podem ser trocadas por duas de desigualdade enquanto que as restrições que aceitem um valor negativo para alguma componente de x podem ser reduzidas ao (QP) por meio de introdução de variáveis artificiais.

Uma vez que a função objetivo é quadrática e convexa, para resolver o (QP), será necessário achar uma solução que satisfaça as condições de Kuhn-Tucker para o problema. Estas condições são necessárias e suficientes para a otimalidade da solução encontrada. É possível implementar métodos baseados no Simplex que resolvam este problema. Um deles foi proposto por Wolfe com duas variações. Uma delas resolve o problema para um valor fixo de λ (chamada de "short form" no artigo original) e a outra resolve o problema de forma paramétrica em λ (chamada de "long form" no artigo original). Estes métodos resolvem o problema (QP) em um número finito de passos.

Markowitz havia proposto um método de otimização de uma função quadrática com restrições lineares 3 anos antes de Wolfe, este método é diferente do proposto por Wolfe, mas prova-se que ambos geram a mesma solução.

2.2. O Método de Wolfe

O método descrito abaixo resolve o problema para qualquer valor fixo do parâmetro. O primeiro passo é introduzir vetores de folga não negativos $y \in \mathbb{R}_+^m, v \in \mathbb{R}_+^n$ definidos por:

$$\begin{aligned} y &= b - Ax \geq 0, \\ v &= Cx + A'u + \lambda r \geq 0, \end{aligned}$$

onde $u \in \mathbb{R}_+^m$ é o vetor de multiplicadores de Lagrange.

Um par de variáveis x_j, v_j será chamado de par complementar e o outro par

de variáveis y_i, u_i será chamado de par de variáveis complementares desta sentença.

Com esta notação as condições de Kuhn-Tucker pertencentes ao modelo sobrescrito são da seguinte forma:

- 2.2.1** (a) $x, y, v, u \geq 0$
 (b) $Ax + y = b$
 (c) $-Cx + v - A'u = \lambda r$
 (d) $x'v + y'u = 0$

Em [3] está demonstrado o seguinte teorema:

As partes x, y de qualquer solução para as condições de Kuhn-Tucker são um vértice do seguinte poliedro:

$$M = \{[x', u'] \text{ t.q. } Ax \leq b, -Cx - A'u \leq \lambda r, x \geq 0, u \geq 0\}$$

Desta forma o problema de encontrar a solução de 2.2.1 fica reduzido ao problema de encontrar uma base admissível B da matriz:

$$D = \begin{bmatrix} A & E & 0 & 0 \\ -C & 0 & E & -A' \end{bmatrix}$$

A base é admissível no fato de que $B^{-1} \begin{bmatrix} b \\ \lambda r \end{bmatrix} \geq 0$.

Nesta matriz D a coluna j -ésima de $\begin{bmatrix} A \\ -C \end{bmatrix}$ (a variável x_j) e a coluna j -ésima de $\begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix}$ (a variável v_j) não devem ser básicas ao mesmo tempo, e o mesmo se aplica a $\begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ -A' \end{bmatrix}$ correspondentes às variáveis y_i e u_i .

Para este propósito nós introduzimos variáveis artificiais em 2.2.1 (c) de modo que uma base inicial artificial poderia ser formada sem as colunas $\begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ -A' \end{bmatrix}$, isto é, sem qualquer componente de v ou y na base. Então 2.2.1 (d) é garantida o início com $v=0, u=0$. A propriedade de complementaridade $x'v + y'u = 0$ será preservada enquanto elimina-se as variáveis artificiais da base, de modo que nós nunca permitimos o par variável complementar x_j, v_j ou y_i, u_i para

tornar-se básica. Desta maneira a solução para 2.2.1 será obtida quando a parte x resolve 2.1.1.

Após a breve descrição dada acima, podemos formular um algoritmo de Programação Quadrática como o descrito a seguir:

Fase 0. Resolva o seguinte problema de programação linear:

2.2.2

$$\begin{aligned} \max \quad & -e^1 z_1 \\ \text{s.a.} \quad & x^* \geq 0 \\ & Dx^* = b^* \end{aligned}$$

com $D \equiv [A^* \ E^* \ E]$, $x^* \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \\ z_1 \end{bmatrix}$, A^* , E^* e b^* obtidos da seguinte forma:

$$\text{Para cada linha } j \text{ da matriz } A^*, \quad A_j^* = \begin{cases} A_j, & \text{se } b_j \geq 0 \\ -A_j, & \text{se } b_j < 0; \end{cases}$$

$$\text{para cada linha } j \text{ da matriz } E^*, \quad E_j^* = \begin{cases} E_j, & \text{se } b_j \geq 0 \\ -E_j, & \text{se } b_j < 0; \end{cases}$$

e para cada j , $b_j^* = |b_j|$, sendo que E é a matriz identidade.

$$x^* \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b^* \end{bmatrix}$$

tendo como solução factível inicial e base inicial $D_{ini} \equiv [E]$.

Caso 1. Seja o $\bar{x}$, $\bar{y}$ e $\bar{z}_1$ os vetores encontrados na solução final.

Se $-e^1 z_1 \neq 0$ então pare – o problema é inviável. Caso contrário, vá para a fase 1.

Fase 1. Resolva o seguinte problema de programação linear:

2.2.3

$$\begin{aligned} \max \quad & -e^1 z_2 \\ \text{s.a.} \quad & x^{f1} \geq 0 \\ & D^{f1} x^{f1} = b^{f1} \end{aligned}$$

$$\text{com } D^{f1} \equiv \begin{bmatrix} A^* & E^* & 0 & 0 & 0 \\ -C & 0 & E & -A^1 & E^{f1} \end{bmatrix}, \quad x^{f1} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ v \\ u \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad b^{f1} = \begin{bmatrix} b^* \\ \lambda r \end{bmatrix} \text{ e também}$$

$$E_j^{f1} = \begin{cases} E_j, & \text{se } (\bar{C}\bar{x} + \lambda r)_j \geq 0 \\ -E_j, & \text{se } (\bar{C}\bar{x} + \lambda r)_j < 0, \end{cases} \text{ para cada linha } j \text{ da matriz } E^{f1}.$$

Seja D_{fim} a base final da fase 0 e C_{fim} uma matriz formada pelas colunas de [

$-C \ 0]$ correspondentes às colunas de $[A^* \ E^* \ E]$ seleccionadas por D_{fm} .
Para resolver o problema da fase 1, tome como base inicial a matriz:

$$B^1 = \begin{bmatrix} D_{fm} & 0 \\ C_{fm} & E^{f1} \end{bmatrix}$$

cuja solução factível inicial correspondente será:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}^1 = \bar{x} \\ \hat{y}^1 = \bar{y} \\ \hat{v}^1 = 0 \\ \hat{u}^1 = 0 \\ \hat{z}_2^1 = E^{f1}(Cx + \lambda r) \end{bmatrix}$$

2.2.4

Resolva o problema 2.2.3 pelo método Simplex, tendo como base inicial B^1 e sua respectiva solução básica 2.2.4 aplicando a seguinte restrição para entrada na base:

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} x_j \\ v_j \\ y_i \\ u_i \end{array} \right\} \text{ Se } \left. \begin{array}{l} x_j \\ v_j \\ y_i \\ u_i \end{array} \right\} \text{ é básica então } \left. \begin{array}{l} v_j \\ x_j \\ u_i \\ y_i \end{array} \right\} \text{ não deve entrar na base.} \end{array}$$

2.2.5

(Observe que a solução 2.2.4 satisfaz a condição 2.2.5.)

Sem a restrição de entrada na base, podemos ter certeza que quando o algoritmo acima descrito parar $e'z_2 = 0$ (pois o problema 2.2.3 necessariamente tem solução ótima). Wolfe provou em [2] que mesmo com esta restrição, ao final do algoritmo o valor ótimo de 2.2.3 será 0 e também provou o seguinte teorema:

O problema 2.1.1 possui solução ótima se $\mathcal{Z}$ não é vazio e a parte correspondente a x da solução ótima de 2.2.3 sob a restrição 2.2.5 é tal solução.

Desta forma, elaboramos um modelo mais sofisticado para o problema e apresentamos um método baseado no Simplex para solucioná-lo. O método apresentado resolve em um número finito de passos o problema 2.1.1 para um valor fixo do parâmetro λ . Isto significa que, dado um certo nível de aversão ao risco do investidor (λ é inversamente proporcional à aversão ao risco), dada a matriz de covariâncias e o vetor de retornos para cada ativo do mercado e dadas as restrições lineares, podemos calcular qual a carteira que possui melhor relação entre retorno e risco, conhecida na literatura como *portfolio eficiente*.

Contudo se o nosso objetivo é obter todos os portfolios eficientes, ou seja, obter todas as carteiras de mínimo risco ou máximo retorno, será necessário variar o

parâmetro λ de $-\infty$ a 0. Isto não parece ser razoável, pois além de ser inviável computacionalmente (uma vez que o algoritmo é baseado no Simplex que tem pior caso exponencial), se tentarmos simplesmente escolher pontos arbitrariamente no intervalo que vai de $-\infty$ a 0 estaremos correndo o risco de não escolher os pontos corretos, isto é, não escolher pontos que passem uma informação significativa.

Para resolver este problema, Wolfe propôs no mesmo artigo uma variação do algoritmo de programação quadrática, chamado de “long form”, que encontra de forma mais eficiente uma solução para qualquer valor do parâmetro $\lambda \leq 0$. A partir de agora, vamos estudar esta variação.

2.3. A Versão Paramétrica

Conforme observado anteriormente, a solução encontrada pelo algoritmo de otimização de portfólios desejado deve:

- Ter retorno máximo ($x'r$) para o seu nível de risco e ;
- Ter risco mínimo ($x' Cov x$) para o seu nível de retorno.

Além disso, seria ideal que o algoritmo encontrasse todos os portfólios de risco mínimo, o que pode ser obtido parametrizando a aversão ao risco do investidor (λ). Já vimos que não é eficiente chamar o algoritmo várias vezes para cada valor do parâmetro. Desta forma, o algoritmo paramétrico deverá chamar sua rotina principal apenas uma vez e depois achar qualquer solução com apenas mais um passo.

Wolfe propôs em sua “long form” um algoritmo baseado na análise de sensibilidade do Simplex onde ele reformula o Problema Quadrático Paramétrico, transformando-o em um problema de Programação Linear e achando valores críticos para λ . Como é um problema de Programação Linear, cada valor crítico de λ corresponde a uma solução (chamada por Markowitz de “carteira de canto”) e para qualquer valor de λ entre dois valores críticos a solução correspondente a este valor é uma combinação convexa das duas soluções críticas. Desta forma, o trabalho se resume em achar todos os valores críticos de λ . Tendo uma vez estes valores, achar qualquer solução possível, ou seja, desenhar toda a Fronteira Eficiente, torna-se trivial.

O algoritmo proposto resolve um problema quadrático paramétrico da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & x'Cx - \lambda x'r \\ \text{s.a.} \quad & x \in \mathfrak{F}, \mathfrak{F} = \{x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} \end{aligned} \quad 2.3.1$$

E o algoritmo só acha valores de $\lambda \geq 0$. Não será necessária nenhuma adaptação no problema original por ele ser idêntico ao proposto por Wolfe.

O algoritmo de Programação Quadrática Paramétrica, que também podemos chamar de *Fase 2 do Método de Wolfe* é o seguinte:

Passo 1. Resolva o problema 2.3.1 com $\lambda = 0$. Seja B^0 a base final e $x^0, y^0, v^0, u^0, z_2^0$ a solução final. Caso alguma coluna correspondente a alguma componente de z_2 esteja em B^0 - ou seja, o vértice é degenerado e esta componente vale 0 - continue o algoritmo até que não haja nenhuma componente

de z_2 na base.

Passo 2. Forme o seguinte problema de Programação Linear:

$$\begin{aligned}
 & \max \quad 2\lambda \\
 & \text{s.a.} \quad \overline{M}\overline{x} = \overline{b} \\
 & \quad \quad \overline{x} \geq 0
 \end{aligned}
 \tag{2.3.2}$$

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} A & E & 0 & 0 & 0 \\ -C & 0 & E & -A' & r \end{bmatrix}$$

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ v \\ u \\ \lambda \end{bmatrix}$$

$$\overline{b} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.3.3 onde

cujas solução factível inicial seria $\lambda^0 = 0, x^0, y^0, v^0, u^0$ e sua base B^0 . Vá para a fase 2 do Simplex com a restrição 2.2.5.

Passo 3. Se com a restrição 2.2.5 não há como diminuir $-\lambda$, ou seja a solução ótima é a solução factível inicial, então pare! Não há solução para 2.3.1 com $\lambda \geq 0$.

Passo 4. Se $-\lambda$ pode ser diminuído então 2.3.2 é ilimitado (provado por Wolfe em [2]). Desta forma, a cada iteração r das s iterações do Simplex com a restrição 2.2.5 obteremos uma solução $\overline{x}^r, 0 \leq r \leq s$, onde $0 \leq \lambda^0 \leq \lambda^1 \leq \dots \leq \lambda^s$, sendo que cada λ^r é o valor da função objetivo na iteração r e x^r é uma solução ótima do problema 2.3.1 para $\lambda = \lambda^r$. Além disso, como 2.3.2 é ilimitado, ao final das s iterações também teremos uma direção de crescimento $x^{s+1}, y^{s+1}, v^{s+1}, u^{s+1}$ tal que

$$\begin{bmatrix} x^s \\ y^s \\ v^s \\ u^s \end{bmatrix} + (\lambda - \lambda^s) \begin{bmatrix} x^{s+1} \\ y^{s+1} \\ v^{s+1} \\ u^{s+1} \end{bmatrix} \text{ é solução ótima para } \forall \lambda \geq \lambda^s.$$

$$x^\lambda(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^{r+1} - \lambda}{\lambda^{r+1} - \lambda^r} x^r + \frac{\lambda - \lambda^r}{\lambda^{r+1} - \lambda^r} x^{r+1} & \text{com } \begin{cases} \lambda^r \leq \lambda^{r+1} \\ 0 \leq r \leq s-1 \end{cases} \\ x^s + (\lambda - \lambda^s) x^{s+1} & \text{com } \lambda \geq \lambda^s \end{cases}$$

Assim

é solução ótima de 2.3.1 para qualquer valor de $\lambda \geq 0$.