

Análise de Componentes Principais e Imunização de Carteiras

José Roberto Vasconcellos Biojone

São Paulo, SP

2010

Orientador: Professor Rodrigo de Barros Nabholz

Sumário

1. Introdução	3
2. Definições	5
2.1. Letras do Tesouro Nacional (LTN)	5
2.2. Notas do Tesouro Nacional, Série F (NTN-F)	6
2.3. Contrato Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia – DI Futuro	8
2.4. Estrutura a Termo de Taxas de Juros (ETTJ)	9
3. Análise de Componentes Principais	11
4. Aplicação da metodologia de ACP na ETTJ pré-fixada em Reais	15
5. Aplicação de ACP para imunização de carteiras	22
6. Aplicação de <i>Duration Hedge</i> para imunização de carteiras	28
7. Imunização de carteiras por ACP x <i>Duration</i> : análise de desempenho	30
8. Considerações Finais	37
Referências Bibliográficas	38

1. Introdução

Administradores de carteiras de investimento procuram controlar variações no valor de seus portfólios causadas por variações nos fatores de risco. As variáveis de interesse deste trabalho serão os fatores de risco relacionados às taxas de juros, mais especificamente, à Estrutura a Termo de Taxas de Juros (ET TJ) pré-fixadas em Reais.

A literatura apresenta algumas técnicas que podem ser utilizadas para mensurar e controlar os efeitos causados pelas variáveis acima citadas. Dentre elas, está a *duration*, um dos conceitos mais difundidos no mercado financeiro para este fim.

A *duration* é frequentemente utilizada como medida de risco para mensurar exposições de uma carteira a variações nas taxas de juros. Entretanto, essa medida unidimensional não é suficiente para que administradores de carteiras possam controlar os riscos de taxas de juros de maneira eficiente, pois o valor de um portfólio é afetado por movimentações na estrutura a termo de taxas de juros, o que envolve mais de uma dimensão. Ou seja, na prática, existe mais de uma variável de risco que afeta o valor de uma carteira com exposição a juros.

Neste trabalho demonstraremos como a administração do risco de taxas de juros pode ser realizada com um modelo que considere a estrutura a termo. Este modelo, baseado em Análise de Componentes Principais (ACP), irá considerar, de forma mais completa, as características mais complexas dos riscos relacionados à ET TJ. Ao mesmo tempo, ele terá a capacidade de reduzir o número de fatores de risco da estrutura a termo a um número limitado, que explicarão, de forma acumulada, um percentual aceitável das variâncias relacionadas aos movimentos da curva de juros.

Referências conceituais envolvendo ACP e motivações para sua aplicação podem ser encontradas em Shlens (2005). Aplicações do conceito para redução da dimensão de variáveis envolvendo Estruturas a Termo de Taxas de Juros, sem perdas significativas de informação podem ser verificadas em Soto (2004). Aplicação da técnica para a ET TJ no Brasil pode ser encontrada em Mascitelli (2008). Finalmente, em Litterman e Scheinkman (1991) é possível verificar a aplicação da análise proposta neste trabalho ao mercado norte americano.

O trabalho está estruturado da seguinte forma: no segundo capítulo apresentaremos algumas definições iniciais. No terceiro capítulo introduziremos os conceitos de ACP e no quarto capítulo aplicaremos esses conceitos para explicar as movimentações da ETTJ pré-fixada em Reais. No quinto capítulo apresentaremos um modelo para imunização de carteiras baseado na metodologia de ACP. O sexto capítulo irá demonstrar como a *duration* pode ser utilizada para realização de *hedge*. No sétimo capítulo utilizaremos um caso prático para comparar o desempenho da imunização de uma carteira composta por títulos públicos pré-fixados em Reais (LTNs e NTN-Fs), através de contratos futuros de DI da BM&F Bovespa, utilizando as metodologias de ACP e *duration hedge*. Finalmente, no oitavo capítulo apresentaremos as considerações finais.

2. Definições

2.1. Letras do Tesouro Nacional (LTN)

As LTNs são títulos prefixados emitidos pela Secretaria do Tesouro Nacional que têm a finalidade de prover o Tesouro Nacional de recursos necessários para cobertura de seus déficits explicitados nos orçamentos ou para realização de operações de crédito por antecipação de receita, respeitados a autorização concedida e os limites fixados na Lei Orçamentária, ou em seus créditos adicionais. Esses títulos possuem valor nominal de R\$1.000,00 no vencimento. Não há pagamentos de juros intermediários, os juros e o valor nominal são pagos apenas no vencimento. O Preço Unitário (PU) do papel é dado pela seguinte fórmula:

$$PU = \frac{VN}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^{n/252}}$$

Onde:

PU = Preço Unitário do título;

i = Taxa efetiva anual;

VN = Valor nominal do resgate;

n = número de dias úteis compreendido entre a data de liquidação, inclusive, e a data de vencimento, exclusive;

Como exemplo, suponha que uma instituição financeira compre 10.000 quantidades de uma LTN, com liquidação em 13-set-2010, com as seguintes características:

Data de Emissão: 15/01/2010

Data de Vencimento: 01/04/2011

Número de dias úteis: 139

Taxa de retorno: 10,7587% a.a.

O PU do papel seria:

$$PU = \frac{1.000}{\left(1 + \frac{10,7587}{100}\right)^{139/252}} = R\$945,19571$$

O Valor Financeiro (F) total, em Reais, seria:

$$F = Quantidade * PU = 10.000 * 945,19571 = R\$9.451.957,10$$

2.2. Notas do Tesouro Nacional, Série F (NTN-F)

As NTN-Fs são títulos prefixados emitidos pela Secretaria do Tesouro Nacional que possuem a mesma finalidade das LTNs. Esses títulos possuem valor nominal de R\$1.000,00 pago no vencimento, mas, ao contrário das LTNs, pagam juros semestralmente. O PU do papel é dado pela seguinte fórmula:

$$PU = \sum_{i=1}^n \frac{\left[1 + \left(\frac{j}{100}\right)^{\frac{6}{12}}\right] - 1 * VN}{\left(1 + \frac{TIR}{100}\right)^{du_i/252}} + \frac{VN}{\left(1 + \frac{TIR}{100}\right)^{du_n/252}}$$

Onde:

PU = Preço Unitário do título;

j = Taxa de juros (% a.a.) definida no edital de leilão;

n = Número de fluxos de pagamento do título;

TIR = Taxa interna de retorno, corresponde à taxa efetiva anual;

du_i = Dias úteis entre a data de liquidação (inclusive) e a data do pagamento de juros i (exclusive);

du_n = Dias úteis entre a data de liquidação (inclusive) e a data de vencimento (exclusive);

VN = Valor nominal do resgate;

Suponha que uma instituição financeira compre 10.000 quantidades de uma NTN-F, com liquidação em 13-set-2010, com as seguintes características:

Data de Emissão: 01/06/2005

Data de Vencimento: 01/01/2012

Juros: 10,00% a.a.

Número de dias úteis: 328

Taxa Interna de Retorno (TIR): 11,4025% a.a

$$PU = \sum_{j=1}^3 \frac{\left[1 + \left(\frac{10,00}{100} \right)^{\frac{6}{12}} \right] - 1 * 1000}{\left(1 + \frac{11,4025}{100} \right)^{dt_j/252}} + \frac{1000}{\left(1 + \frac{11,4025}{100} \right)^{328/252}} = (Tabela 2.1)$$

Vedimento	Venc. Ajustado	Dias úteis	Fluxo de Caixa	Valor Presente
01/01/2011	03/01/2011	77	48.80884817	47.22473727
01/07/2011	01/07/2011	201	48.80884817	44.78104912
01/01/2012	02/01/2012	328	1048.808848	911.2939521
			Total	1.003.29974

Tabela 2.1: Cálculo do PU da NTN-F

PU = R\$1.003,29974

O Valor Financeiro (F) total, em Reais, seria:

$F = Quantidade * PU = 10.000 * 1.003,29974 = R\$10.032.997,40$

2.3. Contrato Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia – DI Futuro

A taxa DI é a Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia, calculada pela Central de Custódia e de Liquidação Financeira de Títulos (Cetip), e é expressa em taxa efetiva anual em base 252 dias úteis. O contrato futuro de DI representa a taxa de juro efetiva até o vencimento do contrato, definida pela acumulação das taxas diárias de DI no período compreendido entre a data de negociação, inclusive, e o dia útil anterior ao seu dia de vencimento. Os meses de vencimento são os quatro meses subsequentes ao mês da operação e, a partir daí, os meses que se caracterizam como de início de trimestre. O vencimento ocorre no primeiro dia útil do mês de vencimento. O preço unitário do contrato (PU) tem seu valor, em pontos, correspondente 100.000 descontado pela taxa de juros da operação, conforme a seguinte função:

$$PU = \frac{100.000}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^{n/252}} \quad (2.1)$$

Onde:

PU = Preço Unitário da operação;

i = taxa de juro negociada;

n = número de dias úteis compreendido entre a data de negociação, inclusive, e a data de vencimento do contrato, exclusive;

Como exemplo, suponha que em 20/08/2010 um contrato futuro de DI, com vencimento em 01/12/2010 tenha sido negociado a taxa de 10,68% a.a.. O PU equivalente, conforme (2.1) seria de:

$$PU = \frac{100.000}{\left(1 + \frac{10,68}{100}\right)^{69/252}} = 97.259,82$$

A BM&F Bovespa divulga diariamente em seu site (www.bmfbovespa.com.br) os PUs de fechamento de todos os vencimentos de Futuro de DI em aberto. Para se chegar nas taxas de juros equivalentes basta isolar a variável i na equação 2.1.

A importância desses contratos está no fato de eles serem a base para a construção da Estrutura a Termo de Taxas de Juros em Reais, variável de estudo deste trabalho. Além disso, eles serão utilizados como instrumento de *hedge* para imunização da carteira que será definida mais adiante.

2.4. Estrutura a Termo de Taxas de Juros (ETTJ)

A ETTJ representa, para uma determinada data base, um conjunto de taxas de juros à vista, ou *spot*, para diversos prazos de vencimento. A partir dela é possível determinar a estrutura de taxas de juros que pode ser usada para se descontar fluxos de caixa futuros. A relação taxas de juros e vencimentos resulta em uma curva de juros, conforme diagrama abaixo. É importante salientar que o formato da curva abaixo é apenas um dos formatos possíveis e, dependendo das condições de mercado, a inclinação da curva pode chegar a ser negativa.

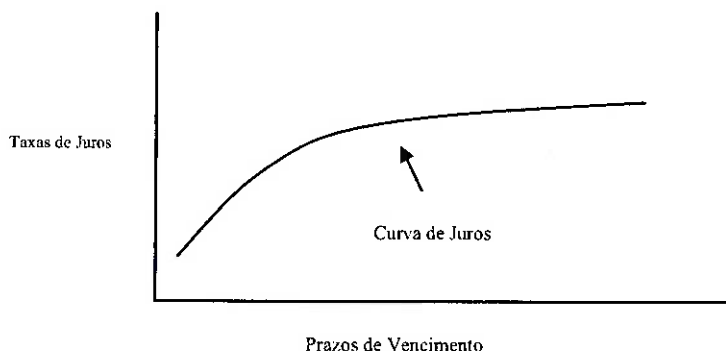


Figura 2.1: Curva de Juros

Para a construção da ETTJ pré-fixada em Reais utilizaremos, como pontos de mercado, a taxa DI de um dia para o primeiro dia útil da curva e, a partir daí, utilizaremos as taxas dos contratos futuros de DI. Aplicaremos, então, a metodologia de Spline Cúbico para interpolar os pontos de mercado, o que resultará nas curvas de juros finais para cada

data base. A partir destas curvas, iremos selecionar alguns vértices fixos padronizados (dias úteis) para nosso estudo. A seleção de alguns pontos da curva não ocasionará perda significativa de informações, uma vez que variações nas taxas de juros de vencimentos muito próximos tendem a apresentar altas correlações.

Com um histórico dos vértices fixos acima citados utilizaremos ACP para tentar explicar as movimentações na ETTJ pré-fixada em Reais para, posteriormente, apresentarmos uma metodologia de imunização de carteiras baseada nas variáveis resultantes do ACP. Este estudo utilizará dados históricos da ETTJ pré-fixada em Reais de 16/09/2009 a 17/09/2010.

3. Análise de Componentes Principais

ACP é uma técnica estatística que tem o objetivo de explicar o comportamento de variáveis observáveis através de um conjunto menor de variáveis não observáveis ou artificiais. A técnica consiste em realizar uma transformação linear de um conjunto de variáveis originais para um conjunto de variáveis ortonormais, que reproduzem a soma das variâncias originais. Essas variáveis ortonormais representam um novo sistema de coordenadas em que os eixos são organizados conforme o percentual de explicação da variância total presente na base de dados. A primeira variável (eixo) explica a maior parte da variância presente na base de dados original, a segunda variável explica a segunda maior parte da variância e assim sucessivamente. Ou seja, os dados originais passam a ser descritos por um conjunto de variáveis não observáveis, não correlacionadas e organizadas de forma decrescente em relação ao poder de explicação das variâncias, chamadas de componentes principais. Isso torna possível uma redução na dimensão do problema, escolhendo-se as componentes principais que explicam, suficientemente, a variabilidade dos dados originais.

A Figura 3.1 representa, geometricamente, a transformação de coordenadas para um caso bi-dimensional, em que um problema inicialmente analisado através das coordenadas (x, y) passa a ser analisado a partir das coordenadas que representam as maiores variâncias $(c1, c2)$.

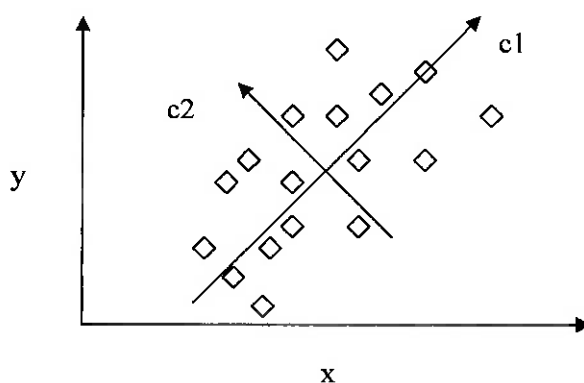


Figura 3.1: Representação geométrica do ACP

Podemos chegar à solução matemática para ACP utilizando álgebra linear. Considere uma matriz de base de dados X com média zero e matriz de variâncias e covariâncias Σ . Deve-se escolher uma matriz ortonormal P para que $Y = P^t X$ e $\text{Var}(Y)$ seja uma matriz diagonal. Ou seja, y_i serão variáveis independentes com $\text{Var}(Y)$ igual à soma das variâncias de Σ . Pode-se reescrever $\text{Var}(Y)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y) &= \frac{1}{n-1} Y Y^t \\ &= \frac{1}{n-1} (P^t X)(P^t X)^t \\ &= \frac{1}{n-1} P^t X X^t P \\ &= \frac{1}{n-1} P^t (X X^t) P \\ &= P^t \Sigma P\end{aligned}\tag{3.1}$$

Como Σ é uma matriz simétrica através das propriedades de cálculo de matrizes sabemos que possui n autovetores linearmente independentes, correspondentes a n autovalores. Podemos decompor Σ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Sigma A &= A \Lambda \\ \Sigma &= A \Lambda A^{-1}\end{aligned}$$

Dado que $A^{-1} = A^t$ (ortonormal):

$$\Sigma = A \Lambda A^t\tag{3.2}$$

Onde:

A = matriz ortonormal formada pelos n autovetores de Σ correspondentes a cada autovalor

Λ = matriz diagonal formada pelos n autovalores de Σ

Podem-se obter os n autovalores de Σ através da solução da equação:

$$\det[\Sigma - \lambda I] = 0$$

Os n autovetores são as soluções para a seguinte combinação de equações:

$$(\Sigma - \lambda_j I)A_j = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Com os autovalores e autovetores correspondentes de Σ o passo seguinte da Análise de Componentes Principais é organizar as colunas de autovetores de forma que a primeira coluna de A contenha os autovetores correspondentes ao maior autovalor, a segunda coluna contenha os autovetores correspondentes ao segundo maior autovalor. Esse procedimento é realizado para os n autovalores e autovetores.

Podemos selecionar a matriz P como sendo uma matriz em que cada coluna de p_i é um autovetor de Σ . Desta forma, $P = A$ e teremos:

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= P' \Sigma P \\ &= P' A \Lambda A' P \\ &= P' P \Lambda P' P \\ &= \Lambda \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\text{Var}(Y) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

Em que $Y_n = P_n' X$ são variáveis independentes com $\text{Var}(Y_n) = \lambda_n$.

Desta forma, dado que a variância de cada componente principal é dada pelo seu autovalor (λ_n) e os dados originais podem ser representados pelo conjunto de

componentes principais, podemos descrever a variância total dos dados originais como sendo:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k$$

Se optarmos por reduzir a dimensão do problema, escolhendo as j primeiras componentes, com $j < n$, a proporção da variância explicada será:

$$\frac{\sum_{p=1}^j \lambda_p}{\sum_{k=1}^n \lambda_k}$$

E teremos um modelo definido por $X_n = P_n Y_n$, em que n representa as n primeiras componentes utilizadas que explicarão um percentual suficientemente aceitável das variâncias de Σ .

Considerando que Y representa uma matriz composta por componentes representadas por variáveis aleatórias normais independentes com média zero e variância um, teremos:

$$X = P \Lambda^{1/2} Y$$

Em que $\Lambda^{1/2}$ representa uma matriz diagonal com os desvios padrões de cada componente.

Desta forma, escolhendo-se as n primeiras componentes principais que explicam suficientemente as variâncias de Σ , teremos:

$$\bar{X} = P_n \Lambda_n^{1/2} Y_n \quad (3.3)$$

4. Aplicação da metodologia de ACP na ETTJ pré-fixada em Reais

Neste capítulo utilizaremos a metodologia de ACP com a finalidade de explicar o comportamento (ou variações) da ETTJ pré-fixada em Reais através de um número definido de variáveis. Para tal, partimos de uma base de dados contendo as taxas de juros *spot* para determinados prazos fixos, em dias úteis, compreendendo dados diários entre as datas de 16/09/2009 a 17/09/2010.

Neste exemplo de aplicação do modelo definiremos a data base de análise como sendo 17/09/2010 e os vértices considerados serão aqueles que representam vencimentos de fluxos de caixa da carteira de títulos públicos de renda fixa que pretendemos imunizar. Tal carteira será detalhada nos próximos pontos deste trabalho, mas já é possível adiantar os 15 vértices citados acima (prazos em dias úteis): 73, 135, 197, 262, 324, 449, 575, 698, 828, 950, 1.081, 1.203, 1.331, 1.455, 1.582.

A Tabela 4.1 apresenta um intervalo da base de dados utilizada. As linhas representam as estruturas a termo de taxas de juros observadas em cada data base (histórico), enquanto que as colunas representam os prazos, em dias úteis, compreendidos desde cada data base até os vencimentos dos fluxos informados anteriormente. Com o objetivo de simplificar as funções matemáticas que serão utilizadas posteriormente, as taxas de juros foram anualizadas continuamente em base exponencial 252.

	73	135	197	262	324	449	575	698	828	950	1081	1203	1331	1455	1582
17/09/2010	10.13%	10.21%	10.42%	10.63%	10.84%	11.10%	11.17%	11.16%	11.13%	11.13%	11.10%	11.07%	11.05%	11.04%	11.02%
16/09/2010	10.13%	10.21%	10.41%	10.60%	10.79%	11.04%	11.14%	11.15%	11.16%	11.15%	11.14%	11.12%	11.10%	11.09%	11.07%
15/09/2010	10.13%	10.19%	10.38%	10.54%	10.73%	10.95%	11.04%	11.06%	11.06%	11.06%	11.04%	11.01%	10.98%	10.98%	10.97%
14/09/2010	10.13%	10.20%	10.38%	10.55%	10.72%	10.93%	10.99%	11.00%	11.00%	11.00%	10.98%	10.97%	10.94%	10.92%	10.90%
13/09/2010	10.13%	10.19%	10.39%	10.57%	10.73%	10.95%	11.05%	11.04%	11.04%	11.02%	11.03%	10.98%	10.96%	10.96%	10.93%
10/09/2010	10.13%	10.19%	10.36%	10.53%	10.69%	10.91%	11.01%	11.00%	10.99%	10.99%	10.97%	10.93%	10.90%	10.88%	10.87%
09/09/2010	10.12%	10.19%	10.35%	10.52%	10.68%	10.89%	10.96%	10.95%	10.92%	10.90%	10.90%	10.88%	10.83%	10.82%	10.81%
08/09/2010	10.13%	10.21%	10.38%	10.59%	10.75%	10.94%	11.01%	10.97%	10.93%	10.91%	10.87%	10.83%	10.81%	10.80%	10.78%
06/09/2010	10.13%	10.19%	10.37%	10.57%	10.73%	10.92%	10.98%	10.95%	10.93%	10.92%	10.89%	10.85%	10.81%	10.78%	10.76%
03/09/2010	10.13%	10.20%	10.38%	10.59%	10.75%	10.95%	11.00%	10.97%	10.95%	10.92%	10.90%	10.86%	10.83%	10.82%	10.82%
02/09/2010	10.13%	10.19%	10.36%	10.55%	10.69%	10.89%	10.95%	10.92%	10.90%	10.89%	10.87%	10.85%	10.84%	10.83%	10.82%
01/09/2010	10.15%	10.23%	10.42%	10.60%	10.75%	10.91%	10.97%	10.94%	10.90%	10.89%	10.86%	10.84%	10.82%	10.81%	10.79%
31/08/2010	10.15%	10.22%	10.38%	10.55%	10.66%	10.81%	10.88%	10.84%	10.81%	10.80%	10.79%	10.77%	10.75%	10.74%	10.73%
30/08/2010	10.17%	10.24%	10.45%	10.64%	10.78%	10.91%	10.96%	10.93%	10.86%	10.84%	10.81%	10.80%	10.78%	10.76%	10.74%
27/08/2010	10.14%	10.24%	10.43%	10.63%	10.77%	10.89%	10.94%	10.91%	10.84%	10.84%	10.81%	10.74%	10.77%	10.77%	10.74%
26/08/2010	10.15%	10.22%	10.42%	10.60%	10.74%	10.84%	10.87%	10.84%	10.79%	10.78%	10.72%	10.67%	10.66%	10.66%	10.66%
25/08/2010	10.13%	10.21%	10.39%	10.53%	10.64%	10.70%	10.71%	10.68%	10.64%	10.62%	10.60%	10.57%	10.56%	10.55%	10.53%
24/08/2010	10.14%	10.21%	10.35%	10.49%	10.56%	10.63%	10.63%	10.62%	10.58%	10.56%	10.54%	10.51%	10.50%	10.49%	10.47%
23/08/2010	10.14%	10.20%	10.35%	10.50%	10.58%	10.66%	10.68%	10.67%	10.66%	10.65%	10.63%	10.61%	10.59%	10.59%	10.58%
20/08/2010	10.15%	10.21%	10.34%	10.50%	10.58%	10.69%	10.73%	10.73%	10.74%	10.75%	10.70%	10.63%	10.69%	10.71%	10.69%
19/08/2010	10.16%	10.23%	10.39%	10.54%	10.62%	10.71%	10.73%	10.74%	10.73%	10.73%	10.72%	10.70%	10.70%	10.71%	10.71%
18/08/2010	10.18%	10.24%	10.41%	10.56%	10.64%	10.76%	10.77%	10.76%	10.75%	10.75%	10.73%	10.71%	10.71%	10.70%	10.71%
17/08/2010	10.19%	10.25%	10.42%	10.59%	10.69%	10.83%	10.87%	10.89%	10.88%	10.88%	10.87%	10.84%	10.84%	10.84%	10.83%
16/08/2010	10.20%	10.26%	10.42%	10.60%	10.70%	10.83%	10.87%	10.90%	10.89%	10.91%	10.89%	10.87%	10.88%	10.88%	10.88%
13/08/2010	10.22%	10.30%	10.48%	10.67%	10.81%	10.98%	11.04%	11.05%	11.05%	11.06%	11.09%	11.05%	11.06%	11.06%	11.04%
12/08/2010	10.22%	10.30%	10.49%	10.69%	10.86%	11.05%	11.11%	11.11%	11.11%	11.11%	11.10%	11.11%	11.11%	11.09%	11.07%
11/08/2010	10.22%	10.32%	10.51%	10.74%	10.91%	11.08%	11.12%	11.11%	11.10%	11.08%	11.08%	11.06%	11.05%	11.03%	11.02%
10/08/2010	10.20%	10.31%	10.49%	10.69%	10.86%	11.09%	11.16%	11.17%	11.17%	11.17%	11.13%	11.12%	11.11%	11.08%	11.07%
09/08/2010	10.21%	10.29%	10.47%	10.69%	10.86%	11.08%	11.18%	11.19%	11.18%	11.18%	11.16%	11.15%	11.13%	11.12%	11.12%

Tabela 4.1 – Intervalo da base de dados

Conforme mencionado anteriormente, o objetivo é descrever o comportamento da ETTJ, ou seja, suas variações. Dessa forma, realizamos a primeira transformação na base de dados, que consiste em obter as variações diárias, através da primeira diferença, das taxas de juros de mesmo prazo. O resultado obtido consta na Tabela 4.2.

Média	0.007%	0.007%	0.007%	0.006%	0.006%	0.003%	0.002%	0.001%	-0.001%	-0.001%	-0.002%	-0.002%	-0.003%	-0.004%	-0.004%
	73	135	197	262	324	449	575	698	828	950	1081	1203	1331	1455	1582
17/09/2010	0.00%	0.00%	0.01%	0.03%	0.05%	0.06%	0.04%	0.01%	-0.04%	-0.03%	-0.04%	-0.05%	-0.05%	-0.05%	-0.05%
16/09/2010	0.00%	0.02%	0.03%	0.07%	0.06%	0.09%	0.10%	0.10%	0.11%	0.10%	0.10%	0.11%	0.12%	0.11%	0.11%
15/09/2010	0.00%	-0.02%	-0.01%	-0.02%	0.01%	0.02%	0.04%	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.04%	0.04%	0.07%	0.06%
14/09/2010	0.00%	0.01%	0.00%	-0.02%	-0.02%	-0.03%	-0.05%	-0.04%	-0.04%	-0.02%	-0.04%	-0.01%	-0.02%	-0.04%	-0.03%
13/09/2010	0.00%	0.00%	0.03%	0.04%	0.04%	0.03%	0.05%	0.03%	0.05%	0.03%	0.06%	0.04%	0.05%	0.07%	0.06%
10/09/2010	0.01%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.03%	0.05%	0.05%	0.07%	0.09%	0.06%	0.06%	0.07%	0.07%	0.05%
09/09/2010	-0.01%	-0.02%	-0.03%	-0.07%	-0.06%	-0.05%	-0.05%	-0.02%	-0.01%	-0.01%	0.03%	0.04%	0.02%	0.02%	0.04%
08/09/2010	0.00%	0.01%	0.01%	0.02%	0.02%	0.02%	0.03%	0.02%	0.00%	-0.01%	-0.02%	-0.02%	0.01%	0.02%	0.02%
06/09/2010	0.00%	-0.01%	-0.01%	-0.02%	-0.02%	-0.03%	-0.02%	-0.02%	-0.02%	0.00%	-0.01%	-0.01%	-0.03%	-0.05%	-0.06%
03/09/2010	0.01%	0.01%	0.02%	0.04%	0.06%	0.05%	0.05%	0.04%	0.04%	0.04%	0.03%	0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%
02/09/2010	-0.03%	-0.04%	-0.06%	-0.05%	-0.05%	-0.02%	-0.02%	-0.02%	0.01%	0.00%	0.01%	0.02%	0.02%	0.03%	0.04%
01/09/2010	0.01%	0.01%	0.04%	0.05%	0.09%	0.10%	0.09%	0.10%	0.09%	0.09%	0.07%	0.07%	0.07%	0.07%	0.06%
31/08/2010	-0.02%	-0.02%	-0.06%	-0.09%	-0.12%	-0.10%	-0.08%	-0.09%	-0.05%	-0.04%	-0.02%	-0.02%	-0.03%	-0.02%	-0.02%
30/08/2010	0.02%	0.00%	0.01%	0.00%	0.01%	0.03%	0.02%	0.02%	0.03%	0.00%	0.00%	0.06%	0.01%	-0.01%	0.00%
27/08/2010	-0.01%	0.01%	0.01%	0.03%	0.04%	0.04%	0.07%	0.07%	0.05%	0.05%	0.09%	0.07%	0.11%	0.11%	0.08%
26/08/2010	0.02%	0.02%	0.03%	0.07%	0.10%	0.14%	0.16%	0.16%	0.15%	0.16%	0.12%	0.10%	0.10%	0.11%	0.13%
25/08/2010	-0.01%	0.00%	0.04%	0.04%	0.08%	0.08%	0.08%	0.06%	0.06%	0.06%	0.06%	0.05%	0.06%	0.06%	0.05%
24/08/2010	0.00%	0.01%	0.00%	-0.01%	-0.02%	-0.04%	-0.05%	-0.05%	-0.08%	-0.09%	-0.09%	-0.10%	-0.09%	-0.10%	-0.11%
23/08/2010	-0.01%	-0.01%	0.01%	0.00%	0.01%	-0.02%	-0.05%	-0.06%	-0.08%	-0.10%	-0.08%	-0.02%	-0.10%	-0.13%	-0.11%
20/08/2010	-0.01%	-0.02%	-0.05%	-0.04%	-0.04%	-0.02%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.02%	-0.02%	-0.07%	-0.02%	0.00%	-0.01%
19/08/2010	-0.03%	-0.02%	-0.02%	-0.02%	-0.03%	-0.05%	-0.04%	-0.03%	-0.02%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.00%
18/08/2010	-0.01%	-0.01%	0.00%	-0.03%	-0.05%	-0.06%	-0.10%	-0.12%	-0.13%	-0.13%	-0.13%	-0.13%	-0.13%	-0.13%	-0.13%
17/08/2010	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.02%	-0.01%	0.00%	-0.01%	-0.01%	-0.03%	-0.03%	-0.03%	-0.04%	-0.05%	-0.04%
16/08/2010	-0.02%	-0.04%	-0.06%	-0.08%	-0.11%	-0.15%	-0.17%	-0.15%	-0.16%	-0.15%	-0.19%	-0.18%	-0.18%	-0.17%	-0.16%
13/08/2010	0.00%	0.00%	0.00%	-0.02%	-0.04%	-0.07%	-0.06%	-0.06%	-0.05%	-0.05%	-0.01%	-0.06%	-0.05%	-0.04%	-0.03%
12/08/2010	0.00%	-0.02%	-0.03%	-0.04%	-0.05%	-0.03%	-0.02%	-0.01%	0.01%	0.03%	0.02%	0.05%	0.06%	0.06%	0.05%
11/08/2010	0.01%	0.01%	0.03%	0.05%	0.05%	-0.02%	-0.03%	-0.06%	-0.06%	-0.09%	-0.05%	-0.06%	-0.06%	-0.05%	-0.05%
10/08/2010	0.00%	0.02%	0.02%	0.00%	0.00%	0.01%	-0.02%	-0.01%	-0.02%	-0.01%	-0.03%	-0.03%	-0.03%	-0.03%	-0.05%

Tabela 4.2 – Primeira diferença

Para que ACP funcione corretamente a média de cada dimensão de dado deve ser subtraída, gerando uma base de dados com média zero. A primeira linha da Tabela 4.2 demonstra o cálculo da média para cada dimensão. A Tabela 4.3 apresenta os dados transformados com a subtração das médias.

	73	135	197	262	324	449	575	698	828	950	1081	1203	1331	1455	1582
17/09/2010	-0.01%	0.00%	0.01%	0.02%	0.04%	0.06%	0.03%	0.01%	-0.04%	-0.03%	-0.03%	-0.05%	-0.05%	-0.05%	-0.05%
16/09/2010	-0.01%	0.01%	0.02%	0.06%	0.06%	0.09%	0.10%	0.10%	0.11%	0.10%	0.10%	0.11%	0.12%	0.11%	0.11%
15/09/2010	-0.01%	-0.02%	-0.01%	-0.02%	0.01%	0.01%	0.04%	0.05%	0.05%	0.06%	0.06%	0.05%	0.05%	0.07%	0.07%
14/09/2010	-0.01%	0.00%	-0.01%	-0.03%	-0.02%	-0.03%	-0.06%	-0.04%	-0.04%	-0.02%	-0.04%	-0.01%	-0.01%	-0.04%	-0.02%
13/09/2010	-0.01%	-0.01%	0.02%	0.04%	0.03%	0.03%	0.03%	0.03%	0.05%	0.03%	0.06%	0.05%	0.06%	0.08%	0.07%
10/09/2010	0.00%	-0.01%	0.00%	0.01%	0.01%	0.02%	0.04%	0.05%	0.07%	0.09%	0.07%	0.06%	0.07%	0.07%	0.06%
09/09/2010	-0.02%	-0.02%	-0.04%	-0.07%	-0.07%	-0.06%	-0.05%	-0.02%	-0.01%	-0.01%	0.04%	0.04%	0.02%	0.02%	0.04%
08/09/2010	-0.01%	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%	0.02%	0.03%	0.02%	0.00%	-0.01%	-0.02%	-0.01%	0.01%	0.02%	0.02%
06/09/2010	-0.01%	-0.01%	-0.02%	-0.03%	-0.03%	-0.03%	-0.02%	-0.02%	-0.02%	0.00%	-0.01%	-0.01%	-0.02%	-0.04%	-0.06%
03/09/2010	0.00%	0.00%	0.01%	0.04%	0.05%	0.05%	0.05%	0.04%	0.05%	0.04%	0.03%	0.01%	-0.01%	0.00%	0.00%
02/09/2010	-0.03%	-0.05%	-0.07%	-0.06%	-0.06%	-0.02%	-0.02%	-0.02%	0.01%	0.00%	0.01%	0.02%	0.02%	0.03%	0.04%
01/09/2010	0.00%	0.00%	0.03%	0.04%	0.08%	0.10%	0.09%	0.10%	0.09%	0.09%	0.08%	0.07%	0.07%	0.07%	0.07%
31/08/2010	-0.03%	-0.02%	-0.07%	-0.10%	-0.13%	-0.10%	-0.08%	-0.09%	-0.05%	-0.04%	-0.02%	-0.02%	-0.02%	-0.02%	-0.01%
30/08/2010	0.01%	-0.01%	0.01%	0.00%	0.00%	0.03%	0.02%	0.02%	0.03%	0.00%	0.00%	0.06%	0.01%	-0.01%	0.00%
27/08/2010	-0.01%	0.00%	0.00%	0.03%	0.03%	0.04%	0.07%	0.07%	0.05%	0.05%	0.09%	0.07%	0.12%	0.12%	0.09%
26/08/2010	0.01%	0.01%	0.03%	0.06%	0.09%	0.14%	0.16%	0.16%	0.15%	0.16%	0.13%	0.11%	0.10%	0.12%	0.14%
25/08/2010	-0.01%	-0.01%	0.03%	0.04%	0.08%	0.07%	0.08%	0.06%	0.06%	0.06%	0.06%	0.05%	0.07%	0.06%	0.06%
24/08/2010	-0.01%	0.00%	-0.01%	-0.01%	-0.03%	-0.04%	-0.05%	-0.06%	-0.08%	-0.09%	-0.09%	-0.09%	-0.09%	-0.09%	-0.10%
23/08/2010	-0.02%	-0.01%	0.00%	-0.01%	0.00%	-0.03%	-0.05%	-0.06%	-0.08%	-0.10%	-0.07%	-0.02%	-0.09%	-0.12%	-0.11%
20/08/2010	-0.02%	-0.03%	-0.05%	-0.05%	-0.05%	-0.02%	-0.01%	-0.01%	0.01%	0.02%	-0.01%	-0.07%	-0.01%	0.01%	-0.01%
19/08/2010	-0.03%	-0.03%	-0.03%	-0.02%	-0.03%	-0.06%	-0.04%	-0.03%	-0.02%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.01%	0.00%
18/08/2010	-0.02%	-0.02%	-0.01%	-0.04%	-0.05%	-0.07%	-0.10%	-0.12%	-0.13%	-0.13%	-0.13%	-0.13%	-0.13%	-0.13%	-0.12%
17/08/2010	-0.02%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.02%	-0.01%	0.00%	-0.01%	-0.01%	-0.03%	-0.03%	-0.03%	-0.04%	-0.04%	-0.04%
16/08/2010	-0.03%	-0.05%	-0.06%	-0.08%	-0.12%	-0.15%	-0.17%	-0.15%	-0.16%	-0.15%	-0.19%	-0.18%	-0.18%	-0.17%	-0.16%
13/08/2010	-0.01%	0.00%	-0.02%	-0.03%	-0.05%	-0.07%	-0.07%	-0.06%	-0.06%	-0.05%	-0.01%	-0.06%	-0.05%	-0.03%	-0.03%
12/08/2010	-0.01%	-0.03%	-0.04%	-0.05%	-0.05%	-0.03%	-0.02%	-0.01%	0.01%	0.03%	0.02%	0.05%	0.07%	0.06%	0.06%
11/08/2010	0.01%	0.01%	0.02%	0.04%	0.04%	-0.02%	-0.03%	-0.06%	-0.06%	-0.09%	-0.05%	-0.06%	-0.05%	-0.04%	-0.05%
10/08/2010	-0.01%	0.01%	0.01%	0.00%	0.00%	0.01%	-0.02%	-0.01%	-0.02%	-0.01%	-0.03%	-0.03%	-0.02%	-0.03%	-0.05%

Tabela 4.3 – Primeira diferença com média zero

O passo seguinte é calcular a matriz de variâncias e covariâncias com os dados obtidos anteriormente. Os resultados são apresentados na Tabela 4.4.

Covar	73	135	197	262	324	449	575	698	828	950	1081	1203	1331	1455	1582
73	6.67E-08	7.04E-08	7.71E-08	7.68E-08	6.68E-08	5.29E-08	3.97E-08	2.89E-08	2.03E-08	2.27E-08	1.60E-08	7.25E-09	3.41E-09	3.46E-09	3.13E-09
135	7.04E-08	1.28E-07	1.40E-07	1.44E-07	1.36E-07	1.12E-07	9.18E-08	7.50E-08	6.39E-08	6.23E-08	5.10E-08	4.06E-08	3.40E-08	3.13E-08	2.82E-08
197	7.71E-08	1.40E-07	1.91E-07	2.01E-07	1.97E-07	1.72E-07	1.52E-07	1.30E-07	1.14E-07	1.11E-07	9.75E-08	8.41E-08	7.28E-08	7.21E-08	7.03E-08
262	7.68E-08	1.44E-07	2.01E-07	2.38E-07	2.38E-07	2.16E-07	1.98E-07	1.76E-07	1.56E-07	1.54E-07	1.38E-07	1.25E-07	1.10E-07	1.08E-07	1.06E-07
324	6.68E-08	1.36E-07	1.97E-07	2.38E-07	2.68E-07	2.49E-07	2.43E-07	2.23E-07	2.04E-07	2.01E-07	1.85E-07	1.71E-07	1.59E-07	1.55E-07	1.52E-07
449	5.29E-08	1.12E-07	1.72E-07	2.16E-07	2.49E-07	2.85E-07	2.86E-07	2.77E-07	2.69E-07	2.69E-07	2.53E-07	2.39E-07	2.30E-07	2.31E-07	2.29E-07
575	3.97E-08	9.18E-08	1.52E-07	1.98E-07	2.43E-07	2.86E-07	3.30E-07	3.22E-07	3.21E-07	3.30E-07	3.11E-07	2.96E-07	2.88E-07	2.88E-07	2.86E-07
698	2.89E-08	7.50E-08	1.30E-07	1.76E-07	2.23E-07	2.77E-07	3.22E-07	3.49E-07	3.43E-07	3.57E-07	3.45E-07	3.33E-07	3.25E-07	3.24E-07	3.22E-07
828	2.03E-08	6.39E-08	1.14E-07	1.56E-07	2.04E-07	2.69E-07	3.21E-07	3.43E-07	3.83E-07	3.86E-07	3.76E-07	3.61E-07	3.57E-07	3.62E-07	3.62E-07
950	2.27E-08	6.23E-08	1.11E-07	1.54E-07	2.01E-07	2.69E-07	3.30E-07	3.57E-07	3.86E-07	4.35E-07	4.09E-07	3.92E-07	3.89E-07	3.94E-07	3.96E-07
1081	1.60E-08	5.10E-08	9.75E-08	1.38E-07	1.85E-07	2.53E-07	3.11E-07	3.45E-07	3.76E-07	4.09E-07	4.26E-07	4.04E-07	3.94E-07	3.98E-07	3.99E-07
1203	7.25E-09	4.06E-08	8.41E-08	1.25E-07	1.71E-07	2.39E-07	2.96E-07	3.33E-07	3.61E-07	3.92E-07	4.04E-07	4.14E-07	4.04E-07	4.00E-07	3.98E-07
1331	3.41E-09	3.40E-08	7.28E-08	1.10E-07	1.59E-07	2.30E-07	2.88E-07	3.25E-07	3.57E-07	3.89E-07	3.94E-07	4.04E-07	4.30E-07	4.35E-07	4.23E-07
1455	3.46E-09	3.13E-08	7.21E-08	1.08E-07	1.55E-07	2.31E-07	2.88E-07	3.24E-07	3.62E-07	3.94E-07	3.98E-07	4.00E-07	4.35E-07	4.68E-07	4.63E-07
1582	3.13E-09	2.82E-08	7.03E-08	1.06E-07	1.52E-07	2.29E-07	2.86E-07	3.22E-07	3.62E-07	3.96E-07	3.99E-07	3.98E-07	4.23E-07	4.63E-07	4.72E-07

Tabela 4.4 – Matriz de Variâncias e Covariâncias

Os valores na diagonal destacada na Tabela 4.4 representam as variâncias de cada vértice, enquanto que os valores fora dela representam as covariâncias. Note que a soma dos valores da diagonal principal é 4.88497E-06 (esta informação será utilizada mais adiante).

Com a matriz de variâncias e covariâncias o passo seguinte é o cálculo dos autovetores e autovalores, conforme explicado no capítulo 3. Diversos programas matemáticos oferecem funções já definidas para tal. As Tabelas 4.5 e 4.6 representam, respectivamente, os autovalores e autovetores da matriz acima e foram obtidas a partir de funções em VBA no Excel.

λ	Autovalores	% Explicação
λ_1	3.75426E-06	77%
λ_2	7.42056E-07	15%
λ_3	1.33582E-07	3%
λ_4	6.96741E-08	1%
λ_5	4.32878E-08	1%
λ_6	2.83271E-08	1%
λ_7	2.18953E-08	0%
λ_8	2.01123E-08	0%
λ_9	1.52142E-08	0%
λ_{10}	1.38612E-08	0%
λ_{11}	1.18986E-08	0%
λ_{12}	1.16015E-08	0%
λ_{13}	9.97365E-09	0%
λ_{14}	7.42805E-09	0%
λ_{15}	1.79573E-09	0%
Total	4.88497E-06	100%

Tabela 4.5 – Tabela de Autovalores

Autovetores														
c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8	c9	c10	c11	c12	c13	c14	c15
0.0252	0.1954	0.2451	0.3416	0.3719	0.4689	0.4484	0.0822	0.2671	0.3659	0.0792	0.0417	0.0068	0.0717	0.0065
0.0652	0.3295	0.3165	0.3284	0.1525	0.1884	-0.3561	0.0264	-0.1947	-0.3860	-0.2417	-0.3249	-0.3095	-0.2146	0.0117
0.1109	0.4121	0.2739	0.1255	-0.0270	-0.1694	-0.1600	0.0365	-0.2603	-0.0719	0.0261	0.4484	0.3409	0.5280	-0.0343
0.1477	0.4395	0.1622	-0.0485	-0.1994	-0.2617	0.0663	-0.0616	-0.0012	0.2075	0.3267	0.1452	0.0803	-0.6801	0.0027
0.1859	0.4063	-0.0022	-0.2321	-0.2680	-0.1806	0.0429	-0.1279	0.2025	0.3661	-0.2589	-0.4679	-0.2090	0.3452	0.0018
0.2344	0.2779	-0.1618	-0.3150	0.0158	0.1597	0.1737	0.2108	0.3970	-0.6154	0.3075	-0.0321	0.0109	0.0998	0.0029
0.2731	0.1719	-0.3237	-0.2357	0.1471	0.2099	0.1116	-0.1404	-0.0918	-0.0020	-0.6306	0.4330	-0.0400	-0.2061	-0.0107
0.2907	0.0715	-0.3362	-0.0808	0.0688	0.2998	0.0723	-0.0064	-0.6723	0.1367	0.3448	-0.2969	0.0924	0.0631	0.0258
0.3075	-0.0210	-0.2687	0.0719	0.2934	-0.0761	-0.5960	0.4427	0.2615	0.3198	0.0910	0.0646	-0.0239	-0.0193	-0.0215
0.3270	-0.0701	-0.1863	0.3267	0.3184	-0.3047	0.0106	-0.6824	0.1560	-0.1256	0.1776	-0.0011	-0.0826	0.0817	0.0393
0.3222	-0.1198	-0.1086	0.4155	-0.1368	-0.2923	0.3358	0.3450	-0.0074	-0.1348	-0.3038	-0.2542	0.4124	-0.1018	-0.0773
0.3145	-0.1596	-0.0239	0.3051	-0.5355	0.1273	0.0741	0.1233	-0.0280	0.0060	0.1030	0.3050	-0.5139	0.0989	0.2828
0.3162	-0.2141	0.2131	-0.0181	-0.3401	0.4199	-0.2520	-0.2740	0.1771	0.0290	0.0102	-0.0312	0.2784	-0.0416	-0.5151
0.3233	-0.2453	0.4126	-0.2836	0.1045	0.0558	-0.0749	-0.0574	0.0350	0.0165	-0.0752	-0.0947	0.2647	-0.0412	0.6883
0.3220	-0.2492	0.3994	-0.2896	0.2827	-0.2752	0.2231	0.1805	-0.1946	0.0002	0.0347	0.0572	-0.3720	0.0369	-0.4132

Tabela 4.6 – Matriz de Autovetores

É possível notar na Tabela 4.5 que a soma dos autovalores é igual à soma da diagonal principal da matriz de variâncias e covariâncias. Esta propriedade permite determinar o percentual de explicação de cada componente sobre as variâncias totais dos dados originais (coluna % Explicação na Tabela 4.5). Em destaque estão os autovalores das três primeiras componentes que, em conjunto, explicam aproximadamente 95% da variabilidade total dos dados.

Na Tabela 4.6 estão destacados os autovetores que representam as três componentes principais que, conjuntamente, são capazes de explicar 95% da variabilidade total dos dados. Podemos visualizar o comportamento das três primeiras componentes, conforme Gráfico 4.1.

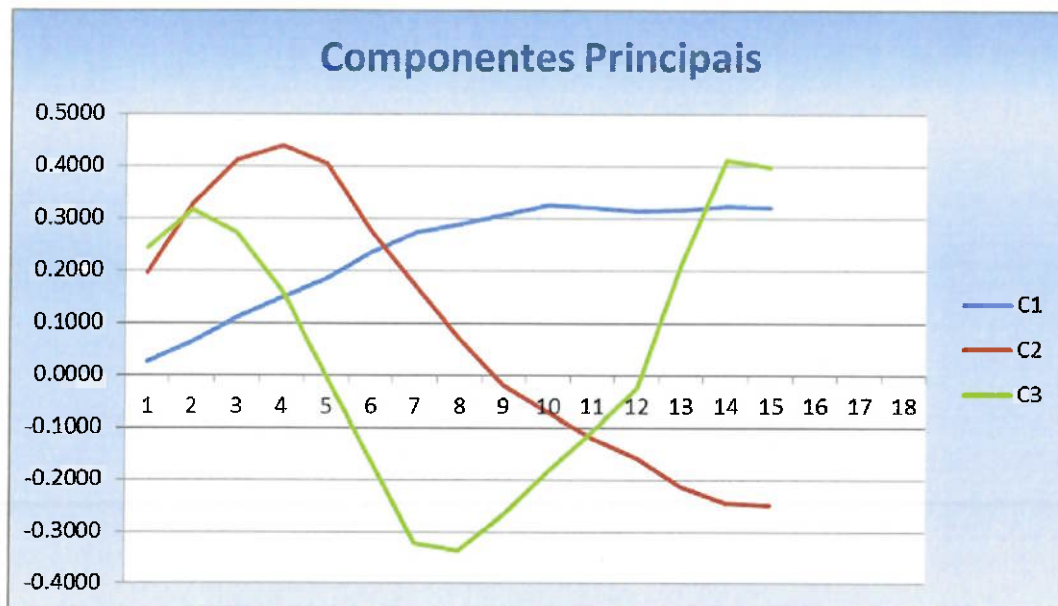


Gráfico 4.1 – Três primeiras componentes principais

Os resultados obtidos são muito semelhantes aos obtidos por Litterman e Scheinkman (1991) e outros trabalhos semelhantes. Choques na primeira componente (c1) levam a movimentos paralelos da curva de juros, enquanto que choques na segunda componente (c2) levam a movimentos de inclinação. Finalmente, choques na terceira componente (c3) causam efeitos de curvatura na curva de juros.

Realizando esta mesma análise para os 20 dias anteriores a 17/09/2010 é possível observar que o poder de explicação das três primeiras componentes no período é constante, conforme Tabela 4.7.

Datas	Percentual de explicação total dos movimentos da ETTJ			
	c1	c2	c3	Total
19/08/2010	76.94%	15.22%	2.73%	94.89%
20/08/2010	76.92%	15.18%	2.73%	94.83%
23/08/2010	76.62%	15.30%	2.77%	94.69%
24/08/2010	76.70%	15.26%	2.76%	94.71%
25/08/2010	76.71%	15.24%	2.74%	94.69%
26/08/2010	77.06%	14.97%	2.74%	94.76%
27/08/2010	77.14%	14.91%	2.71%	94.77%
30/08/2010	77.14%	14.89%	2.71%	94.75%
31/08/2010	77.01%	15.01%	2.70%	94.73%
01/09/2010	77.16%	14.89%	2.70%	94.75%
02/09/2010	77.08%	14.96%	2.70%	94.74%
03/09/2010	77.07%	14.96%	2.71%	94.74%
06/09/2010	77.08%	14.95%	2.70%	94.73%
08/09/2010	77.07%	14.96%	2.71%	94.73%
09/09/2010	76.93%	15.09%	2.71%	94.73%
10/09/2010	76.98%	15.06%	2.71%	94.74%
13/09/2010	77.10%	14.96%	2.71%	94.76%
14/09/2010	77.12%	14.93%	2.71%	94.76%
15/09/2010	77.18%	14.94%	2.68%	94.80%
16/09/2010	77.35%	14.84%	2.65%	94.85%
17/09/2010	76.85%	15.19%	2.73%	94.78%

Tabela 4.7 – Poder de explicação das três primeiras componentes

Em resumo, verificamos que os movimentos paralelos, de inclinação e curvatura da ETTJ pré-fixada em Reais explicam, aproximadamente, 95% da variabilidade total observada no período. Pelo fato de apresentarem este alto poder de explicação, o modelo para imunização de carteiras através da metodologia de ACP será baseado nas informações obtidas dessas três primeiras componentes.

5. Aplicação de ACP para imunização de carteiras

Este capítulo apresenta a metodologia descrita em Valli e Varga (1998) para imunização de carteiras utilizando a metodologia de ACP. Descreveremos como imunizar uma carteira de renda fixa em relação aos fatores principais que explicam as movimentações de uma ETTJ.

O primeiro passo é garantir que temos uma carteira representada por fluxos *zero coupons*, ou seja, que não possuem pagamentos de juros intermediários. O conjunto de prazos de vencimento desta carteira será representado pelo vetor T , em que T_i representa o i -ésimo prazo, ao ano e em ordem crescente, enquanto que o vetor R representa as respectivas taxas de juros contínuas ao ano, para cada vencimento. O formato das taxas utilizadas será contínuo (envolvendo função exponencial com base neperiana), pois apresenta a vantagem de simplificar as funções matemáticas quando se pretende analisar os retornos gerados por taxas de juros.

$$T = | T_1 \quad T_2 \quad \dots \quad T_N |$$

$$R = | r_1 \quad r_2 \quad \dots \quad r_N |$$

Consideremos uma carteira F em que F_i representa o valor futuro de cada fluxo *zero coupon*, ordenado por ordem crescente de prazo:

$$F = | F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_N |$$

E uma carteira VP representando o valor presente de F . Dado que as taxas estão em formato contínuo, $VP_i = F_i e^{-r_i T_i}$.

$$VP = | F_1 e^{-r_1 T_1} \quad F_2 e^{-r_2 T_2} \quad \dots \quad F_N e^{-r_N T_N} |$$

Considerando $VP_i = F_i e^{-r_i T_i}$, temos:

$$VP = | VP_1 \quad VP_2 \quad \dots \quad VP_N |$$

O que pretendemos analisar são as variações dos valores de VP resultantes de variações em R . Portanto, define-se o vetor

$$\Delta r = | \Delta r_1 \quad \Delta r_2 \quad \dots \quad \Delta r_N |^T$$

Sendo que o efeito financeiro de uma variação Δr_i em VP_i , por expansão em séries de Taylor, pode ser aproximado pela derivada parcial de primeira ordem de VP_i em função de r_i :

$$\frac{\partial VP_i}{\partial r_i} = -T_i \cdot VP_i = D_{VP_i}$$

Multiplicado por Δr_i :

$$D_{VP_i}^{\Delta r_i} = D_{VP_i} \cdot \Delta r_i$$

Considerando:

$$D_{VP} = - | T_1 \cdot VP_1 \quad T_2 \cdot VP_2 \quad \dots \quad T_N \cdot VP_N |$$

Teremos:

$$D_{VP}^{\Delta r} = D_{VP} \cdot \Delta r$$

Suponha que as variações nas taxas de juros tenham distribuição normal, assim como a matriz X no capítulo 3. Ao aplicarmos a metodologia de análise de componentes principais para se encontrar as K componentes que explicam as variações da ETTJ poderemos perceber que

$$P_k \cdot \Lambda_k^{1/2} \quad (5.1)$$

representa a variação nas taxas de juros para um desvio padrão em cada fator K. Ou seja, para uma componente específica, representa o vetor Δr descrito anteriormente.

Suponha que pretendemos imunizar uma carteira em relação à k-ésima componente principal, investindo determinada quantia Q_L em um prazo T_L ($1 \leq L \leq N$). A quantia investida deve ser tal que a variação financeira de Q_L provocada por uma variação em Δr_L compense $D_{VP}^{\Delta r}$. Assim:

$$Q_L \cdot T_L \cdot \Delta r_L^K = D_{VP}^{\Delta r^K} \quad (5.2)$$

Portanto, para se imunizar a carteira VP em relação à k-ésima componente principal bastaria investir no prazo T_L a quantia:

$$Q_L = \frac{D_{VP}^{\Delta r^K}}{T_L \cdot \Delta r_L^K}$$

Da mesma forma, podemos optar por imunizar a carteira VP em relação as K primeiras componentes principais, que explicam suficientemente o comportamento da ETTJ pré-fixada em Reais. Neste caso, deveremos escolher K prazos (T_K) e uma carteira associada a esses prazos (Q_K):

$$T_K = \begin{vmatrix} T_{L_1} & T_{L_2} & \dots & T_{L_K} \end{vmatrix}$$

$$Q_K = \begin{vmatrix} Q_{L_1} & Q_{L_2} & \dots & Q_{L_K} \end{vmatrix}$$

Que sejam solução do sistema de equações:

$$D_Q^{\Delta r^j} = -D_{VP}^{\Delta r^j} \quad , j = 1, \dots, K \quad (5.3)$$

Ou seja, devemos escolher $D_Q^{\Delta r'}$ de forma que a aproximação linear da variação nos preços das duas carteiras causada por cada um dos fatores principais se compensem.

É possível reescrever 5.3 utilizando 5.2, e poderemos verificar que o sistema acima é formado por K equações lineares com K incógnitas:

$$\begin{cases} (T_{L_1} \Delta r_{L_1}^1) Q_{L_1} + (T_{L_2} \Delta r_{L_2}^1) Q_{L_2} + \dots + (T_{L_K} \Delta r_{L_K}^1) Q_{L_K} = D_{VP}^{\Delta r^1} \\ (T_{L_1} \Delta r_{L_1}^2) Q_{L_1} + (T_{L_2} \Delta r_{L_2}^2) Q_{L_2} + \dots + (T_{L_K} \Delta r_{L_K}^2) Q_{L_K} = D_{VP}^{\Delta r^2} \\ \vdots \\ (T_{L_1} \Delta r_{L_1}^K) Q_{L_1} + (T_{L_2} \Delta r_{L_2}^K) Q_{L_2} + \dots + (T_{L_K} \Delta r_{L_K}^K) Q_{L_K} = D_{VP}^{\Delta r^K} \end{cases}$$

Por álgebra linear podemos garantir que o sistema de equações acima tem solução única se, e somente se, o determinante da matriz quadrada composta pelos termos entre parênteses é diferente de zero. Por 5.1 podemos decompor os termos entre parênteses nos seguintes fatores:

$$\begin{pmatrix} T_{L_1} \Delta r_{L_1}^1 & T_{L_2} \Delta r_{L_2}^1 & \dots & T_{L_K} \Delta r_{L_K}^1 \\ T_{L_1} \Delta r_{L_1}^2 & T_{L_2} \Delta r_{L_2}^2 & \dots & T_{L_K} \Delta r_{L_K}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{L_1} \Delta r_{L_1}^K & T_{L_2} \Delta r_{L_2}^K & \dots & T_{L_K} \Delta r_{L_K}^K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & & & \\ & \lambda_2^{1/2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_K^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{L_1,1} & p_{L_2,1} & \dots & p_{L_K,1} \\ p_{L_1,2} & p_{L_2,2} & \dots & p_{L_K,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{L_1,K} & p_{L_2,K} & \dots & p_{L_K,K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{L_1} & & & \\ & T_{L_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_{L_K} \end{pmatrix}$$

Sabe-se que uma matriz diagonal possui determinante diferente de zero se todos os valores da diagonal forem diferentes de zero. Assim, podemos afirmar que as duas matrizes $\Lambda^{1/2}$ e T_L acima possuem determinantes não nulos. Resta-nos, então, analisar as propriedades do determinante de P_K . Conforme o capítulo 3, P representa o conjunto de autovalores da matriz Σ . E como P é ortonormal seu determinante é igual a 1 (um). Por álgebra linear, sabemos que fixado K o determinante da matriz P pode ser escrito como uma combinação linear de determinantes de todas as sub-matrizes quadradas $K \times K$ (matrizes representando as primeiras K colunas de P), ou seja, P_K . Portanto, se todas as

sub-matrizes $K \times K$ tivessem seus determinantes nulos o determinante de P também seria nulo, o que não ocorre, pois sabemos que ele é igual a 1.

Através da análise acima podemos concluir que podemos formar uma carteira composta por K prazos que imuniza a carteira VP em relação às K primeiras componentes principais. Definindo as seguintes variáveis:

$$P_{L,K} = \begin{pmatrix} p_{L_1,1} & p_{L_2,1} & \cdots & p_{L_K,1} \\ p_{L_1,2} & p_{L_2,2} & \cdots & p_{L_K,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{L_1,K} & p_{L_2,K} & \cdots & p_{L_K,K} \end{pmatrix}$$

$$D_{VP,K}^{\Delta r} = \begin{pmatrix} D_{VP}^{\Delta r^1} & D_{VP}^{\Delta r^2} & \cdots & D_{VP}^{\Delta r^K} \end{pmatrix}$$

A solução do problema pode ser definida pela função:

$$Q_L = \text{diag}(T_K)^{-1} \cdot A_{L,K}^{-1} \cdot \text{diag}(\lambda)^{-1/2} \cdot D_{VP,K}^{\Delta r}$$

Desta forma, por 5.3, podemos imunizar (aproximação de primeira ordem) a carteira VP em relação aos K fatores principais que explicam o comportamento da ETTJ pré-fixada em Reais investindo a quantia Q_L nos T_L prazos pré-determinados.

No caso prático de imunização que será apresentado no capítulo 7 iremos adotar como variáveis as três primeiras componentes, pois, conforme verificado no capítulo 4, em geral, elas são suficientes para explicar cerca de 95% das variações da ETTJ pré-fixada em Reais. Podemos adotar alguns critérios para escolha dos três prazos como, por exemplo, alta liquidez e baixa correlação entre eles. Neste trabalho escolheremos como ponto central o vencimento de contrato Futuro de DI mais próximo ao prazo médio da carteira e que apresenta razoável liquidez quando analisamos todos os vencimentos. Outros dois vencimentos serão selecionados, com prazos mais curto e mais longo (razoavelmente equidistantes), também levando em consideração a liquidez dos contratos.

Finalmente, o modelo para imunização de carteiras testado será composto por um sistema com solução única composto por três equações lineares e três incógnitas, que representarão as quantidades a serem investidas em cada prazo.

6. Aplicação de *Duration Hedge* para imunização de carteiras

O conceito de *duration* é frequentemente utilizado como uma forma de reduzir a complexidade do risco multidimensional de taxas de juros, identificando um único fator de risco que representará uma aproximação de todos os fatores que afetam uma estrutura a termo.

O método utiliza o conceito de expansão em séries de Taylor, uma ferramenta matemática frequentemente utilizada em cálculo para aproximar a variação no valor de uma função causada pela variação no valor de uma variável. Tal variação pode ser aproximada por uma série de funções, referentes às derivadas da função principal.

A *duration* representa a aproximação de primeira ordem em séries de Taylor de uma função. Ou seja, o conceito utiliza a derivada de primeira ordem da função matemática que representa o preço de um título ou carteira. Para um determinado título de renda fixa podemos definir tal função conforme abaixo:

$$VP_t = \sum_{j=1}^m \frac{F_j}{(1+i_t)^{t_j-t}}$$

Onde:

VP = valor presente do título;

F = valor financeiro pago em j;

j = quantidade de fluxos de caixa do título;

i = taxa interna de retorno (TIR).

Desta forma, a *duration*, ou derivada de primeira ordem da função acima é:

$$dur = - \sum_{j=1}^m \frac{(t_j - t) F_j}{(1+i_t)^{t_j-t+1}}$$

Considere uma carteira com preço $P(i)$, valor de face N_P e TIR i . Desejamos investir determinado valor em um contrato com preço $H(i)$, valor de face N_H e TIR i_H , formando uma carteira total T , de forma que as variações financeiras causadas por pequenas movimentações paralelas nas taxas de juros se compensem. Assim, teremos:

$$dT = [N_P P'(i) + Q N_H H'(i_H)] di = 0$$

Podendo ser escrito como:

$$Q \cdot N_H \cdot dur[H(i_H)] = -N_P \cdot dur[P(i)]$$

Finalmente, chegando em:

$$Q = -\frac{N_P \cdot dur[P(i)]}{N_H \cdot dur[H(i_H)]}$$

O método de imunização de carteiras por *duration* é bastante simples. Entretanto, é preciso ter em mente que ele é baseado na premissa de que uma determinada ETTJ é afetada somente por variações paralelas nas taxas de juros.

Quando apresentamos a aplicação do método de ACP (capítulo 4) verificamos que movimentações paralelas são responsáveis, em média, por 77% das variações da ETTJ pré-fixada em Reais (conforme Tabela 4.7). Portanto, é possível concluir que ao realizarmos *hedge* de uma carteira por *duration* estaremos desconsiderando as movimentações de inclinação e curvatura, que são responsáveis por, em média, 18% das movimentações da ETTJ.

7. Imunização de carteiras por ACP x *Duration*: análise de desempenho

Neste capítulo apresentaremos as análises realizadas com a finalidade de comparar o desempenho, através das metodologias de ACP e *duration hedge*, da imunização de uma carteira composta por títulos públicos federais pré-fixados.

Conforme mencionado na introdução deste trabalho, utilizaremos como instrumento de *hedge* os contratos futuros de DI da BM&F Bovespa, que são largamente utilizados pelos praticantes do mercado para proteção de suas posições nos títulos acima citados.

Neste ponto, cabe uma observação em relação aos fatores de risco que envolvem uma carteira composta por LTNs e NTN-Fs. Se fôssemos construir duas curvas de juros *zero coupon*, uma baseada nos contratos futuros de DI negociados em bolsa e outra baseada nos títulos públicos pré-fixados, verificaríamos que a segunda seria mais alta que a primeira. Esta diferença é frequentemente chamada de *spread* de governo e é composta por fatores como risco de crédito de governo, liquidez e efeito caixa. A discussão desses efeitos vai além do escopo deste trabalho. Entretanto, é importante compreendermos a existência deste fator, pois ao imunizarmos uma carteira composta por títulos públicos com contratos negociados no mercado privado, estaremos ignorando os efeitos provocados por variações na estrutura a termo de *spread* de governo.

A Tabela 7.1 apresenta a carteira inicial, composta por LTNs e NTN-Fs de diversos vencimentos.

Título	Vencimento	(%aa) Cupom	Quantidade
LTN	01-Jan-11	0.000%	5,000
LTN	01-Apr-11	0.000%	15,000
LTN	01-Jul-11	0.000%	10,000
LTN	01-Oct-11	0.000%	3,000
LTN	01-Jul-12	0.000%	30,000
NTNF	01-Jan-12	10.000%	9,000
NTNF	01-Jan-13	10.000%	13,000
NTNF	01-Jan-14	10.000%	25,000
NTNF	01-Jan-17	10.000%	20,000

Tabela 7.1 – Carteira inicial

O comportamento do valor presente desta carteira durante o período de análise está demonstrado na Tabela 7.2. Os cálculos foram feitos baseados nos preços unitários publicados no Mercado Secundário da Andima (www.andima.com.br).

Data	Valor Presente	Varição
19/08/2010	120,367,043	
20/08/2010	120,449,759	82,715
23/08/2010	120,692,059	242,300
24/08/2010	120,926,599	234,541
25/08/2010	120,819,210	(107,389)
26/08/2010	120,537,229	(281,981)
27/08/2010	120,417,542	(119,687)
30/08/2010	120,432,222	14,680
31/08/2010	120,616,623	184,401
01/09/2010	120,466,475	(150,148)
02/09/2010	120,513,278	46,803
03/09/2010	120,496,984	(16,294)
06/09/2010	120,649,883	152,899
08/09/2010	120,685,164	35,281
09/09/2010	120,762,910	77,746
10/09/2010	120,695,973	(66,936)
13/09/2010	120,639,726	(56,247)
14/09/2010	120,775,525	135,799
15/09/2010	120,714,435	(61,091)
16/09/2010	120,513,984	(200,450)
17/09/2010	120,599,229	85,244

Tabela 7.2 – Valor diário da carteira

O primeiro passo é transformar a carteira inicial em uma carteira composta por fluxos *zero coupons*. Para isso, basta abrir os fluxos de caixa de cada título, consolidando os valores futuros em Reais em um único fluxo de vencimentos, obtendo, assim, o GAP da carteira, conforme Tabela 7.3.

Data	Fluxo VF (R\$)
03/01/2011	8,270,193
01/04/2011	15,000,000
01/07/2011	13,270,193
03/10/2011	3,000,000
02/01/2012	12,270,193
02/07/2012	32,830,913
02/01/2013	15,830,913
01/07/2013	2,196,398
02/01/2014	27,196,398
01/07/2014	976,177
02/01/2015	976,177
01/07/2015	976,177
04/01/2016	976,177
01/07/2016	976,177
02/01/2017	20,976,177

Tabela 7.3 – GAP da carteira

Com a carteira acima aplicamos os conceitos apresentados nos capítulos 5 (ACP) e 6 (*Duration*). No caso de imunização por *duration*, para se determinar o contrato de DI futuro utilizado para hedge foram considerados como critério o prazo médio da carteira e a liquidez dos contratos. Já para a imunização por ACP utilizamos como ponto central o contrato utilizado para *hedge* por *duration*, além de dois contratos adjacentes a este, com espaço de um ano.

A Tabela 7.4 apresenta a quantidade investida em contratos de DI futuro com vencimento em 02/01/2013, baseada no modelo de *duration hedge*, assim como a variação no valor presente durante o período analisado. A Tabela 7.5 apresenta a mesma análise para o modelo de imunização por ACP, utilizando 3 fatores.

Data	Quantidade DI 02/01/2013	Variação Hedge (VP)
19/08/2010	(1,466)	
20/08/2010	(1,466)	(48,471)
23/08/2010	(1,469)	(193,047)
24/08/2010	(1,471)	(193,359)
25/08/2010	(1,471)	168,985
26/08/2010	(1,470)	407,648
27/08/2010	(1,469)	117,929
30/08/2010	(1,469)	(1,800)
31/08/2010	(1,468)	(263,592)
01/09/2010	(1,467)	188,219
02/09/2010	(1,465)	(96,813)
03/09/2010	(1,466)	92,166
06/09/2010	(1,468)	(96,734)
08/09/2010	(1,468)	21,042
09/09/2010	(1,465)	(167,436)
10/09/2010	(1,464)	67,774
13/09/2010	(1,462)	43,867
14/09/2010	(1,462)	(189,691)
15/09/2010	(1,460)	66,923
16/09/2010	(1,458)	205,333
17/09/2010	(1,461)	42,318

Tabela 7.4 – Valor diário *hedge* (duration)

Data	Quantidade DI			Variação Hedge (VP)
	02/01/2012	02/01/2013	02/01/2014	
19/08/2010	(773)	(572)	(336)	
20/08/2010	(787)	(566)	(337)	(90,982)
23/08/2010	(846)	(552)	(358)	(175,851)
24/08/2010	(819)	(563)	(349)	(208,905)
25/08/2010	(861)	(556)	(363)	162,324
26/08/2010	(801)	(570)	(346)	340,524
27/08/2010	(798)	(572)	(346)	75,348
30/08/2010	(815)	(565)	(351)	(17,921)
31/08/2010	(826)	(560)	(356)	(297,152)
01/09/2010	(831)	(559)	(359)	190,420
02/09/2010	(853)	(549)	(367)	(122,499)
03/09/2010	(855)	(546)	(368)	82,727
06/09/2010	(903)	(536)	(386)	(120,404)
08/09/2010	(925)	(527)	(393)	(18,891)
09/09/2010	(925)	(525)	(393)	(180,580)
10/09/2010	(928)	(519)	(393)	52,555
13/09/2010	(951)	(508)	(399)	47,479
14/09/2010	(973)	(500)	(407)	(165,372)
15/09/2010	(897)	(526)	(383)	34,421
16/09/2010	(877)	(526)	(375)	186,209
17/09/2010	(818)	(541)	(355)	(15,478)

Tabela 7.5 – Valor diário *hedge* (ACP)

Finalmente, a Tabela 7.6 apresenta uma comparação da variação diária consolidada da carteira com a utilização das duas metodologias para imunização.

Data	Variação		
	Carteira	Cart + Dur	Cart + ACP
19/08/2010			
20/08/2010	82,715	34,244	(8,267)
23/08/2010	242,300	49,253	66,449
24/08/2010	234,541	41,182	25,636
25/08/2010	(107,389)	61,595	54,935
26/08/2010	(281,981)	125,667	58,543
27/08/2010	(119,687)	(1,758)	(44,339)
30/08/2010	14,680	12,880	(3,241)
31/08/2010	184,401	(79,191)	(112,751)
01/09/2010	(150,148)	38,071	40,272
02/09/2010	46,803	(50,010)	(75,697)
03/09/2010	(16,294)	75,872	66,434
06/09/2010	152,899	56,165	32,495
08/09/2010	35,281	56,323	16,390
09/09/2010	77,746	(89,691)	(102,834)
10/09/2010	(66,936)	837	(14,381)
13/09/2010	(56,247)	(12,380)	(8,768)
14/09/2010	135,799	(53,892)	(29,573)
15/09/2010	(61,091)	5,833	(26,669)
16/09/2010	(200,450)	4,882	(14,241)
17/09/2010	85,244	127,562	69,767
Soma	232,185	403,446	(9,843)
Soma (abs)	2,352,633	977,289	871,682

Tabela 7.6 – Valor diário carteira + hedge

Através da observação das variações diárias e da soma das variações absolutas de resultado podemos verificar a superioridade, em relação à imunização da carteira inicial, do método de ACP, com a utilização de três fatores, quando comparado à metodologia de *duration hedge*.

Este resultado também pode ser observado no Gráfico 7.1, que demonstra as variações diárias absolutas da carteira imunizada com a utilização das duas metodologias, assim como os erros médios, também em termos absolutos.

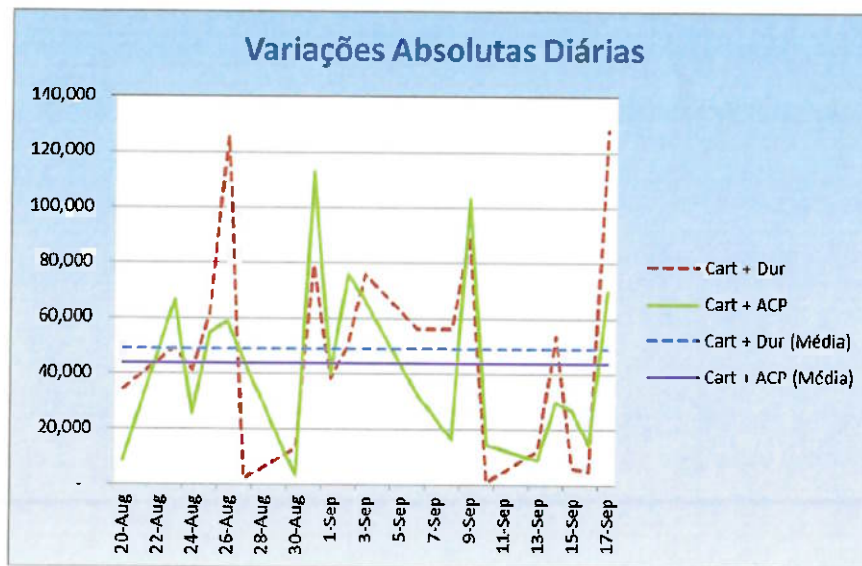


Gráfico 7.1 – Variações Absolutas Diárias

8. Considerações Finais

Verificamos neste trabalho a aplicação do método de Análise de Componentes Principais na ETTJ pré-fixada em Reais, assim como sua aplicação como forma de imunizar uma carteira composta por títulos públicos federais de renda fixa pré-fixados.

Os resultados que obtivemos foram muito parecidos com os apresentados em Litterman e Scheinkman (1991). Movimentos paralelos são responsáveis pela maior parte das variações da ETTJ, seguido por movimentos de inclinação e curvatura.

Baseado nisto, foi possível observar a superioridade do método de ACP, em comparação ao de *duration hedge*, quando se pretende realizar imunização de uma carteira de renda fixa pré-fixada. Esta superioridade vem do fato de a *duration* considerar apenas deslocamentos paralelos na ETTJ, enquanto que o método de ACP é capaz de capturar, também, outros efeitos, como de inclinação e curvatura. Como foi possível observar neste trabalho, movimentos de inclinação e curvatura foram responsáveis por, aproximadamente, 18% das movimentações totais da curva de juros estudada.

Referências Bibliográficas

Litterman, R. and J. Scheinkman (1991) “Common Factors Affecting Bond Returns,” *Journal of Fixed Income*, vol. 1, 54-61.

Mascitelli, Paulo Henrique (2008) “Análise de Componentes Principais Dinâmicos Aplicados à Estrutura a Termo da Taxa de Juros”, Dissertação de Mestrado, UFRJ.

Soto, G. M. (2004) “Using principal component analysis to explain term structure movements: Performance and stability”, in Tavidze, A. (Ed.) *Progress in Economics Research*, volume 8. Nova Science Publishers, New York.

Shlens, J. (2005) “A Tutorial on Principal Component Analysis”, Systems Neurobiology Laboratory, Salk Institute for Biological Studies. Institute for Nonlinear Science, University of California.

Smith. L. I (2002) “A Tutorial on Principal Component Analysis”.

Akamine, A. M. (2007) “Sistema de Prevenção a Crises em Carteiras Financeiras Usando Análise de Componentes Principais”, Trabalho de Conclusão de Curso, IME/USP

Valli, M e Varga, G. (1998) “Movimento da Estrutura a Termo da Taxa de Juro Brasileira e Imunização”, Artigo apresentado no 4º Encontro de Gerência de Risco da ANDIMA (jun/1998)

Fabozzi, Frank J. “The Handbook of Fixed Income Securities”, 7th Edition, McGraw-Hill