

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAUO  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA FINANCEIRA

JAQUELINE MIDORI MAKIYAMA MAEDA

**Simulação Multiagente Aplicada a Modelos Econômicos Simples de  
Desigualdade de Renda**

São Paulo

2024

JAQUELINE MIDORI MAKIYAMA MAEDA

**Simulação Multiagente Aplicada a Modelos Econômicos Simples de  
Desigualdade de Renda**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado ao Programa de Educação  
Continuada da Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para  
obtenção do Título de Especialista em  
Engenharia Financeira.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Eisencraft

São Paulo

2024

## **Agradecimentos**

Gostaria de agradecer a minha família, minha mãe, minha irmã pelo apoio e carinho, meu pai, e minhas tias e tios queridos, minha avó e avô (*in memorian*). Agradeço aos meus muitos professores que ao longo de muitas aulas permitiram que eu pudesse aprender desde os conhecimentos mais básicos até assuntos mais complexos. Agradeço aos meus amigos e colegas pelos momentos de descontração e também pelos ouvidos pacientes. Agradeço, em especial, ao professor orientador Dr. Marcio Eisencraft pela aptidão em orientar e disponibilidade para conversas, além de várias sugestões muito oportunas que, sem dúvida, contribuíram para o presente resultado. Agradeço também ao apoio financeiro recebido pela instituição Itaú-Unibanco.

## RESUMO

Neste trabalho estuda-se o modelo venda de garagem, um modelo multiagente em que indivíduos fazem transações financeiras entre si em um sistema fechado, limitadas à renda do indivíduo de menor riqueza. As simulações mostram que a continuidade das transações resulta em um monopólio, em que apenas um indivíduo detém toda a riqueza daquela população. Além de estudar o modelo original, também é abordada uma modificação em que se aplica tributação seguida de redistribuição. As dinâmicas dos modelos são estudadas utilizando-se os indicadores de desigualdade Curva de Lorenz e Índice de Gini. São utilizados dados reais da desigualdade brasileira contidas na Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua coletadas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

**Palavras-Chave** – modelo venda de garagem, modelagem baseada em agente, distribuição de riqueza, índice de Gini, Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua.

## Sumário

<b>1. Introdução.....</b>	<b>4</b>
<b>2. Revisão Bibliográfica.....</b>	<b>6</b>
<b>2.1 Desigualdade .....</b>	<b>6</b>
<b>2.1.1 Métricas para a Desigualdade: Curva de Lorenz e Índice de Gini .....</b>	<b>8</b>
<b>2.1.2 Dados Históricos e Fontes .....</b>	<b>12</b>
<b>2.2 Modelagem Baseada em Agente .....</b>	<b>14</b>
<b>2.3 Modelos .....</b>	<b>15</b>
<b>2.3.1 Modelo Venda de Garagem.....</b>	<b>16</b>
<b>2.3.2 Modelo Venda de Garagem – complemento efeito taxação.....</b>	<b>18</b>
<b>3. Simulações .....</b>	<b>19</b>
<b>3.1 Modelo Venda de Garagem.....</b>	<b>19</b>
<b>3.2 Modelo Efeito Taxação .....</b>	<b>22</b>
<b>4. Conclusões .....</b>	<b>29</b>
<b>Bibliografia.....</b>	<b>30</b>
<b>Anexos.....</b>	<b>32</b>

## 1. Introdução

*“Inequality appeared as soon as human Society was born, because distinctions of power and wealth accompany all human societies.”* (MILANOVIC, 2010)

O fenômeno da desigualdade é inerente a qualquer sociedade, conforme observa Branko Milanovic, economista referência nos estudos de desigualdade e distribuição de renda e que trabalhou como economista-chefe do departamento de pesquisa do Banco Mundial por mais de 20 anos e também como professor universitário na Universidade Johns Hopkins e Universidade de Maryland, nos Estados Unidos.

A origem da desigualdade está ligada à forma de organização da sociedade. Assim, algum nível de desigualdade entre os indivíduos é algo natural. Estudos indicam que a desigualdade de renda sempre foi elevada, sendo crescente entre 1820 a 1910, à medida que o Imperialismo expandia-se no Ocidente. De 1910 a 1980 observa-se uma queda na desigualdade de renda interna dos países, que voltou a crescer a partir de 1980. A desigualdade atual, medida em termos da relação entre a renda média dos 10% mais ricos e renda média dos 50% mais pobres, encontra-se nos níveis do período imperialista do início do século XX. Esta relação gira em torno de 40 vezes (CHANCEL; PIKETTY, 2021).

As causas para níveis elevados de desigualdade são muitas, complexas e multidimensionais. Em nível global, aponta-se o papel relevante trazido por integrações financeiras e comerciais inadequadamente reguladas durante a globalização. Em nível nacional, políticas públicas que enfraqueceram instituições ligadas ao mercado de trabalho ou redução dos investimentos em saúde, educação e proteção social. Ainda, destaca-se a existência de muitas barreiras econômicas, sociais e culturais que não permitem a participação adequada de segmentos da sociedade na vida política, além de discriminação e políticas de marginalização de grupos étnicos e religiosos, por exemplo (UNDP, 2013).

Como um fenômeno de natureza complexa, o estudo da desigualdade traz desafios. A modelagem computacional é uma das possíveis abordagens. Nela, o processo é abstruído visando-se determinado aspecto do fenômeno. Essa abstração nunca é exata o suficiente para reproduzir completamente o fenômeno real, exagera-se em alguns aspectos em detimentos de outros, de modo que o modelo traga as respostas ao que se está sendo analisado.

A modelagem em que se simula o fenômeno no nível dos indivíduos que compõe aquele sistema é a modelagem multiagente. Esta é útil para o estudo de fenômenos complexos, pois permite a análise de inúmeras interações entre agentes definindo-se regras de relacionamento entre os agentes que compõe aquele sistema e também relações no nível do ambiente que ocupam e de ligações específicas entre agentes (WILENSKY; RAND, 2015).

Este trabalho teve como motivação o modelo “*The Affine Wealth Model*” apresentado no artigo “*The Inescapable Casino*” (BOGHOSIAN, 2019). Esse modelo, baseado em múltiplos agentes, consegue chegar muito próximo dos dados reais de distribuição de renda em países desenvolvidos. Nesse artigo, tem-se três modelos desenvolvidos sequencialmente e em ordem de complexidade. Inicia-se com o modelo venda de garagem (CHAKRABORTI, 2002), em seguida tem-se o modelo considerando a taxação (BOGHOSIAN; DEVITT-LEE; WANG, 2016), que é complementado com a vantagem trazida pela riqueza (BOGHOSIAN; DEVITT-LEE; JHONSON; LI; MARCQ; WANG, 2017) e finaliza-se com o efeito dívida no modelo “*The Affine Wealth Model*” (LI; BOGHOSIAN; LI, 2019).

Além de basear-se no artigo mencionado, este trabalho é uma extensão do trabalho de conclusão de curso “Uma análise do modelo de venda de garagem usando simulação multiagente” (NASCIMENTO, 2023). Aprofunda-se o estudo dos modelos de desigualdade de renda através das métricas Curva de Lorenz e Índice de Gini e compara-os com dados reais da população brasileira.

O estudo aborda o modelo mais simples, modelo venda de garagem (CHAKRABORTI, 2002), e também um modelo que considera o efeito da taxação que traz a mesma ideia contida no modelo que considera a taxação (BOGHOSIAN; DEVITT-LEE; WANG, 2016), mas que não é o mesmo.

Primeiramente, no Capítulo 2, é feita uma revisão bibliográfica breve abrangendo o tema desigualdade e métricas, simulações multiagente e artigos base para o modelo em questão. Em seguida, no Capítulo 3, detalham-se os modelos e apresentam-se as simulações. Por fim, no Capítulo 4, apresentam-se as conclusões.

## 2. Revisão Bibliográfica

Na primeira parte deste capítulo discutem-se o conceito de desigualdade e principais métricas utilizadas para a mensuração da desigualdade de renda, Curva de Lorenz e Índice de Gini. Em seguida, mostram-se os dados reais da desigualdade de renda brasileira com base na PNAD Contínua Anualizada 2017. A partir da segunda parte do capítulo, introduz-se os principais conceitos da modelagem multiagente e em seguida, na terceira parte, os modelos abordados neste estudo.

### 2.1 Desigualdade

A desigualdade se apresenta nas mais diferentes formas, que estão relacionadas, principalmente, a aspectos econômicos, sociais ou políticos (OXFAM Brasil). Existem, por exemplo, as desigualdades de acesso à educação, saúde e alimentação de qualidade. Essas três últimas são classificadas como desigualdades de oportunidade, ligadas ao quanto distintas são as condições e circunstâncias de cada indivíduo e mede a dificuldade para que esse possa seguir com a vida que se almeja (UN-DESA, 2015). A mais conhecida das desigualdades é a desigualdade de renda, que será tema deste estudo. Ela está relacionada à distribuição do ganho de cada indivíduo em uma sociedade e permite saber o quanto desigual esse ganho se dá comparativamente aos demais indivíduos.

Esse fenômeno, caracterizado por um sistema em que poucos detém muito, já é estudado, pelo menos, desde 1897, ano em que o economista italiano Vilfredo Pareto publicou o artigo “*Cours d'Economie Politique*”, em que mostra que a distribuição de riqueza é dada por uma relação do tipo (apud CHAKRABORTI, 2002):

$$y \sim x^{-\nu} \quad (2.1)$$

em que

$y$  é o número de pessoas que detém uma riqueza maior ou igual a  $x$  e

$\nu$  é um parâmetro, estimado em 1,5.

A relação (2.1) ficou conhecida como “Lei de Pareto” ou “Regra do 80/20” (MILANOVIC, 2010). No estudo de Pareto, por exemplo, cerca de 80% da terra na Itália pertencia a 20% da população.

Historicamente, essa foi a primeira lei descoberta como sendo do tipo “Lei de Potência” (NEWMAN, 2005) definida pela relação mais abrangente entre as duas variáveis  $x$  e  $y$ :

$$y = ax^k \quad (2.2)$$

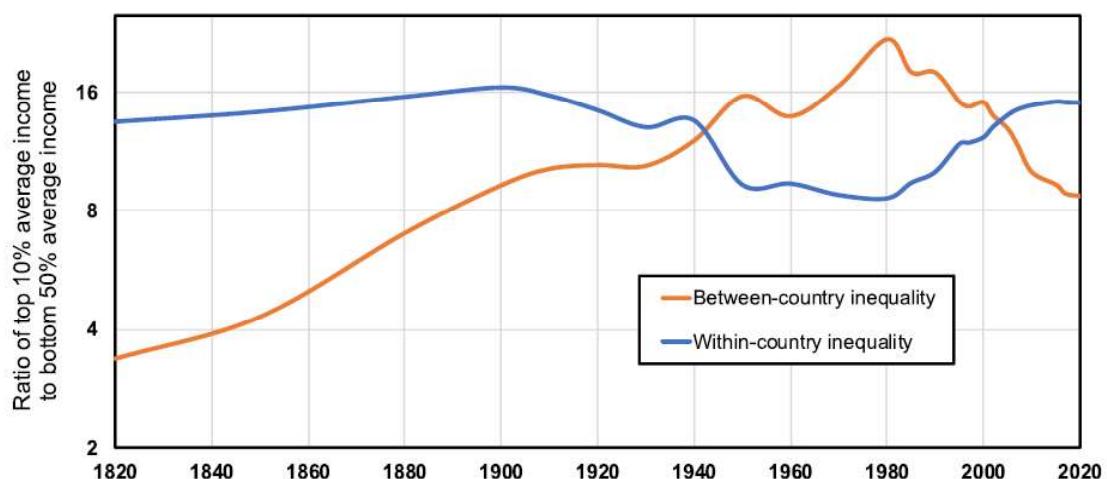
em que  $a$  e  $k$  são constantes.

Sabe-se que a relação de potência entre duas variáveis (2.2), em que a variável  $y$  muda em função da variável  $x$  multiplicada por ela mesma, é um fenômeno muito comum de encontrar-se na natureza, desde fenômenos sociais até relações físicas e sistema financeiro. São

exemplos, o tamanho da população das cidades, a intensidade dos abalos sísmicos, explosões solares, vendas de produtos e a renda de uma população, inclusive.

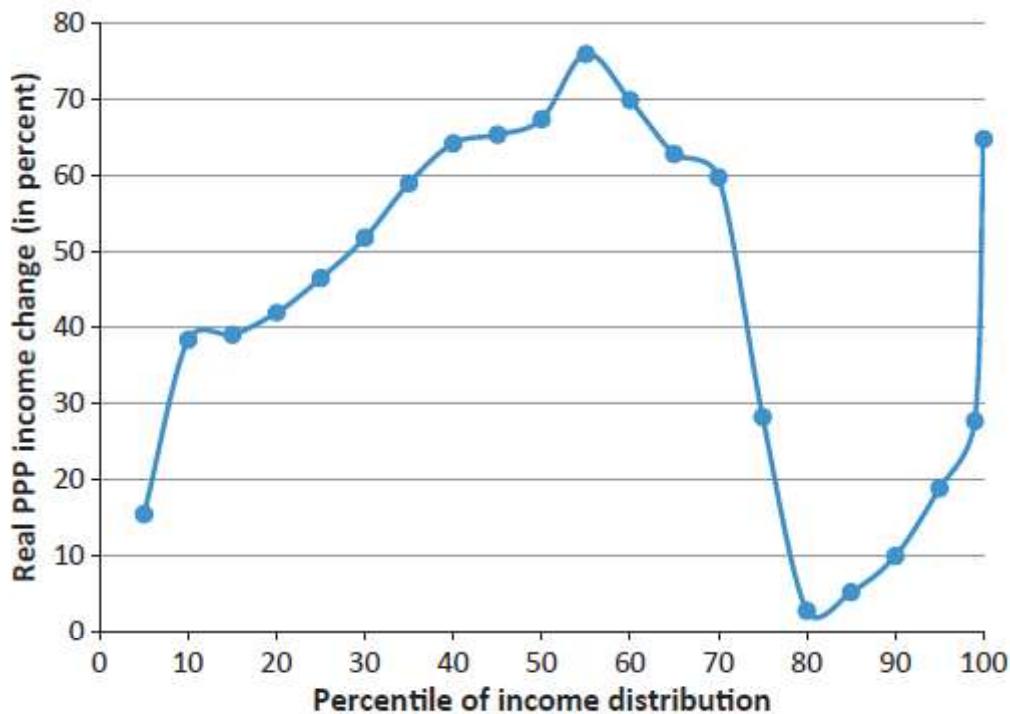
A desigualdade de renda é um assunto bastante pertinente e que gera muitos debates, seja devido às suas causas, consequências, ações mitigadoras, mensuração e tipos (MILANOVIC, 2011). Quando se estuda a desigualdade de renda no nível global, existem duas classificações principais, nacional ou interna ao país e a entre países. A desigualdade de renda interna ao país é aquela que ocorre dentro de determinado país e geralmente é obtida através dos institutos nacionais responsáveis pelas pesquisas domiciliares, no caso do Brasil, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Já a desigualdade entre países é aquela que ocorre entre os diferentes países do globo. Para essa, existem dois meios para mensuração da desigualdade de renda. O mais simples, ou tipo 1, envolve a consideração do PIB ou renda média de cada país com o mesmo peso, independentemente do tamanho de sua população. O tipo 2, leva em conta o peso da população de cada país. Existe também a desigualdade global no nível indivíduo, ou tipo 3, que envolve a renda individual de cada um no mundo.

Conhecer a desigualdade de renda de determinada população depende da existência de dados confiáveis, algo que nem sempre existiu. Atualmente, tem-se dados a partir de 1820 graças ao trabalho de François Bourguignon e Christian Morrisson em trabalho publicado em 2002 (apud MILANOVIC, 2011). Foram os primeiros a estudar o problema da falta de dados confiáveis. Contabiliza-se os dados da desigualdade a partir desse período, onde a Revolução Industrial e Imperialismo são tidos como os principais responsáveis por uma série de mudanças sociais, econômicas e políticas que levaram ao aumento da desigualdade dentro e entre países durante 1820-1910 (CHANCEL; PIKETTY, 2021). A partir de 1910, a desigualdade dentro dos países diminuiu, enquanto a desigualdade entre países continuou aumentando. Já a partir de 1980 observou-se movimento contrário, a desigualdade dentro dos países voltou a subir, enquanto a desigualdade entre países caiu. A queda na desigualdade entre países, medida em termos da desigualdade tipo 2, deu-se principalmente por causa do peso relevante de China e Índia, que tiveram notável crescimento durante o período de Globalização. A **Figura 1**, que traz a desigualdade medida pelo indicador T10/B50, dado pela razão entre a média da renda dos 10% mais ricos pela média da renda dos 50% mais pobres, ilustra o comportamento histórico medido entre 1820 e 2020. Observa-se que em 2020 a desigualdade encontra-se nos mesmos níveis do período imperialista do início do século XX.



**Figura 1:** Desigualdade medida pela razão T10/B50 para a desigualdade interna aos países (*within-country inequality*) e desigualdade entre países (*tipo 2 –between-country inequality*) entre 1820 e 2020 (CHANCEL; PIKETTY, 2021).

Milanovic (2013) demonstra a relevância dos dados de desigualdade de renda nos aspectos sociais e políticos. O autor analisa os impactos das variações da Paridade do Poder de Compra (PPC) ou no inglês, *Purchasing Power Parity* (PPP), uma métrica utilizada para comparar-se o poder de compra entre países distintos, durante o período 1988 a 2008, como mostra-se na **Figura 2**.



**Figura 2:** Taxa percentual de variação da paridade do poder de compra (PPC), ou no inglês *Purchasing Power Parity* (PPP), real versus percentil da distribuição de renda de 1988 a 2008 (MILANOVIC, 2013).

Observa-se que os maiores beneficiados durante esse período foram os 1% mais ricos, que viram um ganho de acima de 60%, e a classe média de países emergentes como China, Índia, Indonésia, Brasil e Egito, que viram seus ganhos subirem próximo a 70-80%, faixa dos percentis 50-60. Os maiores prejudicados foram as classes média-alta global, que incluem indivíduos dos antigos países comunistas e América Latina e indivíduos de países ricos que viram sua renda estagnar-se, faixa dos percentis 75-90. Os percentis abaixo de 30 observaram um aumento de renda significativo, entre 40% a 70%, o que permitiu que os que vivem com renda US\$ 1,25 PPC/dia caísse de 44% para 23% ao longo dos 20 anos estudados. Os dados acima ajudam a corroborar muitos movimentos sociais e políticos recentes, tais como aumento da imigração e forças de direita.

Assim, essa introdução mostra relevância do tema e a importância em mensurá-la, tema do próximo capítulo.

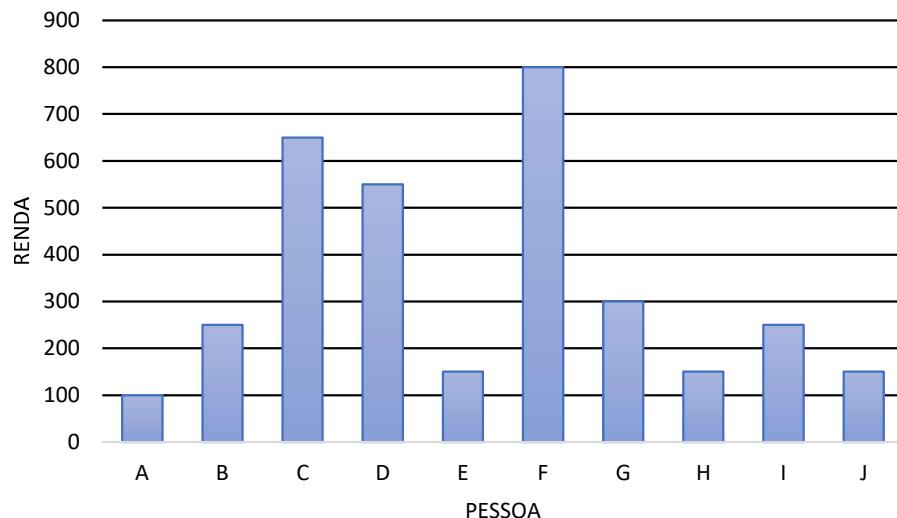
### 2.1.1 Métricas para a Desigualdade: Curva de Lorenz e Índice de Gini

A distribuição da renda pode ser estudada em termos dos ganhos individuais de cada pessoa que compõe uma população. Para ilustração, considere-se um conjunto de dados

hipotéticos da renda de uma população de 10 indivíduos que são mostrados na **Tabela 1** e representados graficamente na **Figura 3**.

**Tabela 1:** Renda de uma população hipotética composta por 10 pessoas.

Pessoa	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Renda	100	250	650	550	150	800	300	150	250	150

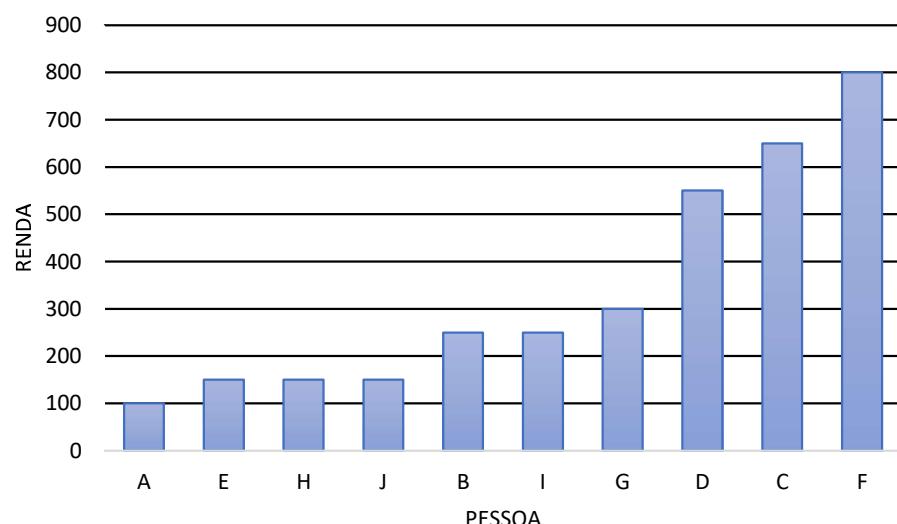


**Figura 3:** Distribuição da renda por pessoa.

Um primeiro passo no estudo desses dados consiste na ordenação da população por ordem crescente de renda, como mostrado na **Tabela 2** e no gráfico da **Figura 4**.

**Tabela 2:** Renda em ordem crescente de uma população hipotética composta por 10 pessoas

Pessoa	A	E	H	J	B	I	G	D	C	F
Renda	100	150	150	150	250	250	300	550	650	800

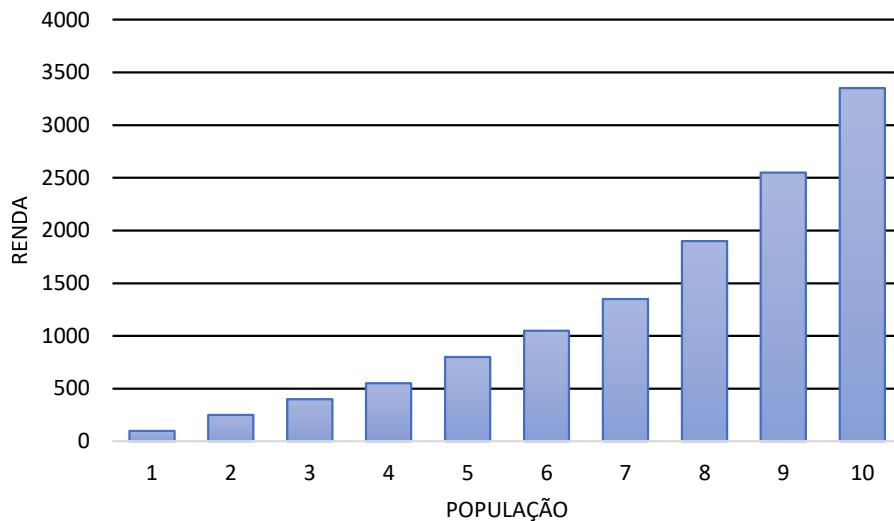


**Figura 4:** Distribuição da renda em ordem crescente de renda.

Em seguida constrói-se a função acumulada de renda daquela população, em que a renda é dada cumulativamente: primeiro a renda da pessoa com menor renda, seguida da renda somada das duas pessoas como menor renda e assim por diante até a renda total da população. A **Tabela 3** e **Figura 5** expressam a função acumulada de renda.

**Tabela 3:** Renda acumulada da população.

População	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Renda	100	250	400	550	800	1050	1350	1900	2550	3350



**Figura 5:** Distribuição acumulada da renda da população.

A forma mais conhecida de representar esses dados de forma gráfica é por meio da **curva de Lorenz** (MEDEIROS, 2012). Max Otto Lorenz (1876-1959) foi um economista americano que, em 1905, publicou o artigo *Methods of measuring the concentration of wealth*. Nele, propôs que a função acumulada de renda fosse dada em termos percentuais, tanto da renda como da população. Para isso, basta converter-se o gráfico de distribuição acumulada de renda para o gráfico da distribuição percentual acumulada de renda. Observa-se que ao fazermos isso, tanto o eixo das abscissas (fração da população) como o das ordenadas (fração da renda) tornam-se unitários, indo de 0 a 1, conforme **Tabela 4** e **Figura 6**. Matematicamente, a Curva de Lorenz pode ser definida na sua forma discreta (MEDEIROS, 2006) pela expressão

$$L(p) = L\left(\frac{j}{N}\right) = \sum_{i=1}^j \frac{x_i}{\sum x_i} \text{ para } 1 \leq j \leq N \quad (2.3)$$

em que

$L(p)$  ou  $L\left(\frac{j}{N}\right)$  é a Curva de Lorenz,

$p$  as frações acumuladas de população,

$\frac{j}{N}$  a fração acumulada da população até cada renda  $x$ ,

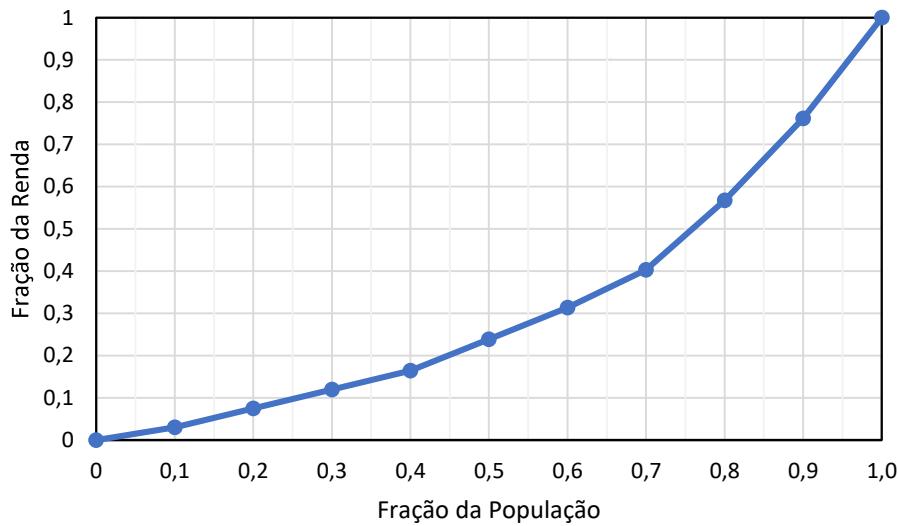
$j$  o vetor  $\left\{\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \frac{3}{N}, \dots, \frac{N}{N}\right\}$ ,

$x_i$  a renda  $x$  do indivíduo  $i$  e

$N$  o número de indivíduos totais da população.

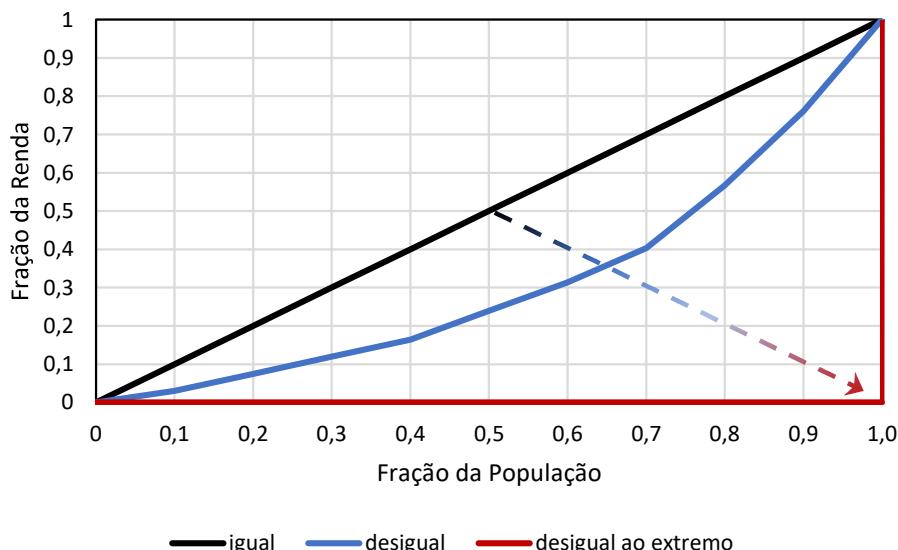
**Tabela 4:** Renda acumulada da população, dada em fração da renda e fração da população.

População %	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Renda %	0,03	0,07	0,12	0,16	0,24	0,31	0,40	0,57	0,76	1,00



**Figura 6:** Curva de Lorenz

Para aprofundar o entendimento da curva de Lorenz, desenham-se três curvas (**Figura 7**), uma em que todos da população detém o mesmo valor de renda (igual), uma outra em que existe um certo nível de desigualdade (desigual) e por fim uma sociedade em que apenas uma pessoa detém 100% da renda (desigual ao extremo). Assim, as curvas possíveis estão entre a linha diagonal da perfeita igualdade e a linha do limite à direita, da desigualdade total.



**Figura 7:** Três possibilidades para as Curvas de Lorenz.

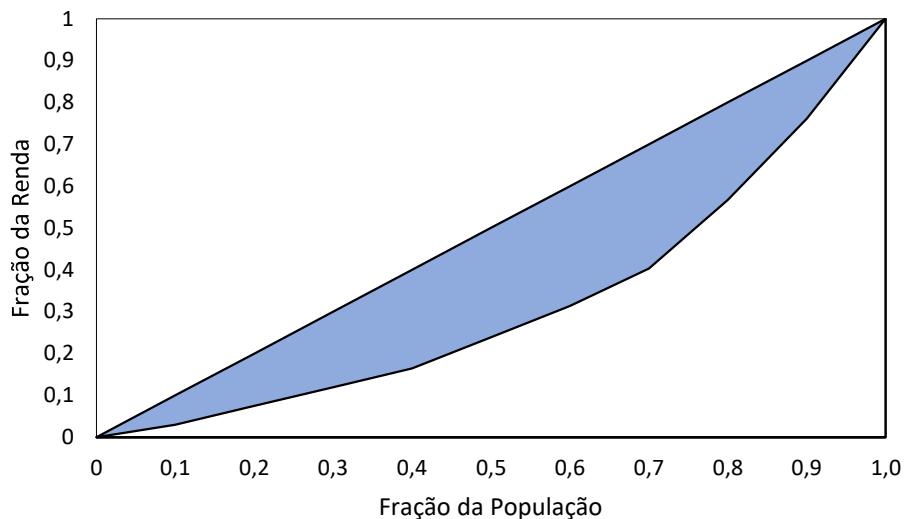
Outra métrica bastante conhecida e utilizada para a mensuração da desigualdade de renda é o **Índice de Gini** (MEDEIROS, 2012). Corrado Gini (1884-1965) foi um estatístico e demógrafo italiano que, em 1912, publicou o artigo *Variabilità e mutabilità: contributo allo studio delle distribuzioni e relazioni statistiche*, em que propôs um índice baseado na Curva de Lorenz que sintetizasse o nível de desigualdade de uma distribuição de renda em um número apenas. Esse índice é proporcional no tamanho da área contida entre a diagonal e a Curva de Lorenz abaixo dela, conforme mostra a **Figura 8**. Uma vez que a diagonal reflete a igualdade total, é um índice de distanciamento da igualdade. Vai de 0 a 1 e quanto mais próximo de 1 pior é o reflexo da igualdade, ou seja, maior é a desigualdade de renda. Pode-se calculá-lo como a integral da linha diagonal menos a integral da Curva de Lorenz, valor este multiplicado pelo fator 2, de modo que o índice varie de 0 a 1. Na expressão matemática o índice é definido como

$$G = 1 - 2 \int_0^1 L_x(y) dy \quad (2.4)$$

em que

$G$  é o Índice de Gini e

$L_x(y)$  é a Curva de Lorenz da distribuição de  $y$  entre os indivíduos.



**Figura 8:** Índice de Gini, proporcional à área entre a linha diagonal da perfeita igualdade e a Curva de Lorenz.

Na próxima seção são apresentados dados reais da desigualdade de renda da população brasileira.

### 2.1.2 Dados Históricos e Fontes

Os dados reais utilizados neste trabalho têm como fonte a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua (PNAD) divulgadas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) em seu site<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> PNAD Contínua – Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua

Conforme explica Hoffman (2019), a PNAD é uma pesquisa por amostra de domicílios. Realizada desde 1967 pelo IBGE, a chamada PNAD tradicional coletava os dados em um determinado mês de referência do ano (setembro, de 1992 a 2015) e foi feita até 2015. A partir de 2012, iniciou-se a chamada PNAD contínua, em que a coleta de dados se dá ao longo do ano.

A PNAD contínua classifica a renda em duas categorias:

- Rendimento de trabalho e
- demais rendimentos, como aposentadorias, pensões, aluguéis, transferências do governo, etc.

Dentro dos rendimentos de trabalho, tem-se duas divisões:

- Valores efetivamente recebidos no mês de referência (um mês que precede a semana da entrevista) e
- valores habitualmente recebidos por mês, em que são excluídas quaisquer parcelas que não tem caráter contínuo, tais como horas extras, 13º salário e descontos por faltas, por exemplo.

Classifica-se a força de trabalho ou pessoas economicamente ativas (PEA), aquelas que estão em idade produtiva (+14 anos), em dois tipos:

- Ocupadas, aquelas que tem um trabalho e
- desocupadas, aquelas que não tem um trabalho, mas estão à procura.

Este estudo utiliza a PNAD contínua anual de 2017, de onde extraiu-se o rendimento efetivo de todos os trabalhos das pessoas ocupadas, conforme especificado na **Tabela 5**.

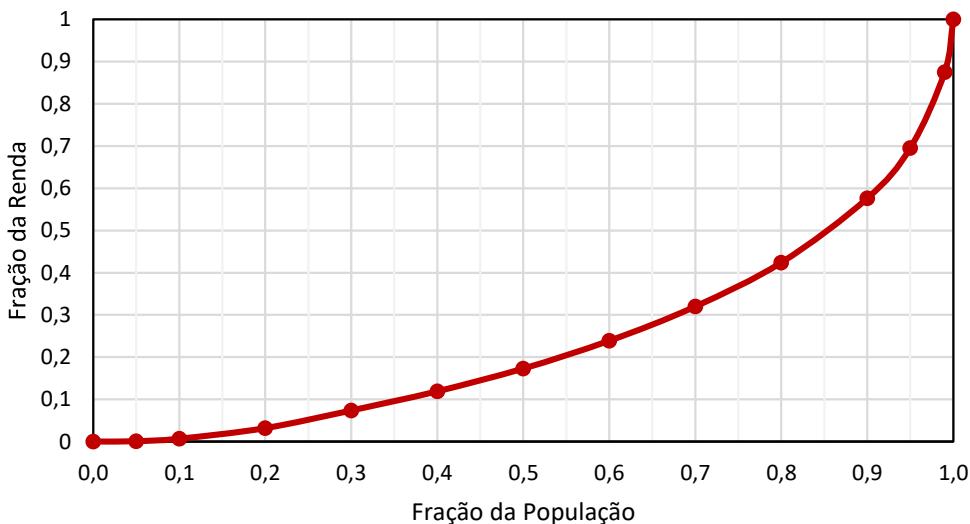
**Tabela 5:** Especificações da PNAD contínua anual 2017 para o rendimento efetivo de todos os trabalhos das pessoas ocupadas.

<b>Nível Territorial</b>	País
<b>Abertura Territorial</b>	Brasil
<b>Tipo</b>	Valor
<b>Indicador</b>	Distribuição do rendimento médio mensal real das pessoas de 14 anos ou mais de idade, efetivamente recebido no mês de referência, de todos os trabalhos, a preços médios do ano
<b>Variável de abertura</b>	Classes acumuladas de percentual das pessoas em ordem crescente de rendimento

A distribuição acumulada percentual da renda efetiva de todos os trabalhos das pessoas ocupadas da PNAD contínua 2017 está contida na **Tabela 6** e expresso no Gráfico da **Figura 9**.

**Tabela 6:** Renda acumulada efetiva de todos os trabalhos das pessoas ocupadas da população, dada em fração da renda e fração da população, da PNAD contínua 2017.

<b>População %</b>	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,99	1,00
<b>Renda %</b>	0,001	0,007	0,032	0,074	0,119	0,173	0,239	0,32	0,424	0,576	0,695	0,875	1,000



**Figura 9:** Curva de Lorenz PNAD Contínua Anual 2017, renda efetiva de todos os trabalhos das pessoas ocupadas.

O índice de Gini da PNAD Contínua Anual 2017 foi calculado via Método dos Trapézios obtendo-se o Índice de Gini = 0,520.

## 2.2 Modelagem Baseada em Agente

A modelagem do tipo baseada em agente permite simular sistemas complexos através da definição de regras no nível do indivíduo ou agente que compõe aquele sistema. Também é conhecida por sua terminologia em inglês: Agent-Based Modeling (ABM). Sua aplicação é bastante diversa e vai desde fenômenos naturais até sistemas econômicos.

Conforme apontam WILENSKY e RAND, 2015 o mundo cada vez mais interconectado fica cada vez mais complexo e a modelagem do tipo ABM oferece uma maneira de tentar responder questões que as modelagens mais simples não conseguem.

Uma das ferramentas mais populares de ABM é o NetLogo®, um software de licença livre criado por Uri Wilensky da Universidade de Northwestern nos Estados Unidos em 1999 e atualizado até hoje. Além do programa em si, o NetLogo® conta com um ambiente de aprendizagem contendo muitos modelos de diversas áreas do conhecimento.

Um dos agentes é denominado tartaruga ou em inglês *turtle*, pois a inspiração do NetLogo® foi a linguagem de programação *Logo*, criada em 1969 por Seymour Papert e colegas com o intuito de introduzir a programação para crianças. Além da *turtle*, existem outros três tipos de agentes: *patches*, *links* e *observer*. Os *patches* são equivalentes ao terreno que a *turtle* pode ocupar, enquanto os *links* são uma linha que conecta duas *turtles*. O *observer* é quem dá os comandos aos demais agentes.

É possível definir interações do tipo agente-agente e agente-ambiente.

Um programa no NetLogo® geralmente é composto por no mínimo dois procedimentos

- *setup*, onde são definidas as condições iniciais;
- *go*, em que as ações e interações entre agentes acontecem.

O comando `tick` realiza uma iteração e muitas vezes faz o papel do tempo nos modelos.

Alguns exemplos de modelos contidos na biblioteca do Netlogo® são:

- *Flocking*, baseado no modelo *The Boid Model* (REYNOLDS, 1987 apud WILENSKY; RAND, 2015), em que o movimento de uma revoada de pássaros é simulado definindo-se três regras básicas:
  - *Avoid*, distanciar-se, caso o vizinho esteja muito próximo
  - *Align*, mover-se na mesma direção dos vizinhos
  - *Cohere*, mover-se para o centro da revoada
- *Segregation*, baseado no modelo *Neighborhood Tipping Model* (SCHELLING, 1971 apud WILENSKY; RAND, 2015) em que é demonstrado que mesmo que os indivíduos de uma vizinhança tenham um razoável nível de tolerância às diferenças e assumindo-se liberdade para mudanças, ainda assim, as comunidades acabam segregando-se em bairros com indivíduos com características similares.
- *Simple Economy*. baseado no modelo proposto por Dragulesku e Yakovenko (2000) (apud WILENSKY; RAND, 2015) em que se simula uma economia fechada, sem geração de riqueza, e sem possibilidade de renda negativa. Demonstra-se que mesmo que todos os indivíduos iniciem com uma mesma riqueza, à medida que transações de mesmo valor vão ocorrendo de maneira aleatória o resultado final é a concentração da riqueza.

Os modelos estudados neste trabalho são similares ao *Simple Economy*.

## 2.3 Modelos

A inspiração para este estudo foi o modelo *Simple Economy*, apresentado em aula durante o curso “EGF-001 Álgebra Linear, Equações Diferenciais e Sistemas Dinâmicos”.

Além dele, também os modelos descritos no artigo “*The Inescapable Casino*” (BOGHOSIAN, 2019). O modelo final, “*The Affine Wealth Model*”, consegue chegar muito próximo dos dados reais de distribuição de renda em países desenvolvidos. Nesse artigo, tem-se três modelos desenvolvidos sequencialmente e em ordem de complexidade:

- Modelo 0 – Modelo Venda de Garagem (CHAKRABORTI, 2002)
- Modelo 1 - Complemento: Efeito Taxação (BOGHOSIAN; DEVITT-LEE; WANG, 2016)
- Modelo 2 – Complemento Efeito Vantagem (BOGHOSIAN; DEVITT-LEE; JHONSON; LI; MARCQ; WANG, 2017)
- Modelo 3 – Complemento Efeito Dívida (LI; BOGHOSIAN; LI, 2019)

O modelo 0, base, é similar ao modelo *Simple Economy*, e também pertence ao grupo denominado Yard Sale Model ou Modelo Venda de Garagem que será detalhado adiante. O modelo não consegue se aproximar muito dos dados reais. Utilizou-se como critério a soma dos erros quadráticos entre as Curvas de Lorenz dos dados reais e simulação. Os autores então desenvolvem o modelo 1, em que introduzem a variável  $\chi$  (chi) que traz o efeito da taxação e permitiu a estabilização do modelo, que deixou de apresentar-se como oligarquia e aproximou-se dos dados dos Estados Unidos e Europa entre 1989-2016 com um erro menor que 2%. Em seguida criam o modelo 2, em que consideram a vantagem dos mais ricos na variável  $\zeta$  (zeta) e melhoram

o *fitting* da parte superior da curva. A última implementação realizada deu-se no modelo 3 e trouxe o efeito da renda negativa na variável  $\kappa$  (kapa). Com isso, o modelo aproximou-se bastante dos dados reais para três décadas, com erro inferior a 1/6%.

Para este trabalho foi estudado o modelo 0, Modelo Venda de Garagem, e também um modelo similar ao modelo 1, efeito Taxação. Por motivos de tempo e complexidade matemática não se conseguiu prosseguir para os demais modelos.

Além dos modelos já citados a literatura contém muitos outros modelos que abordam o tema da desigualdade de renda de maneira relativamente simples. Hayes (2002) traz um descriptivo de vários desses modelos, como por exemplo:

- valor transacionado é dado por uma quantia fixa (DRAGULESCO, YAKOVENKO, 2000 apud HAYES, 2002);
- valor transacionado é limitado ao indivíduo de menor renda (CHAKRABORTI, 2002 apud HAYES, 2002);
- valor transacionado é limitado ao indivíduo de maior renda considerando a não possibilidade de renda negativa (ISPOLATOV, KRAPIVSKY, REDNER, 1998 apud HAYES, 2002);
- rendas finais de cada indivíduo são dadas de modo aleatório, de modo que se mantenha constante a soma da renda dos indivíduos (ISPOLATOV, KRAPIVSKY, REDNER, 1998 apud HAYES, 2002).

Hayes (2002) observa que esses modelos podem ser divididos em dois grupos, aqueles que resultam em uma concentração de renda extremamente elevada e aqueles que resultam em certo equilíbrio. O ponto chave é a quebra de simetria apresentada pelos modelos do primeiro grupo. Boghosian (2019) explica que a origem do comportamento se deve ao desbalanceamento que ocorre a cada transação, de modo que à medida que as transações acontecem, a renda vai sendo transferida dos agentes com menor riqueza para os de maior riqueza, aproximando-se de uma oligarquia. Faz-se a analogia com um cassino, pois quanto mais tempo as transações ocorrem, maior é a chance de se perder dinheiro.

### 2.3.1 Modelo Venda de Garagem

No “Modelo Venda de Garagem” (CHAKRABORTI, 2002) os agentes transacionam a mesma quantidade de renda, esta, dada pela menor renda entre os agentes, de maneira aleatória em um sistema fechado e sem possibilidade de renda negativa. Essas condições resultam em uma monarquia, onde apenas um único agente concentra toda a riqueza daquela sociedade.

Sejam

- $i$  e  $j$  os dois agentes que irão participar da transação;
- $m_i$  e  $m_j$  as riquezas dos agentes, respectivamente;
- $m_i < m_j$ .

Posto que o valor da transação de cada um dos agentes é dado pela renda mínima entre os agentes,  $m_{mín} = m_i$ , então o valor em jogo é  $2m_{mín}$ .

Dada a hipótese de aleatoriedade, o agente de menor renda pode não ganhar nada do valor em jogo ou pode ganhar uma proporção do valor em jogo com probabilidade aleatória  $0 \leq \epsilon \leq +1$ :

$$\Delta m_i = \epsilon(2m_{\min}) \quad (2.5)$$

Enquanto o jogador de maior renda pode ficar com todo o valor em jogo até nada do valor em jogo com probabilidade aleatória complementar aquela do agente de menor renda:

$$\Delta m_j = (1 - \epsilon)(2m_{\min}) \quad (2.6)$$

Assim, as novas rendas são dadas por:

$$m_i' = (m_i - m_{\min}) + \Delta m_i \quad (2.7)$$

$$m_j' = (m_j - m_{\min}) + \Delta m_j \quad (2.8)$$

Substituindo-se os termos  $\Delta m_i$  e  $\Delta m_j$ , temos:

$$m_i' = m_i + \alpha m_{\min} \quad (2.9)$$

$$m_j' = m_j - \alpha m_{\min} \quad (2.10)$$

em que

$$\alpha = 2\epsilon - 1 \quad (2.11)$$

Assim,  $\alpha$  representa o percentual da renda transacionada por cada um dos agentes e varia entre  $-1 \leq \alpha \leq +1$ .

O modelo construído no NetLogo® considera uma quantia fixa de 500 turtles, cada uma com renda de \$100, conforme anexo. A variável alpha é criada de modo que seu valor possa ser facilmente configurado através de um slider. Define-se a função transact, um sorteio aleatório onde duas turtles tem a mesma probabilidade de ganhar/perder um percentual do valor transacionado. Para cada uma das turtles, é sorteada uma turtle e compara-se a riqueza entre elas para identificar qual delas tem a menor renda. Em seguida, transacionam.

Define-se o procedimento go, em que a ordem das ações fica estabelecida. Primeiramente todas as turtles com riqueza maior que 0 transacionam. Em seguida são atualizadas as coordenadas de cada turtle de acordo com sua riqueza e também os indicadores para a construção da Curva de Lorenz e Índice de Gini. Outros indicadores como a renda da turtle mais rica, 0,2% da população, renda dos 10% mais ricos e renda dos 50% mais pobres são calculados para utilização nos gráficos. Considera-se a possibilidade de exportação dos dados da simulação para um arquivo txt para que seja mais fácil sua manipulação e tratamento.

O código utilizou-se dos modelos “Simple Economy” e “Wealth Distribution” contido na biblioteca de modelos do NetLogo® e também o Modelo Venda de Garagem (NASCIMENTO, 2023).

### 2.3.2 Modelo Venda de Garagem – complemento efeito taxação

Nesse modelo são aplicados:

- Tributação de renda proporcional ao alpha e
- Redistribuição cujo valor é o valor da tributação média, ou seja, a tributação total dividida pelo número de indivíduos na população.

O modelo almeja seguir o mesmo princípio presente no Modelo 1 - Complemento: Efeito Taxação (BOGHOSIAN; DEVITT-LEE; WANG, 2016), em que é introduzida a variável  $\chi$  que permite que a cada passo a renda de cada agente se aproxime da média da riqueza da população, o que estabiliza o modelo.

No Netlogo®, define-se a função `update-tax` através da inclusão de um slider. Calcula-se a taxa de tributação `tax` como um percentual do `alpha` e também a tributação total `tax-total`. Define-se a função `tribute`, onde calcula-se a nova renda pós tributação. Em seguida, define-se a função `redistribute`, onde calcula-se a nova renda pós redistribuição.

Define-se o procedimento `go`, em que a ordem das ações fica estabelecida. Primeiramente, as turtles com riqueza maior que 0 transacionam. Em seguida aplica-se a tributação e logo em seguida a redistribuição. Ao final atualizam-se os indicadores auxiliares da mesma maneira que no modelo venda de garagem.

As interfaces e códigos dos modelos no Netlogo® encontram-se nos anexos ao final do relatório. Os resultados das simulações encontram-se no capítulo que se segue.

### 3. Simulações

No capítulo 3 apresenta-se os resultados obtidos nas simulações dos modelos de desigualdade de renda Venda de Garagem e o modelo considerando o efeito da taxação e redistribuição.

Para a realização das simulações utilizou-se o programa Netlogo® versão 6.2.2 disponível para download no site do Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling da Northwestern University, Illinois, Estados Unidos. Partes dos códigos foram adaptados dos modelos *Simple Economy* e *Wealth Distribution* disponíveis na Biblioteca de modelos do Netlogo® e também do trabalho de conclusão de curso “Uma análise do modelo de venda de garagem usando simulação multiagente” (NASCIMENTO, 2023). Utilizou-se um computador doméstico com configurações Windows 10, Intel Core i7 e 8GB de memória RAM.

As simulações foram feitas diretamente na interface do Netlogo® e os dados foram extraídos para arquivos no formato de textos; no modelo Venda de Garagem via linhas de código, e no modelo considerando o efeito da taxação e redistribuição via ferramenta *Behaviour Space*. Para o tratamento de dados utilizou-se Microsoft Office Excel e Jupyter Notebook (distribuição Anaconda para Python).

Existem ferramentas desenvolvidas para a conexão direta entre Netlogo® e Python. Uma delas, a extensão pyNetlogo permite o controle do modelo no Netlogo® através da interface Python, que através de códigos de comando no Jupyter Notebook envia e recebe informações do modelo. Nota-se, contudo, que o funcionamento adequado depende de uma série de configurações adequadas entre o Java Virtual Machine, versão da distribuição do Python, versão do Netlogo® e também dos pacotes ou extensões que o pyNetlogo é dependente. Chegou-se a obter-se algum êxito em comandos básicos de interação Python e Netlogo®, porém optou-se pela utilização combinada da ferramenta de simulação otimizada dentro do próprio Netlogo®, *Behaviour Space*, e o Excel devido ao tempo de processamento.

#### 3.1 Modelo Venda de Garagem

O modelo Venda de Garagem (CHAKRABORTI, 2002) sempre resulta em um monopólio, em que apenas um dos indivíduos concentra toda a renda da população, a despeito da variável  $\alpha$  (% da renda transacionada), única variável independente. Assim, o modelo sempre inicia com um Gini = 0 e finaliza com Gini = 1, sendo que a variável  $\alpha$  define a rapidez com que se atinge Gini = 1. Quanto maior o valor de  $\alpha$ , menos ticks são necessários para chegar-se na desigualdade extrema. Esse comportamento pode ser observado na **Figura 10**. Para o mesmo tick = 30 tem-se evoluções distintas para distintos valores de  $\alpha$ . Com  $\alpha$  = 0,1, obtém-se Gini = 0,361, com  $\alpha$  = 0,3 o Gini sobe para 0,715 e com  $\alpha$  = 0,5 o Gini sobe novamente e vai para Gini = 0,869.

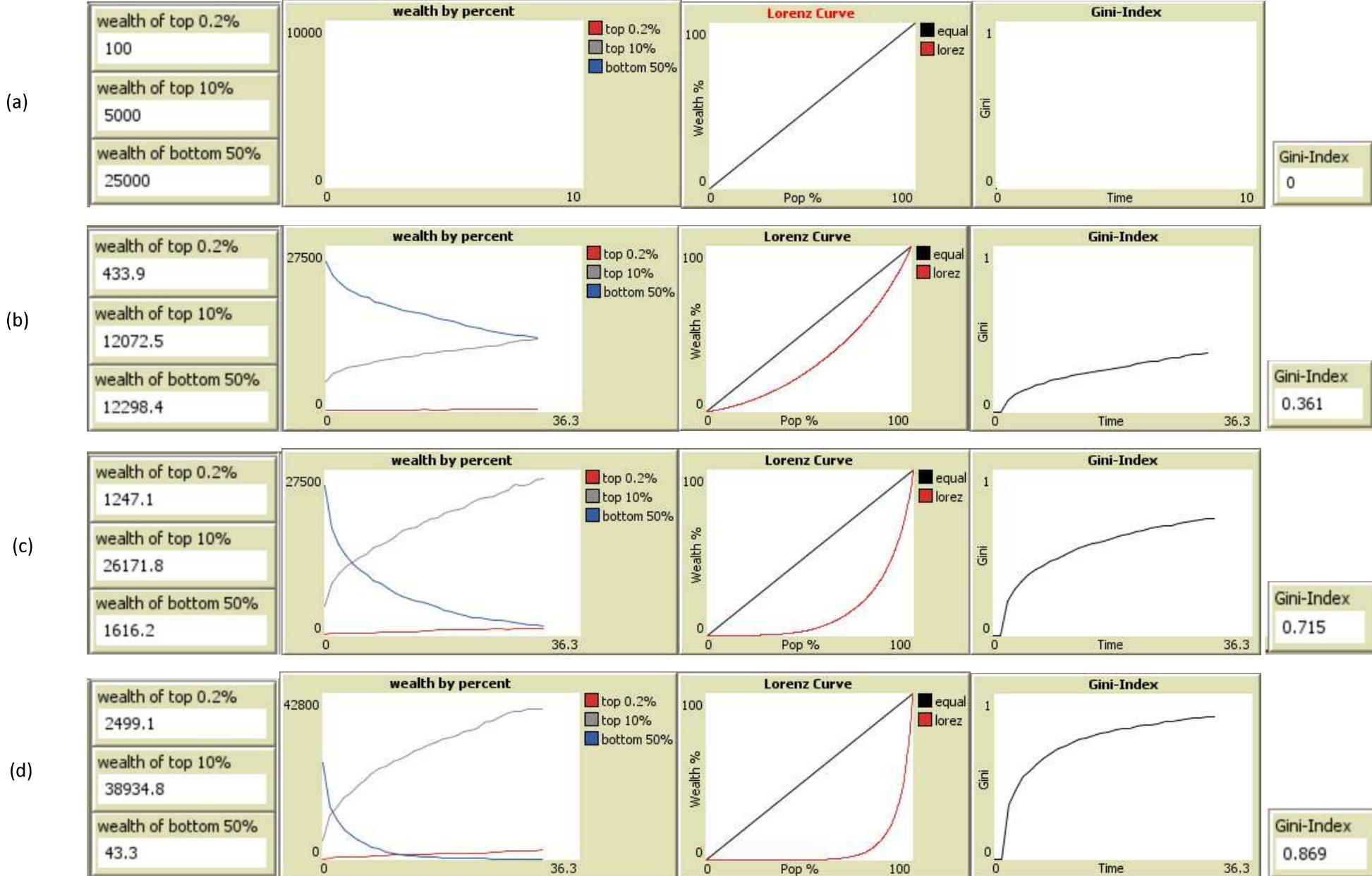
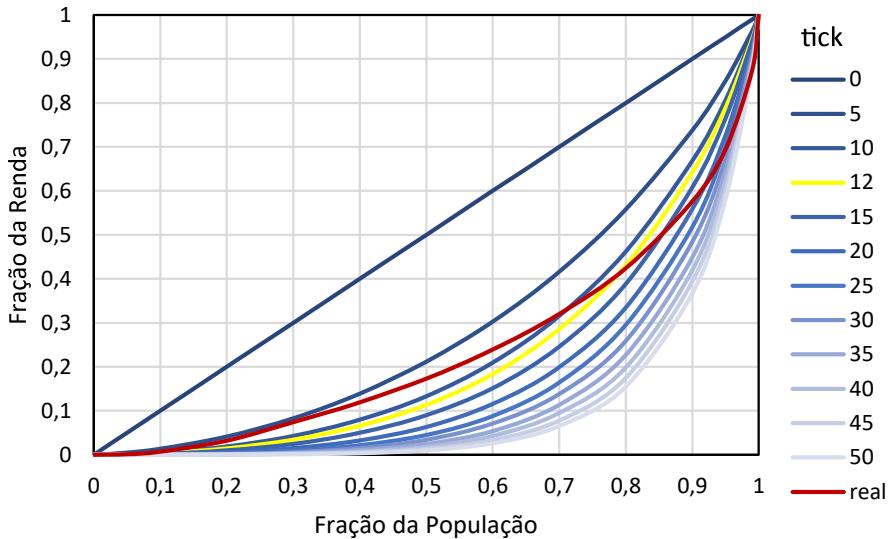


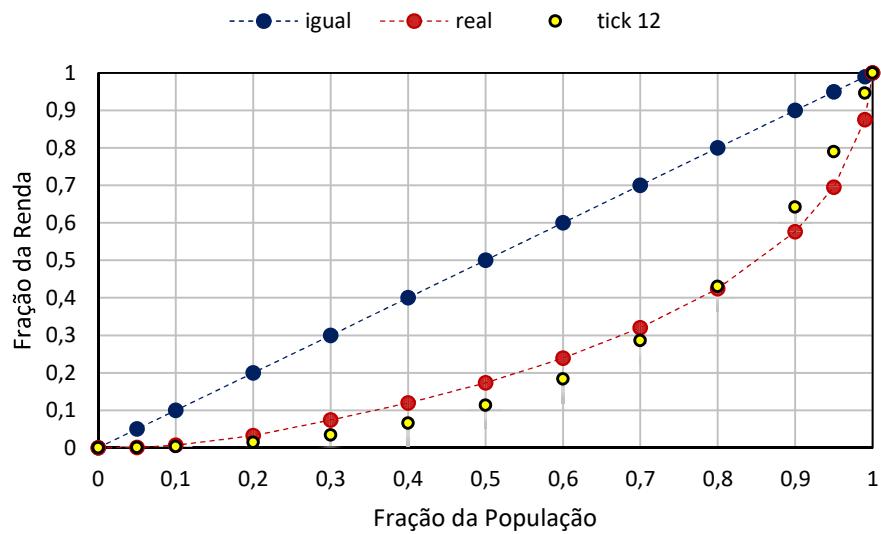
Figura 10: Interfaces do NetLogo para o Modelo Venda de Garagem para (a) início da simulação ( $Gini = 0$ ) e três simulações com  $tick = 30$  variando-se (b)  $\alpha = 0,1$  ( $Gini = 0,361$ ), (c)  $\alpha = 0,3$  ( $Gini = 0,715$ ) e (d)  $\alpha = 0,5$ , ( $Gini = 0,869$ ).

Para o estudo da dinâmica do modelo, fixou-se  $\alpha = 30\%$  e observou-se a evolução da curva de Lorenz (**Figura 11**) e o índice de Gini para diferentes ticks, unidade de tempo no modelo. As simulações tiveram repetição de 10 vezes. Os dados foram exportados para um arquivo txt e analisados com o auxílio do Excel, que permitiu identificar o tick de menor soma de erros quadráticos entre a curva de Lorenz simulada e real PNAD Contínua 2017 anualizada.



**Figura 11:** Dinâmica no tempo das Curvas de Lorenz nas simulações do modelo venda de garagem no NetLogo com  $\alpha=30\%$  e Curva de Lorenz real PNAD 2017 para ticks de 0 a 50.

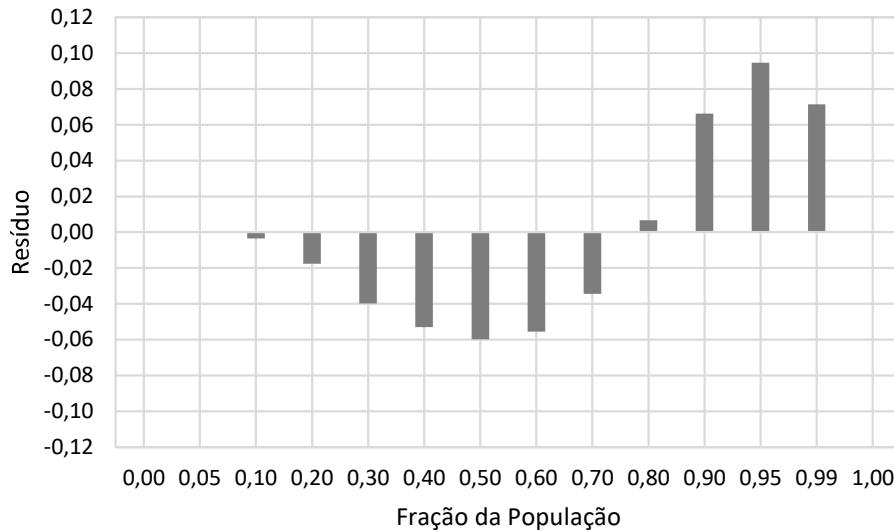
Na **Figura 12** observam-se as Curvas de Lorenz de igualdade, real e simulação do modelo para  $\text{tick} = 12$ , que foi aquela que apresentou a menor soma de erros quadráticos.



**Figura 12:** Comparativo entre as Curva de Lorenz da Igualdade, Real e Simulação do modelo venda de garagem no NetLogo com  $\alpha=30\%$  e tick = 12.

Para  $\alpha = 30\%$  e  $\text{tick} = 12$  calculou-se o Índice de Gini = 0,549 via Método dos trapézios. Na PNAD 2017 o Índice de Gini = 0,520.

A análise dos resíduos na **Figura 13** permite constatar que o erro não é aleatório, o formato do gráfico, inicialmente com erro negativo crescente que troca para erro positivo conforme aumenta % população, permite dizer que o modelo ainda não consegue capturar todo o comportamento dos dados reais.



**Figura 13:** Resíduos entre Curvas de Lorenz Real e Simulação do modelo venda de garagem no Netlogo com  $\alpha=30\%$  e  $tick = 12$ .

### 3.2 Modelo Efeito Taxação

No modelo complementado com os efeitos da taxação e redistribuição observa-se que é alcançado um equilíbrio para cada combinação das variáveis independentes  $\alpha$  (% da renda transacionada) e taxação (perc-alpha-tax), ou seja, o modelo não mais culmina em monopólio. Na **Figura 14** é possível observar-se simulações para  $tick = 30$  e  $perc-alpha-tax = 50$  fixos e  $\alpha = 0,1; 0,3$  e  $0,5$  variando. Nota-se uma rápida estabilização do modelo.

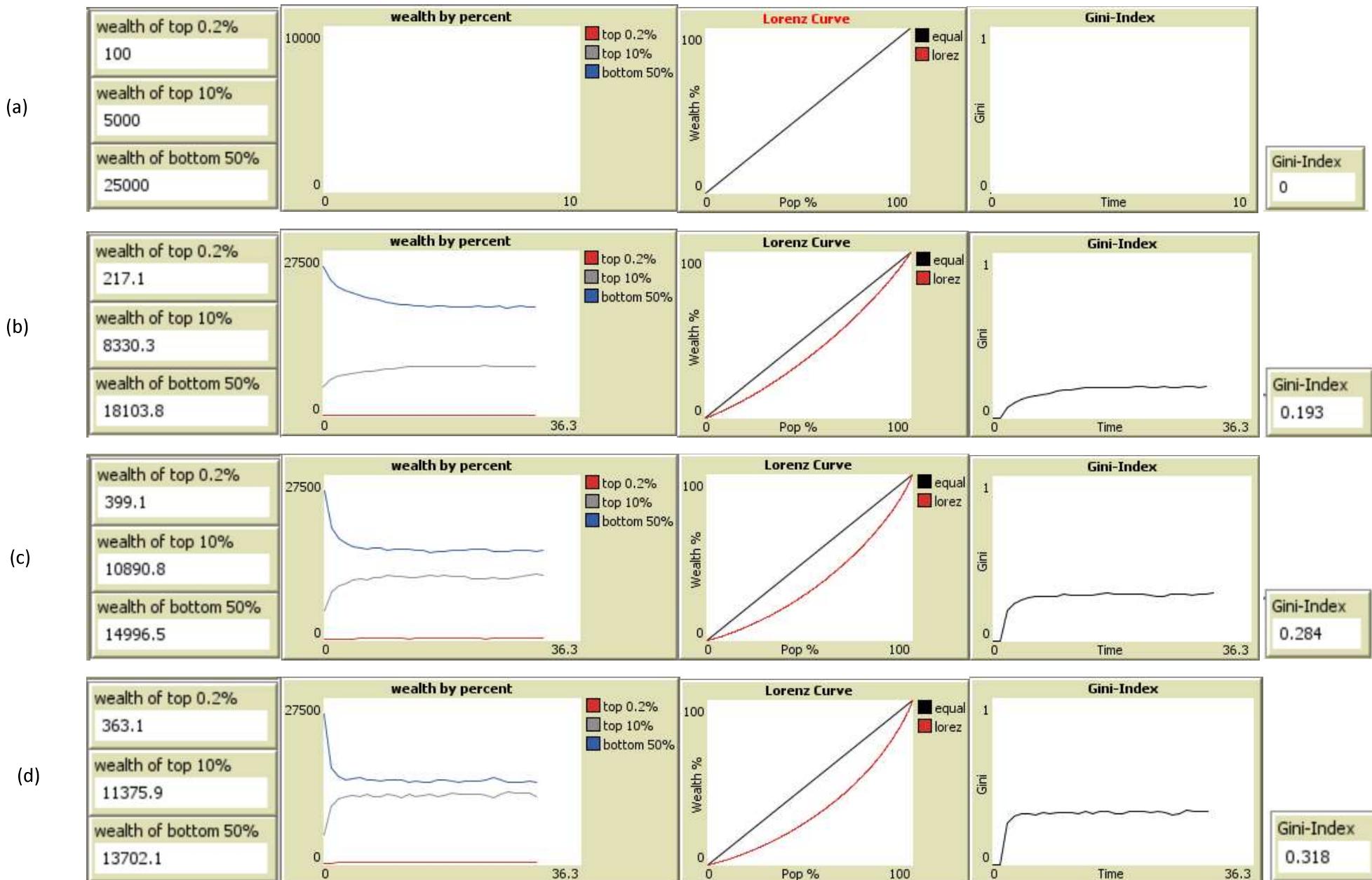


Figura 14: Interface do NetLogo para o Modelo Efeito Taxação para (a) início da simulação ( $Gini = 0$ ) e três simulações com  $tick = 30$  e  $perc-alpha-tax = 50$  fixos e variando-se (b)  $\alpha = 0,1$  ( $Gini = 0,193$ ), (c)  $\alpha = 0,3$  ( $Gini = 0,284$ ) e (d)  $\alpha = 0,5$ , ( $Gini = 0,318$ ).

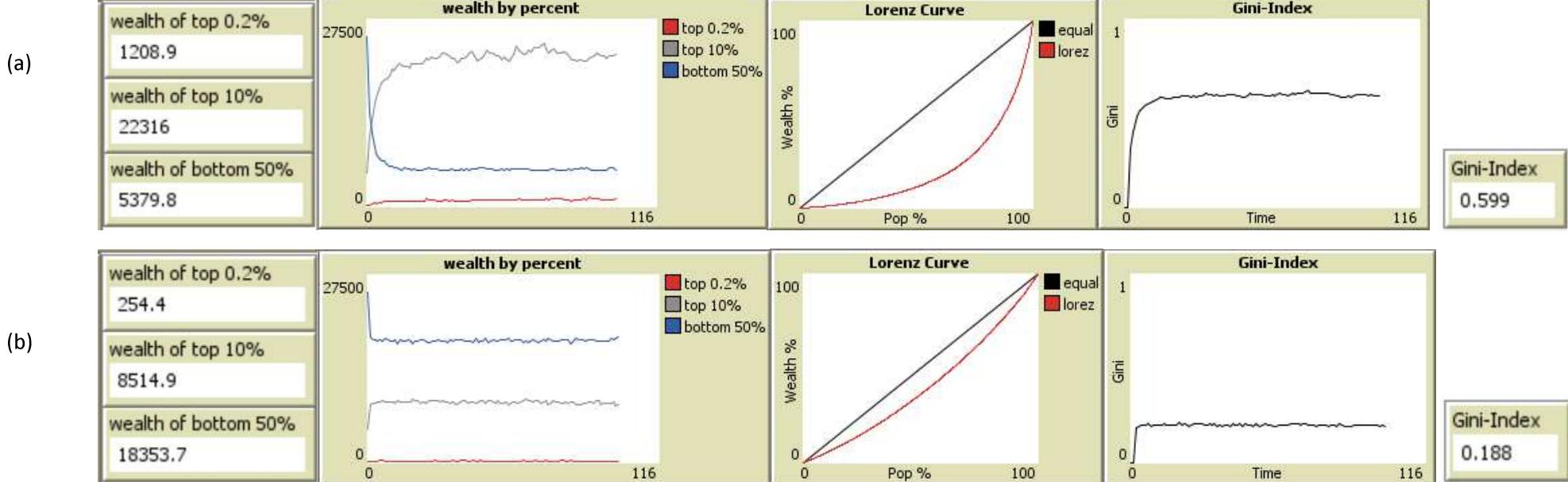


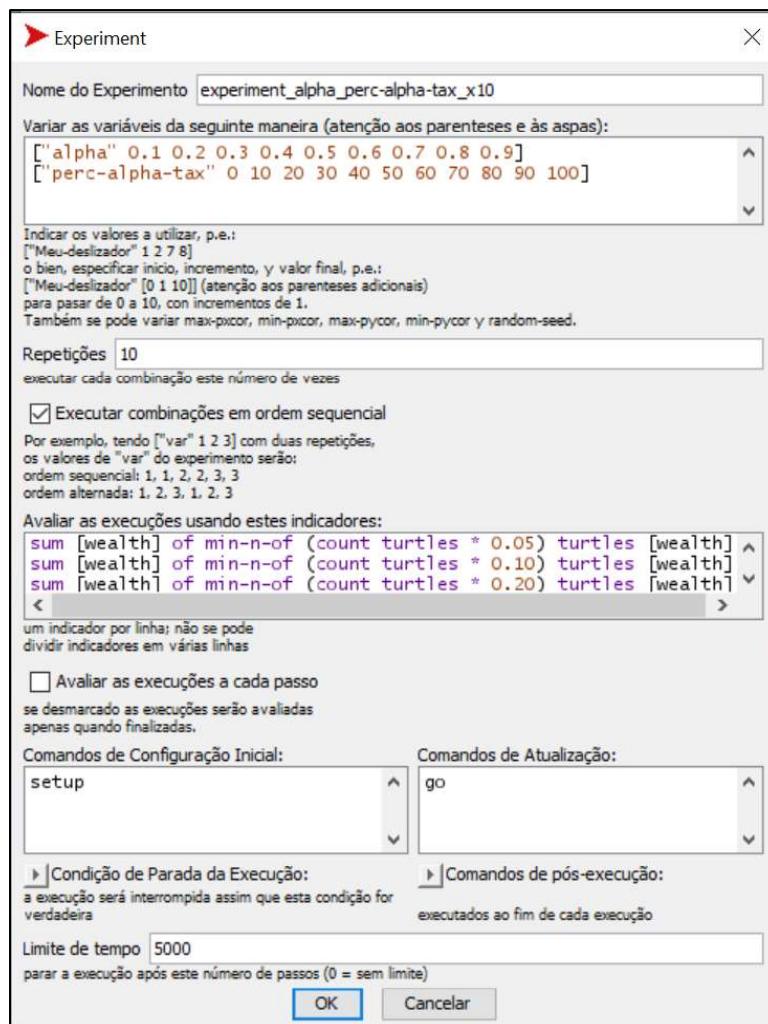
Figura 15: Interface do NetLogo para o Modelo Efeito Taxação para duas simulações com  $tick = 100$  e  $\alpha = 0,5$  fixos e variando-se (a)  $perc\text{-}\alpha\text{-tax} = 10$  (Gini = 0,599) e (b)  $perc\text{-}\alpha\text{-tax} = 90$  (Gini = 0,188).

A estabilização é alcançada mais rapidamente à medida que cresce o  $\alpha$  e também o perc-alpha-tax, conforme observa-se nas **Figura 14** e **Figura 15**, respectivamente.

À medida que sobe a taxação, Gini reduz conforme expectativa. A **Figura 15** ilustra o efeito esperado do aumento da variável perc-alpha-tax de 10 para 90 fixando-se tick = 100 e  $\alpha$  = 0,5. Para um baixo nível de taxação, perc-alpha-tax = 10, o Gini é 3 vezes maior que para um nível de taxação mais elevado, perc-alpha-tax = 90.

Para encontrar-se as variáveis  $\alpha$  e perc-alpha-tax que resultam na menor soma de erros quadráticos entre a Curva de Lorenz simulada e real PNAD Contínua 2017 anualizada, definiu-se um grid contendo combinações dessas duas variáveis e definiu-se um limite de ticks para o fim das simulações. Utilizou-se a ferramenta *Behaviour Space*, desenvolvida dentro do próprio *NetLogo*, para otimizar computacionalmente a execução das simulações. O uso dessa é indicado quando é necessário realizar-se muitas simulações variando-se diversos parâmetros do modelo.

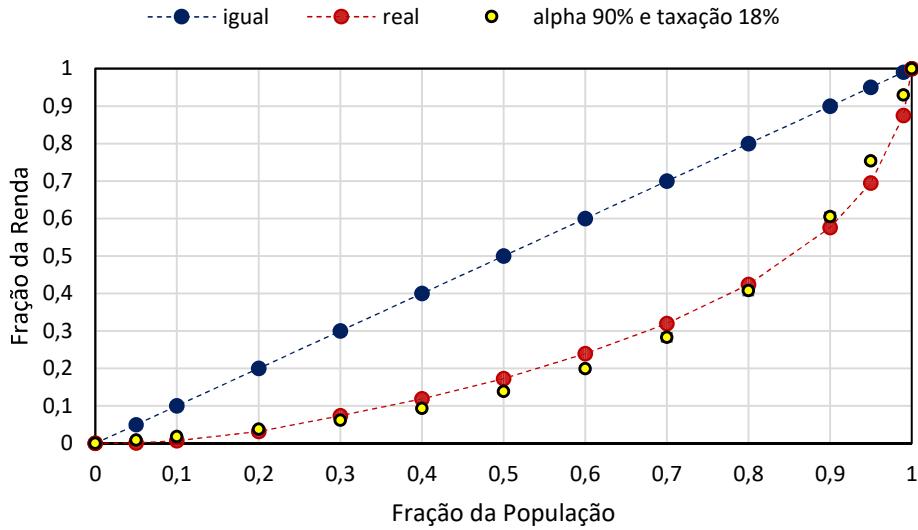
Primeiramente, definiu-se um grid menor de  $11 \times 9 = 99$  pontos, com  $\alpha$  variando de 0,1 a 0,9 com intervalos de 0,1 e perc-alpha-tax variando de 0 a 100 com intervalos de 10 unidades. Repetiu-se cada experimento 10 vezes, totalizando 990 simulações e definiu-se o limite de 5.000 ticks. A definição do tick limite foi feita avaliando-se a combinação ( $\alpha = 5\%$  e perc-alpha-tax = 0) que apresentava o maior tempo para estabilização considerando o percentil 5% mais ricos da população. A **Figura 16** traz a tela de configuração do *Behaviour Space* para o menor grid.



**Figura 16:** Tela do *Behaviour Space* configurada para o menor grid.

Posteriormente, aumentou-se o grid para  $19 \times 19 = 361$  pontos, com  $\alpha$  variando de 0,05 a 0,9 com intervalos de 0,05 e perc-alpha-tax variando de 0 a 100 com intervalos de 5 unidades. O número de repetições e condição de parada foram os mesmos definidos no experimento de menor grid, totalizando 3.610 simulações. Para o grid menor, o tratamento de dados foi feito na ferramenta Excel, mas posteriormente foi necessário implementar um código no Python para facilitar o tratamento do arquivo de saída de texto disponibilizado pelo *Behaviour Space* devido à dificuldade de fazê-lo em Excel.

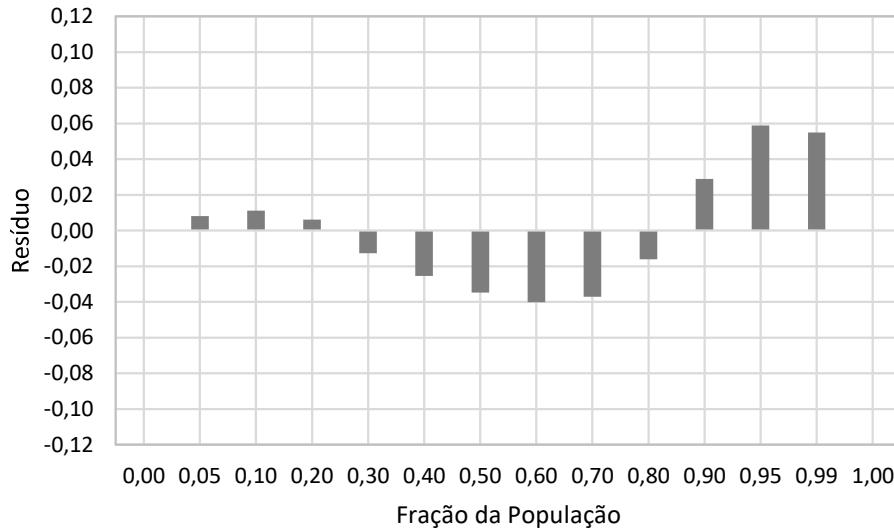
Na **Figura 17** encontram-se as Curvas de Lorenz para igualdade, real e modelo complemento taxação e redistribuição com  $\alpha = 90\%$  e taxação = 18% (perc-alpha-tax = 20), que apresentou o menor erro quadrático dentro das combinações do grid selecionado.



**Figura 17:** Comparativo entre as Curva de Lorenz da Igualdade, Real e Simulação do modelo com efeito taxação e redistribuição no NetLogo com  $\alpha=90\%$  e taxação = 18% (perc-alpha-tax = 20%).

Para o modelo com efeito taxação e redistribuição com  $\alpha = 90\%$  e taxação = 18% (perc-alpha-tax = 20) obteve-se o Índice de Gini = 0,537.

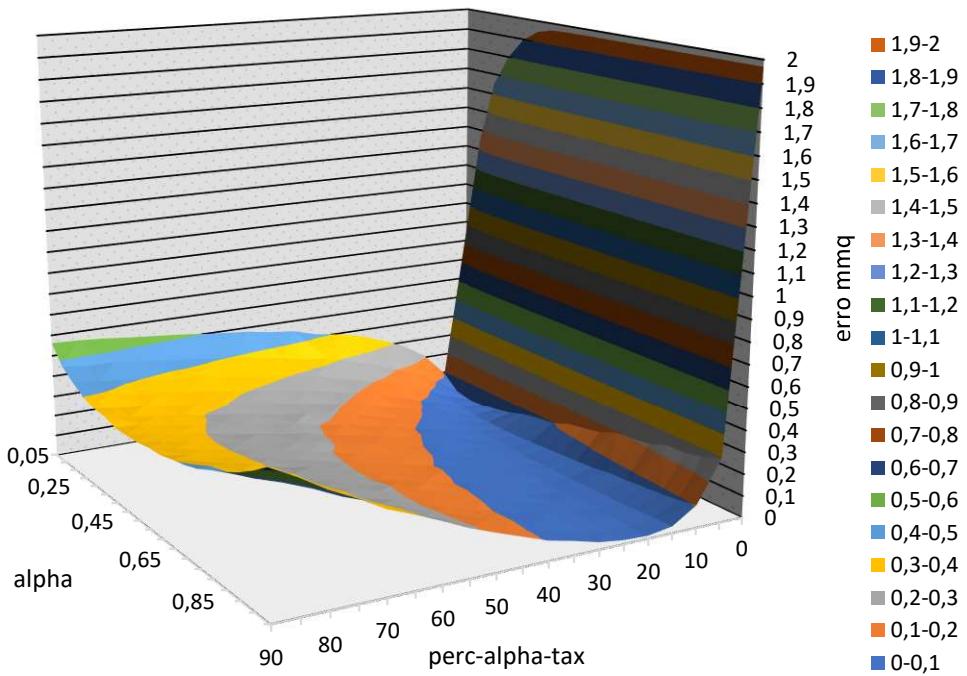
Os resíduos observados na **Figura 18** novamente permitem constatar que o erro não é aleatório, o formato do gráfico varia conforme aumenta % população, o que permite dizer que o modelo ainda não consegue capturar todo o comportamento dos dados reais. Em relação ao modelo venda de garagem observa-se que, no geral, os resíduos são menores no modelo com o complemento dos efeitos de taxação e redistribuição.



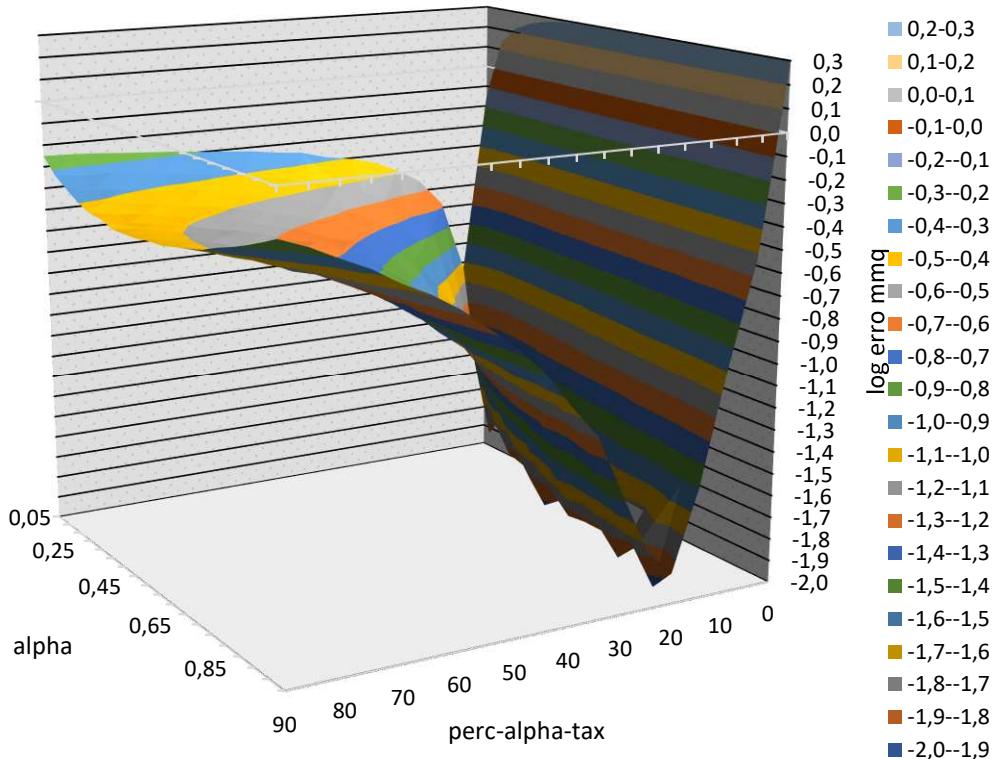
**Figura 18:** Resíduos entre Curvas de Lorenz Real e Simulação do modelo com efeito taxação e redistribuição no NetLogo com  $\alpha=90\%$  e taxação = 18% (perc-alpha-tax = 20%).

A **Figura 19** contém o gráfico de superfície do erro via método dos mínimos quadrados para cada uma das simulações. É possível observar uma região da variável perc-alpha-tax variando entre 10 e 30 que contém vários mínimos locais e que tem uma tendência de mínimo conforme aumenta alpha. Contudo, visualmente, não é fácil identificar a combinação de menor erro mmq. Assim, construiu-se também a **Figura 20**, que contém o logaritmo (base 10) do erro mmq, para facilitar a visualização e distinção dos pontos de mínimo.

Nota-se que os pontos de mínimo locais obtidos são muito similares e estão restritos a uma faixa muito estreita de perc-alpha-tax. Isso pode ocorrer devido a uma característica do próprio modelo como também ao não atingimento do equilíbrio nas simulações ou ao número insuficiente de repetições. Para testar tais hipóteses seria necessário novas simulações focadas na faixa de mínimos observada.



**Figura 19:** Erro entre Curvas de Lorenz via método dos mínimos quadrados entre dados reais e simulação do modelo com efeito taxação e redistribuição no Netlogo®.



**Figura 20:** Log Erro entre Curvas de Lorenz via método dos mínimos quadrados entre dados reais e simulação do modelo com efeito taxação e redistribuição no Netlogo®.

## 4. Conclusões

Estudou-se modelos simples de desigualdade de renda através de simulação multagente utilizando-se a ferramenta Netlogo®. Abordou-se o modelo Venda de Garagem, em que transações aleatórias entre indivíduos acontecem com base em um percentual aplicado à renda do agente de menor renda. Tal regra resulta em quebra de simetria e gera um sistema extremamente desigual, onde, no cômulo, um indivíduo detém toda a riqueza. Considerou-se então a implantação de taxação e redistribuição baseada na renda média da população de modo a se aproximar a renda dos indivíduos à renda média da população. Essas modificações trouxeram estabilidade ao modelo.

Comparou-se os modelos com dados reais da desigualdade brasileira contidas na PNAD Contínua Anualizada 2017, em termos de Curva de Lorenz e Índice de Gini. Determinou-se os parâmetros do modelo que apresentaram a menor soma de erros quadráticos entre dados reais e simulados. Salienta-se que para o caso do modelo envolvendo tributação e redistribuição, esses podem ser melhores investigados, uma vez que a dinâmica do modelo não permite confirmar categoricamente os parâmetros obtidos, conforme mostra a **Figura 20**, em que se observa uma região que concentra vários candidatos à mínima global. Os resíduos, claramente não aleatórios, evidenciam que os modelos estudados não conseguem explicar o fenômeno real da desigualdade, que é muito complexo. Assim, para futuros estudos, sugere-se simulações mais extensas dos presentes modelos e a implantação das modificações presentes no modelo *The Affine Wealth Model*, por exemplo. O uso da ferramenta Netlogo® foi interessante, pois permite a construção de modelos de maneira fácil, contudo aponta-se a necessidade de validações para ter-se maior confiabilidade que o modelo esteja conforme o estabelecido.

Conclui-se que modelos simples de desigualdade de renda conseguem exprimir com clareza a tendência mais provável do pobre empobrecer e do rico enriquecer e mostrar que intervenções, tais como tributação e redistribuição, são necessárias para evitar-se concentrações de renda muito elevadas.

## Bibliografia

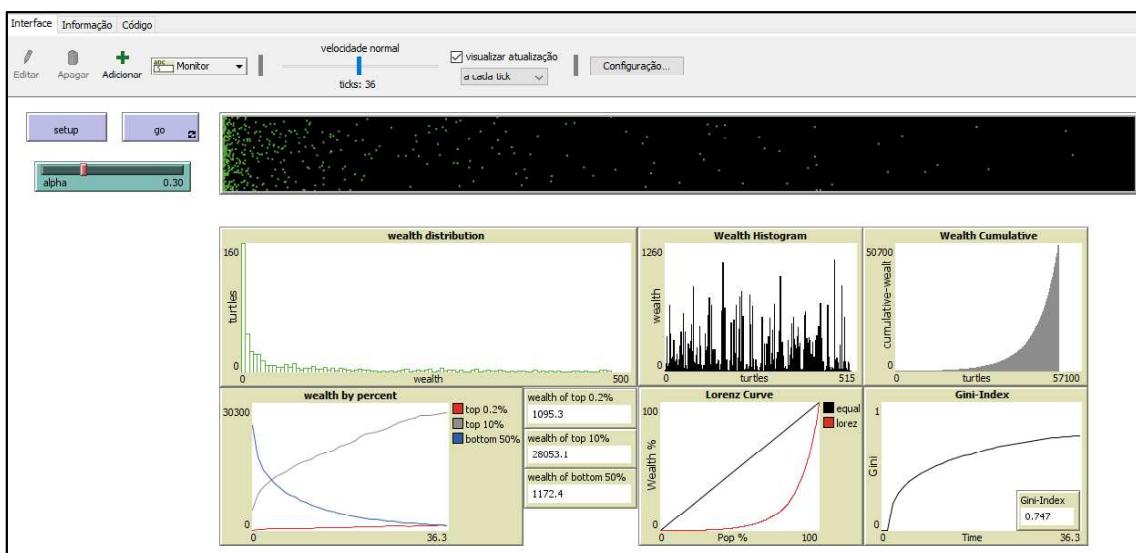
- BOGHOSIAN; B. M., DEVITT-LEE; A., WANG, H. *The Growth of Oligarchy in a Yard-Sale Model of Asset Exchange:A Logistic Equation for Wealth Condensation. Proceedings of the 1st International Conference on Complex Information Systems*, p. 187-193, 2016.
- BOGHOSIAN; B. M., DEVITT-LEE, A., JHONSON; J., LI, J., MARCQ; J. A., WANG, H. *Oligarchy as a phase transition: The effect of wealth-attained advantage in a Fokker–Planck description of asset Exchange. Physica A*, v. 476, p. 15-37, 2017.
- BOGHOSIAN, B. M. *The inescapable casino. Scientific American*, v. 321, n. 5, p. 71-77, 2019.
- CHAKRABORTI, A. *Distributions of money in model markets of economy. International Journal of Modern Physics C, World Scientific*, v. 13, n. 10, p. 1315–1321, 2002.
- CHANCEL, L., PIKETTY, T. *Globa Income Inequality, 1820–2020: The Persistance and Mutation of Extreme Inequality. Journal of the European Economic Association*, v. 19, n. 6, p. 3025-3062, 2021.
- HAYES, B. *Follow the Money. American Scientist*, v 90, n. 5, p. 400-410, 2002.
- HOFFMANN, R. *Distribuição da Renda no Brasil*, 2017.
- LI; J., BOGHOSIAN; B. M., LI, C. *The Affine Wealth Model: An agent-based model of asset exchange that allows for negative-wealth agents and its empirical validation. Physica A*, v. 516, p. 423-442, 2019.
- MEDEIROS, M. *Uma Introdução às Representações Gráficas da Desigualdade de Renda*. Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada. Texto para Discussão, n. 1202, 2006.
- MEDEIROS, M. *Medidas de Desigualdade e Pobreza*. Editora Universidade de Brasília, 1<sup>a</sup> ed., 2012.
- MILANOVIC, B. *The Haves and the Have-Nots: A Brief and Idiosyncratic History of Global Inequality*. Basic Books, 2010.
- MILANOVIC, B. *More or Less - Income inequality has risen over the past quarter-century instead of falling as expected. Finance & Development*. p. 6 -11, 2011.
- MILANOVIC, B. *Global Income Inequality in Numbers: in History and Now. Global Policy*, v. 4, n. 2, 2013.
- NASCIMENTO, M. V. S. *Uma análise do modelo de venda de garagem usando simulação multia-gente*. Monografia Programa de Educação Continuada da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2023.
- NEWMAN, M. E. J. *Power laws, Pareto distributions and Zipf's law. Contemporary Physics*, v. 46, p. 323-351, 2005.
- WILENSKY, U.; RAND, W. *An introduction to agent-based modeling: modeling natural, social, and engineered complex systems with NetLogo*. [S.I.]: Mit Press, 2015.
- UNDP. *Humanity Divided: Confronting Inequality in Developing Countries*. United Nations Development Programme, 2013.

UN-DESA. *United Nations - Department of Economic and Social Affairs. Concepts of Inequality. Development Issues*, n. 1, 2015.

## Anexos

### Modelo Venda de Garagem no Netlogo®

Na **Figura 21** mostra-se um exemplo da interface do modelo venda de garagem no Netlogo® em um dado momento da simulação. Cursor alpha permite ao usuário definir a variável  $\alpha$  da Eq. (2.11). Os botões setup e go, na lateral esquerda acima, são os comandos básicos de inicialização e ação, respectivamente. O quadro negro na parte superior é uma ilustração onde cada ponto em verde é um agente e sua renda é dada pela distância da parede esquerda. Os quadros abaixo do quadro negro trazem gráficos e indicadores para o acompanhamento da simulação. Na primeira linha, tem-se o *wealth distribution*, um histograma do número de turtles em função da sua riqueza individual, dado de modo ordenado, o *wealth histogram*, o histograma invertido e sem ordenamento, o *wealth cumulative*, a riqueza acumulada de cada turtle. Na linha inferior, o *wealth by percent* traz as quebras da renda do 0,2% mais rico, ou a renda da turtle mais rica, a renda dos 10% mais ricos e a renda dos 50% mais pobres por tick, ou tempo, sendo que cada fatia também tem seu valor numérico representado nas caixas de texto ao lado direito do quadro. Os quadros inferiores à direita, *Lorenz Curve* traz a Curva de Lorenz e o *Gini Index* traz o Índice de Gini.



**Figura 21:** Interface do modelo venda de garagem no Netlogo®.

```
; ;Variáveis
turtles-own [
  wealth
]
; ;Variáveis globais
globals [
  gini-index-reserve
  lorenz-points
  cumulative-wealth
]
```

```

;; Inicialização
to setup
clear-all
create-turtles 500 [
  set wealth 100
  set shape "circle"
  set color green
  set size 2
  setxy wealth random-ycor
]
reset-ticks
update-lorenz-and-gini
end

```

```

;; Transação
to transact
let i random 500
let j random 500

let r [ wealth ] of turtle i
let s [ wealth ] of turtle j

ifelse r < s [
  ask turtle i [ set wealth ( wealth - alpha * r ) ]
  ask turtle j [ set wealth ( wealth + alpha * r ) ]
] [
  ask turtle i [ set wealth ( wealth - alpha * s ) ]
  ask turtle j [ set wealth ( wealth + alpha * s ) ]
]
end

```

```

;; GO
to go
ask turtles with [ wealth > 0 ] [ transact ]
ask turtles [ if wealth <= max-pxcor and
  min-pxcor <= wealth [ set xcor wealth ] ]
tick
update-lorenz-and-gini
end

```

```

;; Retorna o total de riqueza dos 0.2% mais ricos
to-report top-0.2-pct-wealth
  report sum [ wealth ] of
    max-n-of ( count turtles * 0.002) turtles [ wealth ]
end

;; Retorna o total de riqueza dos 10% mais ricos
to-report top-10-pct-wealth
  report sum [ wealth ] of
    max-n-of ( count turtles * 0.10) turtles [ wealth ]
end

;; Retorna o total de riqueza de metade da populacao
to-report bottom-50-pct-wealth
  report sum [ wealth ] of
    min-n-of ( count turtles * 0.50) turtles [ wealth ]
end

```

```

to update-lorenz-and-gini
  let num-people count turtles
  let sorted-wealths sort [wealth] of turtles
  let total-wealth sum sorted-wealths
  let wealth-sum-so-far 0
  let index 0
  let print-option 0
  let file-address (word "C:\\\\Users\\\\Probook\\\\Documents\\\\Net-
Logo\\\\my-file-out-" alpha ".txt")
  let separador ","
  set gini-index-reserve 0
  set lorenz-points []
  set cumulative-wealth []
  repeat num-people [

```

```

;;Exporta dados
if print-option = 1 [
  if ticks = 0 and index = 0 [
    carefully [ file-delete file-address ] [ print error-message ]
    file-open file-address
    file-print "Output Lorenz-Gini"
    file-print date-and-time
    file-type "tick"
    file-type separador
    file-type "index"
    file-type separador
    file-type "wealth-sum-so-far"
    file-type separador
    file-type "total-wealth"
    file-type separador
    file-type "gini-index-reserve"
    file-type separador
    file-type "num-people"
    file-type "\n"
  ]
  file-open file-address
  file-type ticks
  file-type separador
  file-type index
  file-type separador
  file-type wealth-sum-so-far
  file-type separador
  file-type total-wealth
  file-type separador
  file-type gini-index-reserve
  file-type separador
  file-print num-people

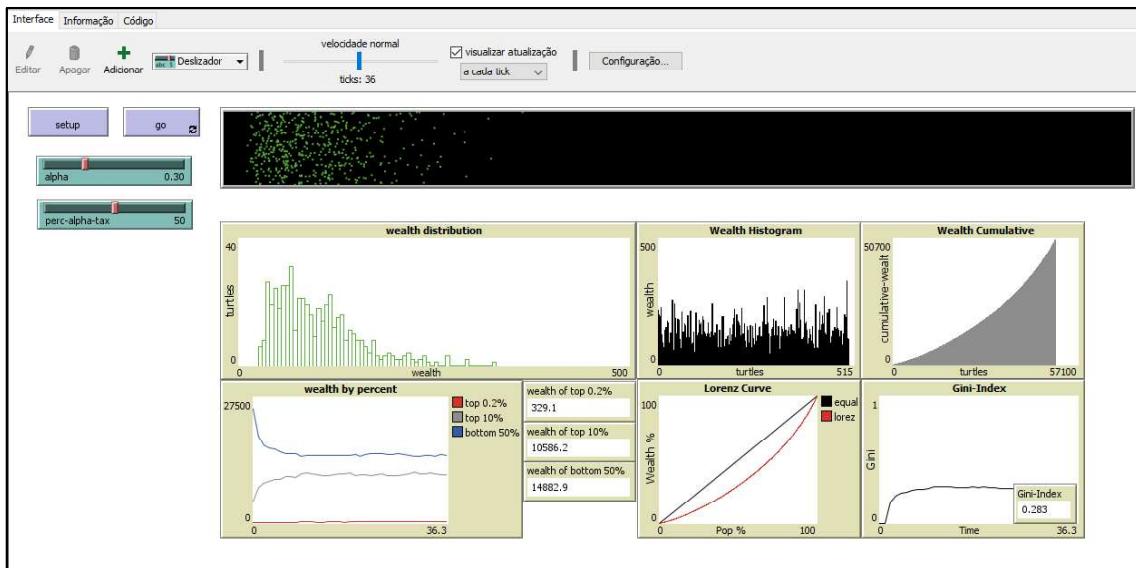
  set wealth-sum-so-far (wealth-sum-so-far + item index sorted-weal-
ths)
  set lorenz-points lput ((wealth-sum-so-far / total-wealth) * 100)
  lorenz-points
  set cumulative-wealth lput wealth-sum-so-far cumulative-wealth
  set index (index + 1)
  set gini-index-reserve
  gini-index-reserve +
  (index / num-people) -
  (wealth-sum-so-far / total-wealth)
]

file-close
print (gini-index-reserve / count turtles) / 0.5
end

```

## Modelo Venda de Garagem com Efeito Taxação e Redistribuição no NetLogo®

A Figura 22 mostra interface do modelo venda de garagem considerando os efeitos de taxação e redistribuição. Comparando-se com a interface do modelo venda de garagem houve a inclusão do slider perc-alpha-tax, que inclui a variável de tributação.



**Figura 22:** Interface do modelo considerando taxação e redistribuição no NetLogo®.

```
;;Variáveis
turtles-own [
  wealth
]
;;Variáveis globais
globals [
  ;Medidas da desigualdade
  gini-index-reserve ;;integral para cálculo índice gini
  lorenz-points ;;curva lorenz
  cumulative-wealth
  ;;
  tax-total ;;taxação total
  tax ;;taxa = perc*alpha
  temp ;;grava o menor wealth entre duas turtles
  eta ;;variável binária
]
```

```

;; Inicialização
to setup
clear-all
create-turtles 500 [
  set wealth 100
  ;;set alpha 0.1
  set shape "circle"
  set color green
  set size 2
  setxy wealth random-ycor
]
reset-ticks
update-tax
update-lorenz-and-gini
end

```

```

;; Transação
to transact
let i random (count turtles - 1)
let j random (count turtles - 1)

let r [ wealth ] of turtle i
let s [ wealth ] of turtle j

;; grava na temp o menor wealth entre as duas turtles
ifelse r < s [
  set temp r
] [
  set temp s
]

;; define v.a. eta com base no sorteio randômico [0,1]
ifelse (random 2) = 1 [
  set eta - 1
] [
  set eta 1
]

;; transação
ask turtle i [ set wealth ( wealth - eta * alpha * temp ) ]
ask turtle j [ set wealth ( wealth + eta * alpha * temp ) ]

end

```

```

;;Calcula Taxação e Taxação-Total
to update-tax
  set tax ( perc-alpha-tax / 100 ) * alpha
  set tax-total ( sum [wealth] of turtles ) * tax
end

```

```

;;Taxação
to tribute
  set wealth wealth * ( 1 - tax )
end

```

```

;;Redistribuição
to redistribute
  set wealth wealth + ( tax-total / (count turtles) )
end

```

```

;;GO
to go
  ask turtles with [ wealth > 0 ] [ transact ]
  ask turtles [tribute]
  ask turtles [redistribute]
  ask turtles [ if wealth <= max-pxcor and
    min-pxcor <= wealth [ set xcor wealth ] ]
  tick
  update-lorenz-and-gini
end

```