

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**Estudo de um sistema não linear massa,
mola e amortecedor com pêndulo
acoplado**

Autor: Danilo Soares Gonçalves

Orientador: Prof. Dr. Hélio Aparecido Navarro

São Carlos

2014

Danilo Soares Gonçalves

**Estudo de um sistema não linear massa, mola e
amortecedor com pêndulo acoplado**

Trabalho de Conclusão de Curso em
Engenharia Mecatrônica da Escola de
Engenharia de São Carlos da
Universidade de São Paulo.

Orientador: Hélio Aparecido Navarro

São Carlos

2014

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

G635e

Gonçalves, Danilo Soares

Estudo de um sistema não linear massa, mola e
amortecedor com pêndulo acoplado / Danilo Soares
Gonçalves; orientador Prof. Hélio Aparecido Navarro.
São Carlos, 2014.

Monografia (Graduação em Engenharia Mecatrônica) --
Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de
São Paulo, 2014.

1. Dinâmica . 2. Vibrações. 3. Dinâmica não linear.
I. Título.

FOLHA DE AVALIAÇÃO

Candidato: Danilo Soares Gonçalves

Título: "Estudo de um sistema não linear massa, mola e amortecedor com pêndulo acoplado"

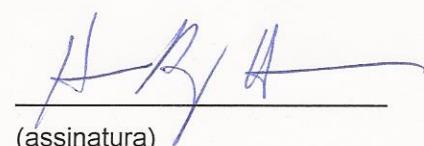
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Escola de Engenharia de São Carlos da
Universidade de São Paulo
Curso de Engenharia Mecatrônica.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Hélio Aparecido Navarro

Professor da EESC-USP

Nota atribuída: 8,0 (oito)

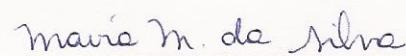


(assinatura)

Profa. Dra. Maíra Martins da Silva

Professora da EESC-USP

Nota atribuída: 8,0 (oito)

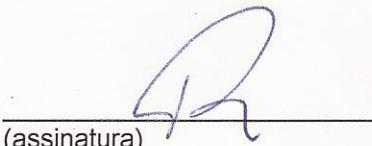


(assinatura)

Prof. Msc. Sérgio de Camargo Rangel

Professor do IFSP e Doutorando da EESC-USP

Nota atribuída: 8,0 (oito)



(assinatura)

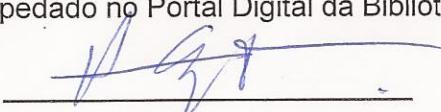
Média: 8,0 (oito)

Resultado: Aprovado

Data: 03/12/14

Este trabalho tem condições de ser hospedado no Portal Digital da Biblioteca da EESC

SIM NÃO Visto do orientador



RESUMO

Este trabalho trata-se de uma revisão de tópicos da graduação, como dinâmica e vibrações, bem como o estudo de assuntos que não são abordados nela, como não linearidades de sistemas dinâmicos.

Foram realizadas a modelagem e simulação de um pêndulo, com e sem amortecimento, de um sistema massa mola amortecedor, com e sem a presença de mola cúbica, e de um sistema massa mola amortecedor com pêndulo acoplado, com e sem a presença de mola cúbica. Todas as simulações foram programadas e realizadas usando o *MatLab®*.

Investigou-se como os dois últimos sistemas respondem com a variação da frequência de vibração e observou-se comportamentos esperados nos sistemas sem a mola cúbica, e comportamentos diversos nos sistemas com mola cúbica.

Palavras-chave: Dinâmica, Vibrações, Dinâmica não linear.

ABSTRACT

This paper is a review on graduation topics, such as dynamic and vibration, as well as deals with issues that are not addressed in it, as nonlinearities of dynamic systems.

It was carried out the modeling and simulation of a pendulum, with and without damping, of a mass spring damper system, with and without the presence of cubic spring, and of a mass spring damper system with a coupled pendulum, with and without the presence of cubic spring. All of them were done with the *Matlab®*.

It was investigated how the last two systems responded to the variation of vibration frequency. Expected behaviors were observed in those systems without cubic spring, and diverse behaviors were found in those systems with the cubic spring.

Keywords: Dynamics, Vibration, Nonlinear dynamics.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	Motivação	9
1.2	Objetivos	12
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	13
2.1	Dinâmica	13
2.2	Vibrações	14
3	DESENVOLVIMENTO	16
3.1	Pêndulo simples	17
3.2	Pêndulo amortecido	21
3.2.1	Amortecimento por resistência do ar	21
3.2.2	Amortecimento por atrito de junta	24
3.3	Sistema massa mola amortecedor	27
3.4	Sistema massa mola amortecedor com mola cúbica	31
3.5	Sistema massa mola amortecedor pêndulo	33
3.6	Sistema massa mola amortecedor pêndulo com mola cúbica	37
4	RESULTADOS	39
4.1	Pêndulo simples	39
4.2	Pêndulo amortecido	42
3.2.1	Amortecimento por resistência do ar	43
3.2.2	Amortecimento por atrito de junta	44
4.3	Sistema massa mola amortecedor	45
4.4	Sistema massa mola amortecedor com mola cúbica	49
4.5	Sistema massa mola amortecedor pêndulo	52
4.6	Sistema massa mola amortecedor pêndulo com mola cúbica	56

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
5.1 Conclusões dos resultados	61
REFERÊNCIAS	63
APÊNDICES	65

1 Introdução

Esta seção tem como objetivo apresentar as motivações que envolvem o tema em questão e demonstrar os objetivos deste trabalho.

1.1 Motivação

Este trabalho de conclusão de curso visa apresentar de forma geral os ensinamentos que foram passados para o escritor durante sua graduação bem como tópicos relacionados que foram aprendidos ao longo desta.

Basicamente este trabalho se resume à um estudo em engenharia mecânica, com ênfase nos tópicos de: dinâmica, vibrações e não-linearidades.

Dinâmica

Mecânica é o estudo de corpos que estão sujeito às forças, seja em movimento ou parados. Ela pode ser divida em *estática* e *dinâmica*. *Estática* é relacionada a corpos que estão em repouso ou em velocidade constante. *Dinâmica* discorre sobre corpos que estão sujeito à um movimento acelerado. [1]

Esta vertente da engenharia mecânica é abordada desde o começo da graduação até seu final. O estudo dela está diretamente relacionado com a área de mecatrônica. Por exemplo, estudos na área de dinâmica de corpos rígidos foram realizados com o intuito de obter um modelo simplificado de uma máquina de cinemática paralela (figura 1.1) , e no final foi verificado que esta estratégia trazia resultados com erros pequenos e grande eficácia computacional. [2]



Figura 1.1 Máquina de cinemática paralela [2]

Vibração

Qualquer movimento que se repete num intervalo de tempo é chamado de *vibração* ou *oscilação*. O oscilar de um pêndulo ou o movimento de uma mola que foi esticada são exemplos de vibrações. Esta ciência lida com o estudo de movimentos oscilatórios e as forças associadas a eles. [3]

Essa vertente da engenharia mecânica é muito importante no nosso cotidiano, pois vibrações estão em todos os lugares, como o vibrar do tímpano que nos faz ouvir, ou os movimentos oscilatórios de pernas e braços que nos fazem andar [3]. Além disso, ela se faz presente no contexto da mecatrônica. A referência [4] aborda um estudo da vibração de um sistema oscilatório acoplado à um motor excêntrico com folga (figura 1.2), o que gera um sistema descontínuo mas linear. O estudo revelou que para certos parâmetros, o movimento é caótico. No entanto, um novo método de controle de caos foi usado e o movimento caótico foi amenizado.

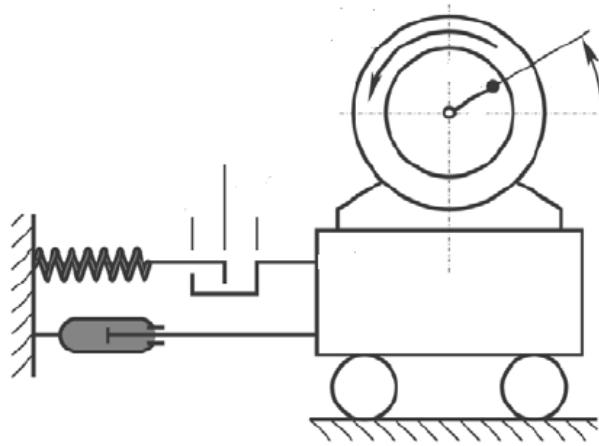


Figura 1.2 - Sistema Massa Mola Amortecedor com Motor Excêntrico acoplado [4]

Como podemos notar, vários estudos foram feitos em ambas as áreas de dinâmica e vibrações. Ainda mais, existem outros estudos que envolvem ambas.

A referência [5] trata de um estudo dinâmico de um sistema que gera energia através do movimento das ondas. Nesta tese, o autor modela como o contra peso do sistema reage aos movimentos da ondas. O sistema pode ser modelado como um pêndulo conectado à um corpo que sofre forças externas que geram movimento.

Um estudo sobre um sistema mecânico Vibro-Impacto é feito em [6]. Nele, um sistema de dois graus de liberdade compostos por duas massas diferentes conectadas por uma mola de dois estágios é analisado. A partir dos dados obtidos, notou-se que para determinadas frequências de vibração o movimento se apresentava caótico.

Não Linearidade

Em contraste aos sistemas lineares, a resposta de um sistema não-linear dada uma soma ponderada de sinais de entrada não será uma soma ponderada das respostas à estes sinais. [7]

Muitos sistemas dinâmicos possuem certo grau de não-linearidade, porém, durante nossa graduação, linearizações são feitas com o intuito de simplificar as equações que modelam o movimento destes sistemas. Mas em certas circunstâncias, temos que levar em conta essa não-linearidade para computarmos pontos que, antes, linearizações geravam erros.

Alguns estudos de fato levam em conta a questão de não-linearidades. Por exemplo, em [5], as equações que modelam o sistema são não-lineares (principalmente devido a aparição de senos e cossenos). Dentro deste contexto, o autor usa da ferramenta matemática *MatLab*, em especial a função *ode45()*. Esta função se baseia numa fórmula explícita de Runge-Kutta(4,5) [8]. Isto não será detalhado pois este não é o objetivo deste trabalho, no entanto esta função será usada para simular alguns casos no decorrer deste.

1.2 Objetivos

Este trabalho de conclusão de curso visa gerar um documento que compute e revise tópicos importantes abordados na graduação do autor, e também tenta introduzir tópicos extracurriculares relacionados aos anteriores com o intuito de se aprofundar mais em cada tópico. Tendo isto em vista, podemos listar os objetivos abaixo:

1. Revisão em dinâmica;
2. Revisão em vibrações;
3. Introdução no âmbito da não-linearidade;
4. Modelagem e simulação de um sistema massa, mola e amortecedor com pêndulo acoplado, com e sem mola cúbica.

2 Revisão Bibliográfica

Esta seção busca revisar conhecimentos em dinâmica e vibrações, que serão úteis no desenvolvimento deste trabalho. Outros conhecimentos pertinentes ao trabalho serão desenvolvidos no capítulo *Desenvolvimento*.

2.1 Dinâmica

Dentro desta seção, será feita uma revisão de como obter a lei de movimento de um corpo através da segunda lei de Newton.

A segunda lei de Newton define que quando uma força desbalanceada age num corpo, este corpo vai acelarar na direção desta força com magnitude proporcional a essa. A segunda lei de Newton para movimento pode ser escrita:

$$F = m \cdot a \quad (2.1)$$

Onde F é a força aplicada (medida em Newton N), m a massa (medida em kg) do corpo e a a aceleração (medida em m/s^2) resultante desta força. [1]

Ainda mais, podemos extender este conceito para o caso onde há mais de uma força aplicada no corpo. Neste caso, temos que a soma vetorial das forças gerará um movimento no sentido da força resultante com aceleração proporcional a esta [1]. Assim temos:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (2.2)$$

Onde os componentes da equação 2.2 possuem mesma dimensão que 2.1.

A equação 2.2 será usada durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

2.2 Vibrações

Dentro desta seção será visto o modelo do movimento de um sistema mecânico oscilatório, como obter sua equação e como obter alguns dados como frequência natural e o período de oscilação.

Um sistema vibratório, ou oscilatório, em geral, inclui elementos que armazenam energia potencial (mola) e energia cinética (massa) e elementos no qual energia é gradualmente perdida (amortecedor).

Um sistema vibratório pode sofrer dois tipos de vibrações: a vibração livre e a vibração forçada. A vibração livre é vista quando o sistema sofre um distúrbio inicial e é deixado para vibrar, ou seja, nenhuma força externa age no sistema; um pêndulo deslocado de sua posição inicial é um exemplo. A vibração forçada acontece quando o sistema sofre a ação de um força (geralmente um força do tipo oscilatória); por exemplo um corpo sobre a influência de um motor de massa excêntrica. Se a frequência dessa força for igual a frequência natural do sistema, o evento de *ressonância* ocorre, e então o sistema pode ser sujeito a grandes oscilações, o que não é desejável na maioria dos casos. [3]

Por isso se faz importante o estudo de vibrações e a obtenção deste tipo de dados. Por exemplo, seja um pêndulo fixo com dado na figura 2.1:

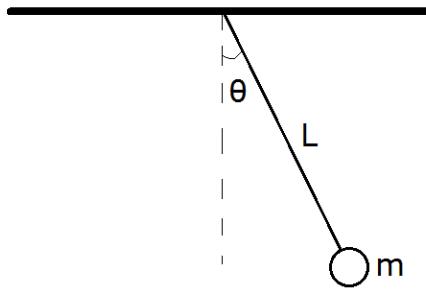


Figura 2.1 - Pêndulo de oscilação livre.

A modelagem deste sistema será feita no capítulo 3, e é dada por:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \cdot \theta = 0 \quad (2.3)$$

Onde g é a gravidade dada por 9.81 m/s^2 e L é o tamanho da barra. Neste caso foi desconsiderado atrito de junta e o atrito do ar, bem como $|\theta| < 20^\circ$. Assim, temos que a frequência natural do sistema é dada por:

$$\omega_n = \sqrt{g/L} \quad (2.4)$$

Onde ω_n é dada em rad/s [3]. Ainda, temos que o período de oscilação para o pêndulo livre é dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (2.5)$$

3 Desenvolvimento

Esta seção se resume nos seguintes tópicos :

- Modelagem de pêndulo simples;
- Modelagem de pêndulo com amortecimento (atrito do ar e de junta);
- Modelagem de um sistema massa, mola e amortecedor;
- Modelagem de um sistema massa, mola e amortecedor com mola cúbica;
- Modelagem de um sistema massa, mola e amortecedor com pêndulo acoplado;
- Modelagem de um sistema massa, mola e amortecedor com mola cúbica e pêndulo acoplado.

3.1 Pêndulo Simples

Um pêndulo simples é um objeto suspenso e fixado num ponto fixo e que se pode mover livremente, como mostra a figura 2.1.

Para podermos modelar este sistema dinâmico, serão assumidas algumas hipóteses:

- O objeto está ligado ao ponto de fixação através de uma barra que possui massa negligenciável e que não se estende;
- O objeto se move sem atrito de junta ou resistência do ar;
- O movimento ocorre no plano 2-D, ou seja, o objeto não possui trajetória elíptica.

Quando o objeto é tirado de sua posição de equilíbrio, ele é então sujeito à força que a gravidade gera, e se houver componente tangencial, o objeto tende a oscilar em torno da sua posição de equilíbrio.

3.1.1 Modelagem do pêndulo

Neste tópico serão mostradas as equações que modelam a dinâmica do pêndulo. O pêndulo desenvolve um movimento circular de arco L . As forças que atuantes no pêndulo são:

- Peso: mg ;
- Tensão no fio: F_f ;

O movimento do pêndulo pode ser decomposto na sua direção normal e tangencial. Isto é feito porque o pêndulo está sob o efeito de acelerações normal (movimento circular) e tangencial (sua velocidade muda no tempo). Assim, podemos equacionar as acelerações da seguinte maneira:

$$a_n = \omega^2 \cdot L \quad (3.1)$$

$$a_t = \alpha \cdot L \quad (3.2)$$

Abaixo segue o diagrama de corpo livre:

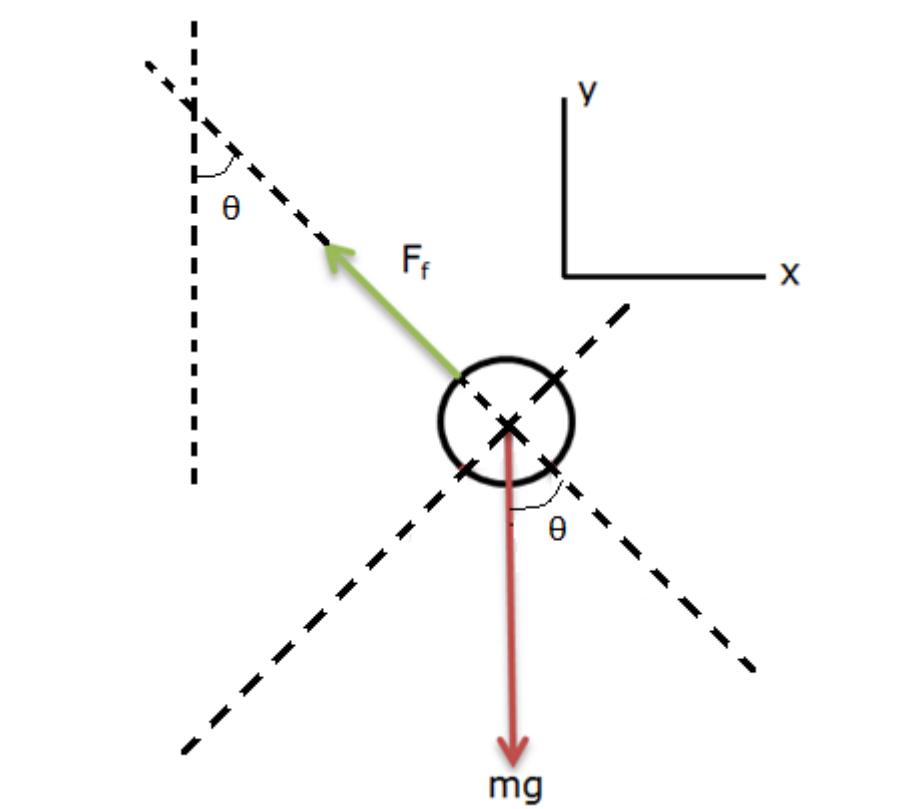


Figura 3.1 - Diagrama de Forças num Pêndulo

Usando a segunda lei de Newton, temos:

$$m \cdot a_n = F_f - m \cdot g \cdot \cos(\theta) \quad (3.3)$$

$$m \cdot a_t = -m \cdot g \cdot \sin(\theta) \quad (3.4)$$

Analisando as equações 3.3 e 3.4 podemos tirar algumas conclusões. Quando o objeto atinge a posição em que foi deslocada, ou seja $\theta = \theta_{inicial}$, a sua velocidade é igual a zero; consequentemente a aceleração normal se iguala a zero e a força de tração F_t atinge seu mínimo valor. Temos ainda que a aceleração tangencial atinge seu máximo valor, pois $\theta = \theta_{inicial} = \theta_{máximo}$, e assim $\sin(\theta) = \sin_{máximo}(\theta)$.

No entanto, quando o pêndulo atinge a posição de equílibrio, a aceleração tangencial é igual a zero, pois $\theta = 0$. Mas $\cos(\theta) = 1$ e portanto F_t e a velocidade do pêndulo atinge o máximo. Isto é registrado na figura 3.2.

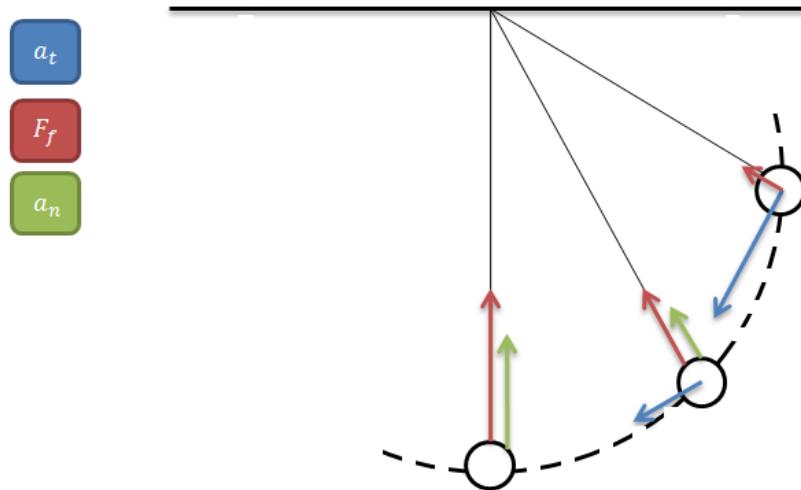


Figura 3.2 - Diagrama de acelerações e forças em diferentes posições.

As equações 3.3 e 3.4 servem para obter o valor da tensão no fio e para descrever o movimento do pêndulo, respectivamente.

Reescrevendo a equação 3.4, temos:

$$a_t + g \cdot \sin(\theta) = 0 \quad (3.5)$$

Podemos reescrever a aceleração angular α como segue:

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (3.6)$$

E aplicando as equações 3.6 e 3.2 em 3.5, obtemos:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot L + g \cdot \sin(\theta) = 0 \quad (3.7)$$

E finalmente podemos reescrever a equação 3.7 para obter a equação diferencial de movimento do pêndulo simples:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \cdot \sin(\theta) = 0 \quad (3.8)$$

3.1.2 Período de um pêndulo simples

Se considerarmos apenas ângulos pequenos, podemos utilizar a seguinte linearização:

$$\sin(\theta) = \theta \quad (3.9)$$

Aplicando a equação 3.9 em 3.8:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \cdot \theta = 0 \quad (3.10)$$

E então, podemos obter a frequência natural do pêndulo, como visto na seção anterior:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (3.11)$$

Assim podemos obter o período natural do pêndulo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (3.12)$$

Vale lembrar que estas equações funcionam muito bem apenas para ângulos pequenos, e erros podem ocorrer caso usada para variações angulares muito grandes.

3.2 Pêndulo Simples com amortecimento

No capítulo anterior vimos a modelagem de um pêndulo simples. Agora será introduzido amortecimento neste sistema pois em sistemas reais o pêndulo sofre resistência do ar e atrito de juntas.

3.2.1 Amortecimento por resistência do ar

Qualquer objeto que esteja realizando movimento dentro de um fluido sofre uma força contrária a este movimento. Esta força é chamada força de arrasto, ou resistência de fluido. Esta força depende da velocidade do objeto dentro do fluido. [9]

A equação genérica para esta força é dada por:

$$F_a = \frac{1}{2} \cdot C_a \cdot \rho_f \cdot A \cdot v^2 \quad (3.13)$$

Onde ρ_f é a densidade do fluido, A é a área do objeto, v é a velocidade do objeto e C_a é o coeficiente de arrasto. Este último parâmetro depende do número de Reynolds.

O número de Reynold e a equação do coeficiente de arrasto são mostradas abaixo:

$$Re = \frac{\rho_f \cdot l \cdot v}{\eta} \quad (3.14)$$

$$C_a \approx \frac{24}{Re} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re}} + 0.4 \quad (3.15)$$

Onde η é a viscosidade dinâmica do fluido e l é o comprimento do objeto. O número de Reynolds é importante pois define o comportamento do fluido e especialmente a transição entre o escoamento laminar e o escoamento turbulento.

Neste estudo temos um número de Reynolds bem pequeno e por isso podemos definir como estado laminar. Se analisarmos a equação 3.15, notase que para números de Reynolds pequenos ($Re < 1$) o primeiro termo da equação prevalece sobre os outros, e podemos aproximar $C_a \approx \frac{Re}{24}$. Assim, substituindo na equação 3.13, obtemos:

$$F_a = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{Re} \cdot \rho_f \cdot A \cdot \nu^2 \quad (3.16)$$

E finalmente, utilizando a equação 3.14 na 3.16, temos que:

$$F_a = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{\frac{\rho_f \cdot l \cdot \nu}{\eta}} \cdot \rho_f \cdot A \cdot \nu^2 = 12 \cdot \eta \cdot \frac{A}{l} \cdot \nu \quad (3.17)$$

A equação 3.17 é a equação de Stokes para objetos eféricos [9]. Esta equação é aplicável para objetos que se movem lentamente dentro de um fluido sem turbulência, por isso está sendo utilizada neste contexto.

Podemos ainda chamar $12 \cdot \eta \cdot A/l$ de c (coeficiente de arrasto para escoamento laminar). Nota-se que este parâmetro depende das características do fluido e do objeto. Assim, obtemos:

$$F_a = c \cdot \nu \quad (3.18)$$

Como explicado anteriormente, esta força age contrária ao movimento do objeto. Assim, podemos fazer um novo diagrama de corpo livre para o pêndulo.

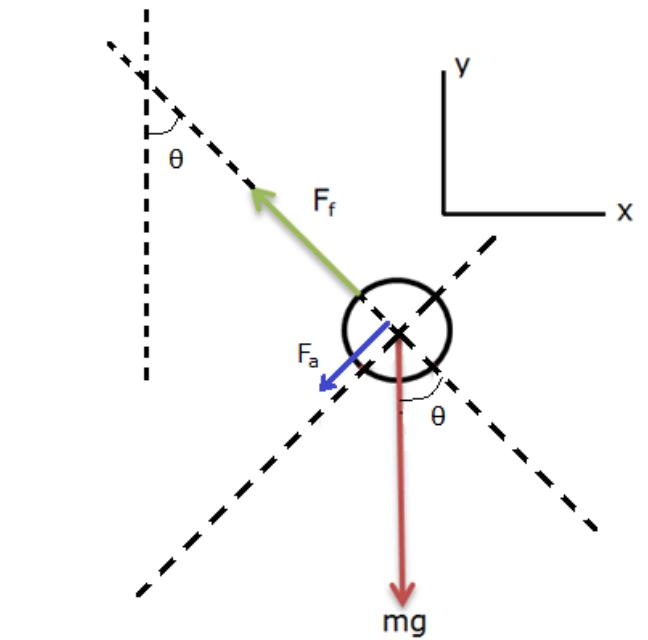


Figura 3.3 - Diagrama de forças de um pêndulo com arrasto

Usando a segunda lei de Newton, temos:

$$m \cdot a_n = F_f - m \cdot g \cdot \cos(\theta) \quad (3.19)$$

$$m \cdot a_t = -m \cdot g \cdot \sin(\theta) - c \cdot v \quad (3.20)$$

Como dito anteriormente, usa-se a equação tangencial para obter o modelo de movimento do pêndulo.

Agora basta substituir os termos lineares por seus respectivos valores angulares. Assim, podemos reescrever equação 3.20:

$$m \cdot \alpha \cdot L = -m \cdot g \cdot \sin(\theta) - c \cdot \omega \cdot L \quad (3.21)$$

$$m \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot L = -m \cdot g \cdot \sin(\theta) - c \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot L \quad (3.22)$$

Se isolarmos a aceleração e colocarmos todos os parâmetros para o mesmo lado, temos:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g \cdot \sin(\theta)}{L} + \frac{c}{m} \cdot \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (3.23)$$

3.2.2 Amortecimento por atrito de junta

No estudo da mecânica temos que atrito é um tipo de amortecimento e na maioria dos casos ele pode ser modelado proporcionalmente à velocidade linear do objeto. No entanto, neste caso, o sistema que modela a conexão entre o objeto e a junta é um sistema rotacional.

Desta forma, ao invés de falarmos em força contrária ao movimento, dizemos que existe um torque contrário ao movimento. Este torque age na junta e consequentemente afeta o movimento do pêndulo. A fórmula para este torque pode ser encontrada abaixo [3]:

$$\tau_j = j \cdot \omega \quad (3.24)$$

Pode-se observar que quando há amortecimento viscoso num sistema rotacional, temos que o torque é proporcional a velocidade angular ao invés da linear. Neste caso o coeficiente de amortecimento do sistema é chamado de j .

No entanto estamos interessados em achar a força que este torque causa no sistema. Assim, a fórmula geral de torque pode ser usada:

$$\tau_j = F_j \times L \quad (3.25)$$

Como nosso sistema foi simplificado para o 2-D, e como F_j e L são sempre perpendiculares entre si, a equação 3.25 pode ser simplificada:

$$\tau_j = F_j \cdot L \quad (3.26)$$

E para obtermos a equação da força de amortecimento, usamos a equação 3.24 na 3.26:

$$j \cdot \omega = F_j \cdot L \quad (3.27)$$

$$F_j = \frac{j \cdot \omega}{L} \quad (3.28)$$

A equação 3.28 será utilizada para obter a equação diferencial de movimento do pêndulo.

O diagrama de forças é semelhante ao que encontramos no capítulo anterior (veja seção 3.2.1). A única diferença é a expressão da força de amortecimento.

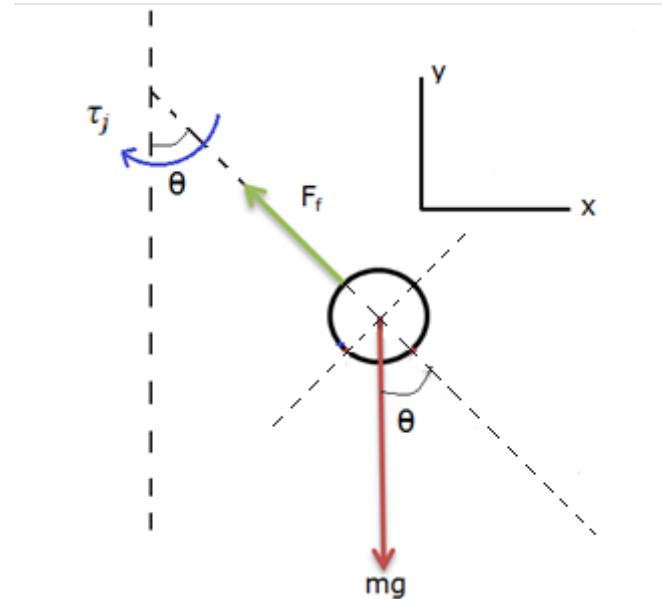


Figura 3.4 Diagrama de forças de pêndulo que sofre atrito de junta

Usando a segunda lei de Newton, temos:

$$m \cdot a_n = F_f - m \cdot g \cdot \cos(\theta) \quad (3.29)$$

$$m \cdot a_t = -m \cdot g \cdot \sin(\theta) - \frac{j}{L} \cdot \omega \quad (3.30)$$

Para obter a equação diferencial de movimento a equação da parte tangencial é usada.

Como feito anteriormente, vamos trocar as partes lineares por suas respectivas representações angulares:

$$m \cdot \alpha \cdot L = -m \cdot g \cdot \sin(\theta) - \frac{j}{L} \cdot \omega \quad (3.31)$$

$$m \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot L = -m \cdot g \cdot \sin(\theta) - \frac{j}{L} \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (3.32)$$

Agora basta isolarmos a aceleração e obtemos a equação final de movimento:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \cdot \sin(\theta) + \frac{j}{mL^2} \cdot \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (3.33)$$

3.3 Sistema massa, mola e amortecedor

Neste capítulo será feita a modelagem de um sistema massa, mola e amortecedor. Este é sistema muito comum no âmbito da mecânica e pode ser encontrado na figura 3.5.

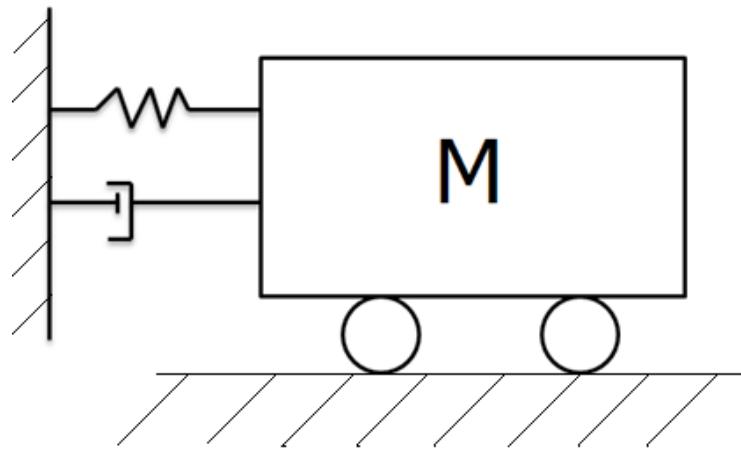


Figura 3.5 Esquema de um sistema massa-mola-amortecedor

Se fizermos um diagrama de corpor livre na massa, temos as forças atuantes:

- O peso: Mg ;
- A força normal: F_n ;
- A força mola: F_s ;
- A força de amortecimento: F_b ;
- A força externa: F_e .

Usando a lei de Hook, a expressão para a força mola é obtida:

$$F_s = K \cdot x \quad (3.34)$$

O coeficiente K é a constante de mola. Esta só é útil quando a mola trabalha dentro de seu limite elástico, e por isso a força gerada pela mola é elástica.

Também notamos que esta é uma equação linear, ou seja, se a massa está em sua posição de equilíbrio $x = 0$, não haverá força. Mas se houver algum deslocamento, surgirá uma força agindo no sentido de trazer o objeto de volta a sua posição de equilíbrio.

A força externa que aplicaremos neste sistema é dado pela equação abaixo:

$$F_e = F_0 \cos(\omega t) \quad (3.35)$$

Onde F_0 é uma força constante dado em $kg \cdot \frac{m}{s^2}$ (N) e ω é a frequência com que essa força varia dado em s^{-1} (Hz). Este tipo de força oscilatória é usada nos estudos de vibrações para podermos analisar a resposta de um sistema quando variamos a frequência de oscilação. [3]

Finalmente, para equacionar o movimento do sistema temos que conhecer a fórmula da força de amortecimento. Este tipo de força já foi explicado anteriormente, e a única diferença é que temos agora um sistema linear, e não mais rotacional. Assim, a equação da força de amortecimento é dada por [3]:

$$F_b = b \cdot v \quad (3.36)$$

Neste caso temos b como coeficiente de amortecimento. Esta força varia linearmente com a velocidade do objeto e também age no sentido contrário ao movimento.

O diagrama de força na massa M pode ser encontrado abaixo:

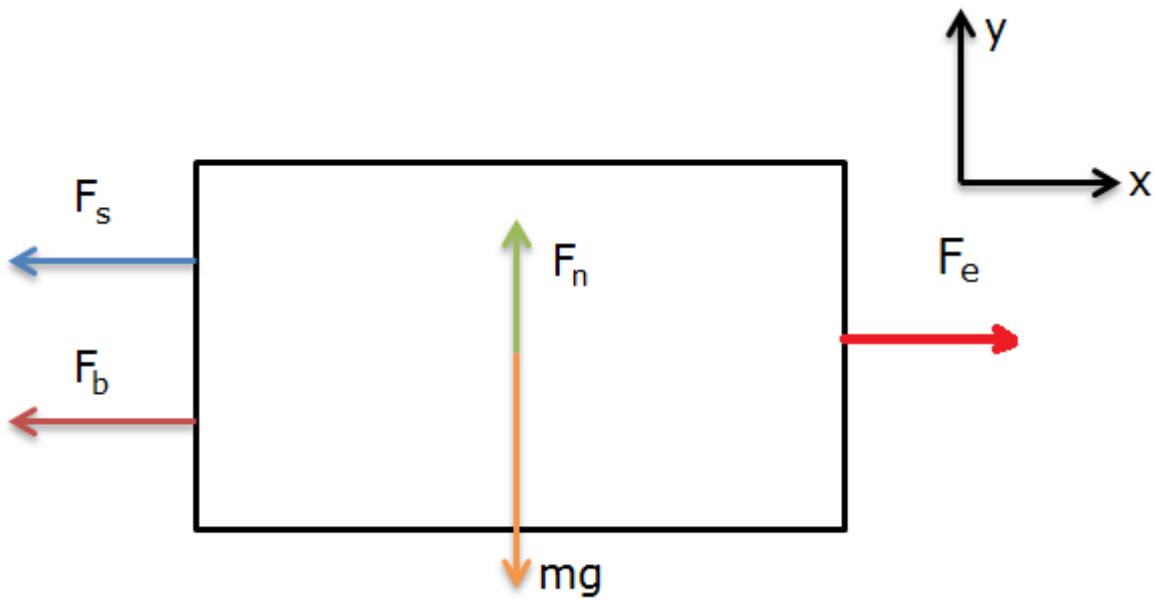


Figura 3.6 - Diagrama de forças atuantes na massa M

Usando a segunda lei de Newton, temos:

$$M \cdot a_x = -K \cdot x - b \cdot v + F_0 \cos(\omega t) \quad (3.37)$$

$$F_n = M \cdot g \quad (3.38)$$

As equação 3.37 e 3.38 são usadas para descrever o movimento da massa e a força normal que nela age, respectivamente.

Para acharmos a equação diferencial que modela o movimento da massa basta reescrevermos aceleração e velocidade na suas formas diferenciais:

$$M \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -K \cdot x - b \cdot \frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\omega t) \quad (3.39)$$

E então, basta isolarmos a aceleração e obtemos a equação diferencial que descreve o movimento da massa:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{M} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{K}{M} \cdot x = F_0 \cos(\omega t) \quad (3.40)$$

Previamente, na seção do pêndulo, foi encontrado a equação de período do pêndulo para saber quando este sistema poderia entrar em ressonância. E nesta seção será calculada a equação de período do sistema massa-mola pelo mesmo motivo.

Isto está sendo feito porque nos próximos modelos, os dois modelos serão fixados e será necessário saber a frequência de cada um deles para saber quando entrarão em ressonância.

A equação diferencial dos sistemas massa e mola é a equação 3.40 sem o termo de amortecimento e sem a força externa:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{M} \cdot x = 0 \quad (3.41)$$

E então podemos obter a frequência natural, como a equação 2.4:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (3.42)$$

E então o período do sistema massa-mola é obtido:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}} \quad (3.43)$$

3.4 Sistema massa mola amortecedor pêndulo

Este capítulo aborda um sistema muito semelhante àquele discutido no capítulo 3.3. De fato, podemos usar a própria figura 3.7 para exemplificar este modelo. No entanto, neste capítulo utilizaremos uma mola cúbica no lugar da antiga mola linear.

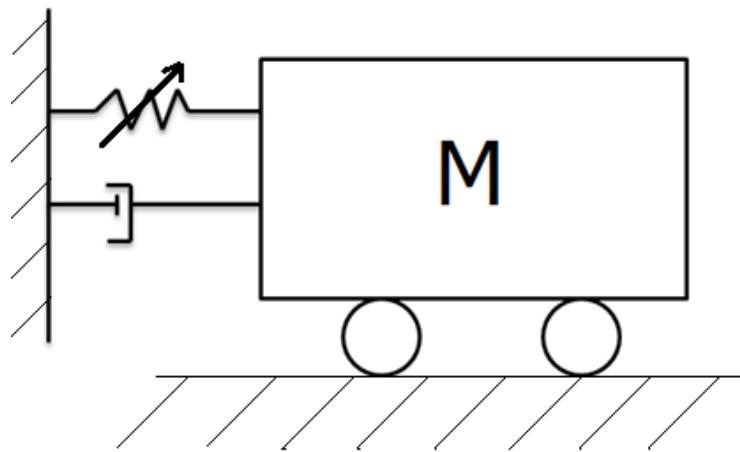


Figura 3.7 - Modelo da seção 3.3 com mola cúbica

Elementos não lineares, como uma mola cúbica, aparecem em inúmeras aplicações como as molas presentes nas suspensões dos carros e aparelhos microeletromecânicos uniaxiais na presença de atuação eletrostática [10]. Para uma mola não linear, a força desta $F_s(x)$ é uma função não linear do deslocamento da variável x . Esta função pode ser vista como uma combinação dos componentes lineares e não lineares da mola em questão.

Para uma mola cúbica, podemos escrever a função da força que ela exerce dado um deslocamento x como:

$$F_s(x) = Kx + \alpha Kx^3 \quad (3.44)$$

Onde Kx representa a resposta linear do sistema, e αKx^3 representa a resposta não linear. Neste contexto, α representa o coeficiente de rigidez do termo não linear em termos da constante linear da mola K . A quantidade α

pode ser positiva ou negativa. A mola cujo α é positivo é chamada do tipo *hardening*, e cujo α é negativo é chamada do tipo *softening* [10].

Agora, para obter a equação que descreve o movimento na direção x , basta substituir a equação 3.44 na equação 3.40:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{M} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{K}{M} \cdot x + \frac{\alpha K}{M} \cdot x^3 = F_0 \cos(\omega t) \quad (3.45)$$

3.5 Sistema massa mola amortecedor pêndulo

Neste item iremos abordar os sistemas massa, mola e amortecedor com pêndulo acoplado. Este estudo pode ser divido em dois subsistemas: o pêndulo e o sistema massa, mola e amortecedor; e tem como finalidade discutir como um influencia o outro, e vice versa.

A Figura 3.8 descreve o sistema como um todo:

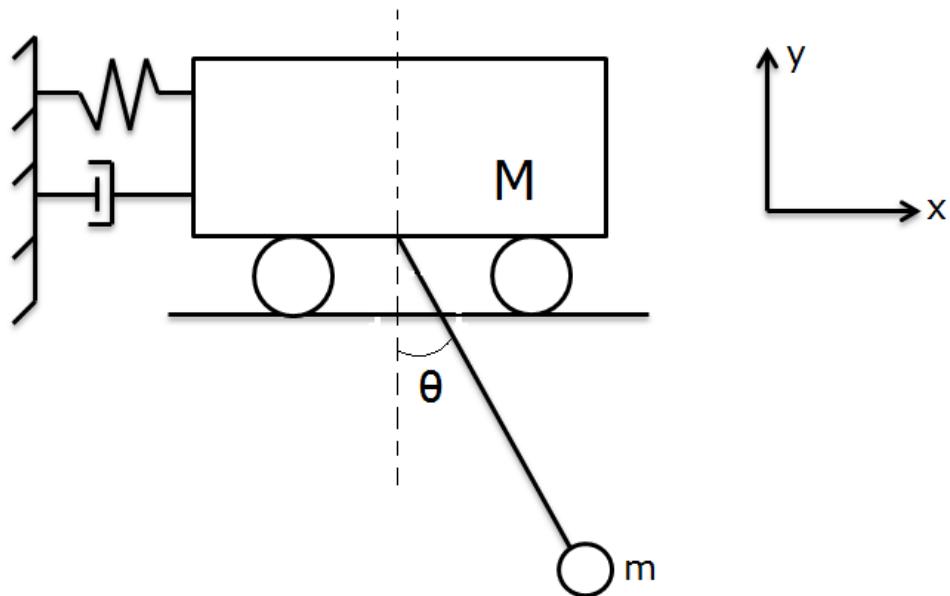


Figura 3.8 - Esquema do sistema massa-mola-amortecedor-pêndulo

Como vemos na figura 3.8 acima, o pêndulo oscila livremente no plano enquanto a massa descreve um movimento horizontal. Devido às leis da mecânica [1], forças internas aparecerão quando dividirmos o sistema em dois subsistemas. Estas são devido a interação de dois corpos diferentes.

Primeiramente analisamos o subsistema pêndulo para obtermos expressões destas forças. Neste caso, o ponto de junta que sofre estas forças como pode ser visto abaixo:

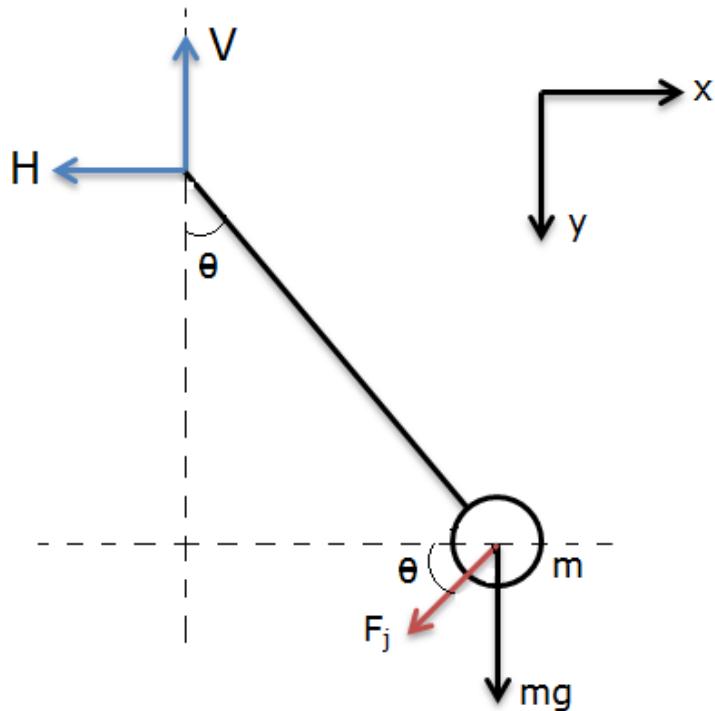


Figura 3.9 - Diagrama de corpo livre do subsistema pêndulo

Aplicando as leis da mecânica, obtemos:

$$H = -m \cdot a_{px} - \frac{j}{L} \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \quad (3.46)$$

$$V = -m \cdot a_{py} + m \cdot g + \frac{j}{L} \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) \quad (3.47)$$

Das equações acima temos que a_{px} e a_{py} são as acelerações absolutas da massa m na direção x e y , respectivamente.

Ainda, temos que as relações do movimento de translação e angular (restrições geométricas) podem ser escritas:

$$x_{px} = x + L \cdot \sin(\theta) \quad (3.48)$$

$$x_{py} = L - L \cdot \cos(\theta) \quad (3.49)$$

Onde x_{px} e x_{py} são os deslocamentos absolutos da massa m na direção x e y , respectivamente. Assim, se derivarmos duas vezes estas equações,

obteremos as equações das acelerações absolutas em termos de x e θ , como segue:

$$v_{px} = \frac{dx_{px}}{dt} = \dot{x} + L \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \quad (3.50)$$

$$a_{px} = \frac{dv_{px}}{dt} = \ddot{x} + L \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin(\theta) - L \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\theta) \quad (3.51)$$

$$v_{py} = \frac{dx_{py}}{dt} = 0 + L \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) \quad (3.52)$$

$$a_{py} = \frac{dv_{py}}{dt} = L \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin(\theta) + L \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\theta) \quad (3.53)$$

Substituindo as equações 3.51 e 3.53 em 3.46 e 3.47, respectivamente, temos:

$$H = -m \cdot \ddot{x} + m \cdot L \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) - m \cdot L \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) - \frac{j}{L} \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \quad (3.54)$$

$$V = -m \cdot L \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\theta) - m \cdot L \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin(\theta) + m \cdot g + \frac{j}{L} \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) \quad (3.55)$$

Agora que as forças internas foram obtidas, podemos analisar o outro subsistema:

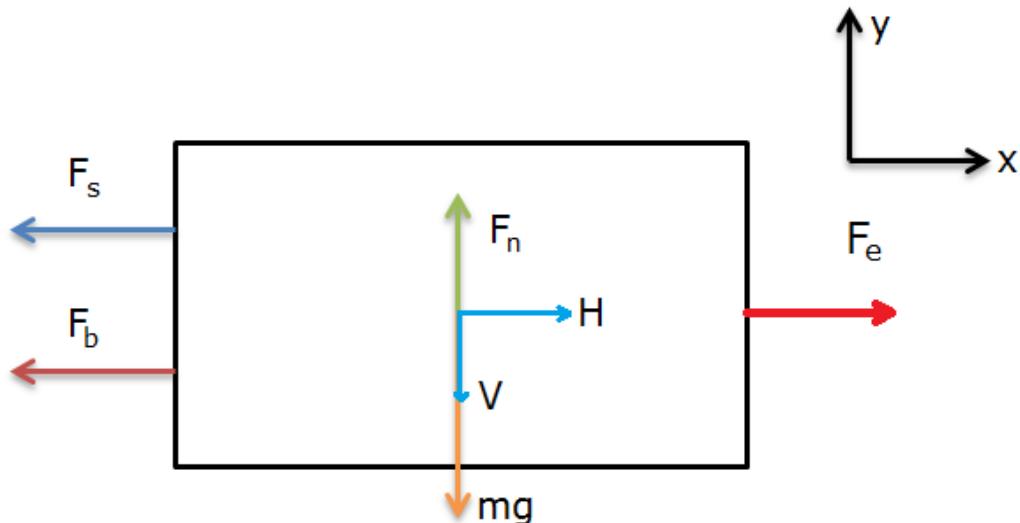


Figura 3.10 - Diagrama de corpo livre do subsistema massa, mola e amortecedor

O sistema apresentado pela figura 3.10 já foi estudado na seção 3.4, com exceção das novas forças internas devido à ligação do corpo com o pêndulo.

Aplicando a lei Newton na direção x (não existe movimento na direção y), temos:

$$M \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + K \cdot x - H = F_0 \cos(\omega t) \quad (3.56)$$

Combinando as equações 3.56 com 3.54, temos:

$$\begin{aligned} (M+m) \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + K \cdot x - m \cdot L \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) + m \cdot L \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) + \frac{j}{L} \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \\ = F_0 \cos(\omega t) \quad (3.57) \end{aligned}$$

Como mencionado anteriormente, o sistema é composto de dois movimentos diferentes; e por isso, necessita-se duas equações que os caracterizam. Para obtermos a segunda equação, que descreve o movimento do pêndulo (ou θ), tomaremos como referência o pivô móvel, caracterizando assim um sistema de referência relativa (sistema não inercial) [1]. Assim, obtemos os seguinte diagrama de forças:

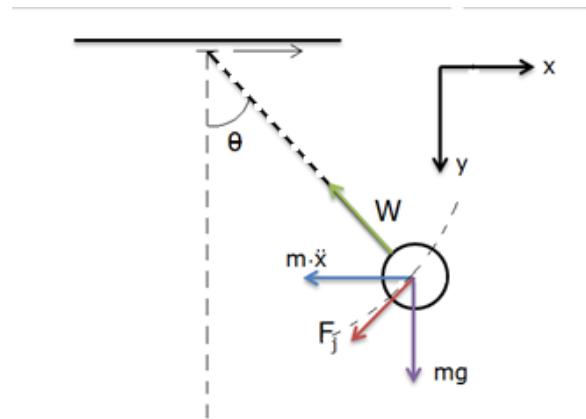


Figura 3.11 - Subsistema pêndulo com referência não inercial

Se comparmos com a figura 3.3, vemos que a única diferença é que agora existe uma força adicional devido a aceleração do pivô.

Usamos, anteriormente, a equação relacionada à direção tangencial para obter a equação de movimento do pêndulo. E assim faremos para este caso também. Aplicando a lei de Newton na direção tangencial, temos:

$$m \cdot a_t = -m \cdot g \cdot \sin(\theta) - \frac{j}{L} \cdot \dot{\theta} - m \cdot \ddot{x} \cdot \cos(\theta) \quad (3.58)$$

Se passarmos o termo linear a_t para sua forma angular e isolarmos a aceleração angular, obtemos então a equação de movimento do subsistema pêndulo:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \cdot \sin(\theta) + \frac{j}{m \cdot L^2} \cdot \dot{\theta} + \frac{\ddot{x}}{L} \cdot \cos(\theta) = 0 \quad (3.59)$$

3.6 Sistema massa, mola e amortecedor com mola cúbica e pêndulo acoplado

Esta seção aborda um sistema muito semelhante àquele discutido na seção 3.5, com a inclusão de uma mola cúbica, como descrito na seção 3.4. Assim, obtemos a figura abaixo que caracteriza o modelo a ser estudado:

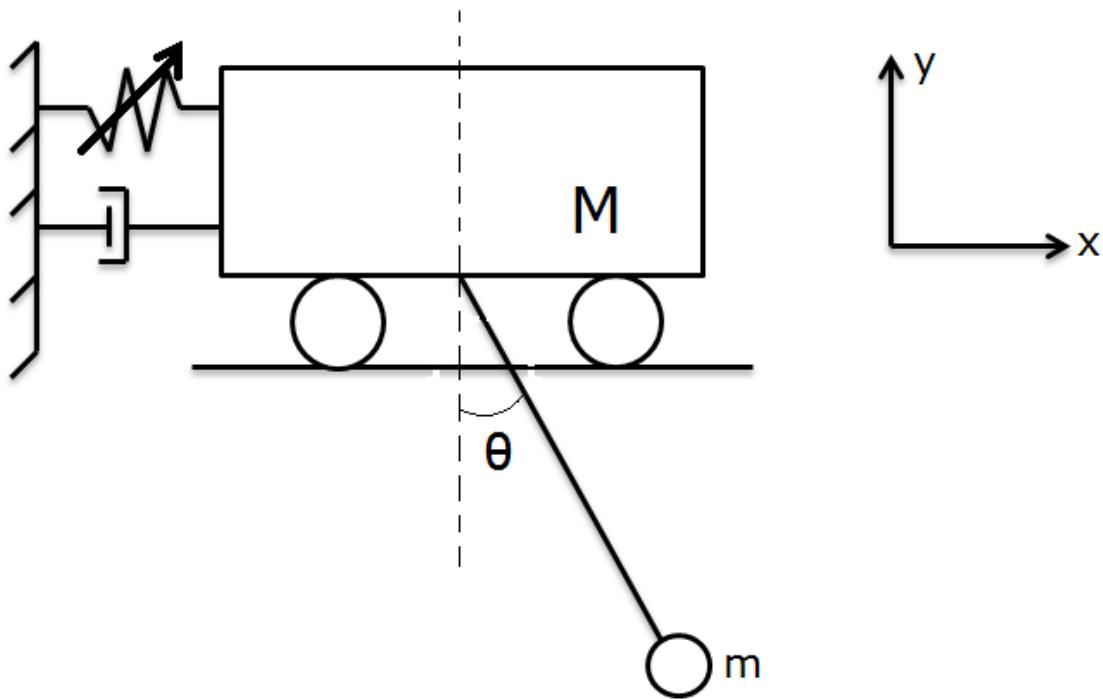


Figura 3.12 - Sistema massa-mola-amortecedor pêndulo não linear

Assim, se aplicarmos o termo não linear na equação 3.57, obtemos a equação diferencial abaixo que modela o movimento na coordenada x do sistema:

$$(M + m) \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + K \cdot x + \alpha \cdot K \cdot x^3 - m \cdot L \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) + m \cdot L \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) + \frac{j}{L} \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) = F_0 \cos(\omega t) \quad (3.60)$$

Como mudamos apenas a mola acoplada ao corpo de massa M , a equação do movimento θ continua a mesma (equação 3.58), pois não possui correlação com a mola cúbica.

4 Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados das simulações descritas no Capítulo 3 variando-se parâmetros de entrada e computando o comportamento apresentado.

Todos os programas em *MatLab®* estão no capítulo *Apêndices* deste trabalho.

4.1 Pêndulo Simples

Como vimos no capítulo anterior, possuímos duas equações que definem o movimento de um pêndulo simples (equação 3.8 e equação 3.10). Foram realizadas as simulações das duas equações dado um deslocamento θ_0 inicial. Assim obtivemos os gráficos, com base nos parâmetros da tabela 1:

Tabela 1 – Parâmetros da simulação do pêndulo simples

g	Gravidade	9.81 m/s^2
L	Comprimento do pêndulo	15 cm

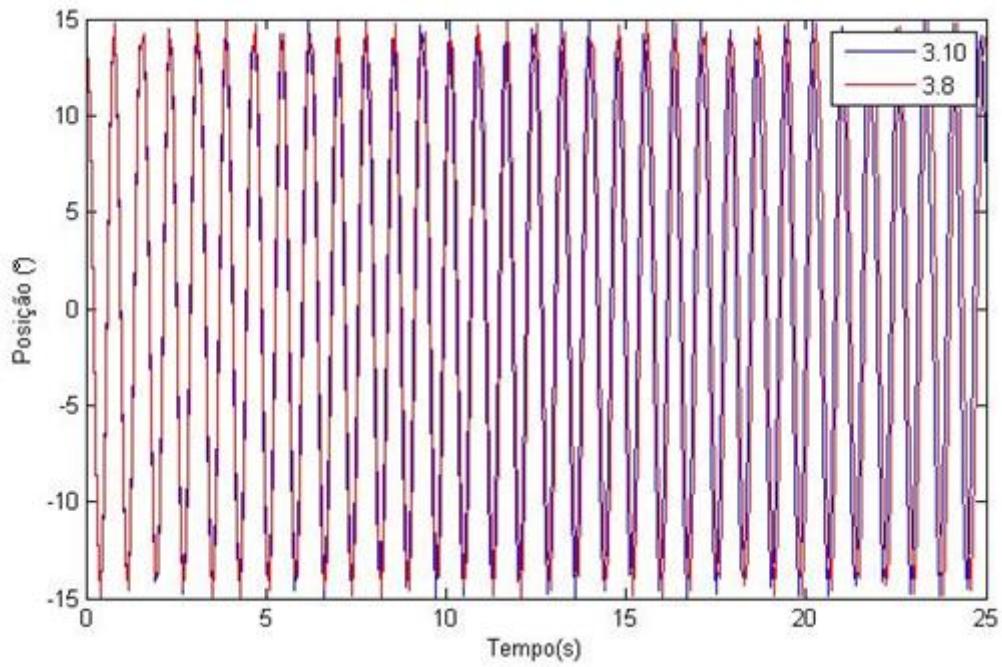


Figura 4.1 – Gráficos das equações não linear (3.8) e linear (3.10) do pêndulo simples sobrepostos, dado um $\theta_0 = 15^\circ$

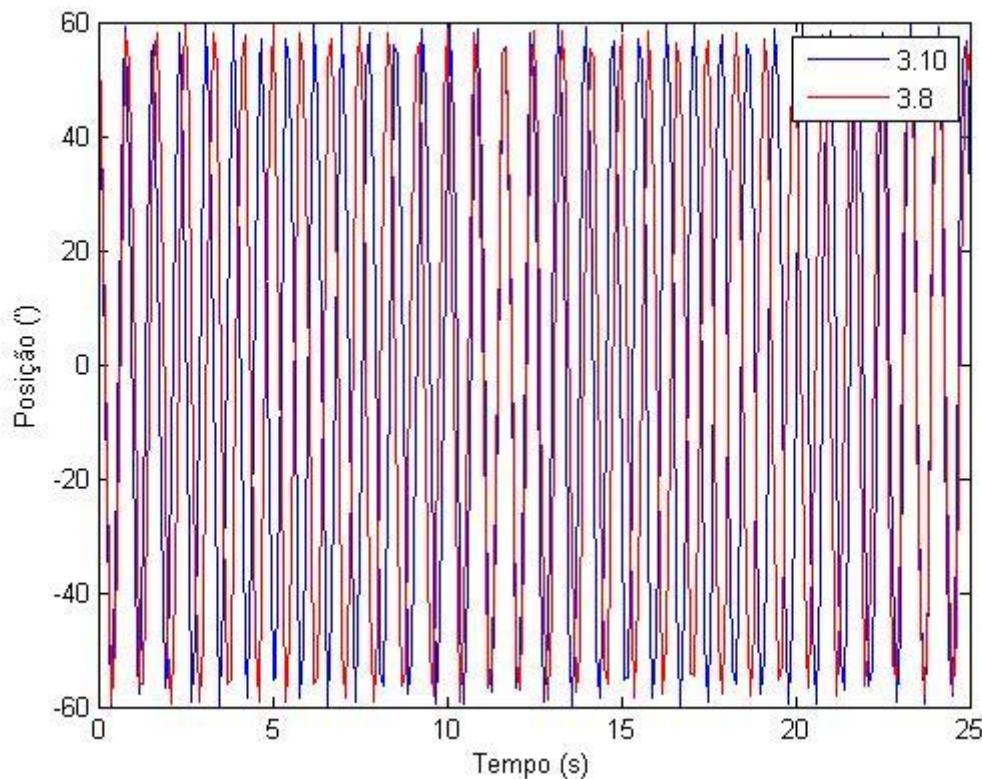


Figura 4.2 – Gráficos das equações não linear (3.8) e linear (3.10) do pêndulo simples sobrepostos, dado um $\theta_0 = 60^\circ$

Como pode ser visto nas últimas duas figuras, vemos que dado um ângulo pequeno ($\theta_0 = 15^\circ$), os gráficos sobrepostos são muito semelhantes e diferem muito pouco na frequência. Já quando utilizamos um $\theta_0 = 60'$ vemos que os gráficos se diferem nitidamente na questão do período de oscilação.

4.2 Pêndulo simples com amortecimento

Aqui realizamos as simulações do pêndulo com amortecimento dado um $\theta_0 = 15'$ e verificamos como o sistema se comporta e quanto tempo ele leva para voltar ao repouso. Abaixo segue a tabela 2 [5], com os parâmetros das simulações a seguir:

Tabela 2 – Parâmetros da simulação do pêndulo simples com amortecimento

g	Gravidade	9.81 m/s^2
L	Comprimento do pêndulo	15 cm
m	Massa do pêndulo	$1kg$
c	Coeficiente de arrasto para escoamento laminar	$7 \cdot 10^{-5} \text{ kg/s}$
j	Coeficiente de amortecimento rotacional	$5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$

4.2.1 Amortecimento do ar

Nesta seção, realizamos uma simulação utilizando a equação 3.23:

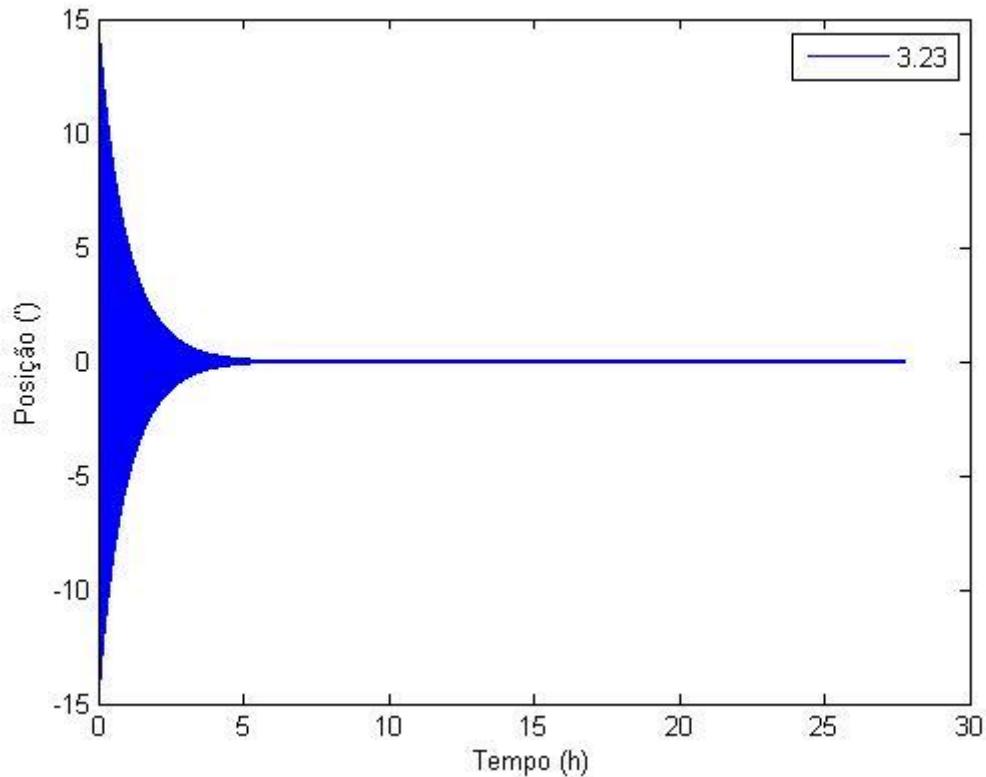


Figura 4.3 – Gráfico pêndulo simples com amortecimento do ar (equação 3.23)
dado um $\theta_0 = 15'$

Vale resaltar que a figura 4.3 tem seu eixo horizontal dado em horas. Ou seja, analisando, vemos que este sistema leva mais de cinco horas para chegar ao repouso. Isto deve-se ao fato de que o fator de amortecimento deste sistema, dado por c (coeficiente de arrasto para escoamento laminar), chega no máximo valor nominal de $7 \cdot 10^{-5}$. [5]

4.2.2 Amortecimento de junta

Nesta seção foi realizado a simulação da equação 3.33 dado um $\theta_0 = 15'$. Segue o resultado:

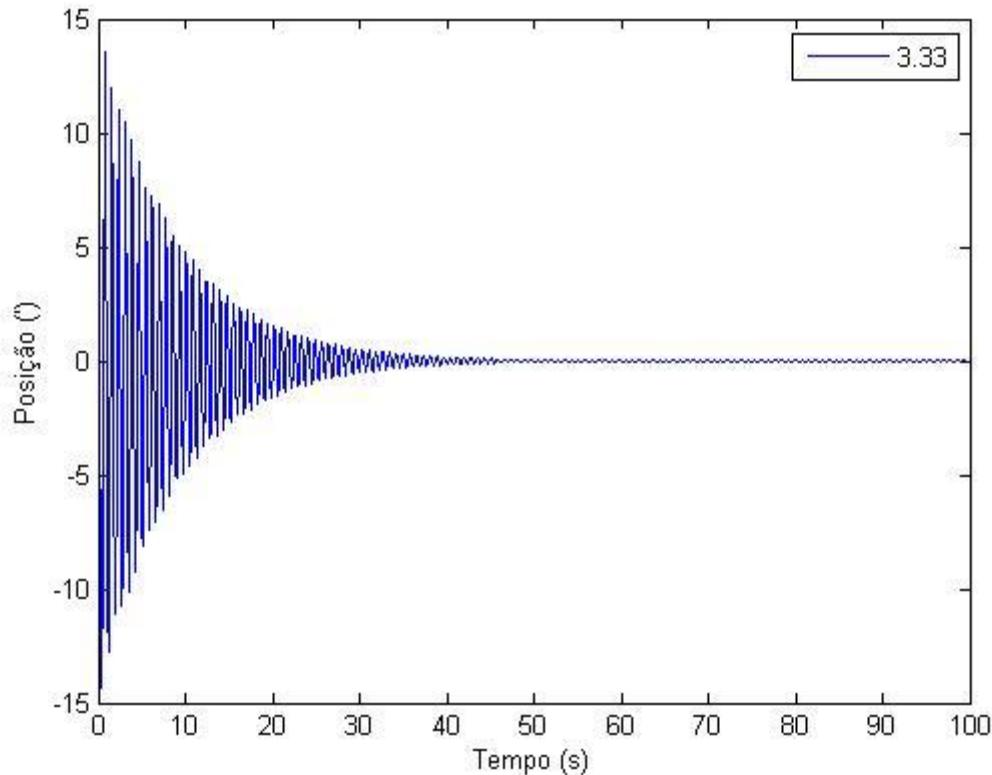


Figura 4.4 – Gráfico do pêndulo simples sujeito ao amortecimento de junta
(equação 3.33) dado um $\theta_0 = 15'$

Nota-se que diferentemente da figura 4.3, este sistema leva muito menos tempo para chegar ao repouso. De fato, o fator de amortecimento neste sistema, dado por j/L^2 , tem valor nominal máximo de $2,2 \cdot 10^{-1}$ [5], que é muito maior que aquele encontrado no sistema da seção 4.2.1.

4.3 Sistema Massa, Mola e Amortecedor

Nesta seção mudaremos como faremos as simulações. Neste caso avaliaremos mais como a frequência de uma força externa oscilatória influencia na amplitude máxima de regime do sistema descrito pela equação 3.40.

Primamente foi realizado uma simulação onde utilizamos $\omega = 1 \text{ Hz}$ e os dados da tabela 3 a seguir. Segue o resultado:

Tabela 3 – Parâmetros da simulação do sistema massa mola amortecedor

M	Massa do corpo	4 kg
b	Coeficiente de amortecimento linear	0.5 kg/s
K	Constante de mola	400 N/m
F_0	Força	20 N

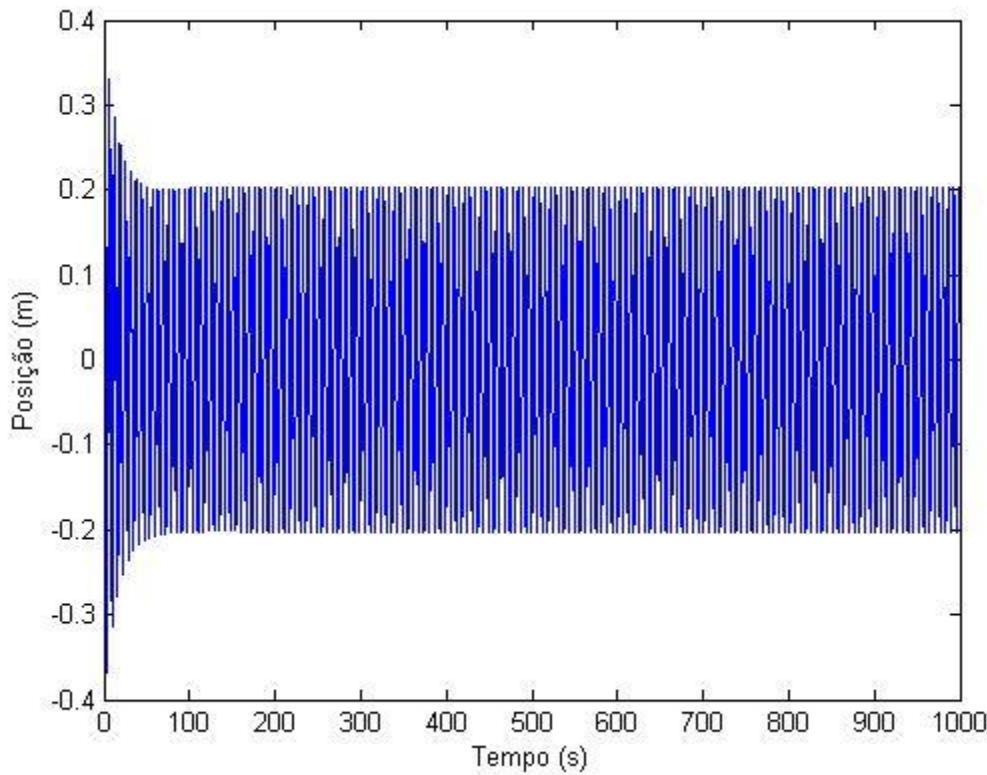


Figura 4.5 – Gráfico do sistema massa, mola e amortecedor linear (equação 3.40)
dado $\omega = 1\text{Hz}$

Verificamos o tempo que leva para entrar em regime. Como vemos na figura 4.5, leva-se cerca de 100 segundos para o sistema atingir o regime. Portanto, para o restante das simulações, usaremos o tempo de 200 segundos para a análise.

Para avaliar a influência da variação da frequência ω no sistema, foi realizado o seguinte experimento: foi realizada uma simulação do sistema com $\omega = 1\text{Hz}$, dadas as condições iniciais (posição e velocidade) nulas e foram computados os máximos da posição e da velocidade de regime; a seguir, foi aumentada a frequência em uma unidade (i.e. $\omega = 2\text{Hz}$) e realizada outra simulação, utilizando os dados (posição e velocidade máxima de regime) computados da frequência anterior como condições iniciais; em seguida, foi feito outra simulação com $\omega = 3\text{Hz}$, utilizando como condições iniciais os

dados computados para $\omega = 2\text{Hz}$ (posição e velocidade máximas de regime); e, assim sucessivamente, foram feitas todas as simulações até $\omega = 50\text{Hz}$ utilizando o padrão descrito.

Em seguida, outro experimento foi realizado. No entanto, ao invés de começarmos com $\omega = 1\text{Hz}$ e irmos aumentando a frequência, foi feito o caminho inverso, ou seja, começamos com $\omega = 50\text{Hz}$ e fomos diminuindo-a em uma unidade, utilizando sempre como condições iniciais as posições e velocidades máxima de regime da simulação interior (para $\omega = 50\text{Hz}$, utilizou-se condições nulas).

Plotando-se ambos os dados num mesmo gráfico de pontos, obtivemos:

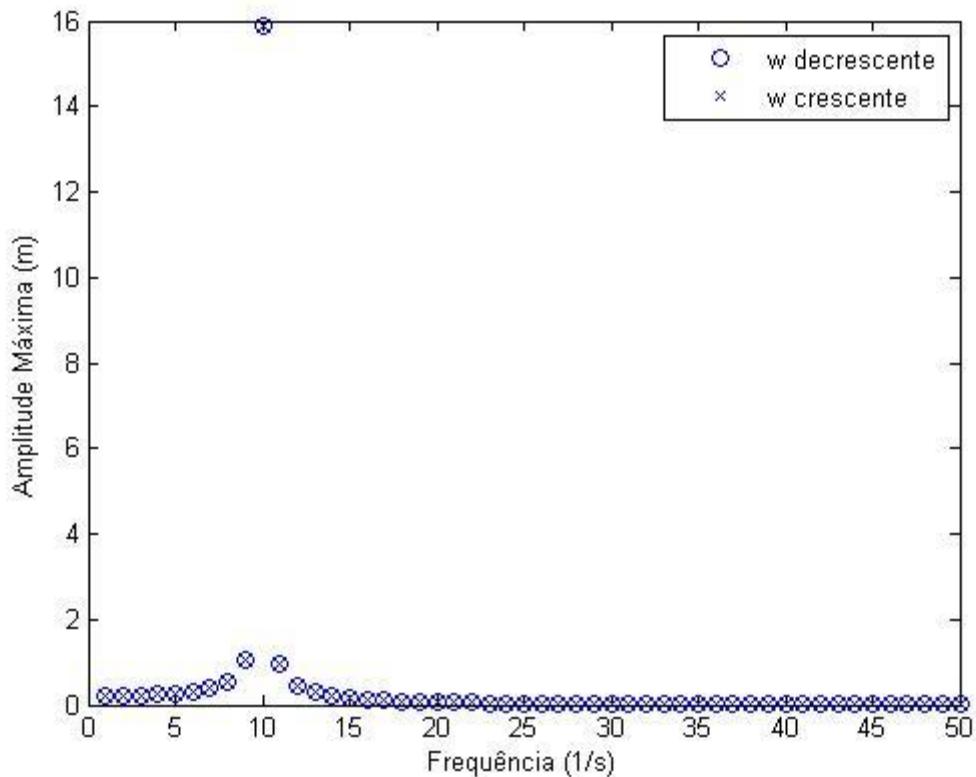


Figura 4.6 – Gráficos da amplitude pela frequência sobrepostos dos experimentos realizados

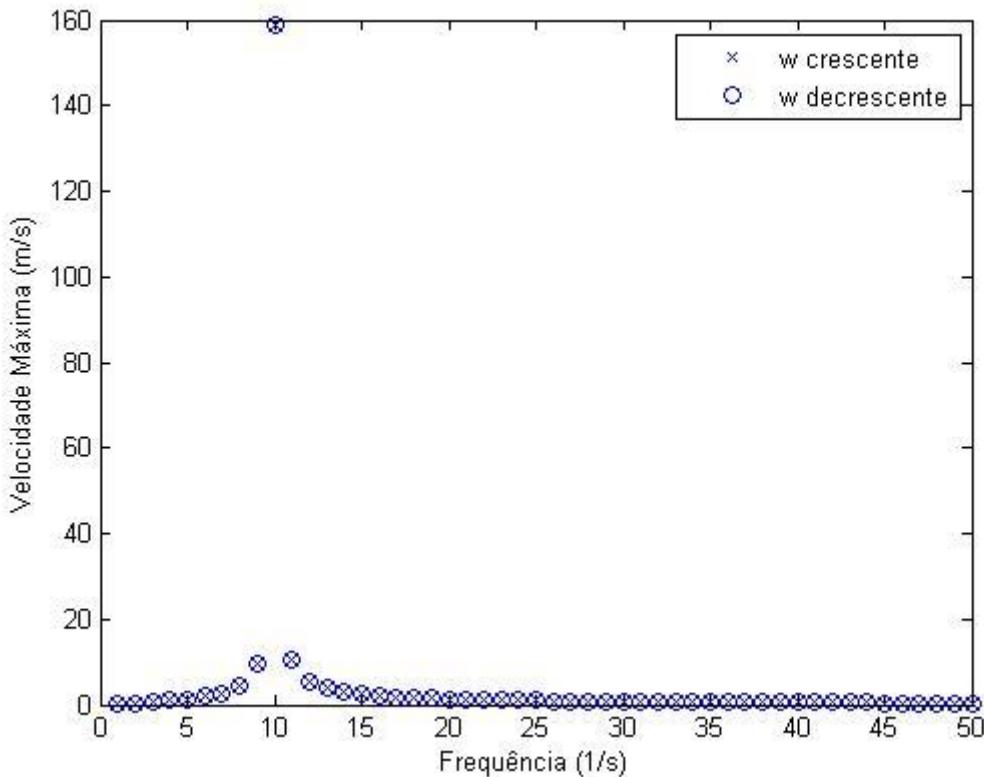


Figura 4.7 – Gráficos da velocidade pela frequência sobrepostos dos experimentos realizados

Como vemos nas figuras 4.6 e 4.7 os dados obtidos nos dois experimentos são iguais, ou seja, obtemos os mesmos gráficos independente das condições iniciais. Ademais, temos um pico na amplitude e na velocidade na frequência de $\omega = 10\text{Hz}$. De fato, como explicado na seção 3.3 e dado pela equação 3.42, temos:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{400/4} = \sqrt{100} = 10 \text{ Hz}$$

4.4 Sistema massa mola amortecedor com mola cúbica

Nesta seção foram realizadas os mesmos experimentos descritos na seção 4.4 para o sistema descrito pela equação 3.45, dados os parâmetros encontrados na tabela 4. De novo, tudo foi feito para analisarmos como a frequência de oscilação ω de uma força influencia na resposta do sistema.

Tabela 4 – Parâmetros da simulação do sistema massa mola amortecedor com mola cúbica

M	Massa do corpo	4 kg
b	Coeficiente de amortecimento linear	0.5 kg/s
K	Constante de mola	400 N/m
F_0	Força	20 N
α	Coeficiente de rigidez	400 m^{-2}

Assim, obtivemos:

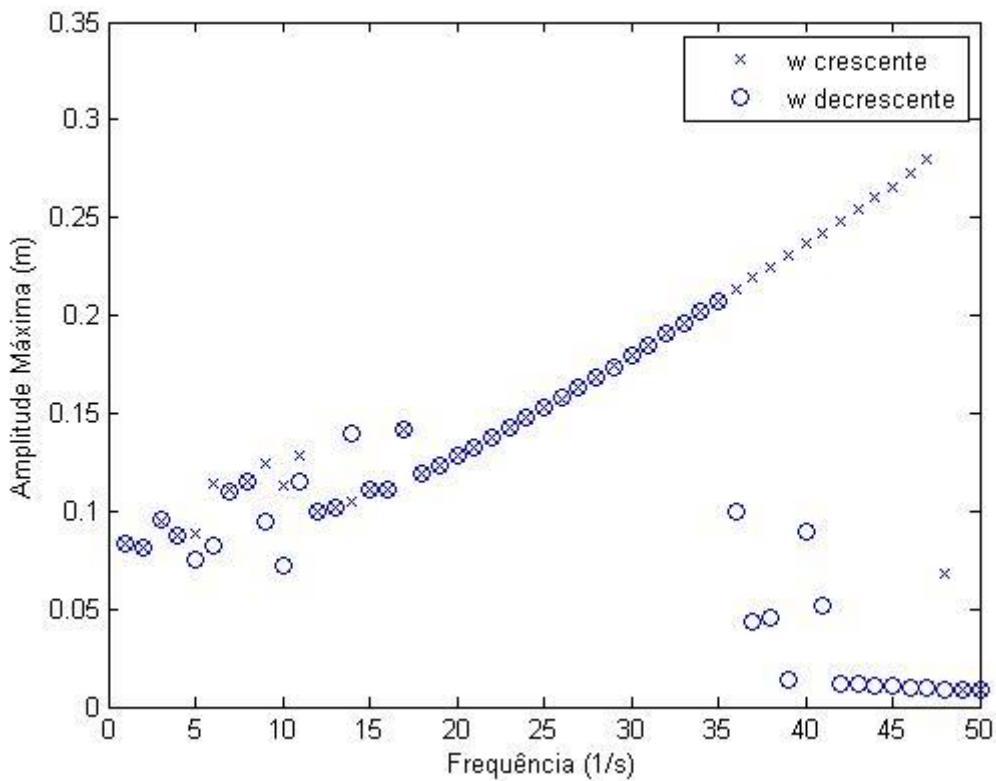


Figura 4.8 – Gráficos da amplitude pela frequência sobrepostos dos experimentos realizados para o sistema não linear.

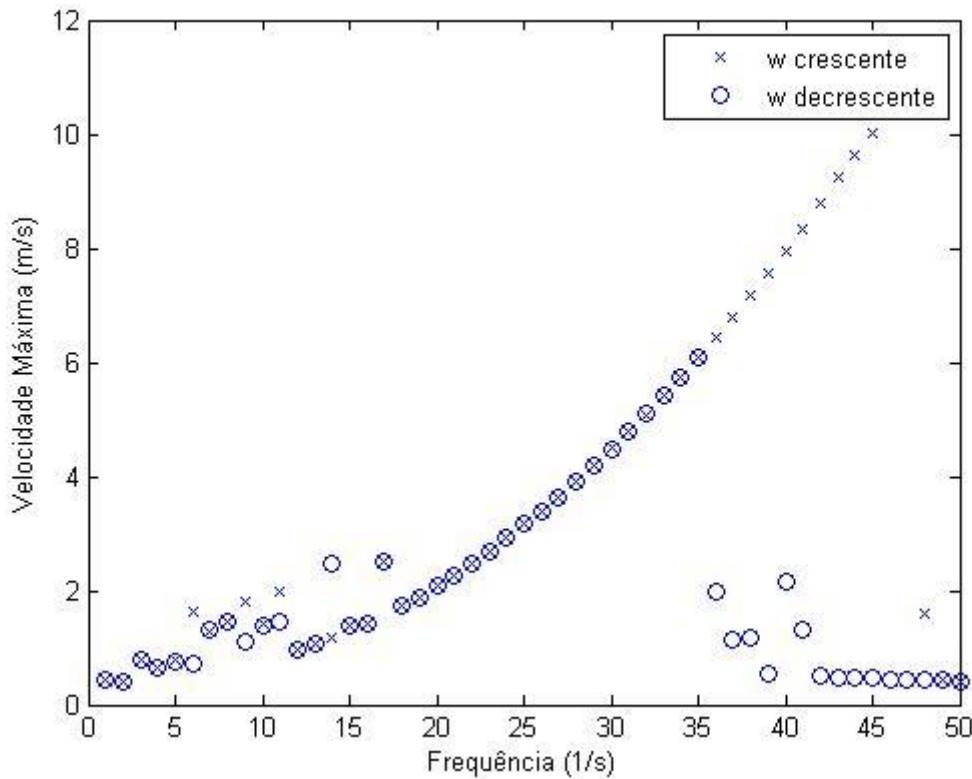


Figura 4.9 – Gráficos da velocidade pela frequência sobrepostos dos experimentos realizados para o sistema não linear.

Como podemos notar em ambos os gráficos, temos comportamentos distintos quando variamos a frequência de forma crescente e decrescente, diferentemente do sistema linear cujos resultados eram idênticos. Notamos assim que o comportamento de um sistema não linear depende das condições iniciais impostas.

De fato, se olharmos por exemplo os graficos no ponto $\omega = 45\text{Hz}$, temos uma diferença gritante entre as amplitudes máximas e velocidades máximas obtidas nos dois experimentos.

4.5 Sistema Massa, mola e amortecedor com pêndulo acoplado

Os experimentos realizados nas seções 4.3 e 4.4 foram novamente realizados nesta seção para o sistema modelado pelas equações 3.57 e 3.59. No entanto, como temos dois movimentos para analisar, o deslocamento lateral da massa M e o deslocamento angular do pêndulo dado por θ , foi feita uma primeira simulação onde foram plotados a resposta de cada deslocamento em função do tempo, dado uma força oscilatória de frequência $\omega = 1\text{Hz}$. Assim, utilizando os parâmetros da tabela 5, obtivemos:

Tabela 5 – Parâmetros da simulação do sistema massa mola amortecedor pêndulo

g	Gravidade	9.81 m/s^2
L	Comprimento do pêndulo	15 cm
m	Massa do pêndulo	1kg
j	Coeficiente de amortecimento rotacional	$5 \cdot 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$
M	Massa do corpo	4 kg
b	Coeficiente de amortecimento linear	0.5 kg/s
K	Constante de mola	400 N/m
F_0	Força	20 N

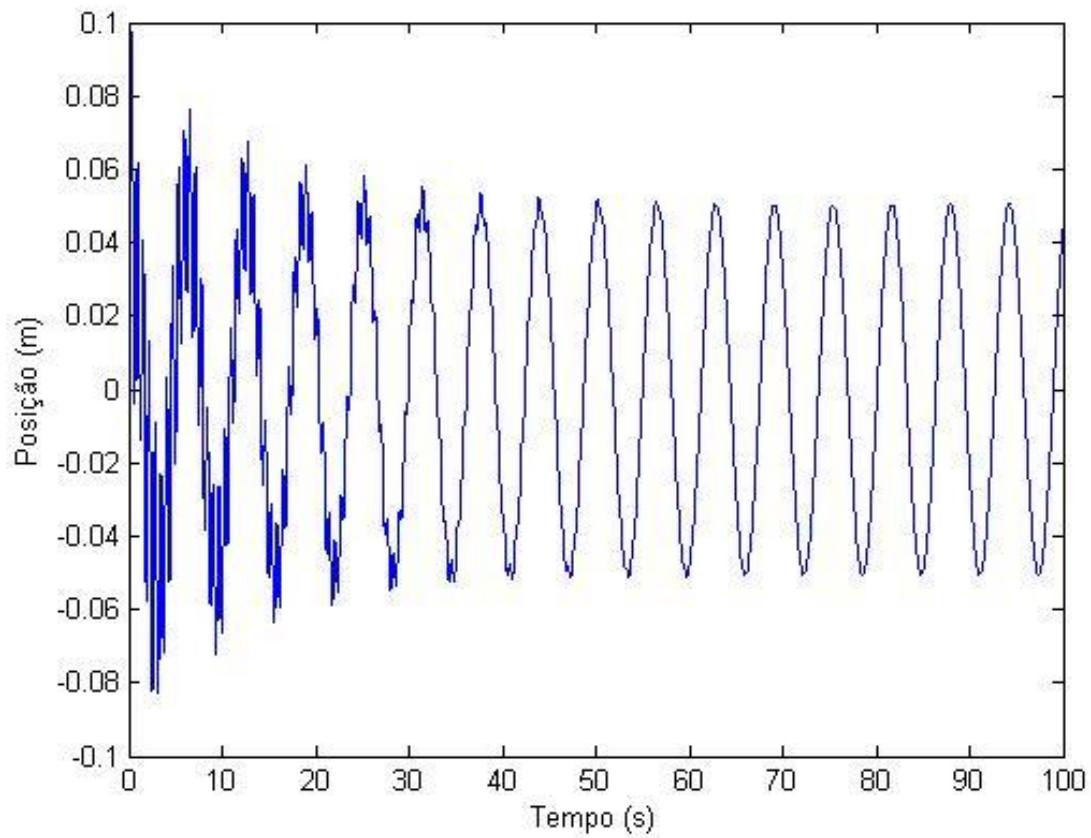


Figura 4.10 – Deslocamento lateral da massa M dado uma força oscilatória de frequência $\omega = 1\text{Hz}$.

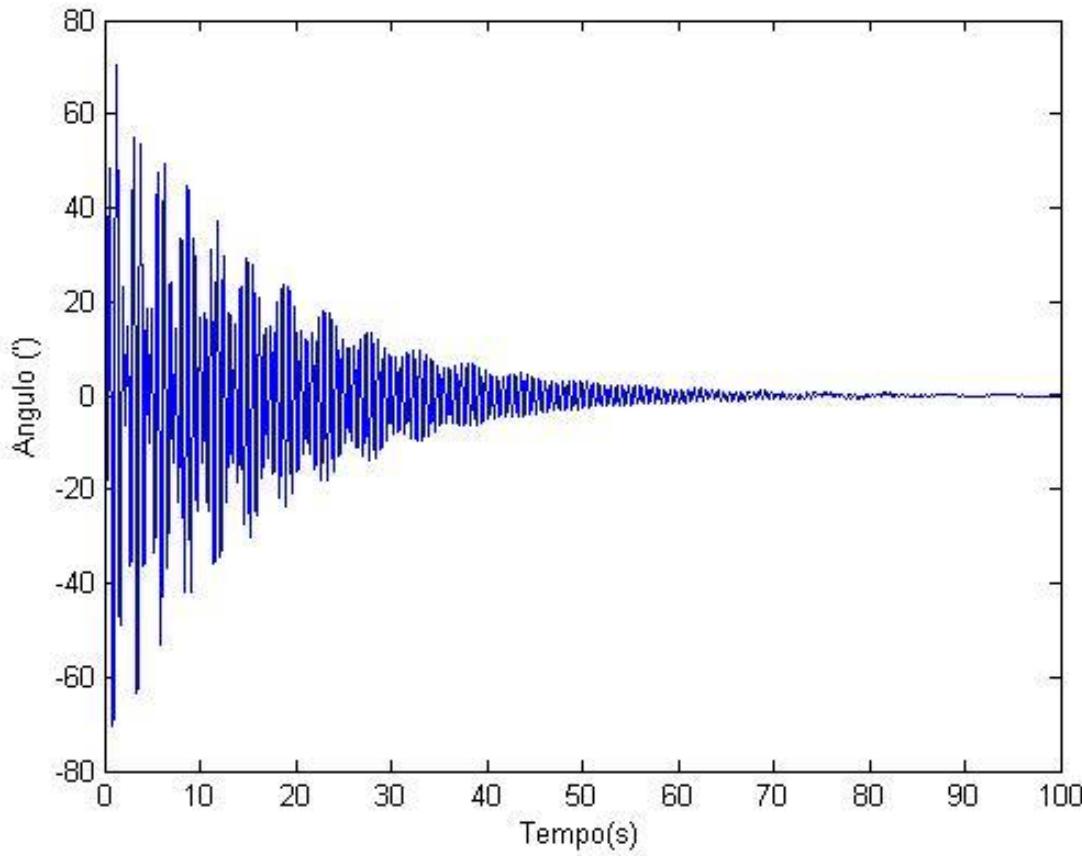


Figura 4.11 – Deslocamento angular do pêndulo dado uma força oscilatória de frequência $\omega = 1\text{Hz}$.

Como vemos nas figuras acima, o comportamento de ambos no regime transitório é diferente daquele apresentado nas seções anteriores. De fato, se olharmos para a figura 4.10, vemos um comportamento bem similar aquele apresentado na figura 4.5, como a visível diferença no período transitório onde há uma vibração a mais devido ao pêndulo acoplado.

Podemos inferir também que o tempo de cem (100) segundos foi suficiente para atingir o regime permanente, e para a análise da frequência, foram feitas as simulações usando o tempo de duzentos (200) segundos. Assim, obtivemos:

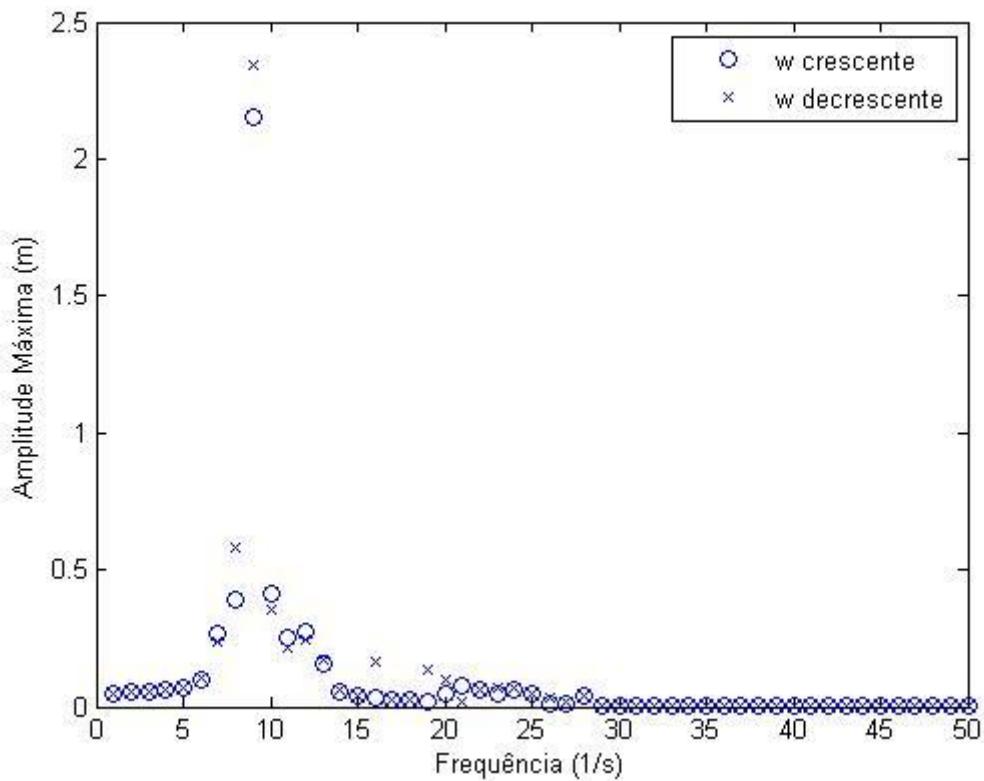


Figura 4.12 – Gráficos da amplitude pela frequência sobrepostos dos experimentos realizados para o sistema desta seção

A figura 4.12 traz um gráfico muito parecido com àquele exposto pela figura 4.6. No entanto, vemos que as amplitudes máximas obtidas neste foram inferiores àquelas obtidas naquele.

4.6 Sistema massa, mola e amortecedor com mola cúbica e pêndulo acoplado

Como realizado na seção 4.5, realizamos os experimentos já descritos anteriormente para as equações 3.59 e 3.60. Assim, dado os parâmetros da tabela 6, obtivemos:

Tabela 6 – Parâmetros da simulação do sistema massa mola amortecedor pêndulo com mola cúbica

g	Gravidade	9.81 m/s^2
L	Comprimento do pêndulo	15 cm
m	Massa do pêndulo	1 kg
j	Coeficiente de amortecimento rotacional	$5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$
M	Massa do corpo	4 kg
b	Coeficiente de amortecimento linear	0.5 kg/s
K	Constante de mola	400 N/m
F_0	Força	20 N
α	Coeficiente de rigidez	400 m^{-2}

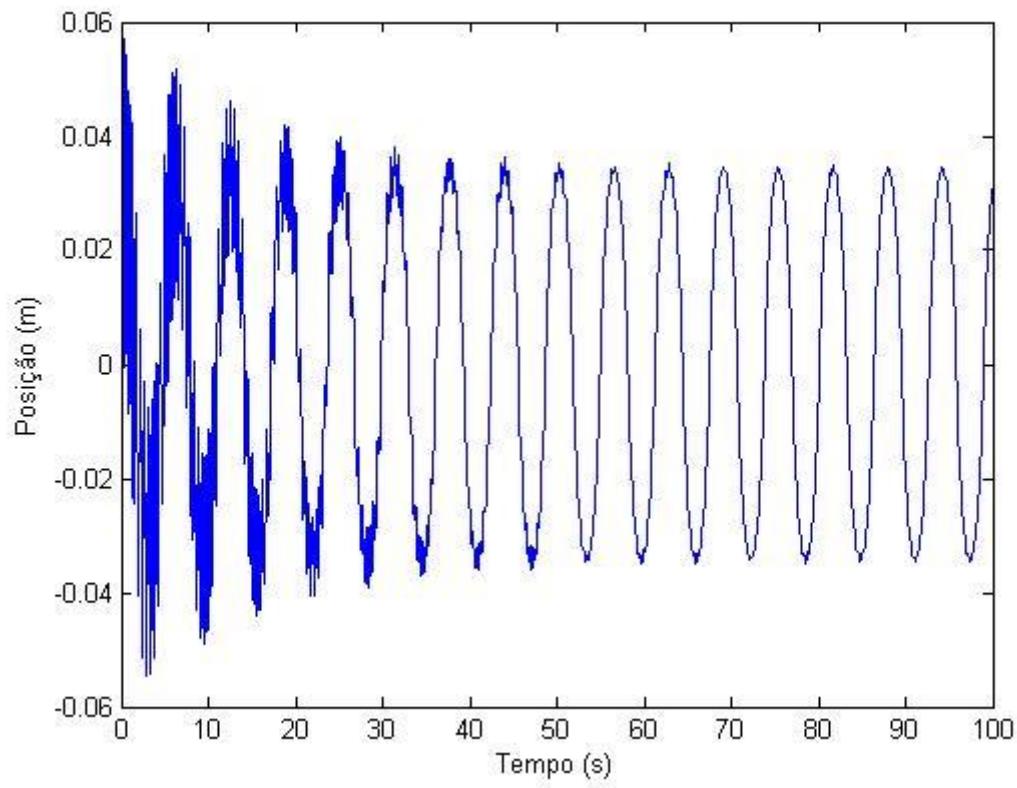


Figura 4.13 – Deslocamento lateral dado uma força oscilatória de frequência $\omega = 1\text{Hz}$.

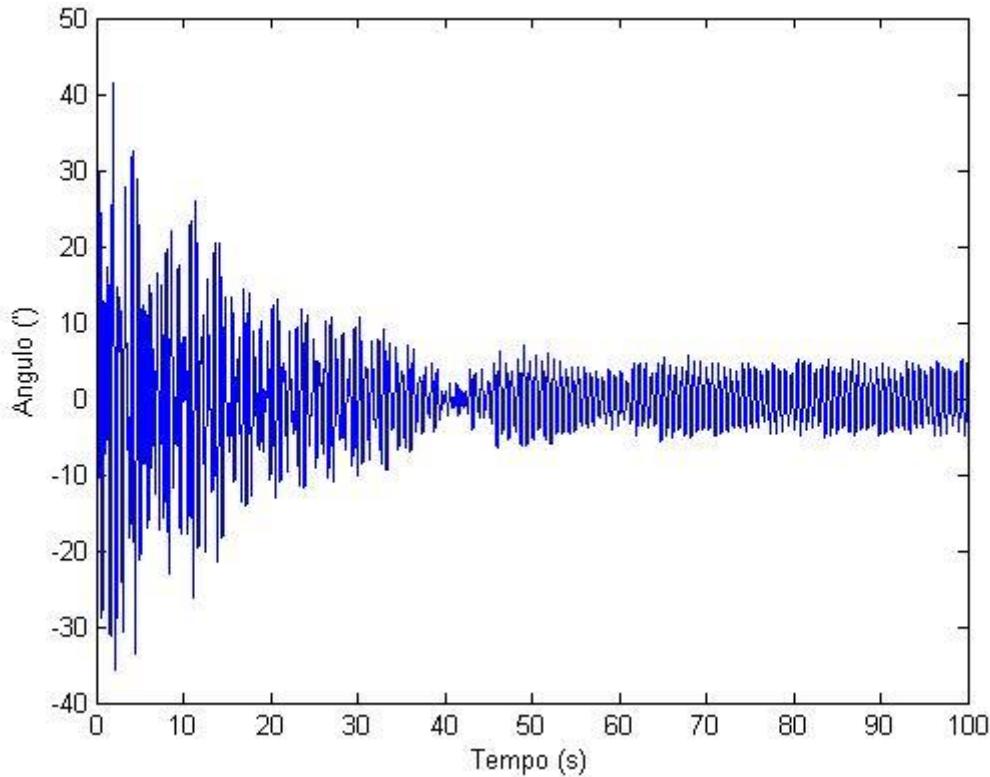


Figura 4.14 – Deslocamento angular dado uma força oscilatória de frequência $\omega = 1\text{Hz}$.

Comparando as figuras 4.13 e 4.14 com as respectivas figuras resultantes do mesmo experimento da seção anterior, i.e. figuras 4.10 e 4.11, notamos que ambos gráficos de deslocamento lateral possuem grande semelhança, exceto o valor nominal das posições. Em contradição, os gráficos de deslocamento angulares se diferem muito: enquanto o primeiro tem um amortecimento mais lento e entra em praticamente repouso no regime permanente, o segundo possui um amortecimento mais rápido, no entanto o deslocamento angular oscila em torno de 14 unidades durante o regime permanente como mostra a figura a seguir:

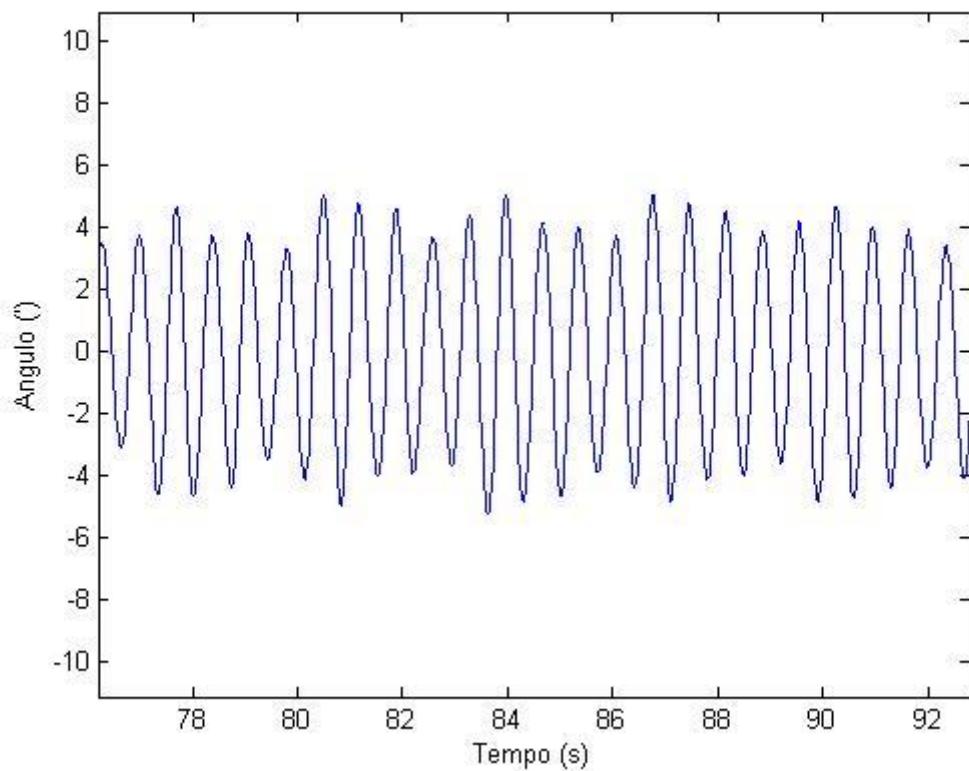


Figura 4.15 – Zoom da figura 4.14 para análise do regime permanente.

A seguir, foram obtidos os gráficos da amplitude máxima do deslocamento lateral pela frequência da força oscilatória.

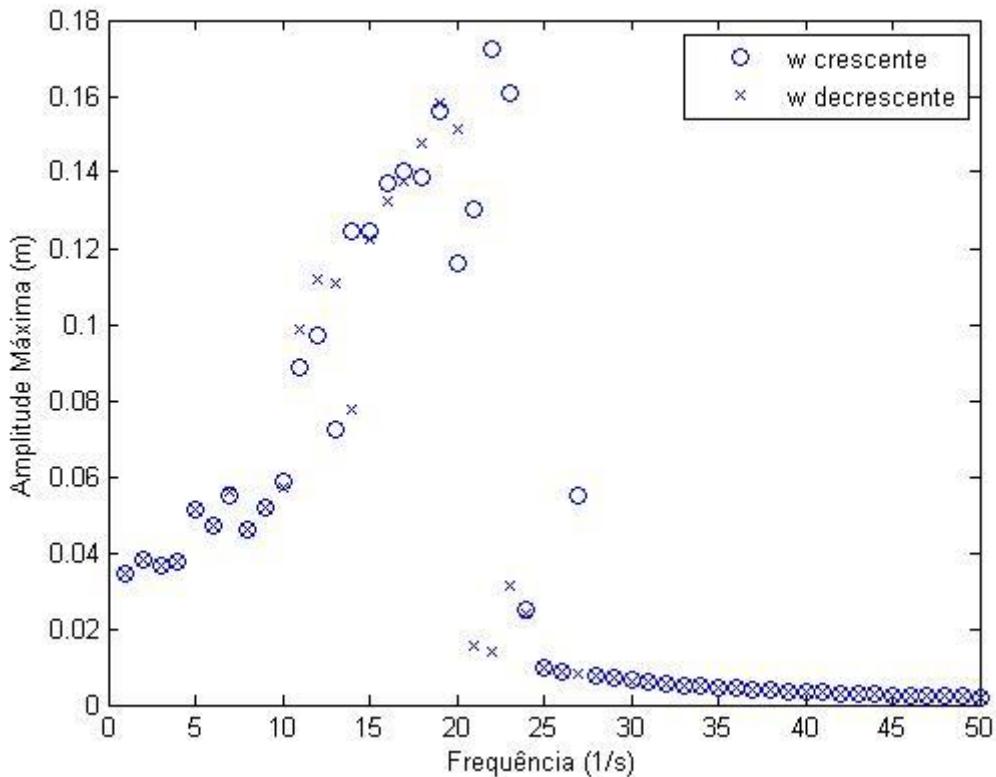


Figura 4.16 – Gráficos da amplitude pela frequência sobrepostos dos experimentos realizados para o sistema desta seção

Nota-se que a figura 4.16 se difere da figura 4.12, como era esperado, devido ao elemento não linear dentro do subsistema da equação 3.61. No entanto, o gráfico desta figura não se assemelha àquele obtido na figura 4.9, que também era um sistema com mola cúbica.

5 Considerações Finais

Esta seção do trabalho visa construir argumentos e buscar explicações para os fenômenos observados na seção de resultados.

5.1 Conclusões dos resultados

Os resultados das simulações estão na seção anterior e trazem muitas informações relevantes.

Primeiramente foi feita uma análise do sistema do pêndulo, com e sem amortecimento. Vemos que a inércia (ou a massa) do sistema só é parâmetro de simulação quando há amortecimento. É notável também que linearizações simplificam a modelagem do sistema e trazem respostas próximas àquelas encontradas no sistema real para um intervalo pequeno de ângulos. E por fim, notamos que o amortecimento do ar é desprezível se comparado ao amortecimento de junta, e por isso só este último foi considerados nas simulações que foram feitas.

Em seguida, começamos a simular sistemas massa mola amortecedor, linear e não linear (inclusão da mola cúbica). Nestes estudos procurou-se identificar como a frequência de oscilação afeta os sistemas. Como vimos, o sistema linear se comporta como o esperado, ou seja, há um pico de amplitude na sua frequência natural e variações nas condições iniciais não afetam o regime permanente (simulações com frequências crescendo e decrescendo). O mesmo não foi visto no sistema não linear. É notável como neste tipo de sistema as condições iniciais afetam a obtenção dos resultados.

E finalmente, foi acoplado um pêndulo num sistema massa mola amortecedor e foram feitas as simulações sem e com a mola cúbica. O sistema sem a mola cúbica comportou-se semelhante ao sistema linear sem o pêndulo acoplado. Há um pico na frequência de 9Hz, indicando como a inclusão do pêndulo afetou a frequência natural do sistema como um todo. Já

o sistema com mola cúbica obteve resultados interessantes e diferentes daqueles apresentados pelo mesmo sistema sem o pêndulo acoplado: o gráfico de amplitude máxima pela frequência apresentou um gráfico que indica que as condições iniciais não afetam o sistema tanto quanto no sistema sem pêndulo, no entanto apresenta um caráter bem diferente daquele apresentado pelos sistemas sem mola cúbica.

Referências

- [1] Hibbeler, R.C. **Engineering Mechanics Dynamics**. 13a. Edição. Prentice Hall, 2012.
- [2] Lixin Z., Jinsong W & Liping W. **Analysis and Simplification of the Rigid Body Dynamic Model for a 6-UPS Parallel Kinematic Machine under Uniform Motion Condition**. 2003.
- [3] Rao, S.S. **Mechanical Vibrations**. 5a. Edição. University of Miami. Prentice Hall, 2011.
- [4] Zukovic, M. & Cveticanin, L. **Chaos in Non-ideal Mechanical System with Clearance**. Journal of Vibration and Control, 2009, 15(8), pp.1229–1246. Último acesso em [16/10/2014]: <http://jvc.sagepub.com/cgi/doi/10.1177/1077546308091216>.
- [5] Lorente, A. **Dynamic Characteristics of a Pendulum System**. 2010.
- [6] Moraes, F.H. **Comportamento dinâmico não-linear de um sistema mecânico com vibrações associadas a uma transição brusca na rigidez**. 2013.
- [7] Nowak, R.D. **Nonlinear System Application**. 2002. <http://link.springer.com/article/10.1007/BF01211655>
- [8] MathWorks®. **Ode45**. Último acesso em [21/10/2014]. Link: <http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/ode45.html#bt6n8p-40>.
- [9] Cengel, Y. A. & Cimbala, J. M. **Fluid Mechanics, Fundamentals and Applications**. Segunda Ed., McGraw-Hill, 2009.

[10] Balachandran, B. & Magrab E. **Vibrations**. Segunda Edição, Cengage Learning, 2008.

Apêndices

Apêndice A – Programação da simulação do pêndulo simples

```
clear all
```

```
clc
```

```
g=9.81;
```

```
L = 15*10^-2;
```

```
syms t x
```

```
f = @(t,x) [x(2);-(g/L)*sin(x(1))];
```

```
f_linear = @(t,x) [x(2);-(g/L)*x(1)];
```

```
teta0 = pi/12; %e pi/3
```

```
[T,Y] = ode45(f, [0 25], [teta0 0]);
```

```
[T2,Y2] = ode45(f_linear, [0 25], [teta0 0]);
```

```
plot(T,180*Y(:,1)/pi,'r');
```

```
hold on
```

```
plot(T2,180*Y2(:,1)/pi);
```

Apêndice B – Programação da simulação do pêndulo amortecido

```
clear all
clc

g=9.81;
L = 15*10^-2;
c = 7*10^-5;
m = 1;
j = 0.005;
syms t x

f_ar = @(t,x) [x(2);-(g/L)*sin(x(1))-(c/m)*x(2)];
f_junta = @(t,x) [x(2);-(g/L)*sin(x(1))-(j/(m*L*L))*x(2)];

teta0 = pi/12;

[T,Y] = ode45(f_ar, [0 25*60*60], [teta0 0]);
[T2,Y2] = ode45(f_junta, [0 100], [teta0 0]);
plot(T/3600,180*Y(:,1)/pi);
plot(T2,180*Y2(:,1)/pi);
```

Apêndice C – Programação da simulação do sistema massa mola amortecedor

```
clear all
```

```
clc
```

```
b = 0.5;
```

```
M = 4;
```

```
K = 400;
```

```
F = 20;
```

```
syms t x w
```

```
x0 = [0]; v0 = [0];
```

```
f = @(t,x,w) [x(2);F*cos(w*t)-(b/M)*x(2) - (K/M)*x(1)];
```

```
w = 1;
```

```
[T,Y] = ode45(f, [0 1000], [x0 v0], [], w);
```

```
plot(T,Y(:,1));
```

```
for i = 1:50
```

```
[T,Y] = ode45(f, [0 1000], [x0(i) v0(i)], [], w);
```

```
a = size(Y);
```

```
b = a(1);
```

```
d = b/10;
```

```
c = round(b - d);
```

```
x0 = [x0,max(Y(c:b,1))];
```

```
v0 = [v0,max(Y(c:b,2))];
```

```
w = w+1;
```

```
end
```

```
W = 1:50;
```

```
X_c = x0(2:51);
```

```
V_c = v0(2:51);
```

```
x0 = [0];v0 = [0];
```

```
w=50;
```

```
for i = 1:50
[T,Y] = ode45(f, [0 1000], [x0(i) v0(i)], [], w);
a = size(Y);
b = a(1);
d = b/10;
c = round(b - d);
x0 = [x0,max(Y(c:b,1))];
v0 = [v0,max(Y(c:b,2))];
w = w-1;
end
```

```
X_d = x0(2:51);
```

```
V_d = v0(2:51);
```

```
plot(W,X_c,'o')
```

```
hold on
```

```
plot(W,X_d,'x')
```

```
plot(W,V_c,'o')
```

```
hold on
```

```
plot(W,V_d,'x')
```

Apêndice D – Programação da simulação do sistema massa mola amortecedor com mola cúbica

```
clear all
```

```
clc
```

```
b = 0.5;
```

```
M = 4;
```

```
K = 400;
```

```
F = 20;
```

```
a = 400 ;
```

```
syms t x w
```

```
x0 = [0]; v0 = [0];
```

```
f = @(t,x,w) [x(2);F*cos(w*t)-(b/M)*x(2) - (K/M)*x(1)-((a*K/M)*x(1)^3)];
```

```
w = 1;
```

```
[T,Y] = ode45(f, [0 1000], [x0 v0], [], w);
```

```
plot(T,Y(:,1));
```

```
for i = 1:50
```

```
[T,Y] = ode45(f, [0 1000], [x0(i) v0(i)], [], w);
```

```
a = size(Y);
```

```
b = a(1);
```

```
d = b/10;
```

```
c = round(b - d);
```

```
x0 = [x0,max(Y(c:b,1))];
```

```
v0 = [v0,max(Y(c:b,2))];
```

```
w = w+1;
```

```
end
```

```
W = 1:50;
```

```
X_c = x0(2:51);
```

```
V_c = v0(2:51);
```

```
x0 = [0];v0 = [0];
```

```
w=50;
for i = 1:50
[T,Y] = ode45(f, [0 1000], [x0(i) v0(i)], [], w);
a = size(Y);
b = a(1);
d = b/10;
c = round(b - d);
x0 = [x0,max(Y(c:b,1))];
v0 = [v0,max(Y(c:b,2))];
w = w-1;
end

X_d = x0(2:51);
V_d = v0(2:51);

plot(W,X_c,'o')
hold on
plot(W,X_d,'x')

plot(W,V_c,'o')
hold on
plot(W,V_d,'x')
```

Apêndice E – Programação da simulação do sistema massa mola amortecedor e pêndulo acoplado

Neste caso, tive que usar dois programas da extensão tipo .m:

Programa 1 – modelo.m:

```
function dx = xponto(t,x,w)
b = 0.5;
M = 4;
m = 1;
j = 0.005;
L = 0.15;
g = 9.81;
K = 400;
F = 20;
a = 0;

dx = zeros(4,1);
dx(1) = x(3);
dx(2) = x(4);
dx(3) = (-(b*x(3))-(K*x(1))-
(a*K*x(1)^3)+(m*L*sin(x(2))*x(4)^2)+(m*L*cos(x(2))*sin(x(2)))+(cos(x(2))*j*x(4)/L)+
(F*cos(w*t))-(j*cos(x(2))*x(4)/L))/(M+m-m*cos(x(2))^2);
dx(4) = ((g*tan(x(2))*(M+m))+(j*x(4)*(M+m)/(m*L*cos(x(2))))-(b*x(3))-(K*x(1))-
(a*K*x(1)^3)+(m*L*sin(x(2))*x(4)^2)-
(j*x(4)*cos(x(2))/L)+(F*cos(w*t)))/(m*L*cos(x(2))-(L*(M+m)/cos(x(2))));
```

end

Programa 2 – rotina.m:

```
clear all
clc
w=1;
x0 = [0];
v0 = [0];
t0 = [0];
w0 = [0];

[T,Y] =ode45(@eq3_61_v5,[0 100],[x0(i) t0(i) v0(i) w0(i)],[],w);
plot(T,Y(:,1));
plot(T,180*Y(:,2)/pi);

for i = 1:50
[T,Y] =ode45(@eq3_61_v5,[0 100],[x0(i) t0(i) v0(i) w0(i)],[],w);
a = size(Y);
b = a(1);
d = b/10;
c = round(b - d);
x0 = [x0,max(Y(c:b,1))];
t0 = [t0,max(Y(c:b,2))];
v0 = [v0,max(Y(c:b,3))];
```

```

w0 = [w0,max(Y(c:b,4))];
w = w+1;
end

X1 = x0(2:51);
V1 = v0(2:51);
T1 = t0(2:51);
W1 = w0(2:51);

w=50;
x0 = [0];
v0 = [0];
t0 = [0];
w0 = [0];

for i = 1:50
[T,Y] =ode45(@eq3_61_v5,[0 100],[x0(i) t0(i) v0(i) w0(i)],[],w);
a = size(Y);
b = a(1);
d = b/10;
c = round(b - d);
x0 = [x0,max(Y(c:b,1))];
t0 = [t0,max(Y(c:b,2))];
v0 = [v0,max(Y(c:b,3))];
w0 = [w0,max(Y(c:b,4))];
w = w-1;
end

X2 = fliplr(x0(2:51));
V2 = fliplr(v0(2:51));
T2 = fliplr(t0(2:51));
W2 = fliplr(w0(2:51));

plot([1:50],X1,'o')
hold on
plot([1:50],X2,'x')

```

Apêndice F – Programação da simulação do sistema massa mola amortecedor com mola cúbica e pêndulo acoplado

Nesta simulação, foi utilizado o mesmo programa *rotina.m*, apenas mudamos o programa 1 em relação ao apêndice anterior, como segue:

Programa 1 – *modelo_cubico.m*:

```
function dx = xponto(t,x,w)
b = 0.5;
M = 4;
m = 1;
j = 0.005;
L = 0.15;
g = 9.81;
K = 400;
F = 20;
a = 400;

dx = zeros(4,1);
dx(1) = x(3);
dx(2) = x(4);
dx(3) = (-(b*x(3))-(K*x(1))-
(a*K*x(1)^3)+(m*L*sin(x(2))*x(4)^2)+(m*L*cos(x(2))*sin(x(2)))+(cos(x(2))*j*x(4)/L)+
(F*cos(w*t))-(j*cos(x(2))*x(4)/L))/(M+m-m*cos(x(2))^2);
dx(4) = ((g*tan(x(2))*(M+m))+(j*x(4)*(M+m)/(m*L*cos(x(2))))-(b*x(3))-(K*x(1))-
(a*K*x(1)^3)+(m*L*sin(x(2))*x(4)^2)-
(j*x(4)*cos(x(2))/L)+(F*cos(w*t)))/(m*L*cos(x(2))-(L*(M+m)/cos(x(2))));
end
```