

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

**Leonardo Araújo Mendes**

**Modelo reduzido para previsão dos coeficientes  
aerodinâmicos de asas trapezoidais: uma abordagem  
utilizando decomposição em valores singulares**

**São Carlos**

**2021**



**Leonardo Araújo Mendes**

**Modelo reduzido para previsão dos coeficientes aerodinâmicos de asas trapezoidais: uma abordagem utilizando decomposição em valores singulares**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Aeronáutica, da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheiro Aeronáutico.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Afonso Angélico

**São Carlos  
2021**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,  
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS  
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da  
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

MM538m  
Mendes, Leonardo Araújo  
Modelo reduzido para previsão dos coeficientes aerodinâmicos de asas trapezoidais: uma abordagem utilizando decomposição em valores singulares / Leonardo Araújo Mendes; orientador Ricardo Afonso Angélico. São Carlos, 2021.

Monografia (Graduação em Engenharia Aeronáutica)  
-- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2021.

1. asas finitas. 2. decomposição em valores singulares. 3. modelos reduzidos. 4. teoria da linha sustentadora. I. Título.

# FOLHA DE APROVAÇÃO

## *Approval sheet*

**Candidato / Student:** Leonardo Araújo Mendes

**Título do TCC / Title :** Modelo reduzido para previsão dos coeficientes aerodinâmicos de asas trapezoidais: uma abordagem utilizando decomposição em valores singulares

**Data de defesa / Date:** 20/12/2021

<b>Comissão Julgadora / Examining committee</b>	<b>Resultado / result</b>
Professor Doutor Hernán Dario Ceron Muñoz	Aprovado
Instituição / Affiliation: EESC - SAA	
Professor Doutor Alvaro Martins Abdalla	Aprovado
Instituição / Affiliation: EESC - SAA	

Presidente da Banca / Chair of the Examining Committee:

Professor Doutor Hernán Dario Ceron Muñoz  
(assinatura / signature)



## **AGRADECIMENTOS**

Todos sabem que a jornada numa universidade é difícil e sem pessoas incentivando, auxiliando e se calejando ao seu lado, nada seria possível.

Agradeço:

Primeiramente aos meus pais e meu irmão, que a todo momento me incentivaram e compreenderam as minhas dificuldades.

Aos amigos, alguns desde o começo e outros descobertos ao longo do curso, e em especial ao Guilherme, mais que um amigo, pelo apoio demonstrado nos mais variados momentos, dentro e fora de classes e deste trabalho e que levarei para a vida.

Aos professores, pelos conhecimentos técnicos e até não técnicos e aos endireitamentos durante a longa jornada. Em especial ao professor Ricardo, que sempre se manteve mais perto.

Ao corpo de funcionários da USP, que sempre contribuíram positivamente para diminuir a necessidade de esforço nos mais diversos momentos, com ênfase aos funcionários do Departamento de Aeronáutica.

À USP e em especial à EESC, essencial no meu processo de formação profissional e por tudo o que aprendi ao longo dos anos do curso.



*“Alone we can do so little.  
Together we can do so much.”*

*Helen Keller*



## RESUMO

**MENDES, L. A. Modelo reduzido para previsão dos coeficientes aerodinâmicos de asas trapezoidais: uma abordagem utilizando decomposição em valores singulares.** 2021. 65p. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

Ferramentas computacionais são essenciais nas diferentes etapas de desenvolvimento de uma nova aeronave. Em particular, nas etapas iniciais, há a necessidade de avaliar diferentes configurações de modo a selecionar a que melhor atende às especificidades almejadas. Em vista da necessidade de se realizar inúmeras simulações, modelos simplificados são bem-vindos ao trazer uma primeira aproximação e um direcionamento sobre quais configurações devem ser analisadas em maior profundidade. Nesse contexto, o presente trabalho visa a análise de diferentes configurações de asas trapezoidais e a construção de um modelo reduzido utilizando a decomposição em valores singulares. O projeto se divide em três etapas: (i) simulação através da teoria da linha sustentadora de asas finitas trapezoidais com diferentes parâmetros geométricos e aerodinâmicos bidimensionais utilizando-se um código computacional desenvolvido em Python, (ii) análise de parte dessas simulações utilizando a decomposição em valores singulares para construção de modelos reduzidos, e (iii) uma avaliação do modelo desenvolvido com a parcela de simulações não utilizadas. Ao final desse projeto, desenvolveram-se modelos simplificados para o coeficiente de sustentação tridimensional, coeficiente de arrasto induzido e distribuição da circulação sobre a envergadura, que, quando comparados às simulações, apresentam erros médios de respectivamente 0.5%, 2.5% e 5.0%, inferiores a outros modelos reportados na literatura. Os desenvolvimentos aqui realizados podem ser futuramente aplicados a dados obtidos de outras ferramentas computacionais, com maior grau de fidelidade.

**Palavras-chave:** asas finitas, decomposição em valores singulares, modelos reduzidos, teoria da linha sustentadora.



## ABSTRACT

MENDES, L. A. **Reduced model to predict trapezoidal wings aerodynamic coefficients: an approach using singular value decomposition.** 2021. 65p. Monograph (Conclusion Course Paper) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

Computational tools are essential in the different stages of development of a new aircraft. In particular, in initial stages, there is a need to evaluate different configurations in order to select the one that best meets the desired specificities. Because of the need to carry out numerous simulations, simplified models are welcome to bring a first approximation and guidance on which configurations should be analyzed with more detail. In this context, this work aims to analyze different configurations of trapezoidal wings and to build a reduced model using singular value decomposition. The project is divided into three stages: (i) simulation through the theory of the sustaining line of finite trapezoidal wings with different two-dimensional geometric and aerodynamic parameters using a computational code developed in Python, (ii) analysis of part of these simulations using singular value decomposition to build reduced models, and (iii) an evaluation of the model developed with the portion of unused simulations. At the end of this project, simplified models for the three-dimensional lift coefficient, induced drag coefficient and circulation distribution over the span, which, when compared to the simulations, have average errors of 0.5%, 2.5% and 5.0% respectively, lower than other models reported in the literature. The developments carried out here can be applied in the future to data obtained from other computational tools, with a greater degree of fidelity.

**Keywords:** finite wings, lifting-line theory, reduced models, singular value decomposition.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação do vórtice de esteira . . . . .	26
Figura 2 – Representação do vórtice ferradura . . . . .	26
Figura 3 – Indução de velocidade pelo vórtice . . . . .	27
Figura 4 – Velocidade induzida infinita para o caso de vórtice único . . . . .	28
Figura 5 – Representação dos infinitos vórtices . . . . .	29
Figura 6 – Exemplo para a aproximação da circulação por Galerkin com funções lineares com 7 estações . . . . .	32
Figura 7 – Representação das matrizes completa e econômica do SVD . . . . .	34
Figura 8 – Representação das matrizes truncadas . . . . .	35
Figura 9 – Análise gráfica dos valores singulares . . . . .	36
Figura 10 – Fluxograma da metodologia . . . . .	39
Figura 11 – Análise da sensibilidade de $C_{L\alpha}$ em relação aos parâmetros de projeto .	48
Figura 12 – Comparação do erro do coeficiente de sustentação para o modelo 1 . .	49
Figura 13 – Comparação do erro do coeficiente de sustentação para o modelo 2 . .	49
Figura 14 – Comparação do erro do coeficiente de sustentação para o modelo final .	50
Figura 15 – Média do erro do modelo de $C_L$ para cada parâmetro . . . . .	51
Figura 16 – Comparação do erro do coeficiente de arrasto induzido para o primeiro modelo . . . . .	52
Figura 17 – Comparação do erro do coeficiente de arrasto induzido para o modelo final . . . . .	52
Figura 18 – Média do erro do modelo de $C_{Di}$ para cada parâmetro . . . . .	53
Figura 19 – Análise gráfica dos valores singulares do SVD criado para a circulação .	54
Figura 20 – Erro de Frobenius entre a matriz simplificada e original . . . . .	55
Figura 21 – Principais circulações de $V$ . . . . .	55
Figura 22 – Média do erro do modelo da distribuição de circulação para cada parâmetro	57
Figura 23 – Histograma dos erros para os modelos criados . . . . .	58



## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 – Valores das entradas fixas . . . . .	40
Tabela 2 – Variação das características geométricas e aerodinâmicas dos casos avaliados . . . . .	40
Tabela 3 – Comparação de erros do coeficiente de sustentação dos modelos . . . . .	50
Tabela 4 – Comparação de erros do coeficiente de arrasto induzido dos modelos . . . . .	53
Tabela 5 – Comparação de erros da distribuição de circulação dos modelos . . . . .	56
Tabela 6 – Valores estatísticos de confiança dos modelos . . . . .	56
Tabela 7 – Valores da distribuição de $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ . . . . .	65



## LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha$	Ângulo de ataque
$\alpha_{l_0}$	Ângulo de ataque para sustentação nula
$a_0$	Inclinação da curva do coeficiente de sustentação pelo ângulo de ataque para a o aerofólio
AR	Alongamento
$C_{D_i}$	Coeficiente de arrasto induzido
$C_L$	Coeficiente de sustentação
$C_{L_\alpha}$	Inclinação da curva do coeficiente de sustentação pelo ângulo de ataque
$L$	Força de sustentação
$\lambda$	Afilamento
MEF	Método dos Elementos Finitos
SVD	Decomposição em valores singulares
$\theta$	Ângulo da torção geométrica



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>21</b>
<b>1.1</b>	<b>Contexto</b>	<b>21</b>
<b>1.2</b>	<b>Objetivos</b>	<b>22</b>
<b>1.3</b>	<b>Visão geral do documento</b>	<b>22</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>25</b>
<b>2.1</b>	<b>Teoria da linha de sustentação</b>	<b>25</b>
2.1.1	Sistema de vórtices	25
2.1.2	Lei de Biot-Savart	27
2.1.3	Teoria da linha de sustentação	27
2.1.4	Coeficientes aerodinâmicos de uma asa finita	30
<b>2.2</b>	<b>Solução numérica da linha sustentadora</b>	<b>30</b>
<b>2.3</b>	<b>Decomposição em valores singulares</b>	<b>32</b>
2.3.1	Definição de SVD	32
2.3.2	Aproximação de uma matriz	33
2.3.3	Solução aproximada de um sistema linear qualquer	35
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>39</b>
<b>3.1</b>	<b>Ferramenta para cálculo da Linha Sustentadora</b>	<b>39</b>
3.1.1	Ferramenta inicial e modificações	39
3.1.2	Entradas	40
3.1.3	Saídas	41
<b>3.2</b>	<b>Ferramenta para análise preliminar dos resultados</b>	<b>41</b>
3.2.1	Análise dos coeficientes aerodinâmicos	41
3.2.2	Análise da matriz SVD gerada	42
<b>3.3</b>	<b>Ferramenta para criação dos modelos reduzidos</b>	<b>42</b>
3.3.1	Coeficiente de sustentação	42
3.3.2	Coeficiente de arrasto induzido	43
3.3.3	Distribuição da circulação	43
3.3.4	Solução dos coeficientes	44
<b>3.4</b>	<b>Análise do modelo</b>	<b>44</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>47</b>
<b>4.1</b>	<b>Influência dos parâmetros no coeficiente <math>C_{L\alpha}</math></b>	<b>47</b>
<b>4.2</b>	<b>Criação dos modelos reduzidos</b>	<b>47</b>
4.2.1	Coeficiente de sustentação	47

4.2.2	Coeficiente de arrasto induzido . . . . .	51
4.2.3	Distribuição da circulação . . . . .	54
4.3	<b>Modelos reduzidos finais e suas variações estatísticas . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS . . . . .</b>	<b>59</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>61</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>63</b>
	<b>APÊNDICE A – CIRCULAÇÕES PARA O MODELO DE DISTRIBUIÇÃO DE CIRCULAÇÃO . . . . .</b>	<b>65</b>

## 1 INTRODUÇÃO

### 1.1 Contexto

Um projeto aeronáutico é, assim como em muitas outras engenharias, um projeto multidisciplinar. Requisitos e legislação, aerodinâmica, automação e controle, estruturas e estabilidade são algumas dessas disciplinas que estão em constante contato umas com as outras, em inúmeras conexões, difíceis até de serem listadas (RAYMER, 2012). Tanto projetos mais antigos quanto os mais atuais apresentam esse caráter multidisciplinar. A grande mudança, no entanto, se dá pelo aumento da complexidade das análises, cálculos e simulações. Hoje, com a grande facilidade que os computadores trazem aos mais complexos cálculos, eles se transformaram em ferramenta de trabalho de qualquer engenheiro. Todas as áreas de atuação de um projeto aeronáutico são dependentes de ferramentas computacionais para propiciar um produto final confiável e adequado.

Mesmo que os computadores atuais permitam cálculos muito mais complexos do que se via há algumas décadas, ainda assim, devido ao enorme custo computacional que a aeronáutica como um todo necessita, existem dificuldades relacionadas a isso. Estas são agravadas pelo fato de que dentro do projeto, todas as disciplinas necessitam de uso computacional intenso em principalmente dois momentos: na escolha inicial de parâmetros e no refinamento destes. Vê-se um uso intenso em parte considerável do processo, mas abre-se a possibilidade de uma ociosidade dessas máquinas complexas e caras em outras ocasiões que não as citadas (ALYANAK, 2012).

É nesse contexto de melhor aproveitamento dos computadores que este trabalho está inserido. Uma boa forma de agir quanto à isso é utilizar essa ociosidade para fazer análises que poderão ser aproveitadas no futuro. A realização de um grande conjunto de simulações de forma a gerar uma redução desses dados e o desenvolvimento de uma ferramenta de baixo custo que forneça resultados aproximados é uma possibilidade. No caso deste trabalho, simulações aerodinâmicas, mas outras áreas poderiam se utilizar do método.

Essa ferramenta de baixo custo, que claramente não apresentaria resultados definitivos, traria a oportunidade de obter parâmetros iniciais da aeronave, essenciais ao estabelecimento de um conceito, de forma muito mais eficiente e eficaz. Isso se deve ao fato de que uma maior quantidade de simulações para os mais diversos parâmetros é mais importante do que a exatidão destas, já que aumenta-se a variabilidade das características simuladas e consequentemente a probabilidade de escolha de um conceito mais aprimorado. A exatidão, por outro lado, fica a cargo dos futuros refinamentos que irão acontecer ao longo do projeto.

Espera-se que com essa solução, a empresa aeronáutica estabeleça uma aceleração processual pela diminuição de tempo gasto com simulações iniciais, além de uma maior possibilidade de atingir melhores resultados finais, já que as simulações mais refinadas partirão de um modelo mais preciso e com um direcionamento melhor de que condições devem ser analisadas realmente nessa etapa.

## 1.2 Objetivos

O presente trabalho de conclusão de curso visa o desenvolvimento de um modelo de baixo custo para uma estimativa inicial das características aerodinâmicas de asas trapezoidais utilizando a decomposição em valores singulares. Como objetivos, especificam-se:

- Familiarizar-se com o uso de Python
- Realizar simulações de um conjunto de asas finitas trapezoidais e suas respostas aerodinâmicas comuns
- Estudar as respostas das simulações
- Desenvolver um modelo simplificado para a geração das respostas aerodinâmicas
- Realizar uma comparação entre as simulações e o modelo simplificado

## 1.3 Visão geral do documento

De forma a facilitar o acompanhamento e compreensão deste trabalho, o texto foi dividido em capítulos, apresentadas a seguir.

Neste primeiro capítulo, as motivações e os objetivos do estudo de um modelo de baixo custo foram abordados, assim como o contexto de sua relevância para os projetos aeronáuticos atualmente.

No Capítulo 2, a fundamentação teórica do trabalho será apresentada, de forma a facilitar o entendimento do texto por completo. Informações acerca de asas finitas, do método de cálculo de constantes aerodinâmicas, da solução numérica escolhida e da teoria por trás do modelo simplificado utilizado serão expostas.

No Capítulo 3 será apresentada a metodologia utilizada para a criação das asas a serem analisadas, para o cálculo das características aerodinâmicas das asas pelas simulações e para a geração do modelo de baixo custo final.

No Capítulo 4 os resultados obtidos por todos os algorítimos serão exibidos, desde as respostas aerodinâmicas encontrados para os inúmeras configurações de asas finitas trapezoidais até os resultados e a verificação do modelo simplificado gerado.

Finalmente, no Capítulo 5, as conclusões obtida pelo trabalho e as inferências alcançadas serão apresentadas.



## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

De forma a possibilitar um bom entendimento da metodologia, das considerações adotadas e dos resultados apresentados nesse trabalho, os principais temas relacionados à elaboração deste serão apresentados nesse capítulo. Inicialmente, apresentar-se-ão os conceitos da aerodinâmica de asas finitas, seguido da Teoria da Linha de Sustentação e de sua solução numérica e, por último, uma breve explicação do método de Decomposição em Valores Singulares e suas aplicações na identificação de modelos.

### 2.1 Teoria da linha de sustentação

#### 2.1.1 Sistema de vórtices

A ideia de substituir uma asa por um sistema de vórtices foi a principal ideia de Lanchester. Esse sistema é composto por três partes: o vórtice de partida, o vórtice de esteira e o vórtice colado. O vórtice de partida está relacionado à retirada de uma asa do repouso, ou seja, quando ela passa por mudanças na velocidade ou no ângulo de ataque, por exemplo. Após esses momentos, ele não influencia mais na circulação, que fica estabilizada (HOUGHTON; CARPENTER, 2016).

A força de sustentação ( $L$ ) em asas ou aerofólios é gerada pela circulação no entorno dela, que apresenta como resultado uma diferença de pressão entre o extradorso e o intradorso. Em situações de sustentação positiva, a pressão no intradorso é maior do que no extradorso. Com isso, não vemos somente a geração da força de sustentação, mas também a tendência do escoamento em contornar a ponta da asa, saindo da superfície inferior para a superior. Dessa forma, uma componente de velocidade surge ao longo da envergadura, da raiz a ponta no intradorso e da ponta a raiz no extradorso, causando o surgimento do vórtice de esteira, um em cada ponta da asa, como mostrado pela Figura 1. É o vórtice de esteira que explica o *downwash*, a componente de velocidade vertical que altera o ângulo de ataque geométrico (ANDERSON, 2016).

Diferentemente do vórtice de partida e do vórtice de esteira, o vórtice colado não se trata de uma entidade física. Ele é um conjunto de vórtices criados hipoteticamente para possibilitar a substituição da asa. Essa é a essência da Teoria da Asa Finita, desenvolver um sistema equivalente de vórtices colados que simulem as propriedades e efeitos da asa sobre o escoamento (HOUGHTON; CARPENTER, 2016).

Um conceito importante para o entendimento dos vórtices é Teorema dos Vórtices de Helmholtz, o qual estabelece que: a intensidade do filamento de um vórtice é constante em seu comprimento e o vórtice não tem início ou término em um fluido. Dessa forma, o sistema apresentado composto pelos três vórtices se verifica no Teorema. Devido à baixa

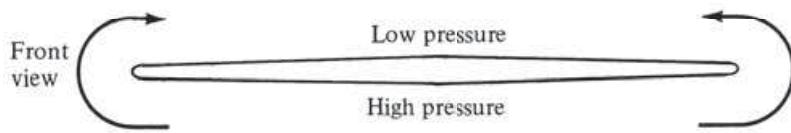
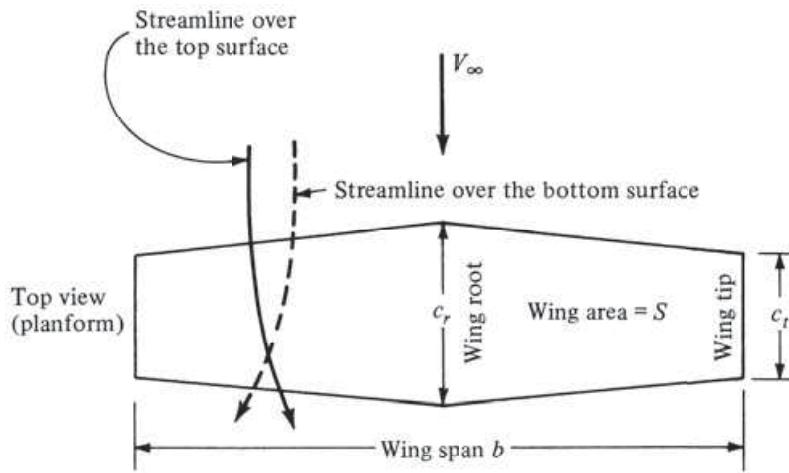


Figura 1 – Representação do vórtice de esteira

Fonte: Anderson (2016)

influência do vórtice de partida, pode-se modelar o sistema de vórtices da asa com o vórtice colado e com dois vórtices de esteira. Esse sistema de três lados é chamado de vórtice ferradura, como mostrado pela Figura 2.

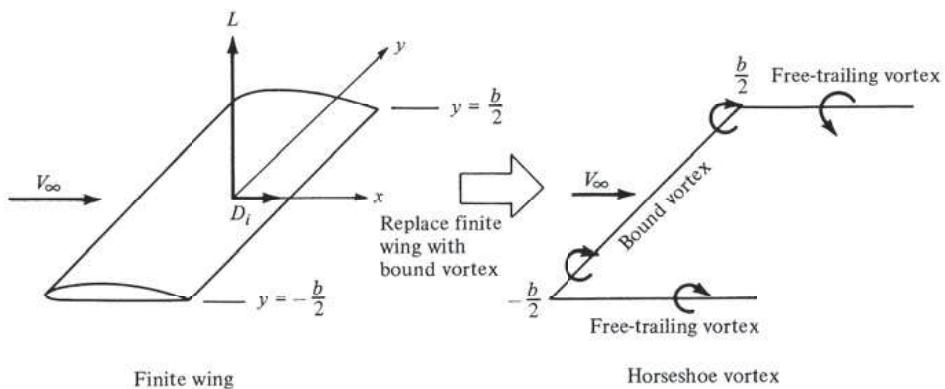


Figura 2 – Representação do vórtice ferradura

Fonte: Anderson (2016)

### 2.1.2 Lei de Biot-Savart

A Lei de Biot-Savart inicialmente desenvolvida para relacionar a indução de um campo magnético por uma corrente elétrica, teve sua aplicação expandida para a velocidade induzida ao fluido pelos vórtices. Sendo  $\Gamma$  a intensidade do filamento do vórtice,  $\delta s$  um segmento desse filamento e  $r$  o vetor que liga o filamento a um ponto  $P$ , como apresentado na Figura 3, a velocidade no ponto  $P$  é dada por:

$$\delta v = \frac{\Gamma}{4\pi r^2} \sin \theta \delta s \quad (2.1)$$

Considerando-se um filamento semi-infinito e integrando a Equação 2.1 com  $\theta \in [\pi/2, \pi]$ , observa-se que  $V = \frac{\Gamma}{4\pi h}$ . Essa velocidade induzida será atribuída aos vórtices de esteira (*downwash*), criando um ângulo de ataque induzido, essencial ao estudo do desempenho aerodinâmico da asa.

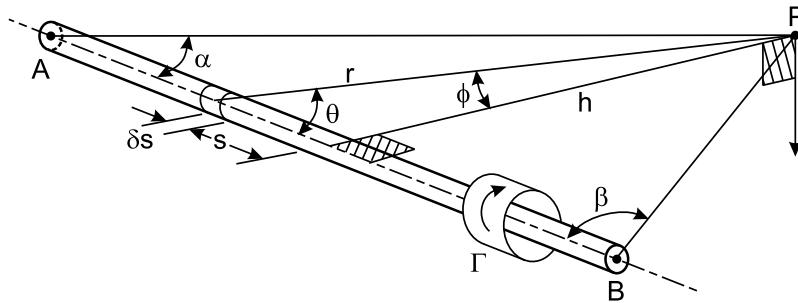


Figura 3 – Indução de velocidade pelo vórtice

Fonte: Houghton e Carpenter (2016)

### 2.1.3 Teoria da linha de sustentação

O estudo da aerodinâmica 2D, com o desenvolvimento das equações de Laplace, promoveu amplo conhecimento acerca da teoria dos aerofólios finos e das características de aerofólios com espessura. No entanto, o aumento de complexidade criada pela análise aerodinâmica 3D impossibilitou à época prever com precisão as características aerodinâmicas das asas finitas.

Com isso, Prandtl (1921), em seu estudo que relacionou a hidrodinâmica com a aerodinâmica, tomou uma combinação dos já abordados vórtices ferraduras e propôs um modelo confiável de substituição da asa, prevendo as características das asas finitas (ANDERSON, 2016). Inicialmente, considerou-se a substituição da asa por um único vórtice ferradura, de forma que ao longo da envergadura, o *downwash*  $w$  seria dada por:

$$w(y) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{b}{[(b/2)^2 - y^2]} \quad (2.2)$$

No entanto, quando  $y \rightarrow \pm b/2 \Rightarrow w \rightarrow \infty$ , ou seja, nas pontas existiria uma velocidade induzida infinita, como representado pela Figura 4. Após anos de estudo, a

solução encontrada foi de ao invés de utilizar um vórtice ferradura para substituir a asa, uma grande quantidades desses vórtices deveriam ser usados, com os vórtices colados sobrepostos ao longo de uma linha sobre a envergadura - a linha de sustentação.

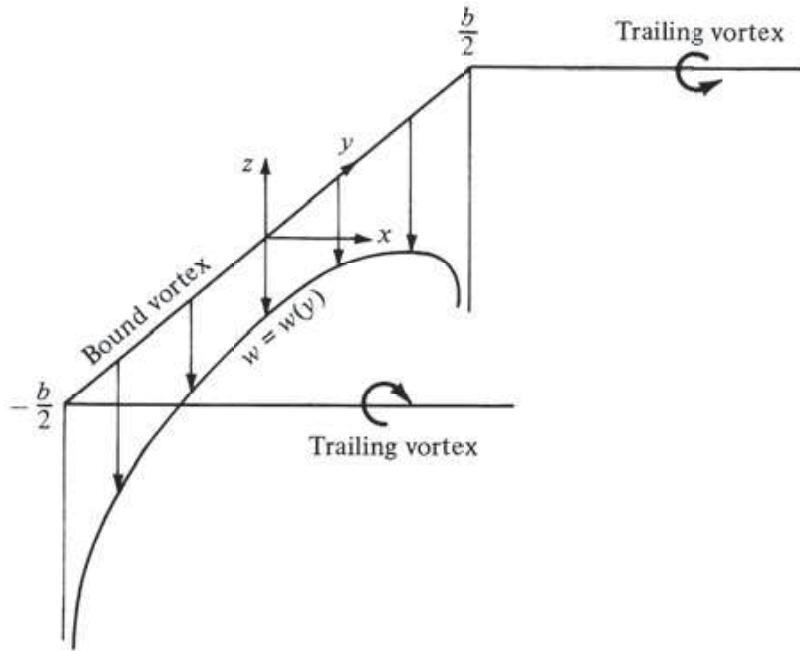


Figura 4 – Velocidade induzida infinita para o caso de vórtice único

Fonte: Anderson (2016)

Extrapolando essa quantidade para infinitos vórtices ferradura, a parcela  $dw$  da velocidade induzida em uma localização arbitrária  $y_0$  pode ser expressa como:

$$dw = -\frac{(d\Gamma/dy)}{4\pi(y_0 - y)} dy \quad (2.3)$$

onde  $dy$  é uma parcela infinitesimal da linha de sustentação e a mudança de circulação ao longo de  $y$  vale  $d\Gamma = (d\Gamma/dy)dy$ . Dessa forma, a intensidade da circulação do vórtice de esteira deve ser igual à mudança da circulação ao longo da linha sustentadora. Tal situação está demonstrada na Figura 5.

Logo, integrando a parcela infinitesimal  $dw$  ao longo de toda a envergadura  $y = [-b/2, b/2]$  encontra-se o *downwash* em um determinado ponto  $y_0$  da envergadura, representado pela equação dada por:

$$w(y_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma/dy}{y_0 - y} dy \quad (2.4)$$

Em posse da informação da velocidade induzida de *downwash* é possível ampliar a análise, calculando-se o ângulo de ataque induzido  $\alpha_i$ . Sabe-se que:

$$\alpha_i = \tan^{-1} \left( \frac{-w(y_0)}{V_\infty} \right) \quad (2.5)$$

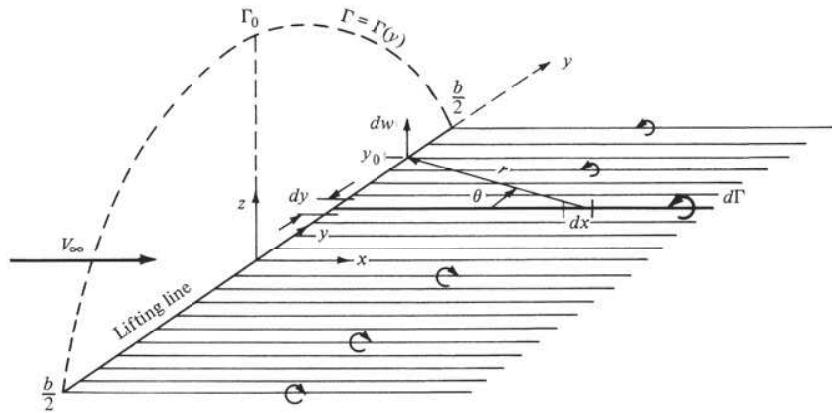


Figura 5 – Representação dos infinitos vórtices

Fonte: Anderson (2016)

Considerando que  $w(y_0)$  é muito menor que  $V_\infty$ , o ângulo e seu valor de tangente podem ser considerados iguais, logo:

$$\alpha_i = \frac{-w(y_0)}{V_\infty} \quad (2.6)$$

Substituindo pelo valor encontrado de  $w(y_0)$ , obtém-se a equação que representa o valor do ângulo de ataque induzido pelo *downwash*, dada por:

$$\alpha_i(y_0) = -\frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma/dy}{y_0 - y} dy \quad (2.7)$$

Sabendo que o ângulo de ataque efetivo  $\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i$ , o coeficiente de sustentação  $C_\ell$  pode ser descrito como na equação a seguir:

$$C_\ell(y_0) = a_0[\alpha_{eff}(y_0) - \alpha_{\ell=0}(y_0)] \quad (2.8)$$

sendo que  $a_0$  equivale a inclinação da curva  $C_\ell \times \alpha$  e  $\alpha_{\ell=0}$  ao ângulo de ataque de sustentação nula ao longo da envergadura - abrindo possibilidade para torção geométrica.

Um conceito que precisa ser adicionado se trata do Teorema de Kutta–Zhukovsky, que cria a relação entre a sustentação por unidade de envergadura  $\ell$  e a circulação  $\Gamma$  apresentada pela equação a seguir (HOUGHTON; CARPENTER, 2016):

$$\ell(y_0) = \rho V_\infty \Gamma(y_0) = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c(y_0) c_l(y_0) \quad (2.9)$$

Pode-se definir a partir da Equação 2.9 a relação a seguir

$$C_\ell(y_0) = \frac{2\Gamma(y_0)}{V_\infty c(y_0)} \quad (2.10)$$

Substituindo a Equação 2.10 na Equação 2.8, tem-se:

$$\alpha_{eff}(y_0) = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \alpha_{\ell=0}(y_0) \quad (2.11)$$

Substituindo as Equações 2.7 e 2.11 em  $\alpha_{eff} - \alpha - \alpha_i$ , define-se a Equação Fundamental da Teoria da Linha de Sustentação de Prandtl da seguinte forma (ANDERSON, 2016):

$$\alpha(y_0) = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \alpha_{\ell=0}(y_0) + \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma/dy}{y_0 - y} dy \quad (2.12)$$

A Equação 2.12 tem apenas como incógnita a distribuição da circulação  $\Gamma(y_0)$ , já que os outros termos são dependentes de características geométricas e aerodinâmicas do aerofólio implementado na asa. Dessa forma, com a determinação da circulação, os coeficientes aerodinâmicos da asa podem ser calculados, tornando a Teoria da Linha Sustentadora um problema que consiste na determinação daquela.

#### 2.1.4 Coeficientes aerodinâmicos de uma asa finita

Agora é possível determinar também os coeficientes aerodinâmicos tridimensionais da asa. Primeiramente, pode-se integrar a sustentação por unidade de envergadura pelo seu comprimento completo, obtendo-se o valor da sustentação proporcionada pela asa:

$$L = \rho V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy \quad (2.13)$$

que adimensionalizado gera o coeficiente de sustentação:

$$C_L = \frac{L}{\rho V_\infty^2 S} = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy \quad (2.14)$$

Substituindo a Equação 2.9 na relação  $d_i \approx l\alpha_i$  e integrando ao longo da envergadura, obtemos o arrasto induzido da asa:

$$D_i = \rho V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy \quad (2.15)$$

que adimensionalizado gera o o coeficiente de arrasto induzido:

$$C_{D,i} = \frac{D_i}{\rho V_\infty^2 S} = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy \quad (2.16)$$

## 2.2 Solução numérica da linha sustentadora

Existem algumas possibilidades de solução para as equações acima descritas, considerando que a solução vem com a determinação da distribuição da circulação. Uma das

técnicas mais utilizadas, por exemplo, é a solução via séries de Fourier. Neste caso, a circulação  $\Gamma$  é dada por:

$$\Gamma(\theta) = 2bV_\infty \sum_{i=1}^N A_i \sin i\theta \quad (2.17)$$

onde  $\theta$  varia de 0 a  $\pi$ . A precisão dos resultados se dá pelo valor de  $N$ .

Abordagens recentes desenvolvidas no Departamento de Engenharia Aeronáutica da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo propõem o uso do Método dos Elementos Finitos para determinação de uma solução aproximada a partir do método de Galerkin. Utilizando-se o MEF, a construção da aproximação do campo é obtida pela contribuição dos subdomínios. Ainda, nesse contexto, a aproximação da circulação nos subdomínios (elementos) é realizada a partir da sobreposição de funções polinomiais (LIORBANO, 2019).

Essas funções são combinações lineares de funções que são linearmente independentes. O resultado para cada discretização é exatamente uma combinação linear dessas funções independentes. A precisão está diretamente ligada a duas variáveis: o número de funções independentes utilizadas para montar as soluções discretizadas e o próprio número de discretizações. Uma boa acuracidade com baixo custo computacional é vista com uma escolha acertada das funções para o problema (DUNCAN, 1937).

Foge do escopo deste trabalho a criação do equacionamento para solução do problema pelo método acima descrito. Como base, tomou-se a implementação já feita por Liorbano (2019).

A proposta de Liorbano (2019) para a solução numérica da equação da linha sustentadora é a aplicação do Método dos Elementos Finitos. Dessa forma, o campo de circulações ao longo da envergadura resulta das contribuições de cada elemento de circulação distribuído ao longo desta. Nesse sentido, diferentemente da solução clássica via séries de Fourier, vê-se uma aproximação local no âmbito do elemento finito de circulação. A distribuição de circulação global da asa é aproximada por:

$$\Gamma(y) = \sum_{e=1}^N \mathbf{N}^e(y) \mathbf{\Gamma}^e \quad (2.18)$$

onde  $N$  refere-se ao número de elementos utilizados na discretização,  $\mathbf{N}^e$  é a matriz com as funções de forma utilizadas para aproximação no contexto do elemento, e  $\mathbf{\Gamma}^e$  são os valores nodais de circulação do elemento. As funções de forma utilizadas são polinomiais e construídas utilizando a técnica dos elementos finitos. Nos desenvolvimentos que seguem, serão utilizadas aproximações lineares do campo de circulação no elemento finito (Figura 6).

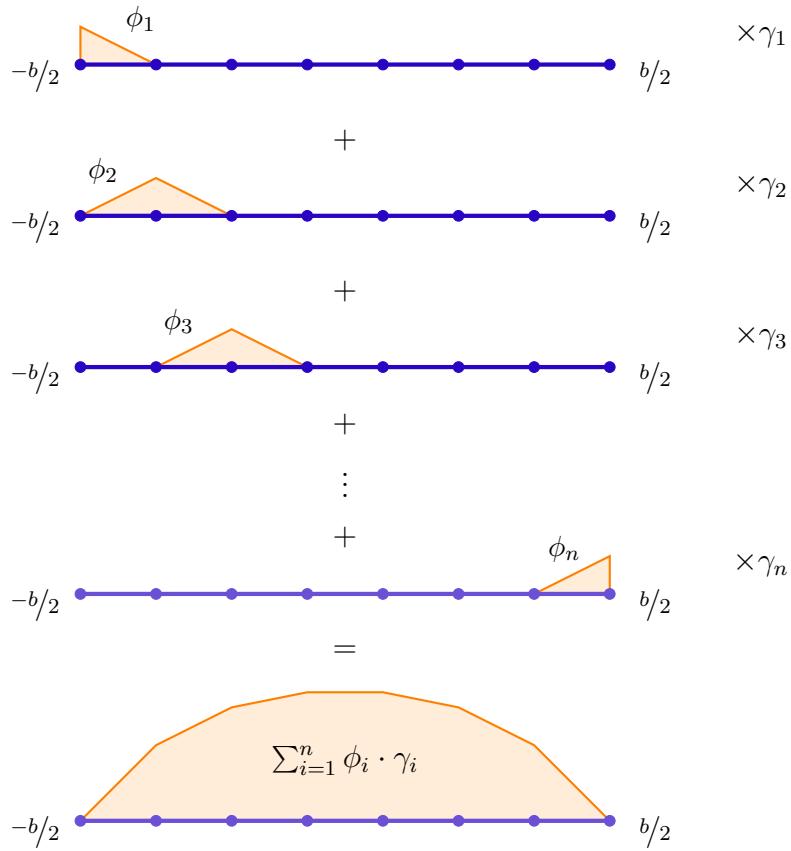


Figura 6 – Exemplo para a aproximação da circulação por Galerkin com funções lineares com 7 estações

### 2.3 Decomposição em valores singulares

A decomposição em valores singulares (SVD) se trata de um dos mais importantes métodos de fatoração de matrizes, já que proporciona garantidamente uma decomposição de matriz estável e que pode ser usada para os mais diversos propósitos. Ele é capaz de determinar de forma sistemática uma aproximação em pequenas dimensões para um entrada de dados de grande dimensão, como os que serão utilizados neste trabalho. Tal capacidade é extremamente voltada a dados pois não necessita de um vasto conhecimento ou de intuição, já que os padrões são descobertos através dos próprios dados. Além disso, o SVD também proporciona uma representação hierárquica dos dados em função de um sistema de coordenadas definido pelas relações mais dominantes, ou seja, através de uma base de vetores singulares dos mais aos menos dominantes, de forma que um de seus principais usos é a redução de dimensão, utilizando somente os vetores mais relevantes (BRUNTON; KUTZ, 2019).

#### 2.3.1 Definição de SVD

Considere um grande conjunto de dados  $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

onde  $x_k \in \mathbb{C}^n$  são colunas com as medidas de simulações, experimentos ou até o estado físico de um sistema em determinado momento, que evolui no tempo. O índice  $k$  indica de qual simulação, medida ou momento do tempo aquela medida faz referência.

O SVD é uma decomposição de matriz única da seguinte forma:

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^* \quad (2.20)$$

onde  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e  $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{m \times m}$  são matrizes unitárias<sup>1</sup> com colunas ortonormais e  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é uma matriz com números reais não negativos e decrescentes na diagonal e zeros fora dela. O símbolo  $*$  representa uma transposição da matriz complexa conjugada (BRUNTON; KUTZ, 2019).

As colunas da matriz  $\mathbf{U}$  são chamadas de vetores singulares esquerdos e abrangem o espaço dos perfis de expressão das respostas. As linhas da matriz  $\mathbf{V}^*$  são os vetores singulares direitos e abrangem um espaço de respostas em ordem da mais até a menos significante (as primeiras linhas tem maior presença nas respostas). Já os elementos diagonais de  $\Sigma$  são os valores singulares e remetem à significância (os primeiros elementos, maiores, multiplicam as primeiras linhas dos vetores singulares direitos) (WALL; RECHTSTEINER; ROCHA, 2003).

Quando  $n \geq m$ , a matriz  $\Sigma$  apresenta no máximo  $m$  elementos diferentes de zero na diagonal. Dessa forma, podemos definir a forma econômica do SVD como sendo:

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^* = [\hat{\mathbf{U}} \ \hat{\mathbf{U}}^\perp] \begin{bmatrix} \hat{\Sigma} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{V}^* = \hat{\mathbf{U}}\hat{\Sigma}\mathbf{V}^* \quad (2.21)$$

onde  $\hat{\mathbf{U}} \in \mathbb{C}^{n \times m}$  é a matriz  $\mathbf{U}$  econômica,  $\hat{\mathbf{U}}^\perp \in \mathbb{C}^{n \times n-m}$  é uma matriz complementar e ortogonal a  $\hat{\mathbf{U}}$ ,  $\hat{\Sigma} \in \mathbb{C}^{m \times m}$  é uma matriz diagonal com os valores singulares e  $\mathbf{V}^* \in \mathbb{C}^{m \times m}$ . A Figura 7 ilustra graficamente essas matrizes.

### 2.3.2 Aproximação de uma matriz

Neste momento, passa-se a analisar uma das características mais importantes do SVD: a hierarquia de representatividade das linhas de  $\mathbf{V}^*$ . Aproximações de baixo posto podem ser facilmente criadas quando selecionam-se os primeiros  $r$  valores e vetores direitos singulares, com descarte do termos restantes. Uma forma generalizada dessa aproximação

<sup>1</sup> uma matriz quadrada unitária, quando multiplicada por sua transposta, resulta na matriz identidade (HORN; JOHNSON, 2012)

Full SVD

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}^\perp \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\Sigma} & \\ & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\hat{\Sigma}} \begin{bmatrix} \mathbf{V}^* \end{bmatrix}$$

Economy SVD

$$= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\Sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}^* \end{bmatrix}$$

Figura 7 – Representação das matrizes completa e econômica do SVD

Fonte: Brunton e Kutz (2019)

determinou o chamado SVD Truncado como a aproximação ótima de baixo posto para a matriz  $\mathbf{X}$  e é comumente referido como o Teorema de Eckart-Young [2.3.1] (ECKART; YOUNG, 1936).

**Teorema 2.3.1 (Teorema de Eckart-Young)** *A aproximação de posto  $r$  ótima para  $X$ , no sentido de mínimos quadrados, é dada pelo truncamento SVD de posto  $r$  de  $\tilde{X}$  de forma que:*

$$\|X - B\|_F \geq \|X - \tilde{X}\|_F \quad (2.22)$$

onde  $B$  é qualquer matriz de posto  $r$  e  $\|\cdot\|_F$  é a norma de Frobenius<sup>2</sup>.

Logo, segundo o teorema, sabe-se que a matriz  $\tilde{\mathbf{X}}$  dada pelo truncamento das matrizes do SVD é a matriz de posto  $r$  que melhor se aproxima da matriz  $\mathbf{X}$ . Caso escolhemos um valor de  $r$  menor do que o número de valores singulares de  $\mathbf{X}$ , teremos uma aproximação, ou seja:  $\mathbf{X} \approx \tilde{\mathbf{U}}\tilde{\Sigma}\tilde{\mathbf{V}}^*$ . Mas se escolhermos um truncamento em que todos os valores singulares não nulos apareçam (levando em conta de que a decomposição SVD pode trazer valores singulares iguais a zero) teremos um resultado exato. Uma representação gráfica das matrizes truncadas pode ser vista na Figura 8.

<sup>2</sup> A norma de Frobenius é definida como  $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$  onde  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  (STRANG,

Full SVD

$$\mathbf{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}} & \hat{\mathbf{U}}_{\text{rem}} & \hat{\mathbf{U}}^{\perp} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{U}}} \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma} & & \\ & \hat{\Sigma}_{\text{rem}} & \\ & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{V}}^* & \mathbf{V}_{\text{rem}} \end{bmatrix}$$

Truncated SVD

$$\approx \tilde{\mathbf{U}} \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{V}}^*$$

Figura 8 – Representação das matrizes truncadas

Fonte: Brunton e Kutz (2019)

Dois gráficos que ajudam a entender a capacidade de simplificação de uma matriz pelo SVD podem ser vistos na Figura 9. Nesse caso arbitrário, é possível identificar na Figura 9a que os primeiros valores singulares são muito mais expressivos do que os outros, principalmente por se tratar de um gráfico logarítmico. Mais interessante é o representado na Figura 9b, onde temos a razão entre a soma acumulada até determinado valor singular e a soma total destes. Num universo de 1500 valores singulares, os 100 primeiros deles - ou pouco menos de 7% - trazem praticamente 80% das características da matriz inicial. Reduziu-se drasticamente as matrizes  $\mathbf{U}$ ,  $\Sigma$  e  $\mathbf{V}$  em  $\tilde{\mathbf{U}}$ ,  $\tilde{\Sigma}$  e  $\tilde{\mathbf{V}}$  sem perdas equivalentes na matriz gerada pelas simplificações.

### 2.3.3 Solução aproximada de um sistema linear qualquer

Muitos dos problemas físicos existentes podem ser representados como:

$$Ax = b \tag{2.23}$$

onde a matriz  $A$  e o vetor  $b$  são conhecidos e o vetor  $x$  não, sendo a resposta do sistema. Quando  $A$  é uma matriz quadrada e inversível, o problema é facilmente resolvido. No entanto, quando  $A$  é uma matriz singular ou retangular, vários possíveis casos aparecem, onde pode-se ter nenhuma, uma ou infinitas soluções.

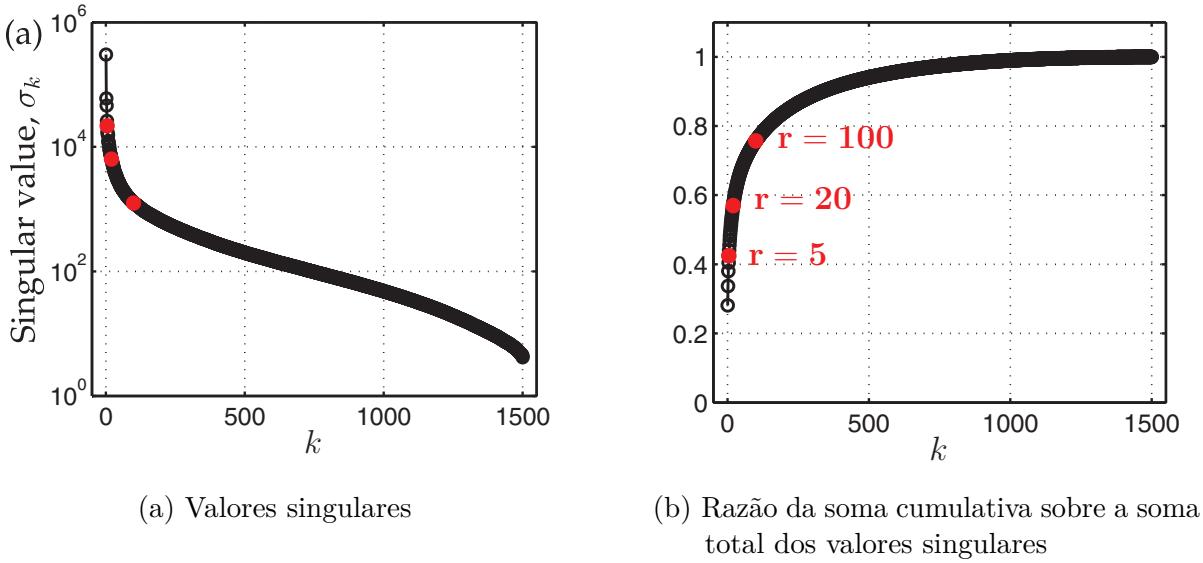


Figura 9 – Análise gráfica dos valores singulares

Fonte: Brunton e Kutz (2019)

Um sistema indeterminado onde  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  e  $n \gg m$ , ou seja, a matriz é mais larga do que alta, têm-se menos equações do que incógnitas. Geralmente tais sistemas apresentam posto completo de coluna por terem mais destas do que o necessário. Por isso se trata de um sistema indeterminado, já que não existem valores em  $b$  suficientes para determinar uma única solução de  $x$ .

Por outro lado, sistema sobredeterminado onde  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  e  $n \ll m$ , ou seja, a matriz é mais alta do que larga, têm-se menos equações do que incógnitas. Logo tais sistemas não podem apresentar posto completo de coluna por terem menos destas do que o necessário. Por isso se trata de um sistema sobredeterminado, garantindo-se que existem valores em  $b$  que não tem solução em  $x$ . A única forma, no caso, de existir solução é se  $b$  está no espaço de colunas de  $A$  (BRUNTON; KUTZ, 2019).

Para ambos os casos, existem resultados aproximados considerados ideais. Para os sistemas indeterminados onde existem infinitas soluções, espera-se encontrar a matriz  $x$  onde sua norma de Frobenius  $\|x\|_F$  é mínima. Já no caso sobredeterminado, com nenhuma solução exata, temos que  $\|Ax - b\|_F$  deve ser mínima. Solucionando as aproximações acima por SVD, deve-se tomar a matriz truncada equivalente  $A = \tilde{\mathbf{U}}\tilde{\Sigma}\tilde{\mathbf{V}}^*$ , de forma que é possível invertê-la e obter a pseudo-inversa de Moore-Penrose<sup>3</sup>:

$$A^\dagger = \tilde{\mathbf{V}}\tilde{\Sigma}^{-1}\tilde{\mathbf{U}}^* \implies A^\dagger A = I_{m \times m} \quad (2.24)$$

<sup>3</sup> A matriz pseudo-inversa de Moore-Penrose, descrita pela primeira vez por Moore (1920) é a mais conhecida generalização da inversão de uma matriz e muito utilizada para retratar a melhor solução para sistemas lineares sem solução exata (BEN-ISRAEL; GREVILLE, 2003)

Substituindo na Equação 2.23, a solução  $x$  nos termos acima indicados vale:

$$A^\dagger A x = A^\dagger b \implies \tilde{x} = \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{\mathbf{U}}^* \mathbf{b} \quad (2.25)$$

Substituindo de volta a solução encontrada na Equação 2.25 na Equação 2.23, tem-se:

$$A \tilde{x} = \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\Sigma} \tilde{\mathbf{V}}^* \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{\mathbf{U}}^* b \implies A \tilde{x} = \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{U}}^* b \quad (2.26)$$

Como  $\tilde{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{U}}^*$  não é necessariamente a matriz identidade,  $\tilde{x}$  será a solução exata quando  $b$  está dentro do espaço de colunas de  $\tilde{\mathbf{U}}$  e portanto no espaço de colunas de  $A$  (BRUNTON; KUTZ, 2019).



### 3 METODOLOGIA

Neste capítulo, serão apresentadas as duas etapas principais deste trabalho: a criação e a execução da ferramenta ligada ao cálculo da linha sustentadora e dos coeficientes aerodinâmicos tridimensionais e os mesmos passos para a ferramenta relacionada ao modelo de baixo custo e decomposição em valores singulares. Na Figura 10 é possível ver com mais detalhes essas etapas e suas interações.

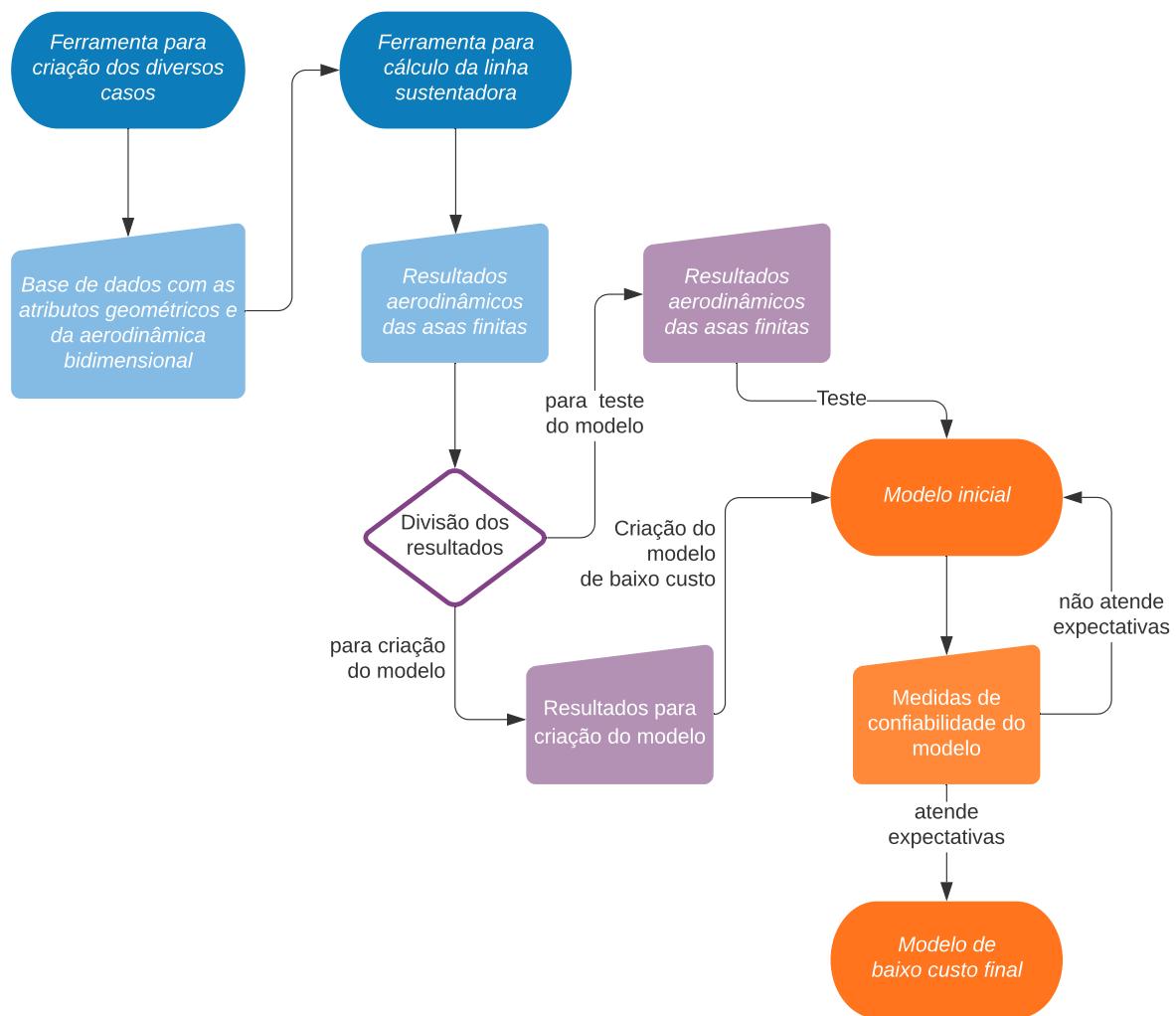


Figura 10 – Fluxograma da metodologia

#### 3.1 Ferramenta para cálculo da Linha Sustentadora

##### 3.1.1 Ferramenta inicial e modificações

Uma análise dos coeficientes aerodinâmicos de inúmeras configurações de asas trapezoidais será feita, utilizando-se a Teoria da Linha de Sustentação. Tal escolha se deve ao modesto poder computacional de máquinas domésticas para lidar com métodos

Tabela 1 – Valores das entradas fixas

Atributo	Detalhe	Valor
$U$	velocidade do escoamento	1
$c_r$	tamanho da corda na raiz da asa	1
$N_{elem}$	número de divisões para discretização da asa	50

Tabela 2 – Variação das características geométricas e aerodinâmicas dos casos avaliados

Atributo	Detalhe	Mínimo	Máximo	Casos
AR	alongamento da asa	6	14	21
$\lambda$	afilamento da asa	0.1	1	19
$\alpha$	ângulo de ataque da asa no escoamento	$-15^\circ$	$15^\circ$	16
$a_0$	inclinação da curva $C_\ell \times \alpha$	$1.8\pi$	$2.2\pi$	5
$\alpha_{\ell_0}$	ângulo de ataque para sustentação nula	$-5^\circ$	$0^\circ$	6
$\theta$	torção geométrica na ponta da asa	$-3^\circ$	$3^\circ$	7
Total				1340640

mais complexos, como por exemplo, a dinâmica dos fluídos computacional (CFD), que apresentaria resultados muito mais precisos, mas a um custo alto.

Para tanto, uma ferramenta computacional já disponível para o cálculo dos coeficientes aerodinâmicos pelo método escolhido foi utilizada. Essa ferramenta implementada em Python apresenta sua solução através do método numérico descrito na Seção 2.2. Uma explicação metodológica desta implementação não foi abordada por não estar ligado diretamente ao objetivo do trabalho, mas pode ser encontrada em Liorbano (2019).

Esta ferramenta computacional se mostrava útil para cálculos de uma única configuração e sem as características de entrada optadas para as análises. Para tanto, uma modificação no código foi feita, de forma a adequá-lo a necessidade, sem, no entanto, alterar a essência de cálculo deste.

### 3.1.2 Entradas

Podemos separar as entradas em fixas e variáveis. As entradas fixas se tratam das características que não se alteram entre os diversos casos analisados. Elas estão listadas na Tabela 1.

Já as entradas variáveis são as características geométricas ou aerodinâmicas bidimensionais que vão variar para cada caso. Decidiu-se por seis desses atributos, de forma a possibilitar uma análise ampla de asas trapezoidais. Para cada uma dessas variáveis, um valor mínimo, um máximo e o número de casos foi definido. Essas informações estão listadas na Tabela 2.

Para a criação da base de dados de entradas, com suas 1.3 milhão de asas trapezoidais, seis laços, um inserido dentro do outro, foram programados, variando dentro das características mínimas e máximas.

Em meio aos testes iniciais, uma preocupação surgiu acerca do tempo necessário para execução. Mesmo havendo uma máquina que poderia ficar totalmente alocada a esse processo, a probabilidade de perda de dados no caminho aumentava, devido a possíveis variações na rede elétrica, por exemplo. Para tanto, tendo em mente que o Python por padrão só se utiliza do poder computacional de um *thread* da máquina, buscou-se utilizar em totalidade o computador, acelerando o processo.

Hodiernamente, mesmo que as máquinas domésticas não cheguem perto de máquinas específicas e clusters, é inegável que elas possuem capacidades muito maiores do que há alguns anos. Dessa forma uma paralelização do código através do recurso *joblib* foi implementada, sendo possível utilizar por completo a máquina em questão.

### 3.1.3 Saídas

Os três resultados obtidos pela ferramenta computacional são o coeficiente de sustentação tridimensional da asa, o coeficiente de arrasto induzido e a distribuição da circulação ao longo da envergadura. Para cada caso executado, o código, como forma de minimizar a possibilidade de perda de dados adicionava a um arquivo não só os resultados, mas também as entradas que levaram a eles. Com a paralelização, não necessariamente os casos eram salvos na ordem em que foram criados, então escolheu-se agregá-los no mesmo arquivo.

## 3.2 Ferramenta para análise preliminar dos resultados

Inicialmente, após os dados serem gerados, foi necessário uma análise preliminar deles, tanto com relação à linha sustentadora e os coeficientes aerodinâmicos encontrados quanto em relação a matriz SVD que pode ser gerada.

### 3.2.1 Análise dos coeficientes aerodinâmicos

Como informado na Seção 3.1.3, as saídas da ferramenta computacional são o coeficiente de sustentação tridimensional da asa, o coeficiente de arrasto induzido e a distribuição da circulação ao longo da envergadura. Nesta etapa, faz-se uma análise dos dois primeiros.

De forma a reduzir a quantidade de gráficos encontrados, uma simplificação inicial dos dados foi feita. Levando em conta que o valor de  $C_L$  está diretamente ligado aos valores do ângulo de ataque e do ângulo de ataque para sustentação nula, criou-se um valor único que englobasse todos essas variáveis, a inclinação da curva do coeficiente de sustentação da asa pelo ângulo de ataque efetivo, como explicitado:

$$C_{L\alpha} = \frac{C_L}{\alpha - \alpha_{\ell=0}} \quad (3.1)$$

Com isso, valores de  $C_{L\alpha}$  em função das outras variáveis da Tabela 2 podem ser descritos como:

$$C_{L\alpha} := f(AR, \lambda, a_0, \theta) \quad (3.2)$$

Gráficos de  $C_{L\alpha}$  em função de pares de variáveis entre as acima, com os outros valores fixos foram criados. Quando o  $\theta$  aparece entre essas variáveis, é necessário fixar também o valor de  $\alpha$  e  $\alpha_{\ell=0}$  pois são valores acoplados e não é possível obter um único valor de  $C_{L\alpha}$  quando fixamos  $\theta$ , mas variamos  $\alpha$  ou  $\alpha_{\ell=0}$ .

### 3.2.2 Análise da matriz SVD gerada

Como forma de analisar a eficiência de representação dos resultados de forma simplificada pelo SVD, algumas operações foram feitas. Uma das formas mais simples de identificar se a matriz de resultados é de baixo posto é plotar os valores singulares e a razão da soma acumulada pela soma total destes. Com isso, é possível identificar a significância que é obtida com certo número pequeno de valores.

Além disso, outra forma utilizada seria calcular o erro  $e$  entre a matriz de dados iniciais  $X$  e o dados criados pela multiplicação das matrizes truncadas  $\tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^*$ , pela norma de Frobenius entre a subtração de ambas a matrizes, abrindo-se a possibilidade de se plotar os valores de  $e$  para cada incremento de valor singular, calculados pela seguinte equação:

$$e = \|X - \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^*\|_F \quad (3.3)$$

## 3.3 Ferramenta para criação dos modelos reduzidos

O objetivo final deste trabalho se encaminha para a criação de um modelo reduzido para os coeficientes aerodinâmicos da asa tridimensional que considere todas as variáveis avaliadas. Esse processo foi iniciado com um entendimento básico acerca das respostas, como visto nas seções anteriores.

Um ponto importante e de interesse é especificar uma base de dados para criação do modelo, quanto uma para verificação posterior. Dessa forma uma aferição livre de uma possível tendência é possível. Para isso, criou-se um arquivo com 30% das linhas dos resultados para criação do modelo e os outros 70% para verificação utilizando uma ferramente de escolha randômica disponível no pacote *numpy* do *Python*. Posteriormente cada uma dessas bases foi utilizada de acordo com seu objetivo inicial.

### 3.3.1 Coeficiente de sustentação

A criação dos modelos foi iniciada pelo modelo do coeficiente de sustentação. Para isso, teve-se como ponto de partida um modelo já estabelecido na literatura. O modelo

escolhido foi o presente em Anderson (2016) e será nomeado assim:

$$C_{L_{Anderson}} = \frac{a_0}{1 - \frac{a_0}{\pi AR}} (\alpha - \alpha_{\ell=0}) \quad (3.4)$$

A partir dele, idealizou-se a inserção de uma série de novos termos que introduzissem mais variáveis, de forma a obter resultados mais precisos. Uma atenção foi dada a relevância física para acréscimo dos termos, como o fato de se obter coeficientes nulos quando o ângulo de ataque efetivo e o  $\theta$  forem nulos. A ferramenta foi implementada buscando a seguinte formulação:

$$C_{L_{modelo}} = \frac{a_0}{1 - \frac{a_0}{\pi AR}} [(\alpha - \alpha_{\ell=0}) \cdot p_1 + v_2 \cdot p_2 + \dots + v_n \cdot p_n] \quad (3.5)$$

onde os valores  $p_k$  são os coeficientes e  $v_k$  o cálculo das variáveis da parcela, que podem ser um conjunto delas acopladas. Vários modelos e testes foram criados e feitos ao longo do trabalho.

### 3.3.2 Coeficiente de arrasto induzido

De forma análoga ao proposto acima, um modelo já amplamente aceito, que chamaremos de Anderson, foi escolhido:

$$C_{Di_{Anderson}} = \frac{C_L^2}{\pi AR} \quad (3.6)$$

e o modelo intencionado também se trata do acréscimo de novos termos com as variáveis não atendidas acima. Da mesma forma atentou-se à relevância física desses termos, de forma a não termos resquícios de valor quando o coeficiente de arrasto induzido deve ser nulo. A seguinte formulação será utilizada:

$$C_{Di_{modelo}} = \frac{C_L^2}{\pi AR} \cdot [p_1 + p_2 \cdot v_2 + \dots + p_n \cdot v_n] \quad (3.7)$$

onde os valores  $p_k$  são os coeficientes e  $v_k$  o cálculo das variáveis da parcela, como já descrito.

### 3.3.3 Distribuição da circulação

Tentou-se seguir o mesmo método, de forma que ele se torne um padrão a ser seguido para o estabelecimento de modelos reduzidos. No caso da circulação, pequena adequações são necessárias, já que para os coeficientes um único valor era buscado e agora espera-se obter uma distribuição. Além disso, não há na literatura modelo semelhante aos utilizados acima. Dessa forma, os parâmetros serão multiplicados por distribuições de circulação relevantes para os dados encontrados, retiradas da análise da decomposição em

valores singulares das simulações, como representado no modelo a seguir:

$$\begin{aligned} \Gamma = U_\infty c & \left[ \Gamma_1(p_{11}v_{11} + p_{12}v_{12} + \dots + p_{1n}v_{1n}) + \right. \\ & + \Gamma_2(p_{21}v_{21} + p_{22}v_{22} + \dots + p_{2n}v_{2n}) + \dots \\ & \left. \dots + \Gamma_m(p_{m1}v_{m1} + p_{m2}v_{m2} + \dots + p_{mn}v_{mn}) \right] \quad (3.8) \end{aligned}$$

onde  $\Gamma_m$  são as distribuições de circulação relevantes,  $v_{mn}$  as parcelas calculadas a partir dos parâmetros da asa e  $p_{mn}$  os coeficientes relacionados às parcelas. Os valores de  $U_\infty$ , que representa a velocidade do escoamento e de  $c$ , a corda, foram adicionados de forma a estabelecer um multiplicativo para a circulação encontrada, pois os valores de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  foram calculados tendo por base esses parâmetros unitários, como mostrado na Tabela 1.

### 3.3.4 Solução dos coeficientes

A solução dos coeficientes foi baseada na fundamentação apresentada na Seção 2.3.3. Com as parcelas de variáveis a serem utilizadas calculadas de acordo com cada caso e o resultado esperado para os coeficientes aerodinâmicos, pode-se solucionar um sistema de equações e encontrar os coeficientes. Os coeficientes podem ser calculados como:

$$Ax = b \implies \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & \dots & v_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

onde  $m$  indica o caso a ser avaliado e  $n$  a parcela da equação, de forma que  $v$  se trata do cálculo da variáveis atrelados às parcelas e  $p$  aos coeficientes. O termo  $S_n$  faz alusão ao valor encontrado pelas simulações. A ferramenta computacional busca encontrar os melhores valores dos coeficientes para a redução do erro em geral.

No caso da circulação, como não existe apenas um valor de resultado para a simulação, mas uma distribuição a abordagem foi levemente diferente, de forma que  $v_{mn}$  e  $S_n$  não contém mais somente um número, mas uma coluna de números relativos a cada ponto da distribuição ao longo da envergadura. De forma a facilitar os cálculos, somente a circulação de meia envergadura foi selecionada, devido ao caráter simétrico existente.

## 3.4 Análise do modelo

Como forma de constatar a eficiência do modelo criado, análises acerca dos erros quando comparamos os resultados pela Teoria da Linha de Sustentação com os modelos, tanto o de Anderson quanto o criado foram feitas.

O primeiro método de análise se deu utilizando a equação a seguir:

$$erro = \frac{\|M - S\|_F}{\|S\|_F} \quad (3.10)$$

---

onde  $M$  se trata da matriz de resultados encontrada pelo modelo para os parâmetros analisados e  $S$  a matriz de resultados da simulação para os mesmos parâmetros. Atentou-se à utilização da norma de Frobenius. Isso traz uma visão eficiente do erro proporcional atrelado aos modelos.

O segundo método se deu com a criação de gráficos com pontos espalhados. Nas abscissas têm-se o valor do coeficiente de sustentação das simulações e nas ordenadas o valor  $y = M - S$ . Desse modo, é possível visualizar o quanto de erro existe para cada amplitude de  $S$ . Esse método traz visões interessantes acerca da distribuição dos erros encontrados pelo modelo, principalmente quando plotados em conjunto com o modelo de Anderson.

Um aprofundamento também foi feito a fim de entender a distribuição desses erros quando os relacionamos aos parâmetros das asas. Para isso, calculou-se a norma de Frobenius como na Equação 3.10, mas somente para um parâmetro específico. Por exemplo, para  $\alpha = 10^\circ$ , tomou-se somente os resultados com essa característica para o cálculo do erro. Com isso foi possível entender como o modelo reage a cada parâmetro.

Além disso, uma análise estatística também foi implementada. Nesse caso, calculou-se o desvio padrão dos erros atrelados aos coeficientes como na Equação 3.4. Dessa forma, foi possível adicionar aos modelos valores aos quais somados ao resultado indicarão os limites relacionados à incerteza do modelo.



## 4 RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados tanto os resultados relativos à linha de sustentação e os coeficientes aerodinâmicos tridimensionais e suas relações com as entradas quanto as observações acerca do SVD e o percurso para o modelo reduzido encontrado.

### 4.1 Influência dos parâmetros no coeficiente $C_{L\alpha}$

Como apresentado na Seção 3.2, gráficos acerca dos resultados do coeficiente de sustentação foram criados a fim de identificar a dependência dos parâmetros utilizados para a construção do modelo. É possível observar estes resultados na Figura 11 e as principais observações são apresentadas abaixo.

- $AR \times \lambda$  (Figura 11a): gráfico com ordenadas relacionando o alongamento e as abcissas o afilamento, com  $\theta = 0^\circ$  e  $a_0 = 2\pi$ . É perceptível que o  $C_{L\alpha}$  cresce com o aumento do alongamento e quando  $\lambda \approx 0.3$ . Tal fato condiz com o fato de que asas elipsoides e com grande alongamento são mais eficientes (ANDERSON, 2016).
- $AR \times a_0$  (Figura 11b): com  $\lambda = 0.5$ , e  $\theta = 0^\circ$  percebe-se aumento do  $C_{L\alpha}$  tanto com o aumento do alongamento, pela melhora da eficiência quanto com o aumento de  $a_0$  - inclinação da curva de  $C_\ell \times \alpha$  para o aerofólio
- $AR \times \theta$  (Figura 11c): com  $\lambda = 0.5$ ,  $a_0 = 2\pi$  e  $\alpha_{\ell=0} = 0^\circ$  nota-se aumento do  $C_{L\alpha}$  com o aumento do alongamento, e aumento de  $\theta$
- $\lambda \times a_0$  (Figura 11d): com  $AR = 10$  e  $\theta = 0^\circ$  nota-se aumento do  $C_{L\alpha}$  com o aumento de  $a_0$  e máxima eficiência com afilamentos próximos de 0.3
- $\lambda \times \theta$  (Figura 11e): com  $AR = 10$ ,  $a_0 = 2\pi$  e  $\alpha_{\ell=0} = 0^\circ$  nota-se aumento do  $C_{L\alpha}$  com o aumento de  $\theta$  e máxima eficiência com afilamentos próximos de 0.3
- $a_0 \times \theta$  (Figura 11f): com  $AR = 10$ ,  $\lambda = 0.5$  e  $\alpha_{\ell=0} = 0^\circ$  nota-se aumento do  $C_{L\alpha}$  com o aumento de  $\theta$  e de  $a_0$

### 4.2 Criação dos modelos reduzidos

#### 4.2.1 Coeficiente de sustentação

Iniciou-se o processo conferindo se um simples multiplicador no modelo de Anderson, obtendo-se um primeiro modelo no formato explicitado na Seção 3.3.1:

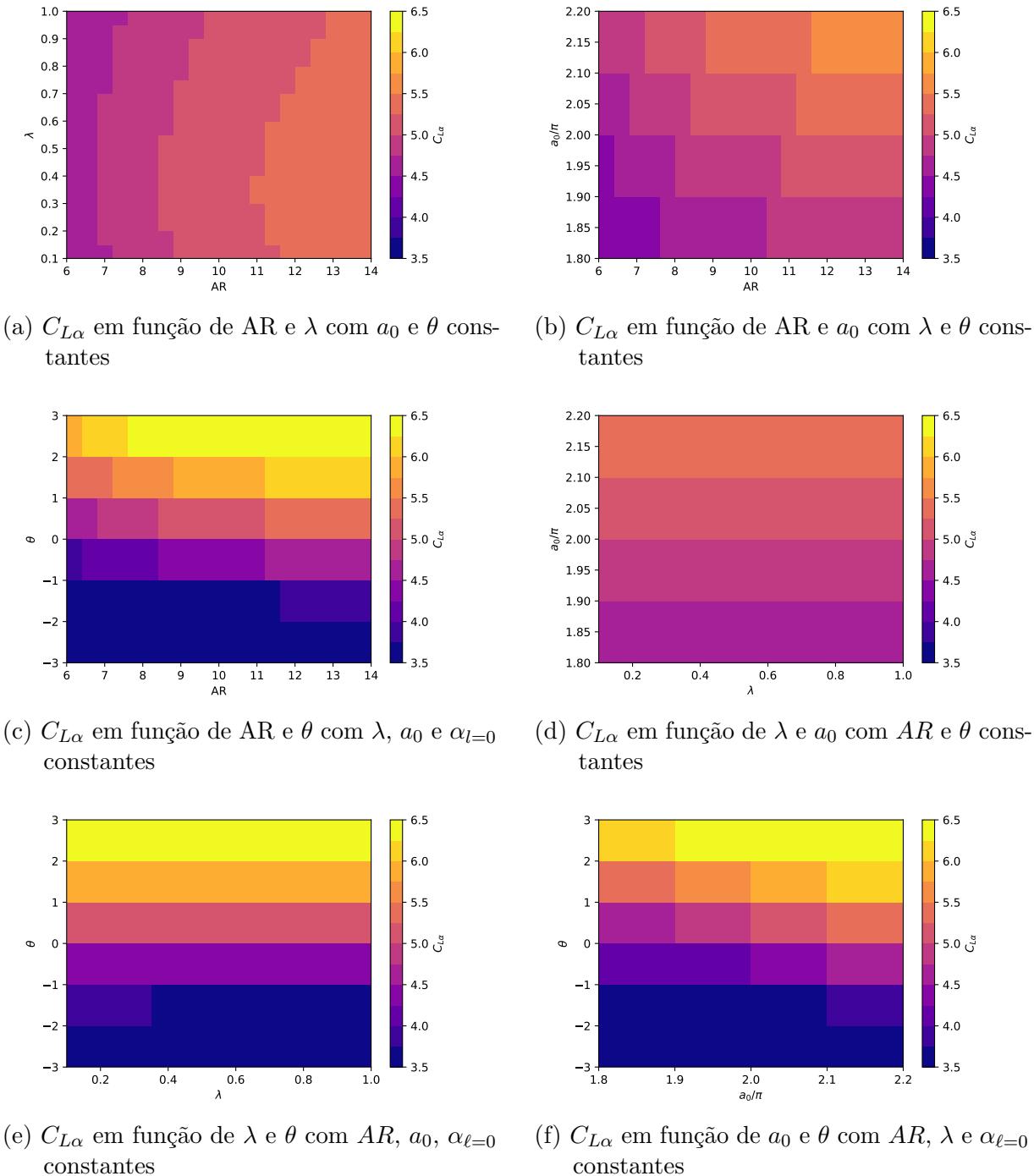


Figura 11 – Análise da sensibilidade de  $C_{L\alpha}$  em relação aos parâmetros de projeto

$$C_{L_{Mendes}} = 0.98 \frac{a_0}{1 - \frac{a_0}{\pi AR}} (\alpha - \alpha_{\ell=0}) \quad (4.1)$$

Uma pequena melhora no erro foi encontrada, mas ainda não a esperada para um modelo robusto. É possível ver a comparação dos erros na Tabela 3 e na Figura 12.

Continuou-se então a buscar um modelo mais eficiente. Dessa forma, intencionou-se adicionar uma nova variável, no caso  $\theta$ , de forma a adicionar mais refinamento, obtendo-se

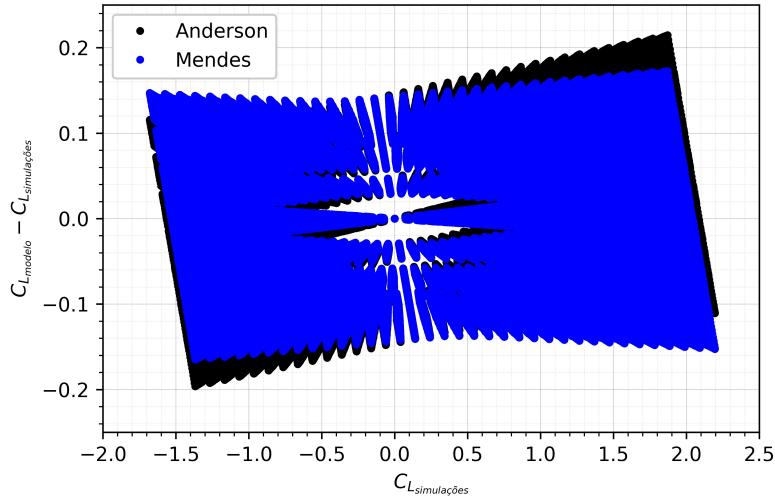


Figura 12 – Comparaçāo do erro do coeficiente de sustentāo para o modelo 1

o segundo modelo:

$$C_{L_{Mendes}} = \frac{a_0}{1 - \frac{a_0}{\pi AR}} [0.981(\alpha - \alpha_{\ell=0}) + 0.424\theta] \quad (4.2)$$

Uma redução significativa, como demonstrado pela Tabela 3 e pela Figura 13, de aproximadamente 90%, foi encontrada nesse momento. Tal situação era esperada devido à primeira análise observada na Figura 11, onde o parāmetro  $\theta$  proporcionava mudanças expressivas no valor de  $C_{L\alpha}$ .

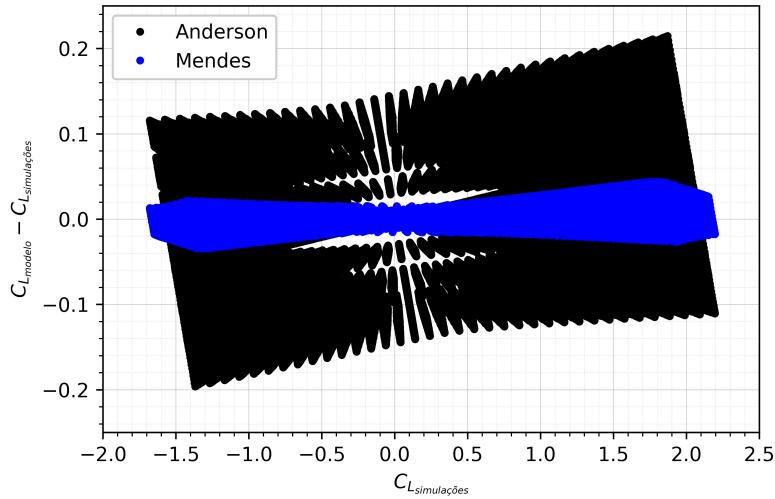


Figura 13 – Comparaçāo do erro do coeficiente de sustentāo para o modelo 2

Ainda objetivando uma maior redução do erro, optou-se por adicionar termos relacionados ao afilamento, já que esse parāmetro também promovia mudanças importantes

no valor de  $C_{L\alpha}$  segundo a Figura 11. Dessa forma, duas parcelas foram criadas, de forma a estarem acopladas aos parâmetros já existentes, obtendo-se a equação:

$$C_{L_{Mendes}} = \frac{a_0}{1 - \frac{a_0}{\pi AR}} \left\{ \left[ (0.996 - 0.027\lambda)(\alpha - \alpha_{\ell=0}) \right] + \left[ (0.388 + 0.066\lambda)\theta \right] \right\} \quad (4.3)$$

Com essa última adição, o erro foi reduzido à metade do segundo modelo, mudança ainda expressiva. Tais dados podem ser observados na Tabela 3 e na Figura 14.

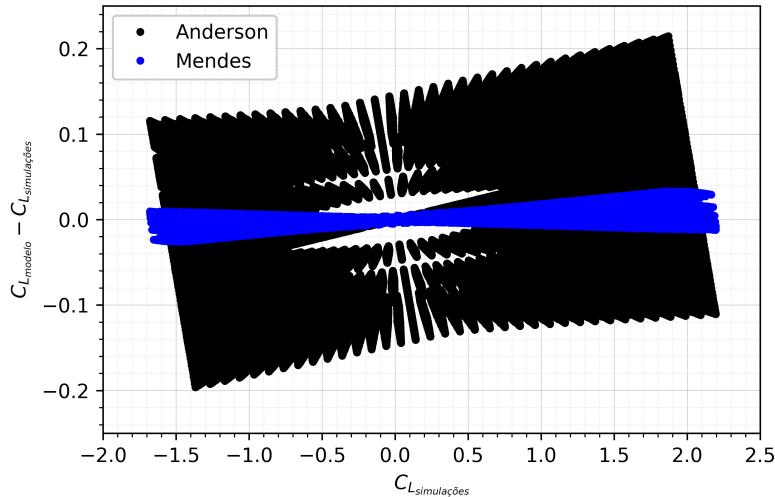


Figura 14 – Comparação do erro do coeficiente de sustentação para o modelo final

Tabela 3 – Comparação de erros do coeficiente de sustentação dos modelos

Modelo	Erro na base de teste	Erro na base total
Anderson	9.1451%	9.1440%
Mendes 1	8.9289%	8.9266%
Mendes 2	0.9936%	0.9930%
Mendes	0.5077%	0.5078%

É possível passar agora a análise em relação aos parâmetros da asa. A Figura 15 apresenta os gráficos acerca disso.

Pode-se perceber que o modelo apresenta erros pequenos para a maioria dos parâmetros, menores do que 0.5%, exceto para afilamentos menores do que 0.1 e maiores do que 0.9 e para ângulos de ataque entre  $-7^\circ$  e  $2^\circ$ . Dessa forma, conclui-se que mesmo com as regiões onde os erros são maiores, esses ainda podem ser considerados baixos para fins de estabelecimento de um modelo reduzido.

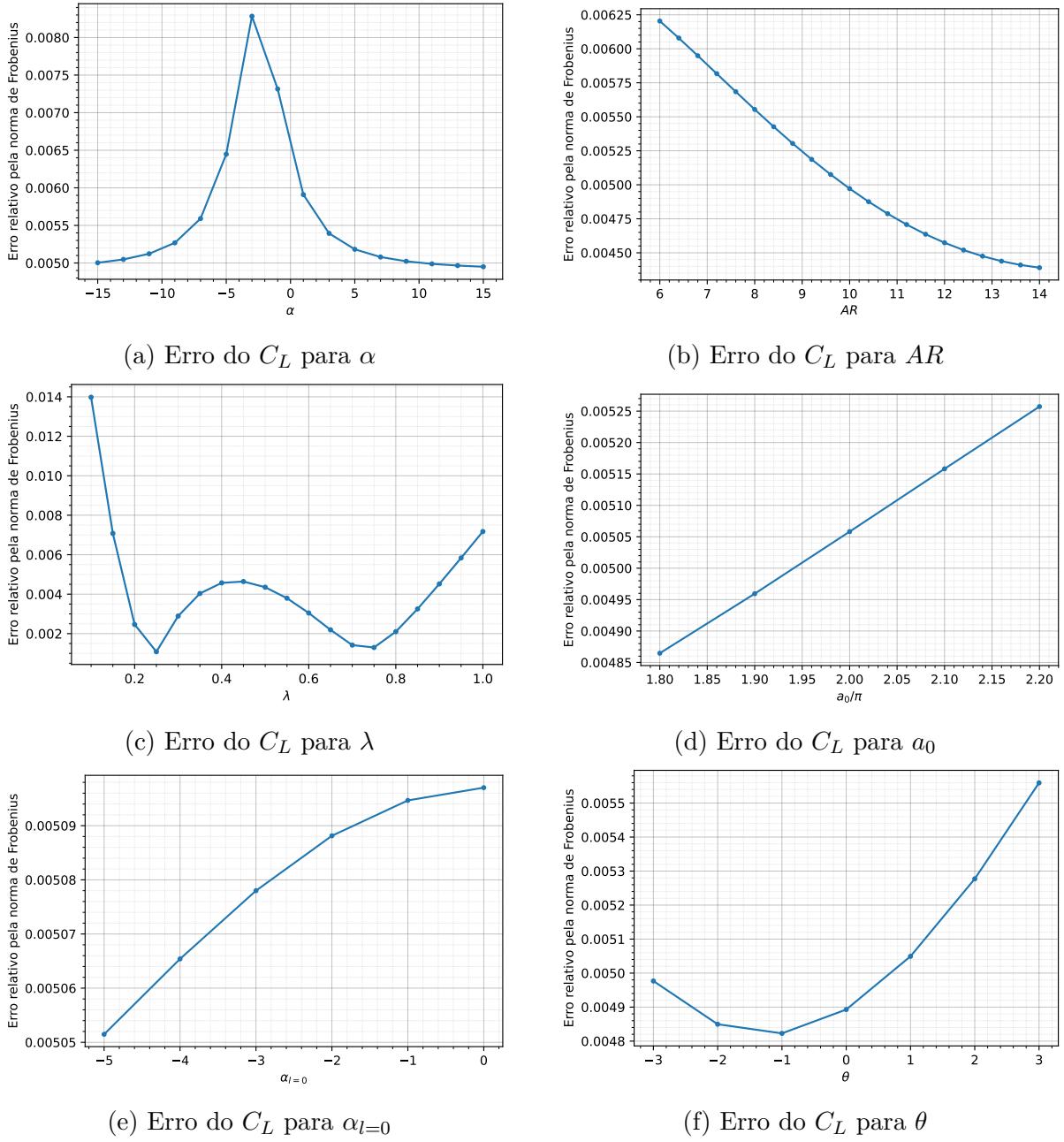


Figura 15 – Média do erro do modelo de  $C_L$  para cada parâmetro

#### 4.2.2 Coeficiente de arrasto induzido

Tendo em vista a boa eficiência do modelo para cálculo do coeficiente de sustentação, iniciou-se a criação do modelo para arrasto induzido utilizando-se o formato do modelo de Anderson, mas com o  $C_L$  encontrado acima. Dessa forma, obteve-se o seguinte modelo:

$$C_{Di_{Mendes}} = 1.042 \frac{C_{L_{Mendes}}^2}{\pi AR} \quad (4.4)$$

Inicialmente, no primeiro modelo, é possível ver uma grande melhoria, de forma a entender que utilizar um coeficiente de sustentação mais assertivo já é suficiente para

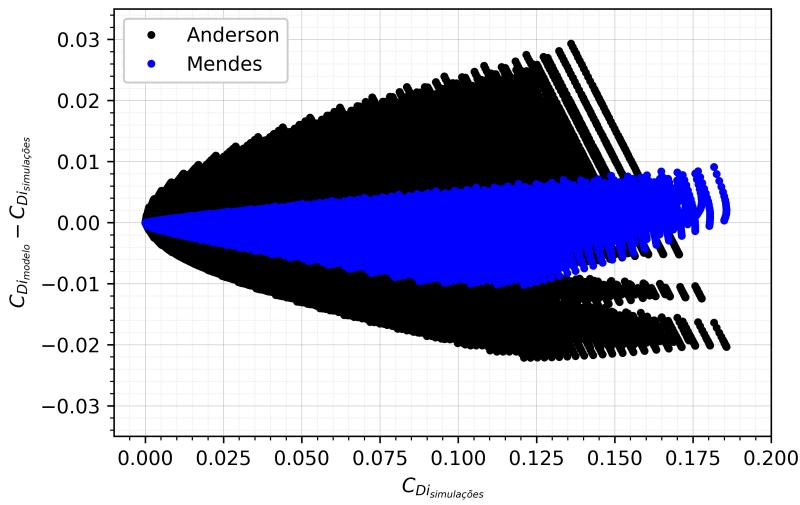


Figura 16 – Comparaçāo do erro do coeficiente de arrasto induzido para o primeiro modelo

melhorar o resultado, como podemos observar na Tabela 4 e na Figura 16.

Intencionando-se melhorar o resultado e levando em conta o grande nāmero de modelos que utilizam o coeficiente de Oswald  $e$  no equacionamento, tentou-se aplicar alguma correção em função do valor do afilamento. Levou-se em conta o caráter próximo a curvas quadráticas quando análises acerca do afilamento sāo feitas. Dessa forma, chegou-se no modelo final ilustrado a seguir.

$$C_{D_{iMendes}} = \frac{C_{L_{Mendes}}^2}{\pi AR} (1.029 - 0.022\lambda + 0.068\lambda^2) \quad (4.5)$$

A adiāo possibilitou uma ligeira melhora na assertividade do modelo, como visto na Tabela 4 e na Figura 17.

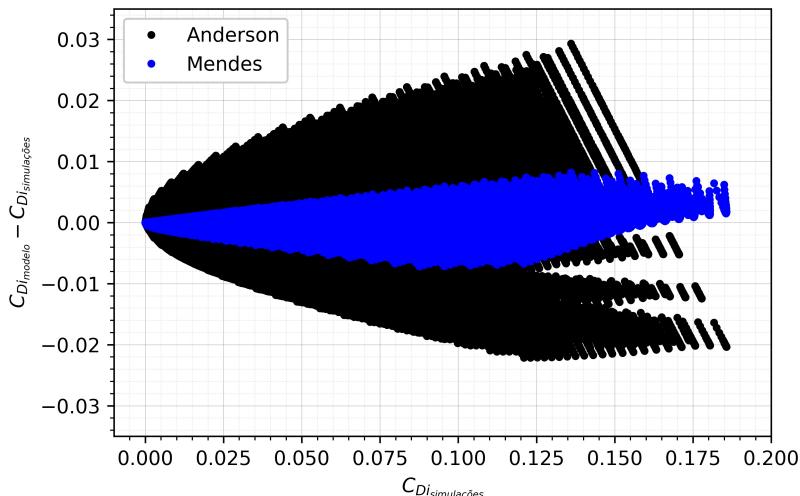
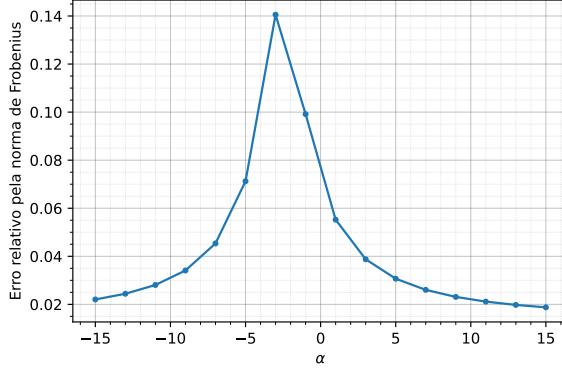
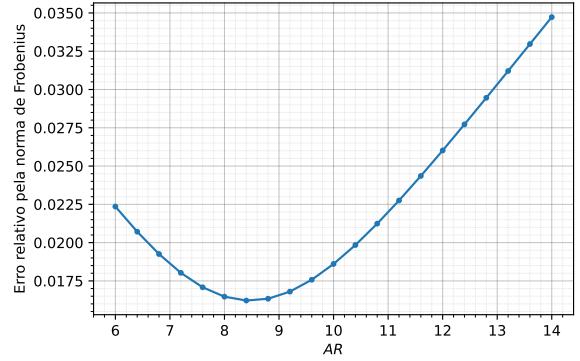
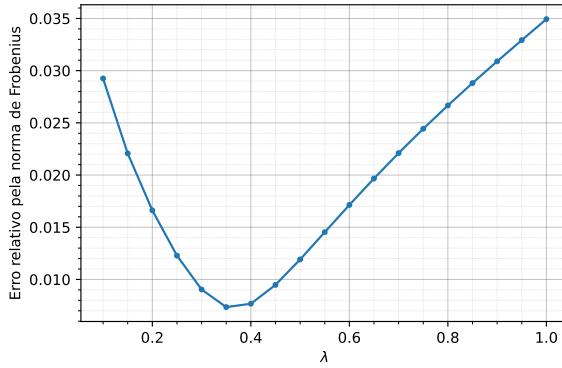
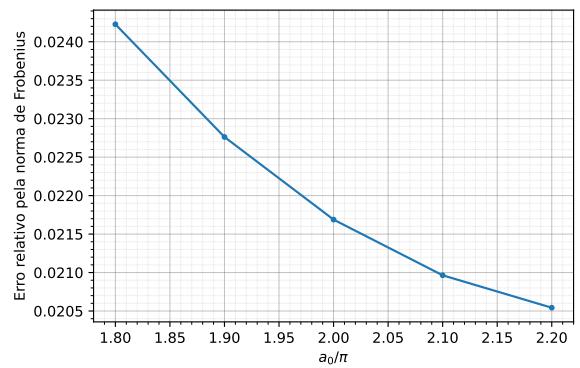
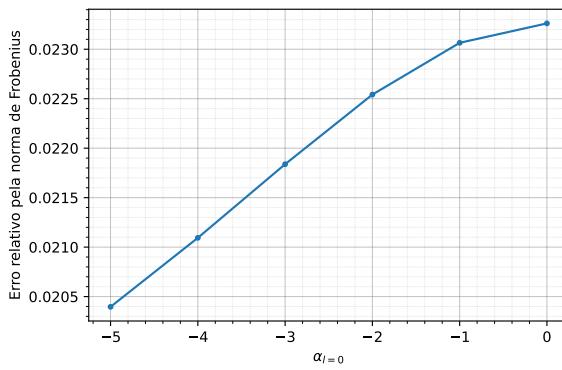
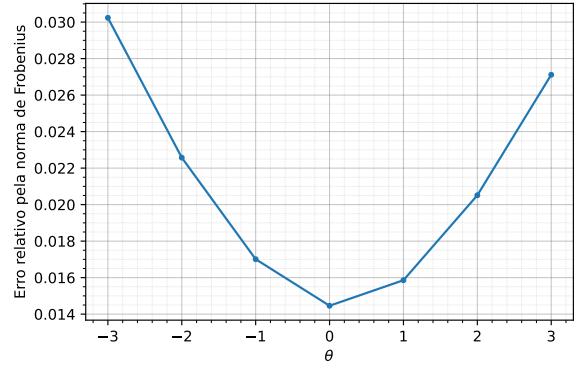


Figura 17 – Comparaçāo do erro do coeficiente de arrasto induzido para o modelo final

Tabela 4 – Comparaçāo de erros do coeficiente de arrasto induzido dos modelos

Modelo	Erro na base de teste	Erro na base total
Anderson	13.3220%	13.3158%
Mendes 1	2.6047%	2.6045%
Mendes	2.1801%	2.1791%

(a) Erro do  $C_{Di}$  para  $\alpha$ (b) Erro do  $C_{Di}$  para  $AR$ (c) Erro do  $C_{Di}$  para  $\lambda$ (d) Erro do  $C_{Di}$  para  $a_0$ (e) Erro do  $C_{Di}$  para  $\alpha_{l=0}$ (f) Erro do  $C_{Di}$  para  $\theta$ Figura 18 – Média do erro do modelo de  $C_{Di}$  para cada parâmetro

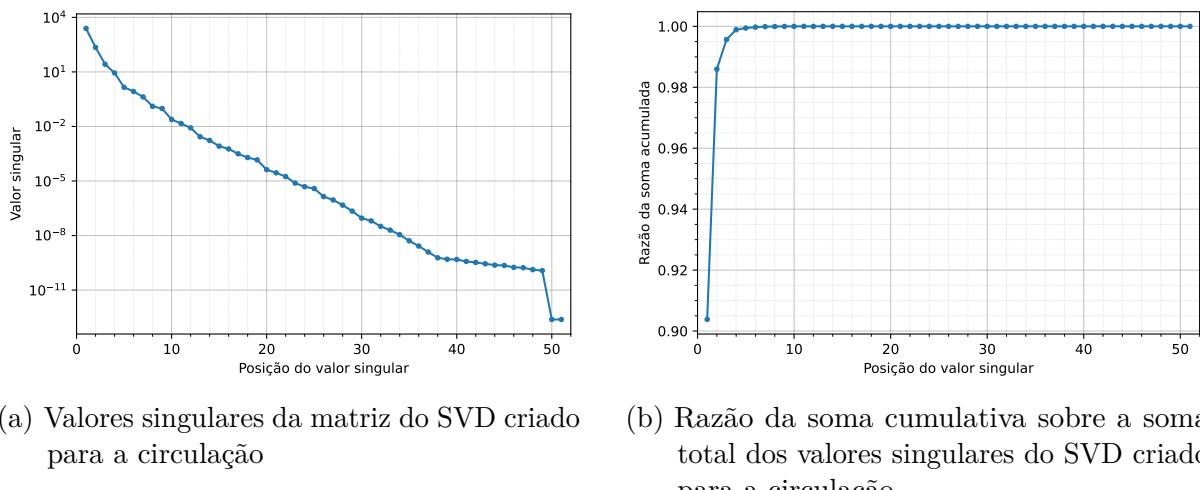
Pode-se perceber que o modelo apresenta erros para a maioria dos parâmetros como demonstrado pela Figura 18, mas estes são menores do que 3.5%, exceto para para ângulos de ataque entre  $-6^\circ$  e  $1^\circ$ . É possível concluir, no entanto, que mesmo com erros no máximo para esses casos, ainda assim podem ser considerados baixos para fins de

estabelecimento de um modelo reduzido.

#### 4.2.3 Distribuição da circulação

Iniciou-se a criação do modelo da distribuição de circulação através de uma avaliação da decomposição em valores singulares da matriz de resposta da circulação, tendo-se inicialmente a análise dos próprios valores singulares, representada na Figura 19.

É possível observar na Figura 19a que os valores singulares iniciais, aqueles que indicam maior significâncias das linhas de  $V$ , são realmente bem maiores do que os outros, ainda mais considerando que se trata de um gráfico em escala logarítmica. Tal situação fica mais clara com a Figura 19b, onde o acumulado da soma dos valores singulares chega a 98.5% da soma de todos estes quando escolhemos somente os 2 primeiros.



(a) Valores singulares da matriz do SVD criado para a circulação

(b) Razão da soma cumulativa sobre a soma total dos valores singulares do SVD criado para a circulação

Figura 19 – Análise gráfica dos valores singulares do SVD criado para a circulação

Representando de forma mais assertiva ainda o erro referente a simplificação comparadas a matriz original, continua-se a constatar o resultado acima, como podemos ver na Figura 20.

Com isso, no caso dos resultados da circulação temos ótimas aproximação com o uso da matriz truncada com dois postos, valor muito menor do que os 51 originais.

Continuando a análise do SVD, pode-se ainda adentrar nas propriedades da matriz  $V$ . Para tanto, plotou-se na Figura 21 as primeiras linhas da matriz  $V$  de forma a visualizar os padrões encontrados nas distribuições de circulação. Os valores numéricos relacionados aos pontos plotados estão disponíveis na Tabela 7 no Apêndice A.

Tendo por bases essas informações, tem-se a base de circulações relevantes do modelo apresentado na equação 3.8.

Iniciou-se o modelo adicionando um termo relacionado ao coeficiente de sustentação encontrado na Seção 4.2.1, que será importante para indicar a amplitude das distribuições utilizadas. Com isso, o primeiro modelo é dado por:

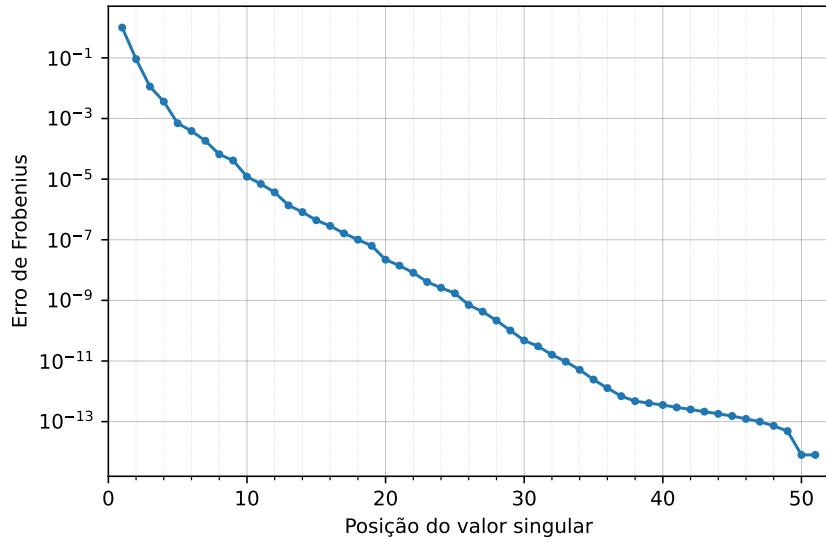
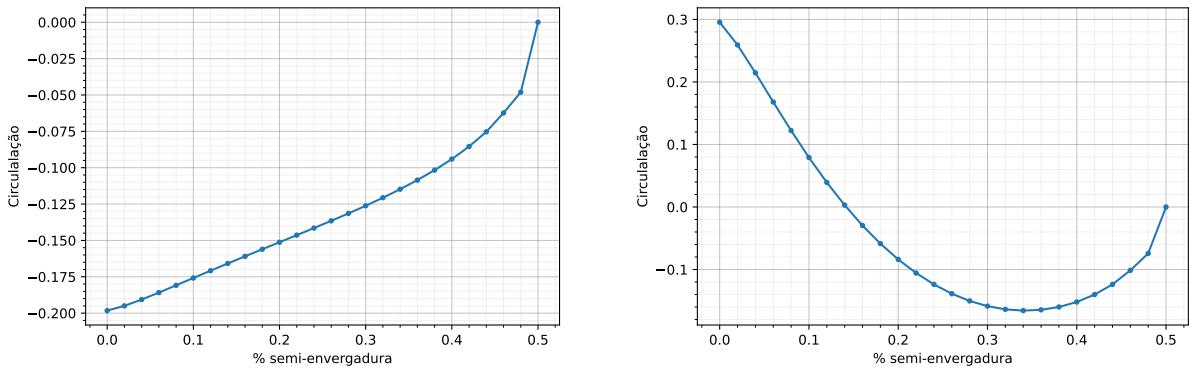


Figura 20 – Erro de Frobenius entre a matriz simplificada e original



(a) Primeira linha da matriz  $V$

(b) Segunda linha da matriz  $V$

Figura 21 – Principais circulações de  $V$

$$\Gamma_{Mendes} = U_\infty c C_{L,Mendes} (1.771\Gamma_1 - 0.003\Gamma_2) \quad (4.6)$$

Um erro alto foi encontrado como é possível observar na Tabela 5, fato condizente com o esperado, já que não considera-se parâmetros importantes à distribuição da circulação. Continuando, optou-se por inserir um termo relacionado ao alongamento. Como implementado no modelo do arrasto induzido, o valor do inverso de  $AR$  foi escolhido, gerando-se o seguinte modelo:

$$\Gamma_{Mendes} = U_\infty c C_{L,Mendes} \left[ \left( 1.729 - \frac{0.178}{AR} \right) \Gamma_1 + \left( 0.025 - \frac{0.526}{AR} \right) \Gamma_2 \right] \quad (4.7)$$

Houve, com essa adição, pequena alteração no erro, como visualizado na Tabela 5. Com isso, um novo parâmetro foi adicionado, o de afilamento e o alongamento foi retirado,

devido ao sua baixa influência no modelo. Novamente, como estabelecido no modelo de  $C_{Di}$ , termos semelhantes a uma função quadrática foram inseridos.

$$\Gamma_{Mendes} = U_\infty c C_{L,Mendes} \left[ \left( 0.980 + 1.431\lambda - 0.134\lambda^2 \right) \Gamma_1 + \left( -0.324 + 0.598\lambda - 0.085\lambda^2 \right) \Gamma_2 \right] \quad (4.8)$$

De fato, com essa última adição foi possível chegar num modelo muito mais assertivo, como demonstrado pela Tabela 5.

Tabela 5 – Comparaçāo de erros da distribuiçāo de circulaçāo dos modelos

Modelo	Erro na base de teste	Erro na base total
Mendes 1	22.0874%	22.0957%
Mendes 2	22.0710%	22.0793%
Mendes	4.9131%	4.9119%

De forma a aprofundar a análise das medidas de erros, como já implementado para os outros modelos, uma avaliação deles em relação aos parâmetros foi feita, como representado pela Figura 22. Nela, pode-se concluir que os erros são praticamente constantes e baixos para a maioria dos parâmetros, com exceção quando  $\alpha$  varia entre  $-8^\circ$  e  $4^\circ$ . Tal resultado é condizente com as outras análises já feitas e esperado devido à relação acoplada do modelo de distribuição da circulação com o modelo de coeficiente de sustentação.

### 4.3 Modelos reduzidos finais e suas variações estatísticas

Como forma de aperfeiçoar os modelos, uma análise estatística foi implementada. A Figura 23 apresenta os histogramas relacionados ao erro de cada modelo. O histograma tem por objetivo entender a frequência em que cada valor de erro está presente. Pode-se concluir que os modelos apresentam resultados muito próximos aos das simulações, pois os erros com maior frequência são os próximos de zero. Além disso, o desvio padrão dos erros também não são elevados.

Em posse dessas informações, intenciona-se adicionar um fator aos modelos buscando trazer uma aspecto de confiança nos resultados. A Tabela 6 apresenta tais valores.

Tabela 6 – Valores estatísticos de confiança dos modelos

Modelo	$\mu$	$\sigma$	$\Delta_{68\%}$	$\Delta_{95\%}$	$\Delta_{99.7\%}$
$C_L$	0.000156	0.004400	0.004531	0.008779	0.013212
$C_{Di}$	-0.000113	0.004400	0.000922	0.001708	0.002528
Distribuição da circulação	0.0001502	0.014961	0.015043	0.029940	0.044349

Com isso, obtém-se os modelos finais com intervalos de confiança:

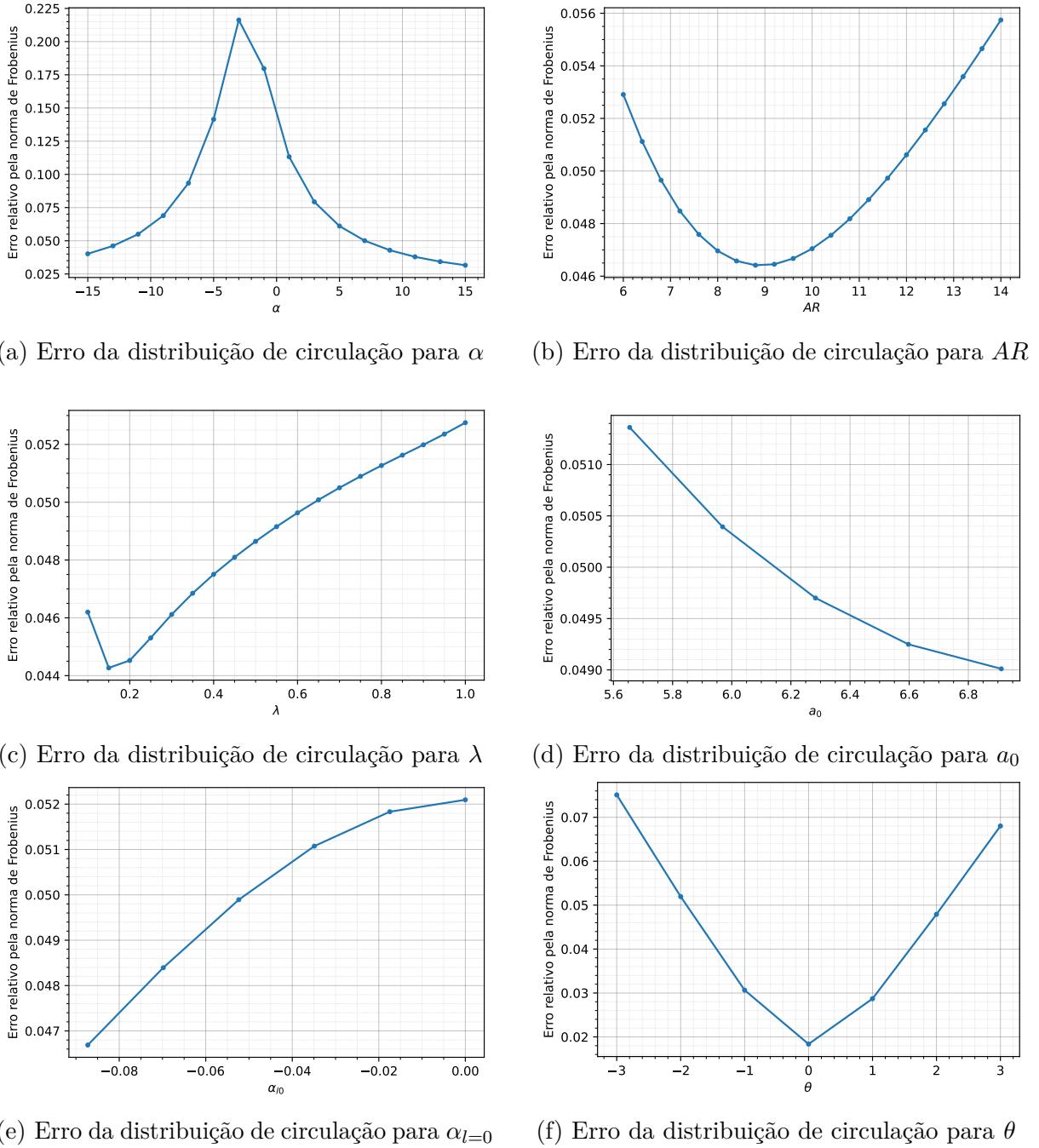


Figura 22 – Média do erro do modelo da distribuição de circulação para cada parâmetro

$$C_{L_{MenDES}} = \frac{a_0}{1 - \frac{a_0}{\pi AR}} \left\{ \left[ (0.996 - 0.027\lambda)(\alpha - \alpha_{l=0}) \right] + \left[ (0.388 + 0.066\lambda)\theta \right] \right\} \pm \Delta_{C,C_L} \quad (4.9)$$

$$C_{D_{iMenDES}} = \frac{C_{L_{MenDES}}^2}{\pi AR} \left( 1.029 - 0.022\lambda + 0.068\lambda^2 \right) \pm \Delta_{C,C_{Di}} \quad (4.10)$$

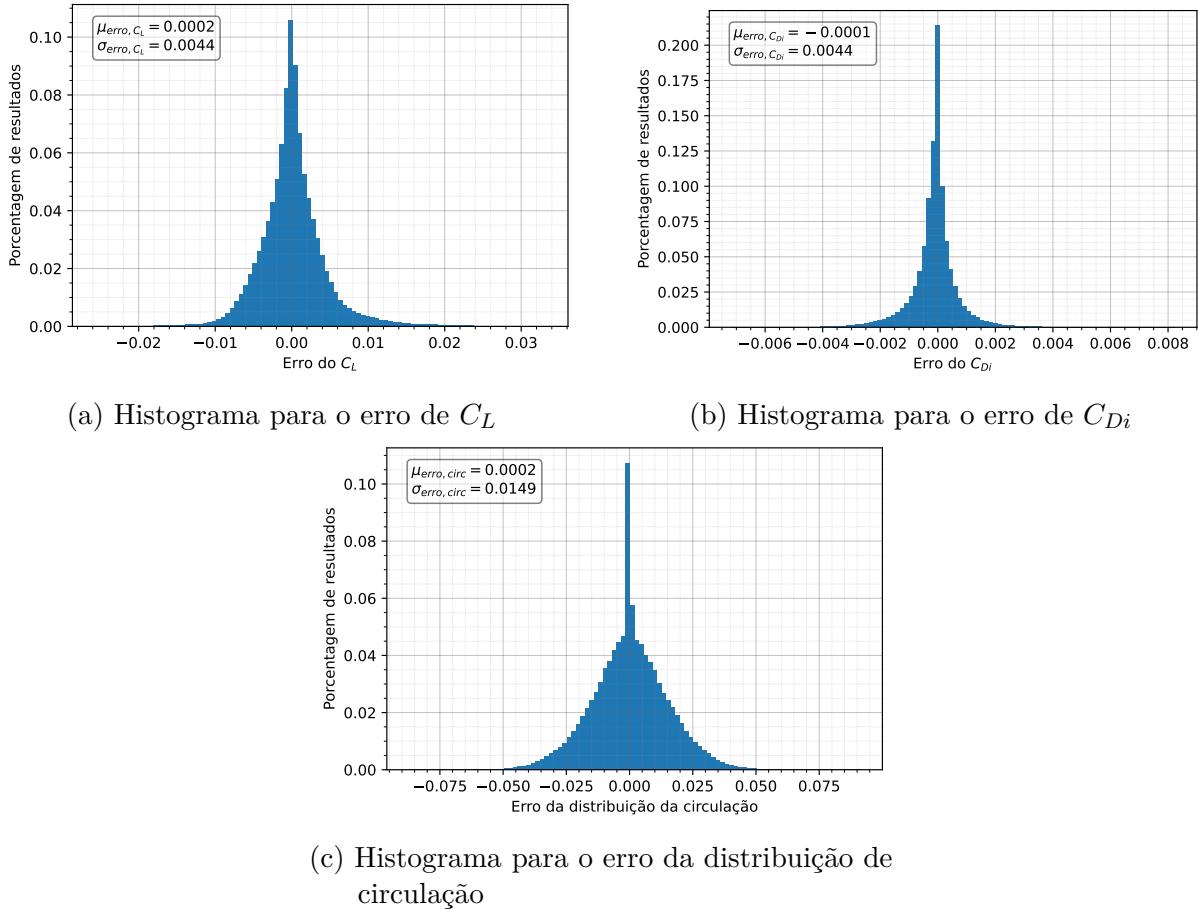


Figura 23 – Histograma dos erros para os modelos criados

$$\Gamma_{Mendes} = U_\infty c \left\{ C_{L,Mendes} \left[ \left( 0.980 + 1.431\lambda - 0.134\lambda^2 \right) \Gamma_1 + \left( -0.324 + 0.598\lambda - 0.085\lambda^2 \right) \Gamma_2 \right] \pm \Delta_{C,circ} \right\} \quad (4.11)$$

onde  $\Delta_C$  são os valores apresentados na Tabela 6, podendo ser utilizados para 68, 95 ou 99.7% de confiança.

## 5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Ao longo do presente trabalho, pôde-se ter uma visão geral acerca da teoria da linha sustentadora e de métodos computacionais para o seu cálculo, além da possibilidade de redução do modelo através da decomposição em valores singulares.

A criação de modelos simplificados possibilitaram, com poucos parâmetros de entrada, ótimas aproximações quando comparadas aos valores encontrados através das simulações com teoria da linha sustentadora para o coeficiente de sustentação, o coeficiente de arrasto induzido e a distribuição da circulação sobre a envergadura, com erros médios inferiores à 0.5%, 2.5% e 5.0%. Modelos que foram propostos com atenção aos significados físicos. Dessa forma, a possibilidade apresentada na introdução, de eficiência num início de projeto se mostrou viável, já que simulações poderiam ser feitas muito mais rapidamente a um custo computacional inferior.

Além disso, a plausibilidade de expansão dos métodos utilizados para outras áreas não só da Engenharia Aeronáutica - ou até mesmo da engenharia em si - pode ser atingida com a metodologia utilizada, possibilitando a outros alcançarem resultados semelhantes.

Ainda, é inegável que o presente trabalho somente estabelece um protótipo, que pode ser futuramente refinado e então atingir mais adequados e complexos modelos, não deixando de lado o objetivo de abreviar projetos e potencializar os resultados destes. Como perspectivas de continuidade, propõe-se a análise considerando asas com enflechamento e diedro, expandindo-se assim os modelos para outras configurações de asa, ou, ainda, a aplicação de procedimentos análogos aos aqui propostos utilizando-se ferramentas computacionais de maior fidelidade. Nesse sentido, propõe-se o desenvolvimento de modelos reduzidos para previsão dos coeficientes aerodinâmicos de aerofólios considerando efeitos não lineares, como estol.



## REFERÊNCIAS

- ALYANAK, E. Modeling for conceptual design: An aeroelastic approach. p. 1425, 2012.
- ANDERSON, J. D. **Fundamentals of Aerodynamics**. New York, NY: McGraw-Hill, 2016.
- BEN-ISRAEL, A.; GREVILLE, T. N. **Generalized inverses: theory and applications**. New York, NY: Springer Science & Business Media, 2003. v. 15.
- BRUNTON, S. L.; KUTZ, J. N. **Data-driven science and engineering: Machine learning, dynamical systems, and control**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2019.
- DUNCAN, W. J. Galerkin's method in mechanics and differential equations. 1937.
- ECKART, C.; YOUNG, G. The approximation of one matrix by another of lower rank. **Psychometrika**, Springer, v. 1, n. 3, p. 211–218, 1936.
- HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. **Matrix analysis**. Cambridge, UK: Cambridge university press, 2012.
- HOUGHTON, E. L.; CARPENTER, P. W. **Aerodynamics for engineering students**. Oxford, UK: Elsevier, 2016.
- LIORBANO, F. F. **Aplicação do método de Galerkin ao modelo aerodinâmico de Prandtl visando a análise aeroelástica de asas flexíveis**. 2019. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2019.
- MOORE, E. H. On the reciprocal of the general algebraic matrix. **Bull. Am. Math. Soc.**, v. 26, p. 394–395, 1920.
- PRANDTL, L. Applications of modern hydrodynamics to aeronautics. **US Government Printing Office**, 1921.
- RAYMER, D. P. **Aircraft design: a conceptual approach**. Reston, VA: Reston, Virginia, 2012.
- STRANG, G. **Linear algebra and learning from data**. Cambridge, UK: Wellesley-Cambridge Press Cambridge, 2019.
- WALL, M. E.; RECHTSTEINER, A.; ROCHA, L. M. **Singular value decomposition and principal component analysis**. Boston, MA: Springer, 2003. 91–109 p.



## **APÊNDICES**



## APÊNDICE A – CIRCULAÇÕES PARA O MODELO DE DISTRIBUIÇÃO DE CIRCULAÇÃO

Na Tabela 7 é possível obter os valores numéricos das circulações relevantes.

Tabela 7 – Valores da distribuição de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$

% da semi-envergadura	$\Gamma_1$	$\Gamma_2$
0%	-0,19824	0,295496
2%	-0,194971	0,259162
4%	-0,190654	0,214572
6%	-0,185853	0,167883
8%	-0,180866	0,122275
10%	-0,17583	0,07917
12%	-0,170813	0,03929
14%	-0,165846	0,00297
16%	-0,160933	-0,029663
18%	-0,156066	-0,058597
20%	-0,151222	-0,08388
22%	-0,146375	-0,105596
24%	-0,141449	-0,123838
26%	-0,136526	-0,138701
28%	-0,131435	-0,150267
30%	-0,126162	-0,158605
32%	-0,120641	-0,163759
34%	-0,114793	-0,165739
36%	-0,108514	-0,164512
38%	-0,101671	-0,159984
40%	-0,094074	-0,151967
42%	-0,085426	-0,140104
44%	-0,075339	-0,123858
46%	-0,062346	-0,101347
48%	-0,048083	-0,074279
50%	0	0