

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – USP  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS – EESC

José Fernando Barbosa Boro

Controlabilidade de Sistemas Dinâmicos  
em Rede

São Carlos – SP

2019



José Fernando Barbosa Boro

## Controlabilidade de Sistemas Dinâmicos em Rede

Monografia de Conclusão de Curso apresentada  
ao Departamento de Engenharia Elétrica e de  
Computação da Escola de Engenharia de São  
Carlos - Universidade de São Paulo como re-  
quisito à obtenção do título de bacharel em  
Engenharia Elétrica com Ênfase em Eletrônica.

Universidade de São Paulo – USP  
Escola de Engenharia de São Carlos – EESC  
Departamento de Engenharia Elétrica e Computação – SEL

Orientador: Luís Fernando Costa Alberto

São Carlos – SP  
2019

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,  
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS  
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da  
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

B726c      Boro, José Fernando Barbosa  
                 Controlabilidade de Sistemas Dinâmicos em Rede /  
                 José Fernando Barbosa Boro; orientador Luís Fernando  
                 Costa Alberto. São Carlos, 2019.

Monografia (Graduação em Engenharia Elétrica com  
ênfase em Eletrônica) -- Escola de Engenharia de São  
Carlos da Universidade de São Paulo, 2019.

1. controlabilidade. 2. sistemas dinâmicos. 3.  
equações diferenciais. 4. redes complexas. 5. grafos.  
6. redes dinâmicas. I. Título.

# FOLHA DE APROVAÇÃO

Nome: José Fernando Barbosa Boro

Título: "Controlabilidade de sistemas dinâmicos em rede"

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado  
em 04 / 12 / 2019,

com NOTA 100 (dez, zero), pela Comissão Julgadora:

*Prof. Titular Luís Fernando Costa Alberto - Orientador -  
SEL/EESC/USP*

*Prof. Titular Hildebrando Munhoz Rodrigues - SME/ICMC/USP -  
Docente Sênior*

*Prof. Titular Marco Hernique Terra - SEL/EESC/USP*

Coordenador da CoC-Engenharia Elétrica - EESC/USP:  
Prof. Associado Rogério Andrade Flauzino



Dedico este trabalho à minha querida Vó Ignez,  
que me ensinou a ler, escrever e tocar piano  
e me auxiliou com os estudos durante toda minha vida escolar.



## **Agradecimentos**

Não seria possível colocar em palavras tudo o que tenho para agradecer a tantas pessoas que passaram por minha vida e que contribuíram para que eu chegassem até aqui.

Não havendo outro recurso senão a própria escrita, começo agradecendo toda a minha vida a Deus, que me fez capaz de usufruir plenamente da vida, permitindo que eu tivesse saúde e inteligência.

Agradeço à minha mãe, Professora Maria Valéria, e minha avó, Professora Ignez, por todo o amor, carinho, atenção e dedicação que tiveram para comigo desde que nasci até os dias de hoje. Agradeço o conhecimento que recebi de vocês e todo o incentivo em estudar matemática, música e ciências naturais.

Agradeço ao meu pai, José Ivano, por sempre estar presente nos momentos importantes e por todo o carinho e amor que recebi ao longo da vida. Agradeço por me ensinar a ver a vida de maneira simples e plena.

Agradeço a minha irmã, Juliana, por todos os momentos de alegria cantarolando desafinados nossas músicas prediletas.

Agradeço infinitamente à minha namorada, companheira e amiga Isabela Cinti, por todo o amor, apoio emocional, incentivo e motivação para que eu conseguisse terminar a graduação. Sua presença em minha vida foi certamente fator decisivo para que eu persistisse na missão de me formar Engenheiro. Obrigado por me fazer um homem melhor a cada dia.

Agradeço ao meu amigo Vinicius, que me inspirou a seguir a carreira de Engenheiro e cuja inteligência me serve de modelo; Márcio, que me apresentou muitas bandas que conheço hoje e me ajuda diversas vezes com programação; Japonês, que me ensina História, Direito me mostra que a vida é mais do que o trivial; Henrique, que me mostra que é possível ser engenheiro e músico ao mesmo tempo; Pedro, que me ensinou muito do que sei hoje de Matemática e que agora tenta aprender tudo o que sei de música (mas que ainda não percebeu que eu só finjo que sei alguma coisa); Tank, que me ajudou a despertar um sentimento empreendedor; Carla, que me ajuda a ter pé no chão quando começo a soltar demais minha imaginação; Alex, com quem compartilho bons momentos de reflexões sobre Matemática e sobre a vida e que me ajudou imensamente com muitos teoremas presentes neste texto. Sem vocês tudo isto teria sido muito mais difícil. Obrigado pela amizade e pelos momentos memoráveis que passamos juntos.

Agradeço aos meus amigos irmãos Luiz e Paulo Di Gregório pelos treze anos de banda que tivemos juntos e por todos os shows inesquecíveis que fizemos.

Agradecimentos especiais a Marina, minha Psicóloga, sem a qual eu não teria tido possibilidade de me estruturar mentalmente para concluir a graduação.

Não poderia deixar de agradecer alguns colegas de classe importantes, mais especificamente, o “resto do pessoal” – Victor Grande, Victor Pequeno, Cris, “Quêili”, Canalha, Manú, Raul, Daniel – e o “Bonde” – Boppré, Bolt, Akina, Karina, Camille, Pedreiro, Paquita, Boné, Ivo, Torugo, Dompas, Ninja, Murilo, Akio, Ito e Zhi. Obrigado por toda ajuda com estudos em vésperas de provas e com experimentos e relatórios nas aulas de laboratório. Agradeço ainda aos meus amigos do ICMC, Hugo e Alisson, por me ajudarem com dúvidas de Matemática sempre que solicitei.

Agradeço imensamente ao meu orientador e Professor Dr. Luís Fernando Costa Alberto por ter

me acolhido como seu orientando de TCC e pela compreensão nos meus momentos de indecisão. Seus conselhos e orientações foram a base sólida para o desenvolvimento de todo o presente trabalho.

Agradeço ao Professor Emérito Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues, que me acolheu como seu aluno em seus seminários onde eu aprendi valiosas ferramentas matemáticas que me ajudaram a escrever o presente trabalho. Agradeço também pela disposição em fazer parte da banca avaliadora deste trabalho.

Agradeço ao Professor Dr. Marco Henrique Terra pela disposição de participar desta banca avaliadora e pelas sugestões a respeito do desenvolvimento do presente trabalho.

Agradeço infinitamente a todos os Professores que contribuíram para a minha formação desde minha alfabetização até o fim da minha graduação. Cito alguns nomes muito importantes antes do meu ingresso à Universidade: Professora Márcia Haddad (matemática, ensino fundamental), Professora Márcia Gil (matemática, ensino fundamental), Professora Íride (português, ensino fundamental), Professora Fátima (português, ensino fundamental), Professora Renata (português, ensino fundamental), Professora Débora "Ninja" (história, ensino fundamental e médio), Professora Tânia (história, ensino fundamental), Professora Márjorie (história, ensino fundamental), Professor Nelson (química e biologia, ensino fundamental e médio), Professor Alexandre (física e astronomia, ensino fundamental e médio), Professora Cris (física, ensino médio), Professor Marquinhos (matemática, ensino fundamental e médio), Professor Lúcio (matemática, ensino médio), Professor Xande (matemática, ensino médio), Professor Fábio Rodrigues (geografia, ensino médio), Professor Sérgio "Amiguinho" (química, ensino médio) Professor Amir (*in memoriam*) (português e redação, ensino médio), Professora Benilde (português, ensino médio), Professora Elenice (redação), Professor Alexandre Prado (música), Professor Emílio Mendonça (música), Professor Ednilson Lazzari (música).

Após meu ingresso na Universidade tive outros grandes mentores cujos ensinamentos levarei comigo para sempre. Alguns nomes muito importantes antes do meu ingresso no curso de engenharia: Professora Luciana Sayure Shimabuco (piano, USP-ECA), Professor Paulo de Tarso Salles (música, USP-ECA), Professor Marco Antonio (música, USP-ECA) Professor Rogério Luiz Moraes Costa (música, USP-ECA), Professora Lynnyns Kelly Arruda Saraiva de Paiva (matemática, UFS-Car), Professor Daniel Victor Tausk (matemática, USP-IME) e Professor Pierluigi Benevieri (matemática, USP-IME), Professor Samuel Pontes (piano)

Agradeço os Professores memoráveis que tive aqui nesta Escola e que foram cruciais para minha formação como Engenheiro: Professor Dr. Geraldo Roberto Martins da Costa, Professor Edson Gesualdo, Professor Dr. Carlos Dias Maciel, Professor Dr. Adilson Gonzaga, Professor Dr. Amílcar Careli César, Professor Dr. Ben-Hur Viana Borges, Professor Dr. Elmer Pablo Tito Cari, Professor Dr. Marcelo Andrade da Costa Vieira, Professor Dr. Murilo Araujo Romero, Professor Dr. Valdir Grassi Junior, Professor Paulo Roberto Veronese e Professora Dra. Vilma Alves Oliveira.

Agradeço aos Professores do ICMC, Professor Dr. Wagner Vieira Leite Nunes, Professora Dra. Maria do Carmo Carbinatto, Professor Dr. Herivelto M. Borges Filho, Professor Dr. Marcio Gameiro, Professor Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva, Professor Dr. Diego Raphael Amancio e Professor João Batista Neto.

Agradeço por toda a atenção e prestação de serviços da técnica administrativa Jussara Ramos Zolia.

Agradeço a todos os funcionários da Logtrac, que me acolheram como estagiário e com os quais tenho aprendido diariamente e progredido como desenvolvedor de software. Agradeço especialmente ao Afonso e à Ana que me ensinam diariamente técnicas e práticas de engenharia de software.

Agradeço ao Ademilson e sua esposa, Cidinha, por zelarem pelo meu lar aqui em São Carlos e me auxiliarem sempre que precisei.

Peço perdão por alguém que tenha esquecido de mencionar aqui, mas que certamente está em algum lugar especial no meu coração.

São Carlos, 18 de novembro de 2019



*“Tocar uma nota errada é insignificante  
Tocar sem paixão é inaceitável.”*  
– Ludwig van Beethoven



## **Resumo**

A controlabilidade de sistemas dinâmicos tem sido estudada tanto pela engenharia quanto pela matemática a fim de se obter técnicas e mecanismos de controle eficazes e robustos. Com o advento da Internet e cada dia mais sistemas interconectados, o estudo da controlabilidade de sistemas em rede tem se apresentado como um desafio e requerer técnicas mais sofisticadas das que já são atualmente empregadas. O presente trabalho estuda a controlabilidade de redes complexas dinâmicas e o como suas estruturas alteram a controlabilidade quando seus nós são substituídos por nós multidimensionais. Será demonstrado que para nós multidimensionais suas dinâmicas internas não influenciam na controlabilidade geral quando a estrutura global da rede for forte o suficiente. Também será demonstrado que, para quase toda dinâmica interna de cada nó, a rede permanece completamente controlável.

Palavras-chave: controlabilidade, sistemas dinâmicos, equações diferenciais, redes complexas, grafos, redes dinâmicas.



## **Abstract**

Controllability of dynamical systems has been studied by engineering and mathematics in order to develop efficient and robust control techniques and mechanisms. With the advent of Internet and each day more systems interconnected, the study of controllability of networked systems has been presented as a challenge and require more sofisticated techniques. The present work studies controllability of dynamical complex networks and how their structures can change controllability when their nodes are substituted by multidimensional nodes. It will be demonstrated that for multidimensional nodes their internal dynamics do not influence controllability when the network's global structure is strong enough. Also it will be shown that for almost all internal dynamics of each node the network remains completely controllable.

Keywords: controllability, dynamical systems, differential equations, complex networks, graphs, dynamical networks.



## Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>SISTEMAS DINÂMICOS . . . . .</b>	<b>21</b>
2.1	Equações Diferenciais Ordinárias . . . . .	21
2.2	Teoria de Controle . . . . .	23
<b>3</b>	<b>REDES COMPLEXAS . . . . .</b>	<b>27</b>
3.1	Conceitos gerais . . . . .	27
3.2	Generalização para nós multidimensionais . . . . .	29
<b>4</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>33</b>
4.1	Dinâmicas distintas para os nós . . . . .	34
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>37</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>39</b>
	<b>APÊNDICE A – DEFINIÇÕES E TEOREMAS . . . . .</b>	<b>41</b>



## 1 Introdução

O estudo das Leis do Movimento de Isaac Newton juntamente com o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral de Gottfried W. Leibniz, possibilitaram a consolidação de uma área de estudos que hoje denomina-se *Equações Diferenciais*.

Simplificadamente pode-se dizer que uma equação diferencial estabelece relações entre grandezas e suas taxas da variação. Dentro do contexto do estudo do movimento, a principal equação diferencial estabelecida por Isaac Newton afirma que a taxa de variação da quantidade de movimento de um ponto material é igual ao somatório das forças externas aplicadas a ele (ver [1]). Em notação matemática, escreve-se

$$\mathbf{F}^{(\text{ext})} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

em que  $\mathbf{F}^{(\text{ext})}$  é a resultante de todas as forças externas e  $\mathbf{P}$  é a quantidade de movimento do ponto material em questão.

Para a engenharia é de grande interesse o estudo de sistemas cuja dinâmica pode ser descrita por equações diferenciais. Estes sistemas dinâmicos são geralmente constituídos por uma entrada, variáveis de estado internas que representam o funcionamento do sistema, e saídas (ver [2]). A Figura 1 representa um modelo de sistema dinâmico com entradas e saídas e variáveis internas.

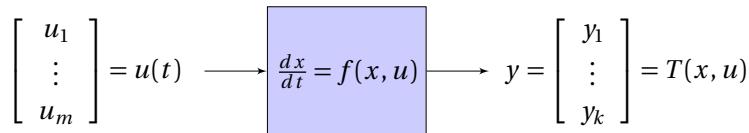


Figura 1 – Representação de um sistema dinâmico

Na Figura 1  $f$  é uma função que relaciona as variáveis internas, as entradas e a taxa de variação das variáveis internas do sistema;  $T$  é uma transformação que estabelece a saída que é produzida a partir de cada variável interna e cada entrada do sistema.

A *Teoria de Controle* se preocupa em estudar mecanismos que permitem se obter as saídas desejadas de um sistema dinâmico através da manipulação das entradas deste sistema ([2]). Mais precisamente, um dos problemas abordados neste trabalho é o de se determinar quando é possível se obter funções de entrada capazes de levar o sistema de um estado inicial para um estado final desejado.

Com o constante crescimento da Internet, diversos sistemas estão a cada dia se conectando mais e mais com outros sistemas e criando milhares de redes cujo comportamento depende de muitas variáveis cujo controle é muitas vezes inviável. A Internet das Coisas (*Internet of Things - IoT*, as Redes Inteligentes de Energia (*Smart Grids*), veículos autônomos que trocam informações entre si são exemplos de sistemas dinâmicos conectados em rede e que exigem um modelo matemático mais sofisticado para seu entendimento e manipulação.

O presente trabalho busca obter bases matemáticas generalistas para se tratar situações em que sistemas dinâmicos estão conectados em rede e interagindo entre si. Busca-se entender como a estrutura de conexões desta rede influencia a controlabilidade do sistema como um todo e como os sistemas individuais afetam globalmente a rede formada por eles.



## 2 Sistemas Dinâmicos

### 2.1 Equações Diferenciais Ordinárias

Uma *Equação Diferencial Ordinária* é uma equação cuja incógnita é uma função e que estabelece uma relação entre a *função incógnita* e suas derivadas.

Seja  $n \in \mathbb{N}$  um natural positivo,  $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua em  $U$ . Consideremos o problema de se encontrar uma função  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sendo  $I$  um intervalo e  $x$  diferenciável em  $I$ , cujo gráfico esteja contido em  $U$  e tal que

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad (2.1)$$

para qualquer  $t \in I$ .

A Equação 2.2 é a equação diferencial que representa este problema.

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.2)$$

Dado um ponto  $(t_0, x_0) \in U$  ( $t_0 \in \mathbb{R}$  e  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ), se, além de se exigir que a função  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfaça a Equação (2.1), também se exigir que

$$x(t_0) = x_0, \quad (2.3)$$

denominamos este um *problema de valor inicial* (PVI).

Um função  $x$ , definida em um intervalo e diferenciável neste intervalo, que satisfaça a Equação (2.1) é denominada uma *solução* da equação diferencial; se satisfizer as Equações (2.1) e (2.3), é solução do problema de valor inicial.

O problema de valor inicial será representado pelo par de equações

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Conforme está demonstrado no capítulo 10 de [3] sempre existe solução para um problema de valor inicial (2.4). Mais precisamente, temos o Teorema 2.1.

**Teorema 2.1** (Cauchy-Peano). *Sejam  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua no aberto  $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $(t_0, x_0) \in U$  um ponto e  $a > 0$  e  $b > 0$  reais tais que o retângulo  $R_{a,b} = [t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}(x_0, b) \subseteq U$ . Defina  $M$  como sendo uma cota superior de  $\|f(t, x)\|$  no retângulo  $R_{a,b}$ . Seja o número real  $\alpha = \min\{a, b/M\}$ . Então existe (pelo menos) uma solução do problema de valor inicial definida no intervalo fechado  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ .* ■

O Teorema 2.1 nos garante apenas a existência de solução para o problema de valor inicial, mas sob suas hipóteses não há necessariamente unicidade de solução, como é o caso do problema de valor inicial a seguir.

Seja  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(t, x) = nx^{(n-1)/n}$ , sendo  $n > 2$  um natural qualquer fixado. Quer se mostrar que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = n[x(t)]^{(n-1)/n} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

tem mais de uma solução.

Para isto basta se observar que o caminho identicamente nulo,  $x(t) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , é solução da Equação (2.5) e que a função definida por (2.6)

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t^n, & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

também é solução da Equação (2.5).

Sobre o argumento  $(t, x) \in U$  da função  $f$ , diz-se que  $t$  é a *variável temporal* e que  $x$  é a *variável espacial*.

A função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida no aberto  $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  é *lipschitziana na variável espacial* em  $U$  (ou simplesmente lipschitziana em  $U$ ) quando existir uma constante real  $K > 0$  tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K\|x - y\|$$

para quaisquer pontos  $(t, x), (t, y) \in U$  cujas primeiras coordenadas sejam iguais. Diz-se ainda que  $K$  é uma *constante de Lipschitz* ou que  $f$  satisfaz a *condição de Lipschitz*.

A fim de se garantir unicidade de solução do problema de valor inicial, a hipótese adicional de que a função  $f$  deve ser lipschitziana em  $U$  deve ser acrescentada, e isto nos fornece o Teorema 2.2.

**Teorema 2.2** (Picard-Lindelöf). *Sejam  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua no aberto  $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $(t_0, x_0) \in U$  um ponto e  $a > 0$  e  $b > 0$  reais tais que o retângulo  $R_{a,b} = [t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}(x_0, b) \subseteq U$ . Defina  $M$  como sendo uma cota superior de  $\|f(t, x)\|$  no retângulo  $R_{a,b}$ . Seja o número real  $\alpha = \min\{a, b/M\}$ . Se  $f$  é lipschitziana na variável espacial em  $R_{a,b}$ , então existe uma única solução do problema de valor inicial definida no intervalo fechado  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ .* ■

Observemos que a função  $f$  pode ser escrita como um vetor de  $n$  coordenadas do tipo  $f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))$ , sendo  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Definimos a *derivada parcial espacial* de  $f$  como sendo a função  $\frac{\partial f}{\partial x} : U \rightarrow M(n)$  (em que  $M(n)$  é o conjunto das matrizes  $n \times n$ ) tal que

$$(t, x) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t, x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(t, x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(t, x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(t, x) \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Conforme descrito em [3], usando a desigualdade do valor médio, obtemos que, quando a derivada parcial espacial de  $f$  for uma aplicação contínua em  $U$ ,  $f$  terá uma constante de Lipschitz quando for restrita a um conjunto compacto. Portanto, pode-se trocar a hipótese de que  $f$  é lipschitziana no Teorema 2.2 pela hipótese de que  $f$  tem derivada parcial espacial contínua, o que é mais simples de se verificar a fim de se garantir a unicidade da solução.

Entende-se por *solução maximal* do problema de valor inicial (2.4) um caminho diferenciável  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que, dada qualquer outra solução  $\tilde{x}(t) : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  do mesmo problema de valor inicial, teremos, necessariamente,  $J \subseteq I$  e  $\tilde{x}(t) = x(t)$  para todo  $t \in J \cap I$ . (Observemos que  $J \cap I \neq \emptyset$  pois  $x$  e  $\tilde{x}$  são soluções do mesmo problema de valor inicial.)

Conforme demonstrado em [3], temos o Teorema 2.3.

**Teorema 2.3.** *Nas condições do Teorema 2.2, existe uma única solução maximal  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  para o problema de valor inicial (2.4). Além disso,  $I$  é um intervalo aberto.* ■

Doravante, quando nos referirmos à solução de um problema de valor inicial, estaremos tratando da solução maximal do problema.

Um caso particular de equação diferencial é quando a função  $f$  não depende da variável temporal. Mais precisamente, teremos  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  em que  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  é um aberto. Neste caso, teremos que a Equação (2.4) será dada por (2.8)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Quando  $f$  for uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , e se  $A \in M(n)$  for a matriz que representa  $T$  na base canônica de  $\mathbb{R}^n$ , a Equação (2.8) se resume à Equação (2.9).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.9)$$

denominada *equação diferencial linear*.

Conforme demonstrado no primeiro capítulo de [4], toda equação diferencial linear tem solução cujo domínio é toda a reta real e é dada pela Equação (2.10),

$$x(t) = e^{tA} x_0 \quad (2.10)$$

em que  $e^{tA}$  é dado por

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}. \quad (2.11)$$

Muitas vezes é comum se escrever  $\exp(tA)$  no lugar de  $e^{tA}$ .

Em geral, dada uma sequência de matrizes de mesma dimensão  $\{M_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , definimos

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N M_k \quad (2.12)$$

quando este limite existir. É demonstrado também em [4] que a série apresentada na Equação (2.11) converge para qualquer matriz quadrada  $A$ .

## 2.2 Teoria de Controle

O problema clássico que a teoria de controle se propõe a estudar é o de se obter uma função  $u(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que a equação diferencial (2.13)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)x(t) + Bu(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.13)$$

tenha uma solução  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  com um certo comportamento desejado. (Na Equação (2.13),  $a : I \rightarrow M(n)$  é uma função contínua cuja imagem é uma matriz quadrada  $n \times n$  e  $B$  é uma matriz  $n \times m$ ).

Em [3], demonstra-se que a solução maximal  $x$  de (2.13) tem como domínio o intervalo  $I$ . Em particular, pode-se tomar  $I = \mathbb{R}$ .

Agora vamos nos atentar ao caso em que  $a$  é constante, i.e.,  $a(t) = A \in M(n)$  para todo  $t \in I = [t_0, t_1]$ . O problema se reduz à Equação (2.14)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.14)$$

cuja solução é dada pela Equação 2.15

$$x(t) = e^{tA} \left[ e^{-t_0 A} x_0 + \int_{t_0}^t e^{-\tau A} B u(\tau) d\tau \right] \quad (2.15)$$

para todo  $t \in [t_0, t_1]$ .

Considere agora que  $I = \mathbb{R}$ . Definimos que o sistema dado pela Equação (2.14) é *completamente controlável* (*c.c.*) quando, dados quaisquer  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  e  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , existir um real  $t_1 > t_0$  e uma função  $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que, a solução  $x$  da Equação (2.14) seja tal que  $x(t_1) = x_1$ .

A fim de se estudar a controlabilidade do sistema da Equação (2.14), é conveniente definirmos a matriz  $n \times mn$

$$U(A, B) = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-2}B \ A^{n-1}B] \quad (2.16)$$

denominada *matriz de controlabilidade* associada a este sistema.

Conforme demonstrado em [5], temos o Teorema 2.4.

**Teorema 2.4.** *Para que o sistema da Equação (2.14) seja completamente controlável, é necessário e suficiente que a matriz de controlabilidade  $U(A, B)$  associada a este sistema tenha posto máximo, i.e.,  $\text{rank}(U(A, B)) = n$ .*

*Demonstração.* *Necessidade* ( $\Rightarrow$ ): suponhamos, por absurdo, que o sistema seja controlável, mas que  $\text{rank}(U(A, B)) < n$ . Então existiria (ver [6]) um vetor linha  $q \in \mathbb{R}^n$  não nulo tal que

$$qB = 0, \ qAB = 0, \ \dots, \ qA^{n-1}B = 0. \quad (2.17)$$

Por hipótese, existem  $t_1 > t_0$  e  $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  tais que, dados  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$  arbitrários, teremos  $x(t_1) = x_1$ . Em particular, podemos tomar  $x_1 = 0$ . Pela Equação 2.15, e pelo fato de que  $e^{tA}$  tem inversa (ver [4]) para qualquer  $t \in \mathbb{R}$  e qualquer  $A \in M(n)$ , podemos escrever

$$-x_0 = e^{t_0 A} \int_{t_0}^{t_1} e^{-\tau A} B u(\tau) d\tau. \quad (2.18)$$

Pelo Teorema A.1, podemos escrever

$$e^{-tA} = r_0(t)I + r_1(t)A + \dots + r_{n-1}(t)A^{n-1} \quad (2.19)$$

para todo  $t \in [t_0; t_1]$ , e assim, a Equação 2.18 se torna

$$-x_0 = e^{t_0 A} \int_{t_0}^{t_1} (r_0(\tau)I + r_1(\tau)A + \dots + r_{n-1}(\tau)A^{n-1}) B u(\tau) d\tau. \quad (2.20)$$

multiplicando os dois lados de 2.20 à esquerda por  $q$ , chegamos à conclusão que  $q x_0 = 0$ . Como  $x_0$  foi escolhido arbitrariamente, isto implicaria que  $q = 0$ , que está em contradição com a forma como  $q$  foi escolhido. Portanto  $\text{rank}(U(A, B)) = n$ .

*Suficiência* ( $\Leftarrow$ ): Por hipótese,  $\text{rank}(U(A, B)) = n$ . Escolheremos arbitrariamente  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  e  $t_1 > t_0$ . Consideraremos a matriz

$$M = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\tau A} B B^T e^{-\tau A^T} d\tau \quad (2.21)$$

Primeiro provaremos que  $M$  é invertível.

Seja  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  um vetor coluna qualquer e  $\psi_\alpha : [t_0; t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  dada por  $\psi_\alpha(t) = \alpha^T e^{-tA} B$ . Teremos então

$$\alpha^T M \alpha = \int_{t_0}^{t_1} \psi_\alpha(\tau) \psi_\alpha^T(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \|\psi_\alpha(\tau)\|^2 d\tau \geq 0. \quad (2.22)$$

Assim,  $M$  é positiva semi-definida; portanto, será não-invertível se, e somente se, existir um  $\hat{\alpha} \neq 0$  tal que  $\hat{\alpha}^T M \hat{\alpha} = 0$ . Se fosse este o caso, em virtude da Equação 2.22, da continuidade de  $\psi_\alpha$  e da continuidade da norma, teríamos  $\psi_\alpha(t) = 0$  para todo  $t \in [t_0; t_1]$ , o que implicaria que

$$\hat{\alpha} \left( I - tA + \frac{1}{2!} A^2 - \dots \right) B = 0 \quad (2.23)$$

para todo  $t \in [t_0; t_1]$ . Desta maneira teríamos

$$\hat{\alpha} B = 0, \hat{\alpha} AB = 0, \hat{\alpha} A^2 B = 0, \dots \quad (2.24)$$

implicando que  $\text{rank}(U(A, B)) < n$  (pois  $\hat{\alpha} \neq 0$ ), o que vai contra a hipótese inicial. Então  $M$  é invertível.

Por causa da inversibilidade de  $M$ , podemos usar o sinal de controle  $u$  como sendo

$$u(t) = -B^T e^{-tA^T} M^{-1} (e^{-t_0 A} x_0 - e^{-t_1 A} x_1). \quad (2.25)$$

Ao se substituir 2.25 em 2.15, o valor da solução no instante  $t_1$  será

$$\begin{aligned} x(t_1) &= e^{t_1 A} \left[ e^{-t_0 A} x_0 - \int_{t_0}^{t_1} e^{-\tau A} B B^T e^{-\tau A^T} M^{-1} (e^{-t_0 A} x_0 - e^{-t_1 A} x_1) d\tau \right] \\ &= e^{t_1 A} \left[ e^{-t_0 A} x_0 - \left( \int_{t_0}^{t_1} e^{-\tau A} B B^T e^{-\tau A^T} d\tau \right) M^{-1} (e^{-t_0 A} x_0 - e^{-t_1 A} x_1) \right] \\ &= e^{t_1 A} \left[ e^{-t_0 A} x_0 - M M^{-1} (e^{-t_0 A} x_0 - e^{-t_1 A} x_1) \right] \\ &= x_1, \end{aligned} \quad (2.26)$$

que era o que queríamos demonstrar. ■

*Observação:* na demonstração do Teorema 2.4, a hipótese de que o sistema deva ser completamente controlável, pode ser substituída por uma característica ligeiramente mais abrangente. Em um sistema completamente controlável, garante-se simplesmente a **existência** de um instante  $t_1 > t_0$  para o qual existe uma função  $u(t)$  que controla o sistema no intervalo  $[t_0, t_1]$ ; todavia, observemos que, a existência da função  $u$  foi demonstrada para um instante **arbitrário** de  $t_1 > t_0$ . Portanto, a existência de um  $t_1 > t_0$  que justifique um sistema ser controlável, nos garante que sua matriz de controlabilidade tem posto máximo, implicando na possibilidade de uma escolha arbitrária de um instante  $t_1 > t_0$ .

Fica então estabelecido o Corolário 2.4.1, deduzido diretamente da demonstração do Teorema 2.4.

**Corolário 2.4.1.** *Seja um sistema descrito pela Equação (2.14). Se, dados quaisquer  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , se existir  $t_1 > t_0$  para o qual exista uma função de controle  $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  que proporcione  $x(t_1) = x_1$ , então para qualquer  $t_1 > t_0$  também será possível se obter uma função  $u$  com tal propriedade.*

Em [5] também encontra-se o Corolário 2.4.2 do Teorema 2.4.

**Corolário 2.4.2.** Se  $\text{rank}(B) = p$ , então a condição sobre a matriz de controlabilidade no Teorema 2.4 se reduz a

$$\text{rank}([B \ AB \ \dots \ A^{n-p}B]) = n. \quad (2.27)$$

*Demonstração.* Definamos a matriz

$$U_k = [B \ AB \ \dots \ A^k B] \quad (2.28)$$

para todo natural  $k$  e  $U_0 = [B] = B$ .

Primeiro provaremos que, se  $\text{rank}(U_l) = \text{rank}(U_{l+1})$ , então,  $\text{rank}(U_l) = \text{rank}(U_{l+1}) = \text{rank}(U_{l+2}) = \text{rank}(U_{l+3}) = \dots$

De fato, se  $\text{rank}(U_l) = \text{rank}(U_{l+1})$ , isto significa que cada coluna da matriz  $A^{l+1}B$  é combinação linear das colunas de  $U_l$ . Ou seja, a matriz  $A$  aplicada em uma coluna de  $U_l$  resulta em uma combinação linear de colunas de  $U_l$ .

Como as colunas de  $U_{l+1}$  são combinações lineares das colunas de  $U_l$ , então  $A$  aplicada em uma coluna de  $U_{l+1}$  também resultará em uma combinação linear de colunas de  $U_l$  e portanto, se o posto de  $U_l$  for igual ao posto de  $U_{l+1}$ , o posto de  $U_{l+2}$  será igual ao posto de  $U_{l+1}$  e  $U_l$ . O resultado segue por indução.

Tomemos o menor  $l$  natural para o qual o posto de  $U_l$  não aumenta. É então suficiente provarmos que, quando  $\text{rank}(B) = p$ ,  $l < n - p$ .

De fato, pela forma como  $l$  foi escolhido, para todo  $k$  tal que  $0 \leq k \leq l-1$ , o posto de  $U_k$  aumenta pelo menos uma unidade quando  $k$  aumenta de uma unidade. Como  $\text{rank}(B) = \text{rank}(U_0) = p$ , teremos que  $p + l \leq \text{rank}(U_\ell) \leq n$ . Portanto,  $l \leq n - p$ . ■

### 3 Redes Complexas

#### 3.1 Conceitos gerais

Fixemos um natural  $n \in \mathbb{N}$ . Denominaremos  $V = \{i \in \mathbb{N}; 1 \leq i \leq n\}$  o conjuntos dos *vértices* ou *nós* e  $E \subseteq V^2$  o conjunto das *arestas* (*edges* em inglês). Um *grafo orientado* (ou *rede orientada*) é o par  $G = (V, E)$  formado por nós e arestas.

Intuitivamente, o conjunto das arestas indica quando um nó aponta para outro. Mais precisamente, diremos que o nó  $i$  *aponta* para o nó  $j$  quando  $(i, j) \in E$ . Pensando do ponto de vista de tráfego de informação, o nó  $i$  envia informação para o nó  $j$  quando  $(i, j) \in E$ .

Uma outra maneira de representar uma rede orientada, descrita no segundo capítulo de [7], é usar o conceito de *matriz de adjacências*.

A matriz de adjacências  $A = (a_{ij})$  (ver [7]) da rede orientada  $G = (V, E)$  é definida da seguinte forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } (j, i) \in E \\ 0, & \text{se } (j, i) \notin E. \end{cases} \quad (3.1)$$

Uma generalização do conceito de redes orientadas são as *redes orientadas ponderadas*. Neste caso, a matriz de adjacências seria definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} w_{ij} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, & \text{se } (j, i) \in E \\ 0, & \text{se } (j, i) \notin E. \end{cases} \quad (3.2)$$

em que  $w_{ij}$  são denominados os *pesos* de cada aresta  $(j, i) \in E$ .

Em [8] o conceito de matriz de adjacências é usado para descrever o sistema dinâmico

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.3)$$

em que  $A$  é a matriz de adjacências de uma rede,  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_i(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$  é um vetor cujas coordenadas representam, por exemplo, a quantidade de informação que passa pelo  $i$ -ésimo nó desta rede de comunicação,  $B$  é uma matriz  $n \times m$  e  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_i(t), \dots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^m$  é um vetor cujas coordenadas são sinais de controle que agem sobre alguns nós podendo, eventualmente, algum nó não ser controlado diretamente por nenhum dos sinais  $u_i(t)$ . Na verdade, podemos sempre considerar que  $m = n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $B \in M(n)$  e escolhermos a  $k$ -ésima coluna de  $B$  preenchida com zeros a fim de não se considerar a  $k$ -ésima entrada de controle. No caso de cada sinal de controle ser aplicado exclusivamente em um único nó, pode-se escolher uma ordenação conveniente dos nós de tal forma que  $B$  seja uma matriz diagonal.

Uma questão natural seria: qual a menor quantidade de nós que precisam ser diretamente controlados a fim de se conseguir controlar a rede por inteiro?

Pelo Teorema 2.4, esta rede é completamente controlável se, e somente se, a matriz de controlabilidade associada a ela tiver posto máximo.

A tarefa se resume então a encontrar as matrizes diagonais  $B$  com o menor número possível de entradas não nulas tais que a matriz de controlabilidade

$$[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-2}B \ A^{n-1}B] \quad (3.4)$$

tenha posto máximo. Notemos que se tomarmos  $B = I_n$ , ou seja, tivermos sinal de controle sobre todos os nós da rede, trivialmente, o sistema será controlável.

Sejam  $d_1, \dots, d_n$  os elementos da diagonal de  $B$ , e  $d_{k_1}, \dots, d_{k_m}$  os elementos não nulos na diagonal. Estudar a controlabilidade do sistema (3.3) é equivalente a se estudar a controlabilidade no caso em que  $d_{k_1} = \dots = d_{k_m} = 1$ , pois sempre existe uma função linear invertível que transforma uma matriz na outra. Isto é, sempre existe uma matriz invertível  $T = \{t_{ij}\} \in M(n)$  tal que

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & d_{k_1} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & d_{k_m} & & \ddots \end{bmatrix} \cdot T = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & 1 & & 0 & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} = B'. \quad (3.5)$$

Para se verificar isto, basta se tomar

$$t_{ij} = \begin{cases} d_i^{-1}, & \text{se } i = j \text{ e } i \in \{d_{k_1}, \dots, d_{k_m}\} \\ 1, & \text{se } i = j \text{ e } i \notin \{d_{k_1}, \dots, d_{k_m}\} \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (3.6)$$

Com isto, teremos que  $\text{rank}(U(A, B)) = \text{rank}(U(A, B'))$ . A fim de se encontrar quais nós precisam ou não serem controlados, consideram-se as  $2^n - 1$  matrizes diagonais  $B'$  não nulas cujas entradas sejam 1 ou zero e calcula-se o posto das matrizes  $U(A, B')$ . O número de entradas não nulas da matriz  $B'$  com o menor número de entradas não nulas que faz  $U(A, B')$  ter posto máximo é o número mínimo  $n_{\min}$  de nós que precisam ser controlados a fim de se obter completa controlabilidade na rede.

A possibilidade de se substituir os elementos não nulos por 1 nas matrizes que representam a rede está relacionada com a *controlabilidade estrutural* (ver [9] e [10]) da rede. Intuitivamente, o fato de a controlabilidade da rede não ser alterada pela transformação  $T$  da Equação 3.5 significa que estas redes são estruturalmente equivalentes.

Um *minimum driver set* (MDS) é qualquer conjunto de nós de tamanho  $n_{\min}$  que, quando controlados, permitem a completa controlabilidade da rede.

Para exemplificar, consideremos a rede cuja dinâmica é descrita pela Equação (3.7).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_B \cdot \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

A Figura 2 ilustra este caso.

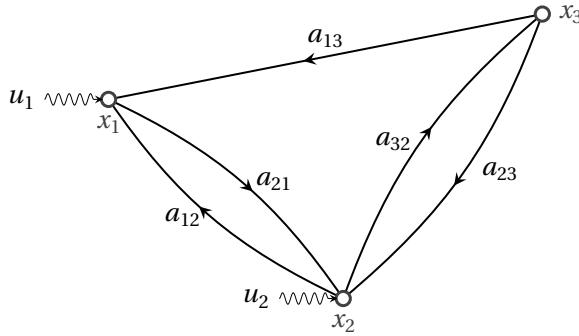


Figura 2 – Exemplo de rede dinâmica

Neste caso, apesar de a rede ser controlada por duas entradas atuando em dois nós distintos, seus *minimum driver sets* são qualquer um dos conjuntos com um único nó, pois se tomássemos  $B$  como sendo qualquer uma das matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o sistema ainda seria completamente controlável.

### 3.2 Generalização para nós multidimensionais

Generalizando o problema, podemos pensar que cada nó é um sistema dinâmico por si só e que interage com os demais nós de maneira semelhante à descrita na Equação (3.3).

Inicialmente consideremos que o  $i$ -ésimo nó de uma rede seja representado por um sistema dinâmico da forma

$$\dot{x}_i(t) = Fx_i(t) + B_{\text{nó}}u_i(t). \quad (3.8)$$

em que  $x_i(t) = (x_{i1}(t), \dots, x_{ip}(t)) \in \mathbb{R}^p$ ,  $u_i(t) = (u_{i1}(t), \dots, u_{ip}(t)) \in \mathbb{R}^p$ ,  $F, B_{\text{nó}} \in M(p)$ .

Considerando agora que a matriz de adjacências da rede seja  $A$ , vamos modelar o problema através da Equação (3.9)

$$\dot{x}(t) = (A \otimes I_p + I_n \otimes F)x(t) + (B \otimes B_{\text{nó}})u(t), \quad (3.9)$$

em que  $\otimes$  é o produto de Kronecker (Definição A.2),  $I_n$  e  $I_p$  são as matrizes identidade de ordens  $n$  e  $p$  respectivamente,

$$x(t) = (x_{11}(t), \dots, x_{1p}(t), \dots, x_{i1}(t), \dots, x_{ip}(t), \dots, x_{n1}(t), \dots, x_{np}(t)) \in \mathbb{R}^{np} \quad (3.10)$$

e

$$u(t) = (u_{11}(t), \dots, u_{1p}(t), \dots, u_{i1}(t), \dots, u_{ip}(t), \dots, u_{n1}(t), \dots, u_{np}(t)) \in \mathbb{R}^{np}. \quad (3.11)$$

Retomando o exemplo anterior, se uma rede com nós unidimensionais fosse descrita conforme a Equação (3.7),

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_B \cdot \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

e o sistema dinâmico do  $i$ -ésimo nó representado pela Equação 3.12,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i1}(t) \\ \dot{x}_{i2}(t) \\ \dot{x}_{i3}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_F \cdot \begin{bmatrix} x_{i1}(t) \\ x_{i2}(t) \\ x_{i3}(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B_{\text{nó}}} \cdot \begin{bmatrix} u_{i1}(t) \\ u_{i2}(t) \\ u_{i3}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

a nova rede seria descrita pela Equação (3.13).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{11}(t) \\ \dot{x}_{12}(t) \\ \dot{x}_{13}(t) \\ \dot{x}_{21}(t) \\ \dot{x}_{22}(t) \\ \dot{x}_{23}(t) \\ \dot{x}_{31}(t) \\ \dot{x}_{32}(t) \\ \dot{x}_{33}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & & & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & & & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{(A \otimes I_p + I_n \otimes F)} \cdot \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \\ x_{13}(t) \\ x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \\ x_{23}(t) \\ x_{31}(t) \\ x_{32}(t) \\ x_{33}(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ & & & 2 & 0 & 0 & & & \\ & 0 & & 0 & 2 & 0 & & 0 & \\ & & 0 & 0 & 2 & & & & \\ 0 & & & 0 & 0 & & & & \end{bmatrix}}_{(B \otimes B_{\text{nó}})} \cdot \begin{bmatrix} u_{11}(t) \\ u_{12}(t) \\ u_{13}(t) \\ u_{21}(t) \\ u_{22}(t) \\ x_{23}(t) \\ u_{31}(t) \\ u_{32}(t) \\ u_{33}(t) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

A Figura 3 ilustra como ficariam conectados os nós multidimensionais da nova rede construída pela Equação (3.13) a partir das matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $F$  e  $B_{\text{nó}}$  definidas nas Equações (3.7) e 3.12.

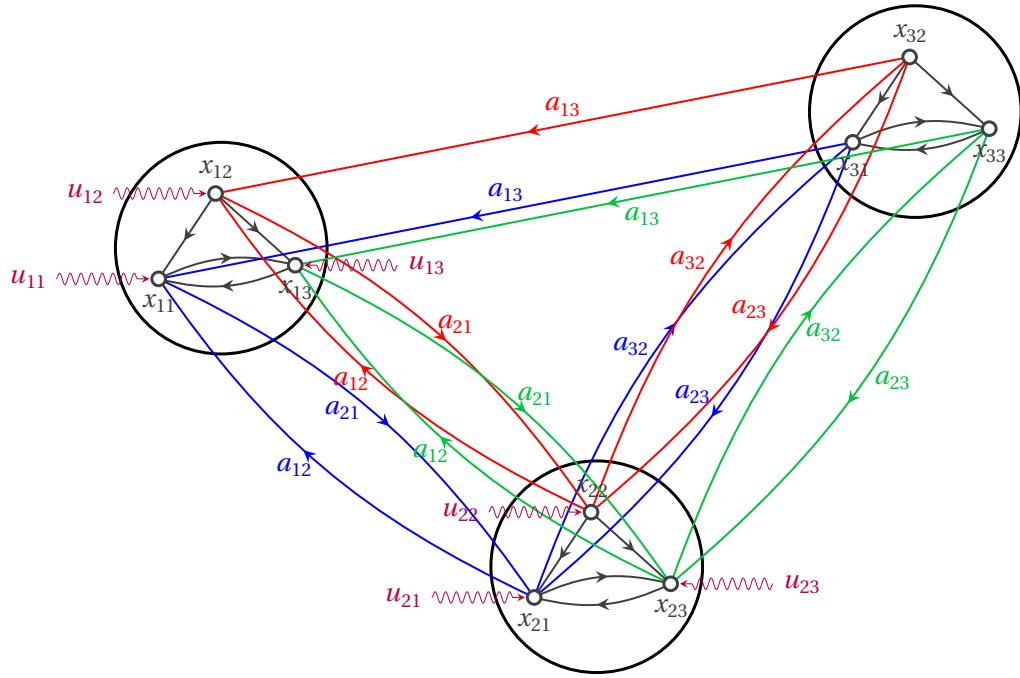


Figura 3 – Exemplo de rede dinâmica com nós multidimensionais

A partir destas definições a Conjectura 3.1 foi levantada.

**Conjectura 3.1.** Se o sistema dado pela Equação (3.3) for completamente controlável e na Equação (3.8) tivermos matriz  $B_{n\bar{o}} = I_p$ , então, para qualquer matriz  $F$  na Equação (3.8) o sistema da Equação (3.9) é completamente controlável.

Intuitivamente, esta conjectura estima que a controlabilidade da rede com nós unidimensionais (Equação (3.3)) pode, de alguma maneira, ser preservada mesmo quando seus nós são substituídos por um sistema dinâmico mais complexo.

Sabe-se que o conjunto dos sistemas controláveis, isto é, todos os pares de matrizes  $(A, B) \in M(n) \times M(n, m)$  tais que  $U(A, B)$  tem posto máximo, é um conjunto denso em  $M(n) \times M(n, m)$  (ver [11]). Na seção a seguir, demonstraremos que, além disto, a conjectura 3.1 é verdade para quase toda<sup>1</sup> matriz  $F$ .

<sup>1</sup> A expressão “para quase todo [ponto]” (“for almost all [point]”) é definida formalmente em [12].



## 4 Resultados

Quando a matriz  $A$  tiver diagonal principal nula, a rede cuja dinâmica é descrita pela Equação (3.3), não tem arestas que saem e voltam para o próprio nó de saída. Intuitivamente, é como se cada nó não tivesse uma dinâmica própria.

Fazendo esta analogia com o caso em que cada nó representa um sistema dinâmico de  $p$  estados, esta situação seria representada pelo caso em que  $F = 0$  na Equação (3.8) e na Equação (3.9), situação ilustrada na Figura 4

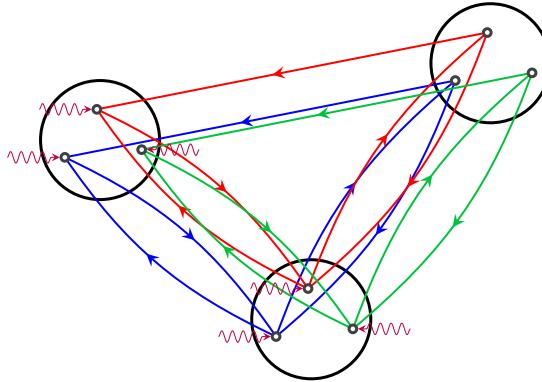
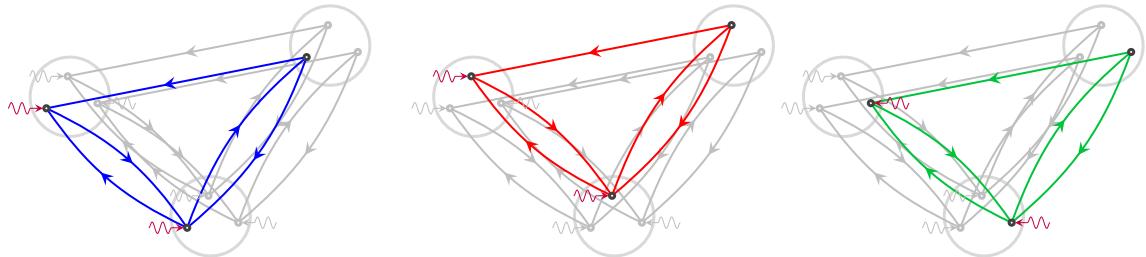


Figura 4 – Exemplo de rede com dinâmica nula em nós multidimensionais.

Todavia, observemos que uma rede descrita por (3.9) com  $F = 0$  e  $B_{\text{nó}} = I_p$ , é equivalente a  $p$  sistemas **independentes** do tipo

$$\dot{w}_k(t) = Aw_k(t) + Bz_k(t) \quad (4.1)$$

em que  $w_k(t) = (x_{1k}(t), \dots, x_{nk}(t))$  e  $z_k(t) = (u_{1k}(t), \dots, u_{nk}(t))$ , cada um com uma condição inicial  $x_k(t_0) = x_{0k} \in \mathbb{R}^n$ , para todo natural  $k$  de 1 a  $p$ . Esta situação fica ilustrada pelas Figuras 5a, 5b e 5c.



(a) Primeira cópia do sistema (4.1)      (b) Segunda cópia do sistema (4.1)      (c)  $p$ -ésima cópia do sistema (4.1)

Figura 5 – Independência entre as  $p$  redes quando  $F = 0$ .

Em virtude do Corolário 2.4.1, se a matriz de controlabilidade  $U(A, B)$  tiver posto máximo, então para cada  $k$  de 1 a  $p$ , poderíamos escolher qualquer valor final  $x_{1k} \in \mathbb{R}^n$ , e um instante  $t_1$ , **comum a todos os  $p$  sistemas** com  $t_1 > t_0$  tal que  $x_k(t_1) = x_{1k}$ .

Sendo assim, se  $F = 0$  e  $B_{\text{nó}} = I_p$  o sistema descrito pela Equação (3.9) é completamente controlável se a matriz de controlabilidade  $U(A, B)$  tiver posto máximo. Este raciocínio é a demonstração do Teorema 4.1.

**Teorema 4.1.** *Sejam  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ ,  $B$  uma matriz de ordem  $n \times m$  e  $p > 0$  um natural qualquer. A matriz de controlabilidade  $U(A, B)$  tem posto máximo se, e somente se,  $U((A \otimes I_p), (B \otimes I_p))$  também o tiver.* ■

Dada uma matriz  $X \in M(n)$  cujo posto seja máximo, existe uma vizinhança aberta de  $X$  em que seu posto não se altera. Em outras palavras, se o determinante de  $X$  for não nulo,  $\det(X) \neq 0$ , existe uma vizinhança aberta de  $X$ ,  $U_X$ , tal que, para toda matriz  $Y \in U_X$ , tem-se  $\det(Y) \neq 0$ . Isto é decorrente do fato de que a função determinante  $\det : M(n) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua em  $M(n)$  e o conjunto  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  é aberto.

Portanto, pela continuidade da matriz  $U((A \otimes I_p + I_n \otimes F), B \otimes I_p)$  com relação à matriz  $F$ , sabemos que existe  $\delta > 0$  tal que, para toda  $F$  com  $\|F\| < \delta$ , a matriz  $U((A \otimes I_p + I_n \otimes F), B \otimes I_p)$  tem ainda posto máximo, implicando no fato de que o sistema dado pela Equação (3.9) (com  $B_{\text{nó}} = I_p$ ) é completamente controlável para toda matriz  $F$  em uma vizinhança da matriz 0 com raio suficientemente pequeno. Esta argumento é a demonstração do Teorema 4.2.

**Teorema 4.2.** *Se o sistema descrito pela Equação (2.14) for completamente controlável, então o sistema com nós multidimensionais, descrito pela Equação (3.9), se tiver  $B_{\text{nó}} = I_p$ , também será completamente controlável resguardado que  $\|F\|$  seja suficientemente pequeno. Isto é, se o sistema (2.14) for completamente controlável, então existirá  $\delta > 0$  tal que, se  $\|F\| < \delta$ , o sistema (3.9) também será completamente controlável.* ■

Este teorema diz que, para alterações suficientemente pequenas na dinâmica interna de cada nó da rede, a controlabilidade é preservada. Em outras palavras, se a dinâmica da rede unidimensional representada por  $A$  for forte o suficiente, pode-se variar com certa liberdade a dinâmica interna de cada nó que a controlabilidade da rede se mantém.

#### 4.1 Dinâmicas distintas para os nós

Até então, a dinâmica de cada nó da rede era a mesma para todos os nós, descrita pela matriz  $F$ . Consideremos agora o caso mais geral em que o  $i$ -ésimo nó é regido por uma dinâmica própria, descrita pela matriz  $F_i$ , i.e., a Equação (3.8) se torna a Equação (4.2)

$$\dot{x}_i(t) = F_i x_i(t) + B_{\text{nó}} u_i(t). \quad (4.2)$$

para todo inteiro  $i$  de 1 a  $n$ .

Portanto, o sistema que modela a dinâmica da rede por completo, seria descrito por

$$\dot{x}(t) = (A \otimes I_p + \mathcal{F})x(t) + (B \otimes B_{\text{nó}})u(t), \quad (4.3)$$

em que a matriz  $\mathcal{F} \in M(np)$  é formada por blocos de matrizes quadradas de ordem  $p$  e é dada por:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} F_1 & \bar{0}_p & \cdots & \bar{0}_p \\ \bar{0}_p & F_2 & \cdots & \bar{0}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{0}_p & \bar{0}_p & \cdots & F_n \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

em que  $\bar{0}_p$  é a matriz nula de ordem  $p \times p$ .

Novamente, supondo que  $B_{\text{nó}} = I_p$  e que a matriz de controlabilidade  $U(A, B)$  tenha posto máximo, como a matriz  $(A \otimes I_p + \mathcal{F})$  depende continuamente de  $(F_1, F_2, \dots, F_n) \in (M(p))^n$ , então existem  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  tais que, se  $\|F_i\| < \delta_i$  para todo inteiro  $i$  de 1 a  $n$ , a matriz  $U((A \otimes I_p + \mathcal{F}), (B \otimes I_p))$  também terá posto máximo, garantindo, assim, a completa controlabilidade do sistema.

**Definição 4.1.** Seja  $X$  um conjunto e  $\mu$  uma medida em  $X$ . Diz-se que os pontos de  $X$  tem quase sempre uma propriedade  $P$  ou que quase todo ponto  $x \in X$  tem a propriedade  $P$  quando o conjunto  $N = \{x \in X; P(x) \text{ é falso}\}$  tem medida nula, ou seja,  $\mu(N) = 0$ .

**Teorema 4.3.** Seja um sistema como o descrito na Equação (4.3) em que o matriz  $U(A, B)$  tenha posto máximo e  $B_{\text{nó}} = I_p$ . Então para quase toda matriz  $\mathcal{F}$  o sistema (4.3) é completamente controlável.

*Demonstração.* Primeiramente observemos que podemos identificar o conjunto das matrizes quadradas de ordem  $q$  com  $\mathbb{R}^{q^2}$  de tal maneira que, uma matriz quadrada  $X \in M(q)$  de ordem  $q$  pode ser identificada como o vetor

$$(x_{11}, \dots, x_{1q}, \dots, x_{i1}, \dots, x_{iq}, \dots, x_{q1}, \dots, x_{qq}) \in \mathbb{R}^{q^2}.$$

Notemos também que o determinante de uma matriz quadrada de ordem  $q$  é um polinômio de  $q^2$  variáveis com domínio em  $\mathbb{R}^{q^2}$ . Mais precisamente, se a matriz  $X = \{x_{ij}\}$  quadrada tem ordem  $q$ , então

$$\det(X) = P(x_{11}, \dots, x_{1q}, \dots, x_{i1}, \dots, x_{iq}, \dots, x_{q1}, \dots, x_{qq})$$

em que  $P : \mathbb{R}^{q^2} \rightarrow \mathbb{R}$  é um polinômio de  $q^2$  variáveis.

Por simplicidade, definiremos  $U(\mathcal{F}) = U((A \otimes I_p + \mathcal{F}), B \otimes I_p)$ . Estamos interessados em calcular a medida do conjunto

$$N = \{\mathcal{F} \in M(np); U(\mathcal{F}) \text{ não tem posto máximo}\}.$$

Para que  $U(\mathcal{F})$  não tenha posto máximo, é preciso que pelo menos uma de suas  $\binom{n^2 p^2}{2}$  submatrizes quadradas tenha determinante nulo. Seja  $S_i(\mathcal{F})$  a  $i$ -ésima submatriz quadrada de  $U(\mathcal{F})$ . Em virtude do Teorema A.2, para todo  $i$  tal que  $1 \leq i \leq \binom{n^2 p^2}{2}$ , o conjunto

$$\{\mathcal{F} \in M(np); \det(S_i(\mathcal{F})) = 0\}$$

tem medida zero. Como reunião finita de conjuntos de medida zero tem medida zero, o conjunto de todas as matrizes  $\mathcal{F}$  que tornam o sistema (4.3) não-controlável, tem medida zero. ■



## 5 Conclusões

A principal conclusão a respeito da variação das dinâmicas internas dos nós multidimensionais é que sempre será possível modificar suas dinâmicas mantendo-se a controlabilidade da rede se a dinâmica interna de cada nó for branda o suficiente, isto é, se a estrutura da rede original for suficientemente significante, ganha-se liberdade para se escolher como os nós multidimensionais podem se comportar e ainda assim se manter a controlabilidade geral da rede.

Mais geralmente, a menos de um conjunto de medida nula, qualquer dinâmica escolhida para cada nó multidimensional ainda mantém a completa controlabilidade da rede. Em outras palavras, isto significa que a estrutura principal da rede se sobrepõe quase sempre sobre as dinâmicas escolhidas para cada nó. Em um certo sentido, significa que a estrutura da rede principal é quase sempre o fator determinante a respeito da controlabilidade da rede com nós multidimensionais.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Aqui a expressão “*quase sempre*” também deve ser interpretada segundo a definição dada em [12].



## Referências

- [1] H. M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica*, 4th ed. Editora Edgard Blücher Ltda., 2002.
- [2] R. C. Dorf and R. H. Bishop, *Modern Control Systems*, 13th ed. Pearson Education, 2017.
- [3] C. I. Doering and A. O. Lopes, *Equações Diferenciais Ordinárias*, 4th ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [4] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, 3rd ed. Springer, 2000.
- [5] S. Barnett and R. G. Cameron, *Introduction to Mathematical Control Theory*. Oxford University Press, 1986.
- [6] E. L. Lima, *Álgebra Linear*, 1st ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [7] M. Newman, *Networks: An Introduction*. Oxford University Press, 2010.
- [8] Y. Y. Liu, J. J. Slotine, and A. L. Barabási, “Controllability of complex networks,” *Nature*, vol. 473, no. 7346, pp. 167–173, 2011.
- [9] C.-T. Lin, “Structural Controllability,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, no. 19, pp. 201–208, 1974.
- [10] O. Ore, *Theory of Graphs*. American Mathematical Society, 1962.
- [11] E. B. Lee and L. Markus, *Foundations of Optimal Control Theory*. Krieger Pub Co, 1986.
- [12] R. G. Bartle, *The Elements of Integration*. John Wiley & Sons, 1966.



## APÊNDICE A – Definições e Teoremas

**Definição A.1.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função para a qual existe uma série de potências centrada em zero  $\sum c_k t^k$  (sendo  $c_k \in \mathbb{R}$ ) convergente para todo  $t \in \mathbb{R}$  tal que

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k. \quad (\text{A.1})$$

Seja  $A$  uma matriz quadrada. Definimos a matriz  $f(A)$  da seguinte maneira:

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k \quad (\text{A.2})$$

quando a série convergir.

**Teorema A.1.** Seja  $f$  uma função como na Definição A.1 e  $A$  uma matriz de ordem  $n$ . Então existe um polinômio  $r$  de grau no máximo  $n-1$  tal que

$$f(A) = r(A) = r_0 I + r_1 A + \dots + r_{n-1} A^{n-1}. \quad (\text{A.3})$$

*Demonstração.* Seja  $p(t) = p_0 + p_1 t + \dots + t^n$  o polinômio característico da matriz  $A$ . Pelo Teorema de Cayley-Hamilton,

$$A^n = -p_0 I - p_1 A - \dots - p_{n-1} A^{n-1} \quad (\text{A.4})$$

isto é,  $A^n$  é combinação linear das  $k$ -ésimas potências de  $A$  com  $k < n$ . De maneira recursiva, podemos escrever também  $A^i$ , para qualquer natural  $i$ , como combinação linear das  $k$ -ésimas potências de  $A$  com  $k < n$ . Seja então  $f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i A^i$ . Teremos que, para cada natural  $N$ , existem coeficientes  $p_{(0,N)}, p_{(1,N)}, \dots, p_{(n-1,N)}$  tais que

$$\sum_{i=0}^N c_i A^i = p_{(0,N)} I + p_{(1,N)} A + \dots + p_{(n-1,N)} A^{n-1}. \quad (\text{A.5})$$

pois cada potência de  $A$  que aparece no lado esquerdo é combinação linear das  $k$ -ésimas potências de  $A$  com  $k < n$ .

Consideremos agora  $S = \text{span}(\{I, A, \dots, A^{n-1}\})$  e  $0 < d = \dim(S) \leq n$ . Podemos então escolher  $d$  elementos  $A^{i_0}, A^{i_1}, \dots, A^{i_{(d-1)}}$  em  $\{I, A, \dots, A^{n-1}\}$  de tal modo que o conjunto  $\{A^{i_0}, A^{i_1}, \dots, A^{i_{(d-1)}}\}$  seja linearmente independente.

Podemos então encontrar, para cada natural  $N$ , coeficientes  $r_{(0,N)}, r_{(1,N)}, \dots, r_{(d-1,N)}$  tais que

$$\sum_{i=0}^N c_i A^i = r_{(0,N)} A^{i_0} + r_{(1,N)} A^{i_1} + \dots + r_{(d-1,N)} A^{i_{(d-1)}}. \quad (\text{A.6})$$

Tomando o limite para  $N \rightarrow \infty$  dos dois lados de A.6, pelo fato do lado esquerdo convergir e pelo fato de  $\{A^{i_0}, A^{i_1}, \dots, A^{i_{(d-1)}}\}$  ser linearmente independente, as sequências  $\{r_{(0,N)}\}_{N \in \mathbb{N}}, \{r_{(1,N)}\}_{N \in \mathbb{N}}, \dots, \{r_{(d-1,N)}\}_{N \in \mathbb{N}}$  convergem, digamos, respectivamente, para  $r_0, r_1, \dots, r_{d-1}$ . Com isto demonstra-se o que queríamos. ■

**Definição A.2.** Sejam  $A = \{a_{ij}\}$  e  $B = \{b_{ij}\}$  matrizes quaisquer de ordem  $m \times n$  e  $p \times q$  respectivamente. Define-se o produto de Kronecker entre  $A$  e  $B$  como sendo a matriz de ordem  $mp \times nq$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

**Teorema A.2.** Seja  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função polinomial de  $n$  variáveis não constante. O conjunto  $P^{-1}(\{0\})$  é mensurável e tem medida zero.

*Demonstração.* Pelo fato de que polinômios são funções mensuráveis e que o conjunto  $\{0\} \subset \mathbb{R}$  é mensurável, o conjunto  $P^{-1}(\{0\})$  também o é.

A demonstração de que a medida deste conjunto é nula será feita por indução sobre a dimensão  $n$  do domínio.

Claramente, para  $n = 1$ , o teorema é verdadeiro, pois o Teorema Fundamental da Álgebra nos garante que polinômios de uma variável não constantes tem no máximo grau( $P$ ) raízes.

Agora suponhamos que, para todo polinômio  $Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_{n-1}] \setminus \{0\}$  o teorema seja verdadeiro. Podemos escrever  $P$  explicitando-se as potências de  $X_n$ :

$$P(X_1, \dots, X_n) = \sum_{k=0}^m Q_k(X_1, \dots, X_{n-1}) \cdot X_n^k.$$

Notemos que, pelo fato de  $P$  não ser constante, podemos escolher  $m$  de modo que  $Q_m \neq 0$ . Usando a hipótese de indução,  $Q_m^{-1}(\{0\})$  tem medida nula em  $\mathbb{R}^{n-1}$  e, consequentemente,

$$\lambda^n(P^{-1}(\{0\})) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{P^{-1}(\{0\})}(x) d\lambda^n(x) \quad (\text{A.8})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \chi_{P^{-1}(\{0\})}(y, t) d\lambda(t) d\lambda^{n-1}(y) \quad (\text{A.9})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1} \setminus Q_m^{-1}(\{0\})} \int_{\mathbb{R}} \chi_{P^{-1}(\{0\})}(y, t) d\lambda(t) d\lambda^{n-1}(y) \quad (\text{A.10})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1} \setminus Q_m^{-1}(\{0\})} 0 d\lambda^{n-1}(y) \quad (\text{A.11})$$

$$= 0, \quad (\text{A.12})$$

uma vez que, para todo  $y \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus Q_m^{-1}(\{0\})$ , existem no máximo uma quantidade finita de pontos  $t$  tais que  $P(y_1, \dots, y_{n-1}, t) = 0$ . ■

*Observação:* Na Equação (A.9) foi usado o Teorema de Fubini, demonstrado no Capítulo 10 de [12].