

PEDRO HENRIQUE GRUEIRO GALEB

**APREÇAMENTO DE DERIVATIVOS COM DOIS FATORES ESTOCÁSTICOS:
UMA ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE RESULTADOS OBTIDOS POR MÉTODOS
ANALÍTICOS E NUMÉRICOS**

São Paulo

2023

PEDRO HENRIQUE GRUEIRO GALEB

**APREÇAMENTO DE DERIVATIVOS COM DOIS FATORES ESTOCÁSTICOS:
UMA ANÁLISE COMPARTIVA ENTRE RESULTADOS OBTIDOS POR MÉTODOS
ANALÍTICOS E NUMÉRICOS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo ao
curso de MBA em Engenharia Financeira

Orientador: Prof. Dr. André Cury Maialy

São Paulo

2023

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre o apreçamento de derivativos bidimensionais (2 fatores estocásticos), comparando resultados analíticos com valores numéricos. Para tal, é utilizada a fórmula desenvolvida por Margrabe (1978), a simulação de Monte Carlo e finalmente o método das diferenças finitas. Por fim, os resultados numéricos e analíticos são comparados para algumas opções de troca do mercado.

Palavras-chave: Derivativo Bidimensional, Margrabe, simulação de Monte Carlo, método das diferenças finitas.

ABSTRACT

This work presents a study on the pricing of two-dimensional derivatives (2 stochastic factors), comparing analytical results with numerical values. For this purpose, the formula developed by Margrabe (1978), Monte Carlo simulation and finally the finite difference method are used. Lastly, the numerical and analytical results are compared for some exchange options on the market.

Keywords: two-dimensional derivatives, Margrabe, Monte Carlo simulation, finite difference method.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	7
1.1 MOTIVAÇÃO	7
1.2 OBJETIVO	8
1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO	9
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	10
2.1 CONCEITOS BÁSICOS	10
2.2 ESTADO DA ARTE	11
2.2 INSERÇÃO DO PRESENTE TRABALHO NA LITERATURA EXISTENTE.....	13
3 DESENVOLVIMENTO DO MODELO	15
3.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA	15
3.1.1 <i>Dinâmica de preços de uma ação que não paga dividendos:</i>	15
3.1.2 <i>A formulação de Black-Scholes-Merton</i>	16
3.1.3 <i>A formulação de Margrabe</i>	17
3.2 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO COM 2 FATORES ESTOCÁSTICOS.....	19
3.2.2 <i>Geração dos caminhos aleatórios</i>	19
3.2.3 <i>Aplicação do Payoff</i>	21
3.3 REDUÇÃO DO PROBLEMA A 1 FATOR ESTOCÁSTICO	21
3.4 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO COM 1 FATOR ESTOCÁSTICO	22
3.4.1 <i>Convergência do Modelo de Monte Carlo:</i>	23
3.5 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS COM 1 FATOR ESTOCÁSTICO	25
3.5.1 <i>Discretização do problema</i>	26
3.5.2 <i>Condições de Contorno e aplicação do Payoff:</i>	26
3.5.3 <i>Equação de Diferenças</i>	27
3.5.4 <i>Convergência do Modelo Diferenças Finitas:</i>	28
4 APLICAÇÃO DA TEORIA A UM CASO ESPECÍFICO	30
4.1 OPÇÕES DE TROCA ENTRE AÇÕES PREFERENCIAIS E ORDINÁRIAS	30
4.2 RESULTADOS	32
4.2.1 <i>Sensibilidade do Modelo</i>	35

5 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	39
6 CONCLUSÕES E PESQUISAS FUTURAS.....	41
6.1 CONCLUSÕES	41
6.2 PESQUISAS FUTURAS.....	41
REFERÊNCIAS	43
APÊNDICE A – MARGRABE.....	44
APÊNDICE B – MONTE CARLO 2 FATORES	45
APÊNDICE C– MONTE CARLO 1 FATOR.....	46
APÊNDICE D– MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	47

1 INTRODUÇÃO

As opções financeiras bidimensionais são instrumentos capazes de incorporar dois fatores subjacentes no cálculo de seu resultado, proporcionando maior flexibilidade e vantagens estratégicas aos participantes do mercado. Enquanto as opções tradicionais utilizam um único fator no cálculo de seu resultado, e limitam sua exposição, essas oferecem um *hedging* (proteção contra oscilações do mercado) mais eficiente principalmente em momentos de maior volatilidade.

Essa característica inovadora dessas opções gera uma maior personalização dos contratos permitindo que investidores adaptem estratégias de investimento de acordo com expectativas e tolerância ao risco, enquanto a exposição a diversas classes de ativos contribui para uma diversificação mais eficaz das carteiras. No Brasil, por estar sujeito a alta especulação cambial, é comum encontrar contratos com parâmetros atrelados à variação cambial.

Embora ofereçam benefícios significativos, é essencial destacar a maior complexidade desses instrumentos, exigindo um entendimento aprofundado para um uso eficaz. Tanto o apreçamento quanto o cálculo e a gestão de risco desses contratos implicam na utilização de modelos mais sofisticados.

Uma das opções bidimensionais muito utilizada no Brasil e no mundo são as opções de troca ativos financeiros, assunto principal desse trabalho. Essas dão ao detentor do contrato o direito, mas não a obrigação, de trocar um ativo por outro em uma determinada data caso seja economicamente vantajoso.

1.1 Motivação

O trabalho pioneiro de Black e Scholes (1973), foi responsável por determinar através de uma réplica livre de arbitragens o preço teórico de derivativos lineares e não lineares com uma única variável estocástica. Desde então, o modelo desenvolvido por eles tem sido amplamente utilizado para o apreçamento de contratos de opções em todo o mundo.

Entre os derivativos que não podem ser apreçados diretamente através da formulação original de Black e Scholes estão as opções multidimensionais. Trata-se de opções cuja função utilizada para determinar o seu resultado, também conhecido como *payoff* do contrato, apresenta mais de um fator estocástico. Um exemplo de opção multidimensional é o da troca de ativos. Esse contrato oferece ao detentor a possibilidade de trocar um dos ativos pelo outro

caso seja economicamente conveniente para ele. A dificuldade desse apreçamento reside justamente na existência de dois fatores estocásticos no cálculo do valor do contrato.

Essas opções produzem efeito similar a compra e venda das ações subjacentes diretamente na bolsa, mas acabam produzindo custos mais baixos, pois não necessitam de troca física e posse ou aluguel desses ativos. Outra vantagem desses instrumentos é que eles possibilitam uma maior alavancagem, facilitando tanto o *hedge* quanto apostas em movimentos de mercado.

No Brasil é comum encontrarmos opções de troca feitas entre ações preferenciais nominativas e ordinárias. Outros casos de opções multidimensionais são as opções com risco cambial, que servem como instrumento de proteção, em diversos níveis, contra movimentos adversos da taxa de câmbio e finalmente as opções do tipo *Spread*.

Margrabe (1978) introduziu uma formulação fechada capaz de determinar o preço de opções de troca. Em seu artigo é apresentada uma formulação derivada da de Black e Scholes capaz de apreçar essas opções. Margrabe argumentou também que diferente de opções com um único fator de risco, no caso da opção de troca de ativos, existe vantagem em não exercer antecipadamente essa opção, fazendo com que o preço de um contrato do tipo europeu seja equivalente ao americano.

Além dos casos já citados acima, é possível encontrar outras situações que podem ser modeladas como uma opção de troca de ativos: como exemplificada no mesmo artigo de Margrabe (1978), tais situações podem ser a taxa de incentivo de performance para um gestor de portfólios, a utilização da margem de corretoras para compra de ativos financeiros, uma oferta de troca de ações de uma corporação não alavancada por ações de outra. Ainda é possível encontrar outras situações como mostrado por Kensinger (1988) que utilizou um conjunto de opções de troca para modelar um projeto de investimento de capital.

1.2 Objetivo

O objetivo deste trabalho é calcular o preço teórico de opções de troca do mercado brasileiro utilizando ações listadas na B3. Primeiramente será calculado o preço de maneira analítica utilizando a fórmula desenvolvida por Margrabe (1978), em seguida será calculado através de métodos numéricos.

Para o tratamento numérico, duas abordagens distintas serão utilizadas. Na primeira, o problema é mantido como bidimensional e utiliza-se a simulação de Monte Carlo com dois fatores estocásticos. Na segunda abordagem, o problema é reduzido a um caso unidimensional

e então são utilizados o método de Monte Carlo e o método das diferenças finitas para resolvê-lo.

Finalmente será realizada uma análise comparativa entre as soluções obtidas, levando em consideração a acurácia dos resultados utilizando a resposta analítica como referência, e a performance (tempo de processamento) dos modelos.

1.3 Estrutura do Trabalho

O presente trabalho está dividido em seis capítulos. No capítulo 1 é apresentada a introdução do trabalho, a motivação e os objetivos. No capítulo 2 é feita a revisão bibliográfica. No capítulo 3 são desenvolvidos os modelos numéricos e analíticos utilizados. No capítulo 4 os modelos do capítulo 3 são aplicados a opções de troca do mercado. No capítulo 5 são apresentadas algumas discussões sobre o capítulo anterior. O capítulo 6 apresenta as conclusões do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Conceitos Básicos

Opções financeiras são contratos que dão ao comprador o direito, mas não a obrigação, de comprar ou vender um ativo subjacente a um preço específico em ou antes de uma data de vencimento específica. Esses contratos são comumente usados em mercados financeiros para especulação, *hedging* (proteção contra riscos) e estratégias de investimento. Na sua forma mais tradicional também chamada de opções *vanilla*, existem dois tipos principais:

- **Opção de Compra (Call Option):** Dá ao comprador o direito de comprar o ativo subjacente a um preço específico (preço de exercício) antes ou na data de vencimento. O Valor a ser recebido pelo detentor da opção no momento do exercício é $V = \text{Máximo}(\text{Valor do ativo} - \text{Preço de exercício}, 0)$
- **Opção de Venda (Put Option):** Dá ao comprador o direito de vender o ativo subjacente a um preço específico (preço de exercício) antes ou na data de vencimento. O Valor a ser recebido pelo detentor da opção no momento do exercício é $V = \text{Máximo}(\text{Preço de exercício} - \text{Valor do ativo}, 0)$

As principais variáveis que determinam o valor de uma opção são o preço de exercício conhecido como *strike*, a data de vencimento, o preço atual e a volatilidade do ativo subjacente. O valor de uma opção é conhecido como prêmio, este é pago pelo comprador e recebido pelo vendedor/lançador da opção. A determinação do valor do prêmio é feita através de modelos matemáticos, o principal deles é o modelo de Black-Scholes-Merton (BSM).

As opções que apresentam comportamento distinto das *vanillas* são conhecidas como opções exóticas. Entre elas estão as opções multidimensionais, sua principal diferença está na determinação do *Payoff* (valor a ser recebido no momento do exercício), que depende do preço de dois ou mais ativos subjacente como ilustrado por Samanez (2013). Considerando S_i o preço do ativo i , a seguir encontra-se alguns exemplos de opções multidimensionais utilizadas no mercado:

- Opções de Troca: O *Payoff* é baseado na diferença entre dois ativos
 Payoff da Call: $\text{Max}(S_1 - S_2, 0)$
 Payoff da Put: $\text{Max}(S_2 - S_1, 0)$

- Spread Options: Assim como no caso da opção de troca, o payoff é baseado na diferença de dois ativos, porém nesse caso também é considerado um preço de exercício. Opções de troca podem ser vistas como um caso específico de opções do tipo spread com preço de exercício igual a zero.

Payoff da Call: $\text{Max}[(S_1 - S_2) - X, 0]$

Payoff da Put: $\text{Max}[X - (S_2 - S_1), 0]$

- Opção de preço máximo para 2 ou mais ativos: O *Payoff* é baseado no preço máximo entre dois ou mais ativos.

Payoff da Call: $\text{Max}[\max(S_2, S_1) - X, 0]$

Payoff da Put: $\text{Max}[X - \max(S_2, S_1), 0]$

- Opção de preço mínimo para 2 ou mais ativos: O *Payoff* é baseado no preço mínimo entre dois ou mais ativos.

Payoff da Call: $\text{Max}[\min(S_2, S_1) - X, 0]$

Payoff da Put: $\text{Max}[X - \min(S_2, S_1), 0]$

2.2 Estado da Arte

O trabalho de Black e Scholes (1973), juntamente o de Merton (1973), desenvolveu o que ficou conhecido como Equação de Black-Scholes-Merton (BSM), uma das ferramentas mais influentes na teoria financeira moderna, amplamente utilizada até os dias de hoje para avaliar opções financeiras do tipo *vanilla* europeia (com exercício exclusivamente no vencimento do contrato).

Na década de 60, quando esse trabalho foi majoritariamente desenvolvido, o mercado de opções experimentava uma ascensão significativa. No entanto, não existia uma teoria com rigor matemático capaz de determinar o preço justo das opções, até então seu apreçamento era amplamente baseado em intuição e julgamento subjetivo dos participantes do mercado (*traders*).

O modelo criado apresenta uma equação diferencial parcial que deve ser cumprida pelo preço de qualquer derivativo dependente de uma ação que não paga dividendos em todos os instantes de tempo. A solução dessa equação permite calcular o prêmio do contrato.

A fórmula de BSM não pode ser aplicada diretamente para derivativos com mais de um fator estocástico envolvido, como é o caso das opções de Troca. Margrabe (1978) baseado nos trabalhos de Black-Scholes-Merton desenvolveu uma formulação capaz de lidar com esses contratos, essa ficou conhecida como Fórmula de Margrabe.

Além dos modelos analíticos descritos anteriormente, é possível utilizar modelos numéricos para a determinação do valor de um contrato derivativo, sendo o Monte Carlo uma das possibilidades. Trata-se de uma técnica amplamente utilizada para precificar derivativos financeiros, sua aplicação nessa área foi originalmente proposta por Boyle (1977), sendo majoritariamente utilizada para contratos cujos preços dificilmente são calculados através de solução analítica.

Bernis (2003) mostrou em seus trabalhos como esse método pode ser particularmente útil para contratos cujo resultado depende dos valores assumidas pelo ativo durante a vida do contrato, usando o Monte Carlo para precificar opções do tipo *lookback* e com barreiras. Glasserman (2000) mostra como esse método pode ser eficiente para medir o risco de mercado de uma posição ou de um portfólio inteiro através do cálculo do *Value At Risk* (VAR), sendo essa prática amplamente utilizada em instituições financeiras.

A simulação de Monte Carlo apresenta diversas vantagens quando comparado a outros métodos numéricos e as fórmulas analíticas. Segundo Paul Wilmott (2013), a matemática envolvida nesse método é mais básica que das demais alternativas. Existem diversos programas comerciais disponíveis, e como último recurso, planilhas eletrônicas já são suficientes para implementá-lo. Além disso os modelos podem ser adaptados em função das características do contrato com pouco esforço, não apresenta problemas de convergência, e finalmente sua acurácia pode ser aumentada à medida que o número de simulações aumenta.

As suas principais desvantagem são o custo computacional envolvido, já que o aumento na quantidade de trajetórias simuladas também acarretará o aumento do tempo de processamento e a impossibilidade de gerar números aleatórios para simulação, que pode ser contornada com a utilização de métodos geradores de números pseudoaleatórios.

Quando o Monte Carlo é utilizado para precificar derivativos bidimensionais a abordagem comumente utilizada é simular as variáveis inicialmente de maneira independente e em seguida utilizar a técnica da matriz fatorada de Cholesky para obter a correlação desejada. Entretanto é possível utilizar técnicas para a redução de dimensão do problema como mostrou Villani (2007). Em seu trabalho ele utilizou uma única variável para simular opções de troca, simulando a razão entre os preços dos ativos subjacentes. Seus resultados foram comparáveis aos de Margrabe (1978) e Carr (1988).

Villani (2007) desenvolveu modelos para precificar 3 tipos de opções de troca bidimensionais: 1) Opções de troca estilo europeu com ambos os ativos subjacentes sendo ações pagadoras de dividendos. 2) Opções de troca estilo europeu em que o ativo subjacente é outra opção de troca (também conhecido como opção de troca composta), e 3) opções de troca estilo pseudo-americana, conhecido como estilo bermuda (oferecem algumas datas predeterminadas para o exercício da opção). Em todas elas foram utilizadas a técnica de redução de dimensões.

Outro método numérico utilizado para determinar o valor dos contratos derivativos é o método das diferenças finitas, trata-se de um método desenvolvido para resolver equação diferenciais parciais (EDPs). Foi introduzido no campo das finanças por Brennan e Schwartz (1977), e desde então vem sendo amplamente utilizado.

Existem duas variações desse método: O primeiro é o modelo implícito, que segundo Danho (2017) apresenta boa estabilidade, porém sua implementação é mais difícil que o segundo método e seu tempo de processamento é maior, já que apresenta cálculos mais complexos. Utilizando este é possível obter resultados acurados e um bom comportamento das sensibilidades como mostrou Mayo (2014). O segundo é chamado de modelo explícito, sua implementação é mais fácil e seu algoritmo é mais rápido que o anterior, mas pode apresentar problemas de estabilidade e convergência dependendo das características da opção. Em seu livro, Hull (2003) mostra as similaridades entre esse método e as árvores binomiais.

Ao lidar com um derivativo bidimensional, uma possível abordagem é aplicar uma técnica de redução de dimensões para facilitar a implementação do algoritmo de diferenças finitas assim como feito por Svabova (2013). Em seu trabalho ele aplicou uma mudança de variáveis e obteve bons resultados precificando opções de troca de forma unidimensional.

2.2 Inserção do Presente Trabalho na Literatura Existente

No presente trabalho será determinado o prêmio de opções de troca existentes no mercado utilizando o modelo de Margrabe, a simulação de Monte Carlo e o método das diferenças finitas.

No caso de Monte Carlo inicialmente o prêmio é calculado mantendo o problema como bidimensional, ou seja, os fatores estocásticos sendo simulados inicialmente de maneira independente e em seguida utilizando a técnica da matriz fatorada de Cholesky para obter a correlação desejada. Posteriormente o prêmio é calculado considerando o problema como

unidimensional aplicando a mesma técnica utilizada por Villani (2007) para reduzir o problema a um único fator estocástico (simular a razão entre os preços dos ativos subjacentes).

A mesma técnica de redução do problema será utilizada para resolver o problema através do método das diferenças finitas explícito. Como mostrou Windcliff (2004) é necessário impor uma condição de contorno $S = S_{max}$ para evitar que o domínio do problema seja infinito. Nesse trabalho será utilizada a recomendação dada no livro de Paul Wilmott (2013) e valores na ordem de 3 vezes o valor do strike serão o valor máximo atingido pelo ativo.

3 DESENVOLVIMENTO DO MODELO

Neste capítulo, são apresentados os modelos desenvolvidos para o apreçamento das opções de troca. Conforme mencionado anteriormente para a solução analítica será utilizada a fórmula de Margrabe, para as soluções numéricas serão utilizadas a simulação de Monte Carlo considerando 1 e 2 fatores estocásticos e o método das diferenças finitas considerando 1 fator estocástico. Aqui também é apresentada a mudança de variáveis que reduziu o problema para 1 única variável estocástica.

Os modelos foram implementados utilizando a linguagem de programação *Python*, devido ao fato dessa ferramenta ser amplamente utilizada na modelagem quantitativa em finanças dada a sua capacidade de implementar algoritmos complexos e lidar com análises estatísticas. O código fonte referente ao apreçamento através de cada uma das abordagens comentadas anteriormente pode ser encontrado no apêndice do documento.

3.1 Solução Analítica

Para a solução analítica é aplicada diretamente a fórmula de Margrabe. Como comentado anteriormente trata-se de uma variação do modelo de Black-Scholes-Merton para derivativos com 2 fatores estocásticos. A seguir apresenta-se os dois modelos e sua aplicação neste trabalho

3.1.1 Dinâmica de preços de uma ação que não paga dividendos:

O modelo do comportamento do ativo subjacente usado por Black, Scholes e Merton é um processo estocástico conhecido como movimento browniano geométrico. A versão no tempo discreto desse modelo é:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t} \quad (1)$$

A variável ΔS representa a mudança no preço da ação S no pequeno intervalo de tempo Δt . O termo $\mu \Delta t$ representa a parte esperada do retorno da ação, o parâmetro μ é a taxa de retorno esperado por unidade de tempo do ativo subjacente. O termo $\sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}$ é o componente

estocástico do retorno, σ representa a volatilidade do preço do ativo, e ϵ é uma distribuição normal padrão com média zero desvio padrão anual 1 $\phi(0,1)$.

Na prática, geralmente é mais preciso simular o comportamento $\ln(S)$ em vez de S diretamente. De acordo com o lema de Itô o processo seguido por $\ln(S)$ é o mostrado na equação (2), mais detalhes podem ser encontrados em Hull (2003):

$$\ln(S_t) - \ln(S_0) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t} \quad (2)$$

Por consequência temos que o comportamento de S é:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}} \quad (3)$$

3.1.2 A formulação de Black-Scholes-Merton

O valor de um contrato derivativo em um instante de tempo qualquer é calculado como uma função do tempo até o vencimento do contrato t e do valor do ativo subjacente S_t , $f = V(t, S_t)$. Como o valor de S_t apresenta um comportamento estocástico, para determinar qualquer variação infinitesimal no valor do derivativo dado uma variação no tempo até o vencimento do contrato utiliza-se o lema de ito como mostrado na equação (4). Mais detalhes podem ser encontrados em Hull (2003):

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\epsilon\sqrt{\Delta t} \quad (4)$$

O termo estocástico $\epsilon\sigma S\epsilon\sqrt{\Delta t}$ está presente tanto nas variações do ativo subjacente equação (1) quanto do derivativo equação (4), portanto é possível criar um portfólio Π com - 1 contrato derivativo e $\frac{\partial f}{\partial S}$ ações, de tal forma que o termo estocástico seja eliminado:

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S}S \quad (5)$$

Como as variações do portfólio Π não apresentam nenhum termo estocástico, logo nenhuma incerteza, o portfólio deve ser livre de risco, portanto este deve apresentar a mesma taxa de retorno que outros títulos livres de risco de curto prazo, ou seja, a taxa livre de risco r :

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt = r\left(f - \frac{\partial f}{\partial S}S\right)\Delta t \quad (7)$$

A seguir é apresentada versão da equação diferencial parcial (EDP) desenvolvida por Black-Scholes-Merton. O Modelo matemático é capaz de determinar em função do tempo o preço de uma opção do tipo europeia, tanto de compra (*call*) quanto de venda (*put*).

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (8)$$

Onde:

- V : É o preço da opção dado em função do preço do ativo subjacente S e do tempo t
- σ : Volatilidade dos retornos do ativo subjacente
- r : Taxa de juros livre de risco

3.1.3 A formulação de Margrabe

O Modelo de BSM não pode ser aplicado diretamente para derivativos com mais de um fator estocástico envolvido, como é o caso das opções de Troca. Margrabe (1978) baseado nos trabalhos de Black-Scholes-Merton desenvolveu uma formulação alternativa capaz de lidar com esses derivativos, essa ficou conhecida como Fórmula de Margrabe.

Uma opção de troca de ativos, que permite que o ativo S_1 seja trocado pelo ativo S_2 em uma data futura caso seja economicamente vantajoso para o detentor do contrato apresentará o seguinte *Payoff*:

$$f(S_1, S_2, t) = \text{Max}(S_1 - S_2, 0) \quad (9)$$

É possível encontrar uma função $f(t, S_{1t}, S_{2t})$ capaz de determinar o valor do contrato em um instante de tempo t qualquer, em função dos valores dos ativos subjacentes S_{1t} e S_{2t} . A equação Diferencial Parcial que satisfaz o *payoff* apresentando na equação (9) é mostrada a seguir, trata-se da versão bidimensional da equação (8), mais detalhes do seu desenvolvimento podem ser encontrados no livro de Paul Wilmott (2013):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 f}{\partial S_i \partial S_j} + \sum_{i=1}^2 (r - q_i) S_i \frac{\partial f}{\partial S_i} - r f = 0 \quad (10)$$

Onde ρ_{ij} é a correlação entre S_i, S_j , e q_i é uma taxa de pagamento de dividendos de S_i .

A solução da Equação (9) também conhecida como equação de Margrabe é mostrada a seguir:

$$f(S_1, S_2, t) = e^{-q_1 t} S_1 N(d_1) - e^{-q_2 t} S_2 N(d_2) \quad (11)$$

Onde d_1 e d_2 são:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_1}{S_2}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)(t)}{\sigma \sqrt{t}} \quad ; \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{t} \quad (12)$$

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} + \sigma_2^2 \quad (13)$$

Neste trabalho foi criada uma função em Python para computar o valor prêmio usando a fórmula de Margrabe mostrada na equação (11). A tabela a seguir mostra os parâmetros de entrada da função:

Tipo de Variável	Parâmetros de Entrada
Número Real	Valor atual da ação 1
Número Real	Valor atual da ação 2
Número Real	Tempo até o vencimento da opção
Número Real	Taxa de pagamento dos dividendos da ação 1
Número Real	Taxa de pagamento dos dividendos da ação 2
Número Real	Volatilidade da Ação 1
Número Real	Volatilidade da Ação 2
Número Real	Correlação entre Ação 1 e 2
Texto	Estilo da opção, podendo ser Call ou Put

Tabela 1 Parâmetros de entrada do modelo analítico. Fonte: O autor

Primeiramente, a função calcula a volatilidade ajustada de Margrabe equação (13). Em seguida os parâmetros d_1 e d_2 são calculados utilizando a equação (12). Finalmente, a solução é determinada utilizando os resultados anteriores aplicados na equação (11), caso a solução seja do tipo *put* seu *payoff* passará a ser $\text{Max}(S_2 - S_1, 0)$, e, portanto, os termos com índices 1 e 2 se invertem nas equações (11) e (12).

3.2 Simulação de Monte Carlo com 2 fatores estocásticos

Quando utilizada na precificação de opções este método consiste em simular os valores assumidos pelos ativos subjacentes para vários instantes de tempo durante a vida do contrato, gerando amostras aleatórias para cada um dos fatores estocásticos incluídos no modelo. Isso é feito repetidamente para criar múltiplos caminhos de preços ao longo do tempo.

Nesta abordagem manteve-se o problema como bidimensional, de forma que as duas variáveis aleatórias foram simuladas independentemente (respeitando a correlação existente entre elas).

3.2.2 Geração dos caminhos aleatórios

O valor do Ativo no momento da precificação é utilizado como valor inicial do caminho aleatório. Determina-se os valores assumidos pelas ações para o próximo instante de tempo utilizando o movimento Browniano geométrico equação (3) que foi apresentado na sessão 3.1.1. Para a geração dos termos estocásticos ϵ_1 e ϵ_2 das ações 1 e 2 respectivamente utiliza-se a função *Random* da biblioteca *numpy*. Neste caso como são duas ações que apresentam um valor de correlação ρ as gerações desses valores devem respeitar a seguinte relação mostrada por Hull (2003):

$$\epsilon_1 = u \text{ e } \epsilon_2 = \rho u + \sqrt{1 - \rho^2} v \quad (14)$$

Nesta fórmula u e v são amostrados como variáveis não correlacionadas com distribuições normais padrão. Observa-se que nos casos em que $\rho = 1$ e $\rho = -1$ a equação (14) pode ser simplificada para $\epsilon_1 = \epsilon_2$ e $\epsilon_1 = -\epsilon_2$ respectivamente. Nestes casos o problema apresenta apenas um fator estocástico, mas a teoria aqui discutida continua válida.

Os valores aleatórios gerados são multiplicados pela volatilidade e pela raiz do passo de tempo para a obtenção do termo estocástico $\sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}$ da equação (1). A seguir as equações, dos ativos 1 e 2, utilizadas para determinar os seus valores no instante de tempo $(t + \Delta t)$ uma vez que os valores do instante t são conhecidos. Aqui utiliza-se os fatores estocásticos determinados pela equação (14).

$$S_{1(t+\Delta t)} = S_{1t} e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma u \sqrt{\Delta t}} \quad (15)$$

$$S_{2(t+\Delta t)} = S_{2t} e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma(\rho u + \sqrt{1-\rho^2}v)\sqrt{\Delta t}} \quad (16)$$

Esse procedimento é repetido para todos os instantes de tempo seguintes de tal forma que se complete uma trajetória para as ações. A seguir um exemplo do *plot* dessas tabelas para 1000 trajetórias simuladas.

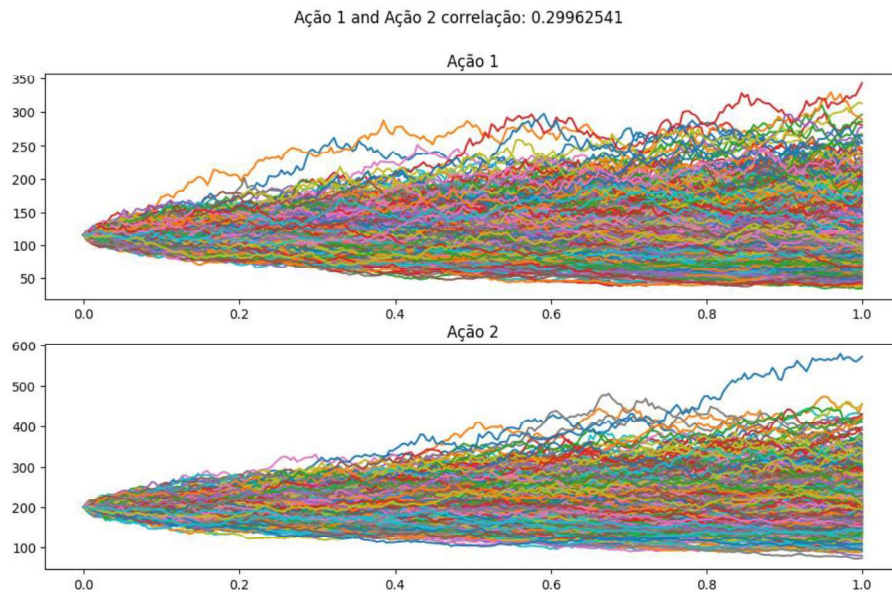


Figura 1 Caminhos aleatórios assumidos por duas variáveis em uma simulação de Monte Carlo. Fonte: O autor

Para automatizar esse processo foi criada uma função para simular os valores assumidos pelas variáveis aleatórias para vários instantes de tempo durante a vida do contrato. A tabela seguir apresenta os parâmetros de entrada dessa função.

Tipo de Variável	Parâmetros de Entrada
Número Real	Valor atual da ação 1
Número Real	Valor atual da ação 2
Número Real	Tempo até o vencimento da opção
Número Real	Taxa de pagamento dos dividendos da ação 1
Número Real	Taxa de pagamento dos dividendos da ação 2
Número Real	Volatilidade da Ação 1
Número Real	Volatilidade da Ação 2
Número Real	Correlação entre Ação 1 e 2
Número Inteiro	Número de trajetórias
Número Inteiro	Número de passos

Tabela 2 Parâmetros de entrada do monte carlo. Fonte: O autor

3.2.3 Aplicação do Payoff

Para determinar o valor do derivativo, é necessário para cada trajetória simulada calcular o *payoff* no momento da maturidade. O Valor do contrato será a média dos valores para os diversos caminhos. Neste caso é aplicada a fórmula $\text{Max}(S_1 - S_2, 0)$, onde calcula-se, portanto, a diferença entre os últimos valores simulados para cada trajetória da ação 1 e da ação 2.

Uma vez que é computado o valor da opção para todos os caminhos percorridos pelo ativo subjacente, é calculada a média aritmética desses valores, essa é então trazida a valor presente utilizando a taxa de juros adequada. É criado um intervalo de confiança ao redor dessa média utilizando uma alfa de 0,05, de tal forma que o resultado da simulação de Monte Carlo é um intervalo de valores que devem conter o valor da opção com 95% de confiança.

3.3 Redução do problema a 1 fator estocástico

A equação diferencial parcial de uma opção de troca equação (10) apresenta duas variáveis estocásticas, deixando o problema complexo. É possível realizar uma redução dessa equação através de uma mudança de variável. Essa mudança permitirá que seja implementado um modelo de Monte Carlo e de diferenças finitas unidimensional posteriormente. Considere como novo fator estocástico a variável $S = S_1/S_2$, o problema então passa a ser:

$$f(S_1, S_2, t) = S_2 H(S, t) \quad (17)$$

A função H apresenta apenas duas variáveis (S, t) e por isso é mais fácil de se trabalhar. O *payoff* da função H é:

$$H(S, t) = \text{Max}(S - 1, 0) \quad (18)$$

Para substituir as variáveis S_1 e S_2 por S na equação (10) é necessário ajustar as suas derivadas parciais como é mostrado a seguir, no caso da derivada em função do tempo não há modificações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial S_1} &= \frac{1}{S_2} \frac{\partial}{\partial S}; & \frac{\partial}{\partial S_2} &= -\frac{S}{S_2} \frac{\partial}{\partial S}; & \frac{\partial^2}{\partial^2 S_1} &= \frac{1}{S_2^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 S}; & \frac{\partial^2}{\partial^2 S_2} &= \frac{S^2}{S_2^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 S} + \frac{2S}{S_2^2} \frac{\partial}{\partial S}; \\ \frac{\partial^2}{\partial S_1 \partial S_2} &= -\frac{S}{S_2^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 S} - \frac{1}{S_2^2} \frac{\partial}{\partial S} \end{aligned} \quad (19)$$

Substituindo as derivadas da equação (19) na equação (10) obtém-se a equação parcial diferencial para H , mais detalhes podem ser encontrados em Paul Wilmott (2013):

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 H}{\partial S^2} + (q_1 - q_2) S \frac{\partial H}{\partial S} - q_2 H = 0 \quad (20)$$

Onde σ^2 é a variância de S $\sigma^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} + \sigma_2^2$

Fica evidente que a equação (20) é a equação diferencial de BSM equação (10), estando q_2 no lugar da taxa livre de juros. A solução da equação, no entanto estará em um numerário diferente do problema original devido a troca das variáveis.

3.4 Simulação de Monte Carlo com 1 fator estocástico

Utilizando a troca de variáveis descritas anteriormente é possível tratar o problema como unidimensional, de tal forma que equação diferencial a ser resolvida passa a ser a equação (20), e a variável estocástica a ser simulada a variável S . Vale ressaltar que como ocorreu uma mudança de numerário os valores simulados não vão estar na mesma unidade das variáveis originais.

A geração dos caminhos aleatórios simuladas pela variável S é feita de maneira similar a descrita no item 3.2.2, no entanto, agora, aplicado a uma única variável, na **Figura 2** a seguir

um exemplo com 1000 trajetórias simuladas. Assim como no caso bidimensional uma função foi criada para automatizar o processo de geração de trajetórias, essa função também utiliza os inputs da **Tabela 2** e pode ser encontrada no apêndice desse documento.

Já a aplicação do *payoff* é realizada de maneira distinta ao caso bidimensional, aqui utiliza-se a equação (18). Em seguida esses valores têm seu numerário ajustado multiplicando-se S_2 , calcula-se então a média desses valores. Assim como no caso bidimensional é criado um intervalo de confiança de 95% ao redor dessa média.

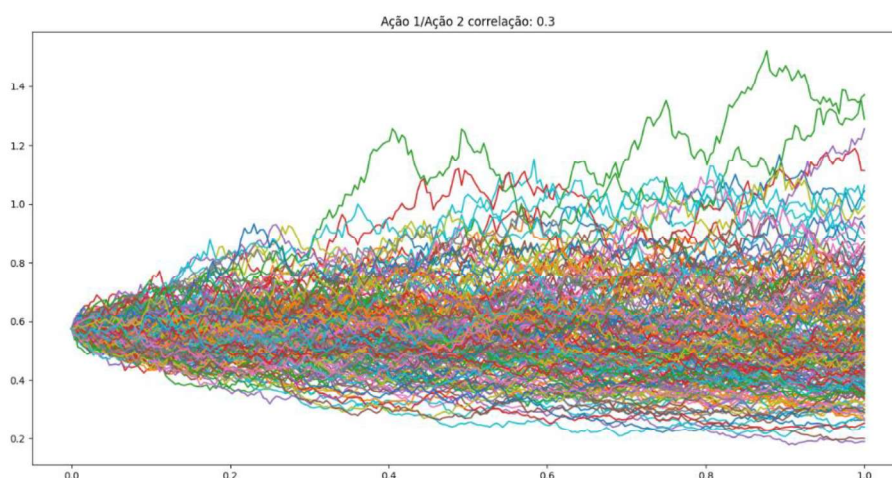


Figura 2 Caminhos aleatórios assumidos por uma variável em uma simulação de Monte Carlo. Fonte: O autor

3.4.1 Convergência do Modelo de Monte Carlo:

Para realizar a simulação é necessário determinar a quantidade de trajetórias e de passos a serem simulados em cada trajetória. De acordo com a literatura, quanto maior o número de trajetórias simuladas, mais preciso é o resultado, no entanto o custo computacional aumenta proporcionalmente.

Como as opções que serão simuladas no próximo capítulo tem uma maturidade de 1 ano, a quantidade de passos a serem simulados foi fixado como 252, cada passo representando o preço de fechamento em um dia útil desse período. Para a determinação do número de trajetórias necessárias uma opção fictícia foi utilizada para examinar o comportamento do algoritmo. Trata-se de uma opção de troca com vencimento em um ano de duas ações com uma correlação de 0,30 e as informações contidas na tabela a seguir. Será realizado apreçamento tanto da *call* (Troca da Ação 1 pela Ação 2) quanto *Put* (Troca da Ação 2 pela Ação 1):

	Ação 1	Ação 2
Preço Spot (R\$)	115	200
Taxa de pagamento de dividendos (%)	1,5	2
Volatilidade (%)	36	28

Tabela 3 Informações das ações fictícias. Fonte: o Autor

Foram realizadas 5 simulações aumentando o número de trajetórias e analisando como essa mudança impactou o prêmio da opção. A tabela a seguir representa os resultados utilizando monte carlo com 1 fator estocástico (ambos tiveram um comportamento muito parecido). Os prêmios são calculados em função do logaritmo na base 10 do número de trajetórias simuladas.

Log(quant. Traj.)	Ação 1 pela Ação 2			Ação 2 pela Ação 1		
	Inferior	Valor Médio	Superior	Inferior	Valor Médio	Superior
1	32.1787	79.8403	127.5019	0.0000	0.0000	0
2	76.288	91.705	107.122	-0.1207	2.4123	4.9453
3	77.7397	82.3478	86.9559	0.9912	1.8901	2.789
4	83.5572	85.0533	86.5494	1.6662	1.8939	2.1216
5	83.9682	84.4342	84.9002	1.8367	1.909	1.9813

Tabela 4 Resultados do estudo de convergência de monte carlo. Fonte: O autor

As imagens a seguir ilustram o comportamento observado na tabela anterior. Observa-se que medida que o número de trajetórias aumenta ocorre uma convergência no valor do prêmio bem como uma diminuição nos valores máximos e mínimos do intervalo de confiança, isso ocorre tanto para o caso da *Call Put*. Em função dos resultados apresentados optou-se por seguir com 10.000 trajetórias.

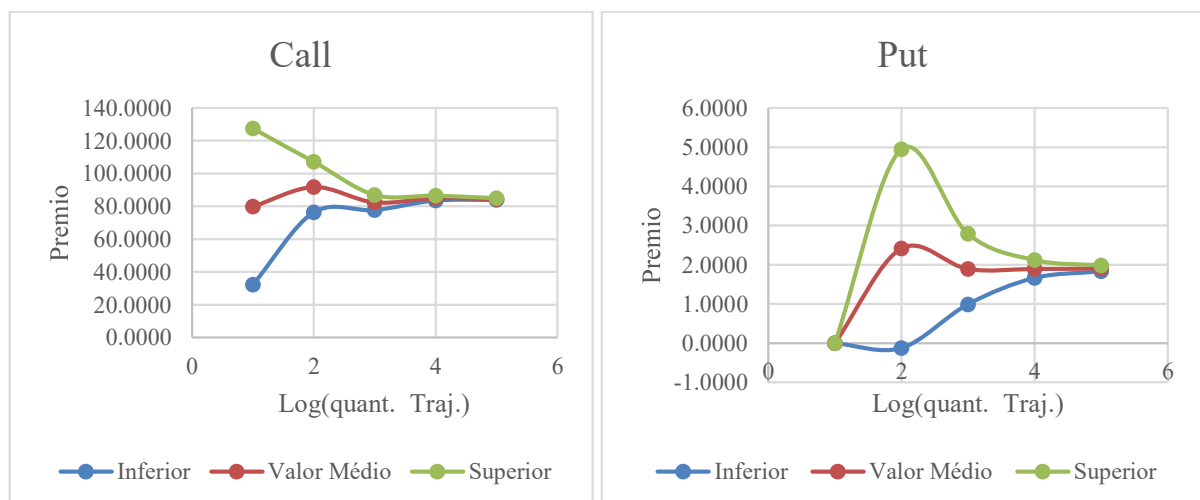


Figura 3 Convergência do Monte Carlo para uma opção de troca. Fonte: O autor

Outra maneira de visualizar o efeito do aumento da quantidade de trajetórias na convergência do modelo é através da análise da superfície de prêmios da opção. Nessa superfície é representado os valores do Prêmio para diversas combinações de tempo até o vencimento e Razão entre o valor do Ativo 1 e do Ativo 2. Para construção da superfície é necessário realizar uma simulação de monte carlo para cada um dos pontos (o custo computacional aumenta significativamente). As imagens a seguir representam essas superfícies para as simulações com 10, 100 e 1000 trajetórias em cada um dos pontos plotados.

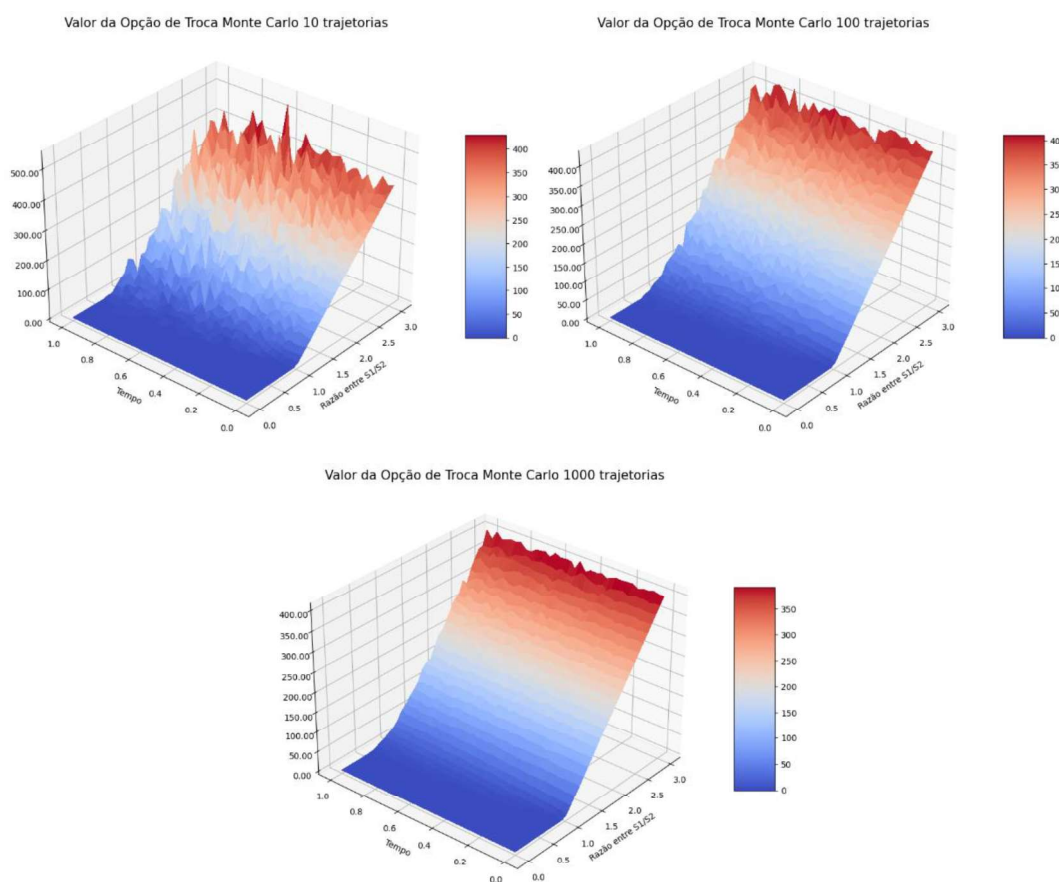


Figura 4 Impacto da quantidade de simulações na construção da superfície de prêmios Fonte: O autor

3.5 Método das Diferenças Finitas com 1 fator estocástico

Nesse método, aplicou-se a mesma técnica de redução do número de variáveis que foi explicada no item 3.3 e foi utilizada no monte carlo com uma única variável. Portanto ao invés de se utilizar a equação (10) a equação diferencial utilizada será a (20) e posteriormente seu numerário será corrigido.

Devido a redução do número de variáveis, esse problema pode ser visto como unidimensional, e é possível aplicar o método tradicional para resolver a equação (8) BSM

considerando $Strike = 1$. Essa alteração simplifica muito a implementação do método dado que este já foi amplamente estudado para a resolução de opções *vanillas*. Uma vez que a solução seja determinada será necessário ajustar o numerário para retornar ao valor original do problema.

3.5.1 Discretização do problema

Inicialmente discretiza-se o domínio do problema para pontos específicos de valor da ação e de tempo. No caso do intervalo de preços que a nova variável S vai atingir, utiliza-se o valor mínimo de 0 e valor máximo de 3, lembrando que $S = S_1/S_2$ e, portanto, o valor máximo de 3 implica S_1 3 vezes o valor de S_2 . O número de intervalos do valor de S é um parâmetro de entrada da função, e o aumento nessa quantidade gera um maior número de pontos que serão solucionados pelo método. Isso gera um resultado mais acurado, mas também aumenta custo computacional de processamento, observou-se também que a estabilidade do método é impactada por esse valor.

A discretização do tempo tem como valor máximo o vencimento do contrato (forecido como parâmetro de entrada), e valor mínimo o instante inicial, portanto 0. O tamanho do passo, no entanto, foi calculado em função do número de passos do ativo usando a equação (21), uma recomendação de Paul Wilmott (2013) para facilitar a convergência do método. Onde σ é a volatilidade da variável S dada pela equação (13).

$$\Delta t = \left(\frac{0,9 * (\text{Número de Passos do Ativo})^2}{\sigma^2} \right) \quad (21)$$

3.5.2 Condições de Contorno e aplicação do Payoff:

A discretização realizada anteriormente altera o domínio de interesse do problema. Enquanto o domínio da EDP original era infinito, tendo soluções para todas as combinações possíveis de valor da ação e instante de tempo, o domínio deste método é reduzido unicamente aos *grids*, pontos resultantes da discretização dos valores do tempo e da ação. O método deve então calcular a solução para todos esses pontos. Vale notar que no vencimento do contrato, o valor é dado diretamente pela aplicação de seu *Payoff* equação (18).

Também é possível determinar os valores do contrato para os níveis extremos de preço do ativo subjacente, tanto para $S=0$, quanto $S=3*Strike$ (aproximação para o infinito). No caso

de $S=0$, a *call* terá o um valor igual a zero, e a *put* terá um valor de aproximadamente $Xe^{-r(T-t)}$.

Já no caso de $S \rightarrow \infty$ e, portanto, $\frac{\partial^2 H}{\partial S^2} \rightarrow 0$, uma propriedade que pode ser aplicada a esses contratos como mostrado por Paul Wilmott (2013) é que:

$$f_i^k = 2f_{i-1}^k - f_{i-2}^k \quad (22)$$

3.5.3 Equação de Diferenças

Uma vez que o domínio do problema foi discretizado, é possível transformar a EDP em uma equação de diferenças e resolvê-la iterativamente para todos os *grids* da malha. Utiliza-se a equação (20), obtida após a mudança de variáveis descrita anteriormente, e transforma-se cada uma de suas derivadas numa diferença discreta com relação aos *grids*. Esses termos são mostrados a seguir:

$$Delta = \frac{\partial H}{\partial S} = \frac{f_{i+1}^k - f_{i-1}^k}{2ds} \quad (23)$$

$$Gamma = \frac{\partial^2 H}{\partial S^2} = \frac{f_{i+1}^k - 2f_i^k + f_{i-1}^k}{ds^2} \quad (24)$$

$$Teta = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{f_i^k - f_i^{k+1}}{dt} \quad (25)$$

Aqui, f_i^k é o valor do contrato no instante de tempo $k*dt$, com o valor do ativo subjacente igual a $i*ds$, sendo dt e ds os valores dos intervalos de discretização do tempo e do preço do ativo subjacente respectivamente. A equação (20) pode ser reescrita de tal forma que o Teta possa ser determinado indiretamente em função de Gamma e Delta como mostra a seguir:

$$Teta = -\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 Gamma - r(SDelta - H) \quad (26)$$

Escrever as equações dessa forma é especialmente útil, pois permite que uma vez conhecido o valor da opção para três *grids* consecutivos para um mesmo instante de tempo, determinar o seu valor num instante anterior ao *grid* central como é mostrado na Figura 3. O procedimento é simples: dado esses três pontos, é possível determinar o valor do Delta e do

Gamma do *grid* central através da equação (23) e (24) respectivamente, em seguida o valor do Teta é determinado indiretamente através da equação (26) e finalmente aplicando a equação (25), calcula-se o valor da opção no instante anterior.

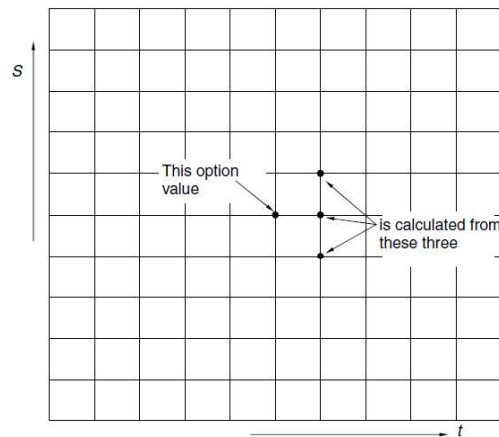


Figura 5 Relação entre os grids no Método Explícito. Fonte: Paul Wilmott (2013)

É importante lembrar que os valores do ativo para $S=0$, $S=3$ e $T=1$ já foram determinados através da aplicação das condições de contorno e *Payoff*. Utilizando as equações de diferença é possível portanto determinar os valores da opção no instante de tempo anterior ao vencimento do contrato. Uma vez que todos esses são determinados é possível novamente calcular no instante anterior e assim sucessivamente até chegar ao instante 0 quando o valor é determinado para todos os *grids* da malha. Para a automatização do processo uma função foi criada, é possível encontrá-la nos apêndices deste documento, seus parâmetros de entrada são mostrados na **Tabela 5**.

Tipo de Variável	Parametros de Entrada
Número Real	Volatilidade da Ação 1
Número Real	Volatilidade da Ação 2
Número Real	Correlação entre Ação 1 e 2
Número Real	Taxa de pagamento dos dividendos da ação 1
Número Real	Taxa de pagamento dos dividendos da ação 2
Texto	Estilo da opção, podendo ser Call ou Put
Número Real	Tempo até o vencimento da opção
Número Inteiro	Número de passos para o valor da ação

Tabela 5 Parâmetros de entrada das diferenças finitas. Fonte: O autor

3.5.4 Convergência do Modelo Diferenças Finitas:

Para a determinação do número de Passos do Ativo subjacente utilizou-se a mesma abordagem realizada para o caso da simulação de Monte Carlo. Foram realizadas 5 precificações para uma opção fictícia com as características da **Tabela 3** aumentando o número de passos e analisando como essa mudança impactou o prêmio da opção. A tabela a seguir representa o comportamento do prêmio em função do número de passos.

Número de Passos do Ativo	Ação 1 pela Ação 2	Ação 2 pela Ação 1
2.00	70.9173	40.8733
4.00	88.15697826	5.047859067
8.00	85.71656842	4.3827166
16.00	85.08462049	1.9872896
32.00	84.91734139	1.869887333

O Valor inicial do ativo subjacente pode não coincidir com nenhum dos valores discretizados, como ocorre na maior parte das vezes, nesse caso é realizado uma interpolação linear entre os dois *grids* mais próximos para determinar o prêmio da opção.

Uma das propriedades do Método das diferenças finitas é que ela calcula o prêmio da opção para todos os pontos da malha (todas as combinações de valor do ativo subjacente, e instante de tempo), portanto é possível construir uma superfície de prêmios com esses valores de forma direta como é mostrado a seguir (diferente do caso do monte carlo aqui uma única simulação é capaz de gerar a superfície inteira):

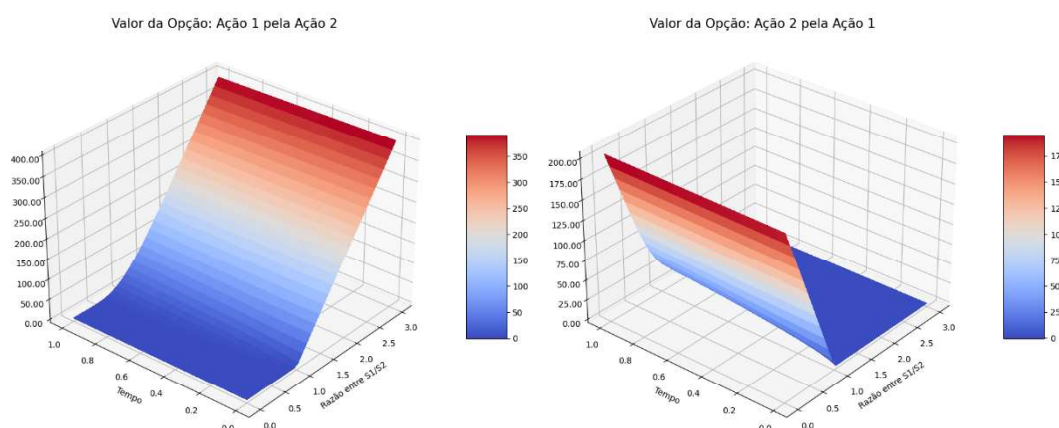


Figura 6 Superfície de prêmios calculados via diferenças finitas Fonte: O autor

4 APLICAÇÃO DA TEORIA A UM CASO ESPECÍFICO

Embora as opções bidimensionais ainda não sejam oferecidas nas bolsas do Brasil, como já ocorre em outros países, é comum encontrar essas operações sendo negociadas no mercado balcão. São comumente utilizadas devido as diferenças entre os preços de uma grande variedade de ativos, como taxas de juros, commodities, contratos futuros, swaps, ações ordinárias e ações de capital preferencial.

4.1 Opções de Troca entre ações preferenciais e ordinárias

Para analisar o comportamento dos modelos descritos no Capítulo 3 serão utilizados pares de ação do tipo ordinária e preferencial de uma mesma empresa. Essa análise será realizada para empresas de diferentes setores da economia listadas na B3. As ações ordinárias conferem direito a voto nas assembleias dos acionistas, enquanto as preferenciais não conferem esse direito, entretanto oferecem outras vantagens como prioridade no recebimento de dividendos e no reembolso do capital investido em caso de falência da empresa.

As ações utilizadas nessa análise são as das empresas Banco ITAU (códigos ITUB3 ordinária e ITUB4 preferencial), Banco BTG Pactual (códigos BPAC3 ordinária e BPAC5 preferencial), Brasken (códigos BRKM3 ordinária e BRKM6 preferencial), OI (códigos OIBR3 ordinária e OIBR4 preferencial) e COPEL (códigos CPLE3 ordinária e CPLE6 preferencial).

O período escolhido para as coletas dos dados dessas ações é de 03/10/2023 e 07/12/2023 e a fonte das informações é o site *yahoo finance*. As volatilidades utilizadas foram calculadas com base no desvio padrão dos retornos das séries históricas dos preços das ações. A tabela a seguir apresenta um resumo das informações das ações que serão utilizadas:

Setor	Companhia	Código da ação	Tipo de Ação	Fechamento (07/12/2023)	Volatilidade Anualizada
Banco	ITAU	ITUB3	Ordinaria	26.95	0.21%
Banco	ITAU	ITUB4	Preferencial	31.62	0.25%
Banco	Banco BTG Pactual	BPAC3	Ordinaria	15.89	0.48%
Banco	Banco BTG Pactual	BPAC5	Preferencial	8.74	0.51%
Petroquímica	Brasken	BRKM3	Ordinaria	17.97	0.49%
Petroquímica	Brasken	BRKM6	Preferencial	15.00	0.60%
Telefonia	OI	OIBR3	Ordinaria	0.67	1.07%
Telefonia	OI	OIBR4	Preferencial	1.67	0.83%

Tabela 6 Resumo das informações das ações escolhidas. Fonte: o Autor

A Matriz de correlação das ações é mostrada a seguir, nela é possível observar que existe uma correlação positiva entre as ações ordinárias e preferenciais de uma mesma empresa, com valor mais alto para as ações do ITAU e da OI no período.

	BPAC3.SA	BPAC5.SA	BRKM3.SA	BRKM6.SA	ITUB3.SA	ITUB4.SA	OIBR3.SA	OIBR4.SA
BPAC3.SA	1	0.423889	0.157622	0.008333	0.470998	0.517051	0.181201	0.17392
BPAC5.SA	0.423889	1	0.146124	-0.06876	0.453737	0.468875	0.131901	0.022914
BRKM3.SA	0.157622	0.146124	1	0.159056	0.28676	0.250475	0.026083	0.027676
BRKM6.SA	0.008333	-0.06876	0.159056	1	-0.02794	-0.03095	0.058533	0.071747
ITUB3.SA	0.470998	0.453737	0.28676	-0.02794	1	0.939099	0.210169	0.168221
ITUB4.SA	0.517051	0.468875	0.250475	-0.03095	0.939099	1	0.207697	0.148947
OIBR3.SA	0.181201	0.131901	0.026083	0.058533	0.210169	0.207697	1	0.77077
OIBR4.SA	0.17392	0.022914	0.027676	0.071747	0.168221	0.148947	0.77077	1

Tabela 7 Matriz de correlação das ações escolhidas. Fonte: o Autor

Na imagem a seguir encontram-se plotadas as series históricas dessas ações. É possível observar como elas variam ao longo do tempo e o comportamento da correlação positiva entre as ações, com destaque para o ITAU e a OI.



Figura 7 Série histórica das ações Fonte: O autor

4.2 Resultados

Os modelos descritos no Capítulo 3 foram utilizados para determinar os preços das ações de troca. Aqui a *Call* é a opção cujo *Payoff* é $\text{Max}(\text{Preferencial} - \text{Ordinaria}, 0)$ e a *Put* cujo *Payoff* é $\text{Max}(\text{Ordinaria} - \text{Preferencial}, 0)$ e o tempo de vencimento do contrato é de 1 ano. Para as simulações de monte carlo utilizou-se os parâmetros definidos nas sessões 3.4.1 (252 passos e 10000 trajetórias), já no caso da simulação via diferenças finitas utilizou-se o que ficou definida na sessão 3.5.4 (32 passos). Na tabela a seguir encontram-se os resultados. No caso das simulações de monte carlo é reportado o valor médio e não o intervalo inteiro. Nas últimas linhas da tabela a diferença percentual entre os modelos numéricos e o de Margrabe é mostrado.

		ITUB3 ITUB4	BPAC3 BPAC5	BRKM3 BRKM6	OIBR3 OIBR4
Margrabe (M)	Call	0.0347	7.5530	6.1963	0.0285
	Put	4.7053	0.4030	3.2263	1.0285
Monte Carlo 2 Fatores (MC2)	Call	0.0367	7.5144	6.1798	0.0262
	Put	4.6143	0.4167	3.2393	1.0217
Monte Carlo 1 Fator (MC1)	Call	0.0347	7.5530	6.1213	0.0279
	Put	4.6576	0.4184	3.2662	1.0210
Diferenças finitas 1 Fator (DF)	Call	0.0351	7.5525	6.1894	0.0295
	Put	4.4289	0.4153	3.2333	1.0189
(M-MC2)/M	Call	-5.82%	0.51%	0.27%	8.07%
	Put	1.93%	-3.39%	-0.40%	0.66%
(M-MC1)/M	Call	-0.05%	0.00%	1.21%	2.11%
	Put	1.01%	-3.81%	-1.24%	0.73%
(M-DF)/M	Call	-1.13%	0.01%	0.11%	-3.58%
	Put	5.87%	-3.04%	-0.22%	0.93%

Tabela 8 Resultados obtidos para os diferentes modelos. Fonte: o Autor

Com o auxílio da biblioteca `time` do `python` foram computados os tempos de processamento total (soma do tempo gasto no cálculo das duas opções *call* + *put*) de cada um dos modelos em segundos para a ação do ITAU. Essas informações são mostradas a seguir:

	M	MC2	MC1	DF
Tempo em s	0.0055	0.5231	0.3408	0.3848

Tabela 9 Tempo de processamento em segundos. Fonte: o Autor

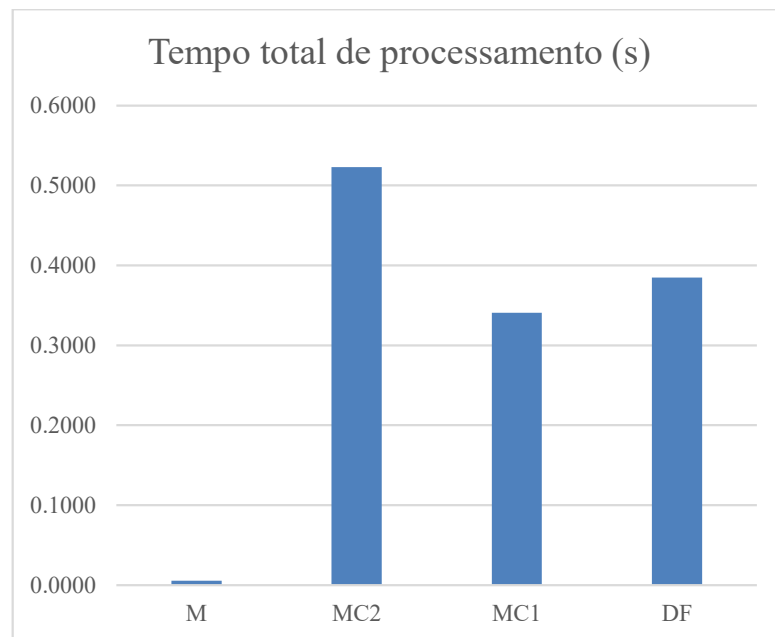


Figura 8 Tempo de processamento Fonte: O Autor

Uma outra maneira de comparar os modelos é através das superfícies de prêmios geradas por ele. Dessa maneira é possível visualizar os valores gerados pelos métodos para diversas combinações entre a razão dos preços dos ativos subjacentes e o tempo até o vencimento da opção.

Nas imagens a seguir é possível visualizar a construção dessas superfícies a opção de troca das ações do ITAU (ITUB3 e ITUB4). A primeira imagem mostra a superfície construída pelo modelo de Margrabe, a segunda à superfície construída usando o modelo de Monte Carlo para 1 fator, e finalmente a terceira mostra a construída utilizando o método das diferenças finitas.

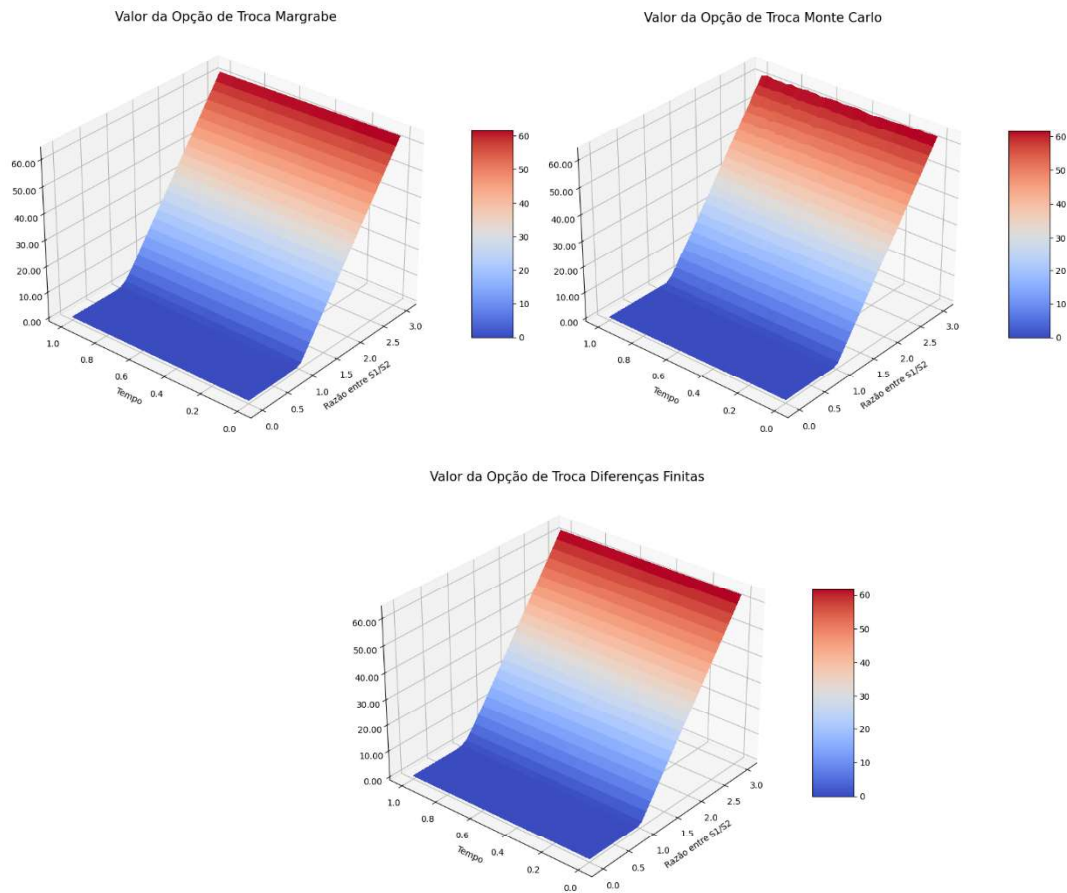


Figura 9 Superfície de prêmios para a opção de troca do ITAU para os diferentes modelos. Fonte: O autor

Nas próximas figuras são mostradas as superposições das superfícies de Margrabe e a superfície de Monte Carlo 1 fator, e em seguida a superposição entre a superfície de Margrabe e diferenças finitas.

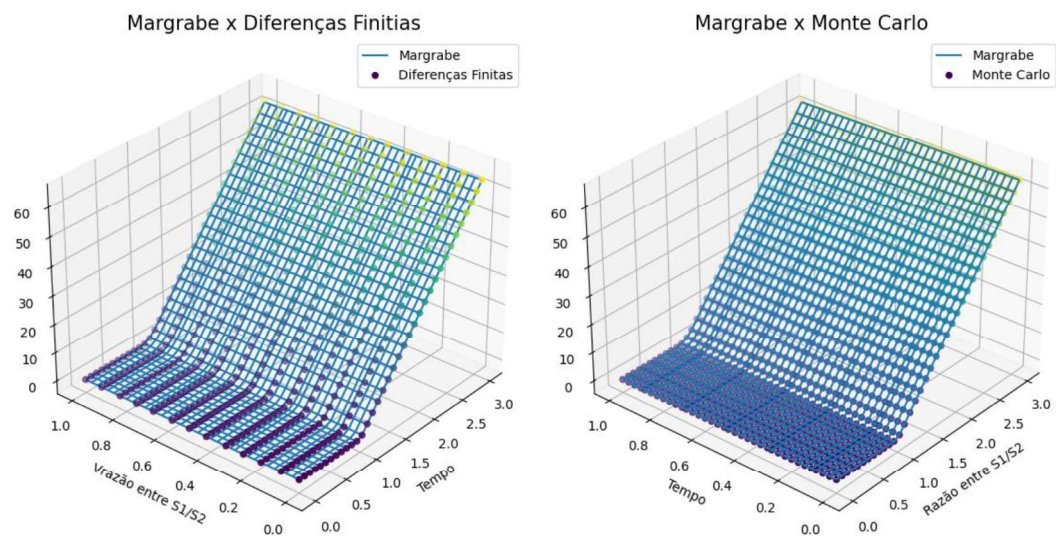


Figura 10 Comparação entre os modelos numéricos e analítico. Fonte: O autor

4.2.1 Sensibilidade do Modelo

É possível alterar os parâmetros do modelo para verificar o como essas mudanças afetam o prêmio da opção. Ainda analisando a opção do ITAU (ITUB3 e ITUB4). A Tabela a seguir apresenta o comportamento dos preços dessa opção para mudanças na correlação das variáveis (de 0,93 para 0,65), e no nível de volatilidade tanto do ITUB3 (de 0,21% para 0,32%) quanto ITUB4 (de 0,25% para 0,38%).

	Margrabe	Monte Carlo 2 Fatores	Monte Carlo 1 Fator	Diferenças finitas
Cenário Base	4.705	4.614	4.658	4.429
Redução de 30% da Correlação	5.311	5.254	5.272	5.042
Aumento de 50% Vol de ITUB3	4.817	4.737	4.794	4.486
Aumento de 50% da Vol de ITUB4	5.269	5.218	5.198	4.996

Tabela 10 Análise de sensibilidade. Fonte: O autor

A Tabela 10 indica que a opção de troca apresenta sensibilidade a correlação e as volatilidades das ações. Para entender de maneira mais profundo essa relação mais alguns estudos foram realizados. Visando inicialmente entender o efeito das volatilidades utilizou-se o modelo de Margrabe e de Monte Carlo para simular diferentes combinações das volatilidades de ITUB3 e ITUB4. Os resultados estão apresentados na Figura 11.

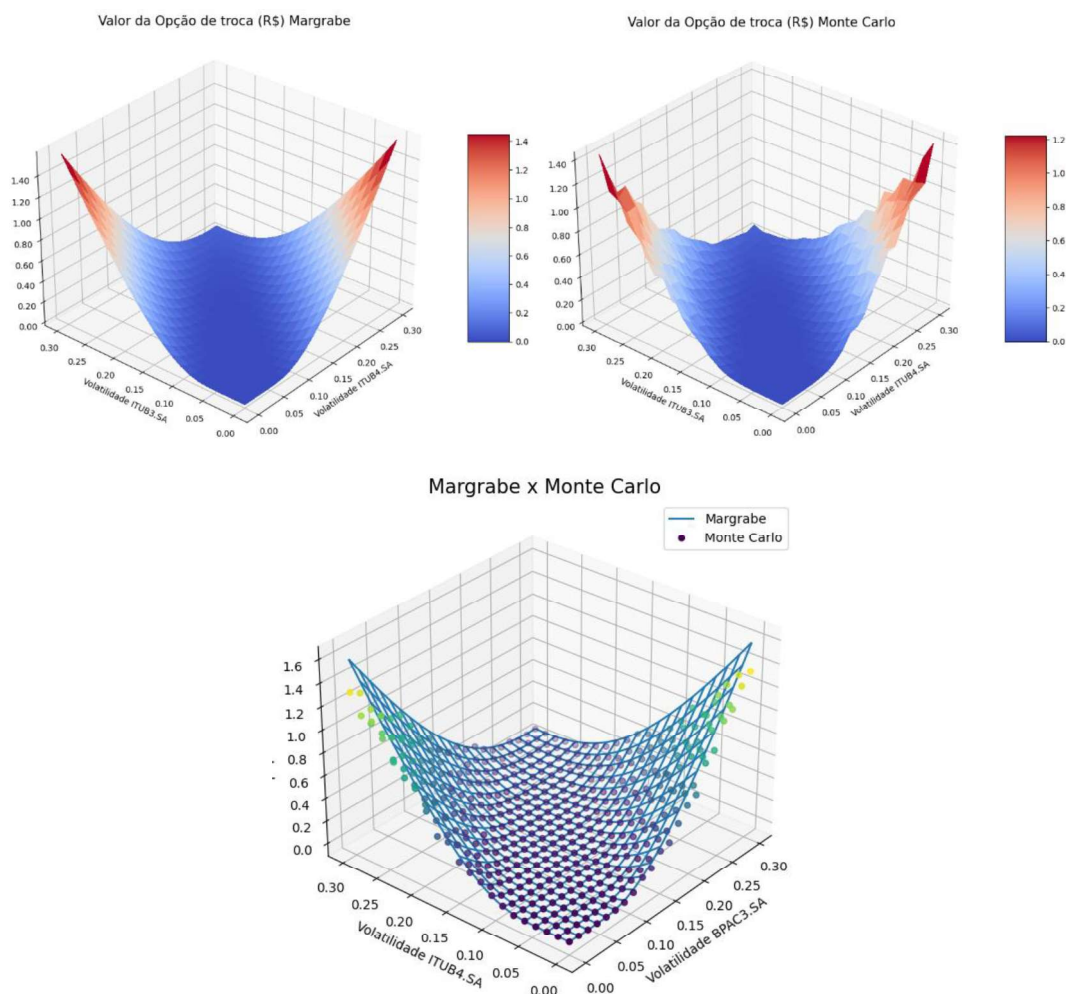


Figura 11 Impacto das volatilidades no prêmio da opção de troca ITAU. Fonte: O autor

No caso das ações do ITAU algo que chama atenção é o valor de correlação elevado entre elas, 0,93 nesse período. É interessante entender como as alterações das volatilidades impactariam ações com outros valores de correlação. Para entender esse comportamento foram realizadas outras análises alterando o valor da correlação das ações do ITAU e mantendo todos os demais parâmetros constantes, os resultados são apresentados a seguir.

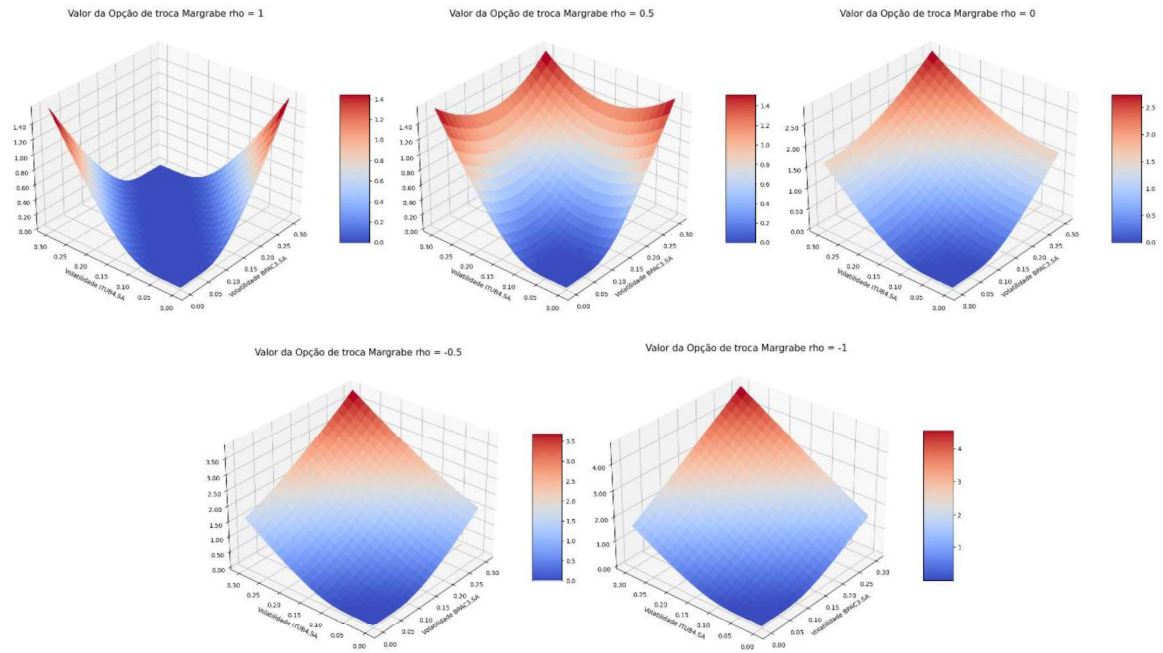


Figura 12 Impacto das volatilidades para diferentes valores de correlação. Fonte: O autor

Os resultados apresentados anteriormente evidenciam que o comportamento do prêmio é extremamente sensível ao valor da correlação entre as ações. Uma nova rodada de simulações foi realizada para analisar o comportamento dos modelos com a variação da correlação entre os fatores. Utilizando novamente as ações do ITAU, dessa vez manteve-se os valores originais capturados do mercado para esse par de ações e modificou-se o valor da correlação indo de -1 até mais 1. O comportamento para cada um dos modelos é mostrado a seguir:

Correl.	Margrabe	Call			Dif. Finitas	Put			Dif. Finitas
		Monte Carlo 2 Fatores	Monte Carlo 1 Fator			Monte Carlo 2 Fatores	Monte Carlo 1 Fator		
-1	5.28	5.29	5.24	5.33	5.11	5.04	5.00	4.92	
-0.75	5.19	5.23	5.18	5.24	4.32	4.46	4.42	4.14	
-0.5	5.10	5.15	5.10	5.15	3.51	3.56	3.53	3.35	
-0.25	5.01	5.04	4.99	5.06	2.70	2.74	2.72	2.56	
0	4.92	4.92	4.88	4.97	1.90	1.91	1.89	1.79	
0.25	4.83	4.87	4.82	4.87	1.13	1.16	1.14	1.06	
0.5	4.76	4.83	4.79	4.80	0.48	0.49	0.49	0.45	
0.75	4.71	4.76	4.71	4.74	0.07	0.07	0.07	0.07	
1	4.71	4.75	4.70	4.73	0.00	0.00	0.00	0.00	

Tabela 11 Sensibilidade dos modelos a correlação das ações. Fonte: O autor

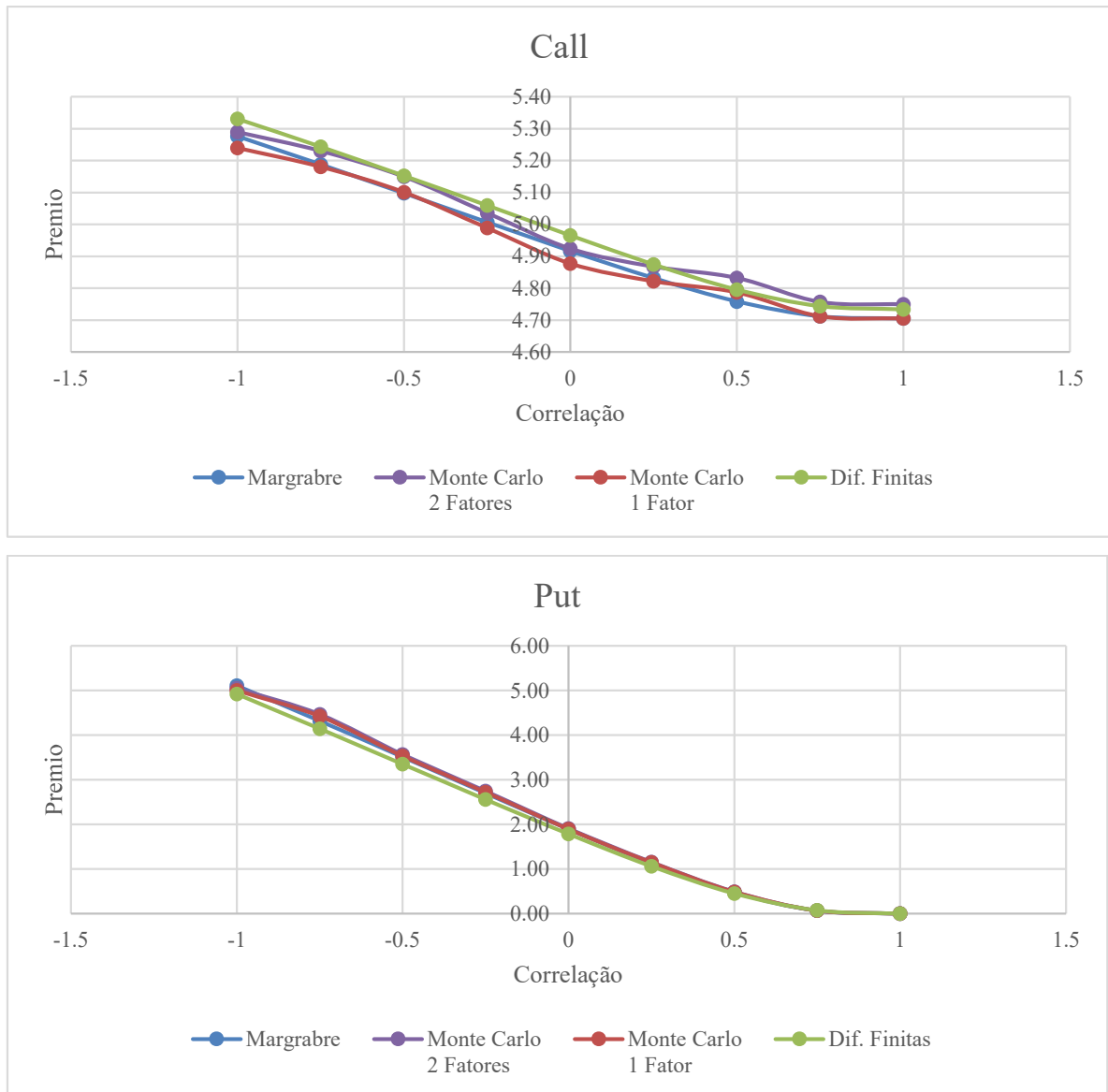


Figura 13 Sensibilidade dos modelos a correlação. Fonte: O autor

5 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

No capítulo anterior foram apresentados os resultados para opções de troca de ações de mercado listadas na B3. A tabela 8 apresentou um compilado desses resultados utilizando todos os modelos para várias ações distintas. Utilizando os valores analíticos como referência é possível notar que os melhores resultados foram encontrados por Monte Carlo usando 1 fator e por diferenças finitas, tendo Monte Carlo 1 fator apresentado uma pequena vantagem. Monte Carlo usando dois fatores em geral apresentou resultados mais distantes do valor analítico.

Uma das possíveis causas desse comportamento piorado do Monte Carlo utilizando dois fatores pode estar no valor de correlação apresentado pelas ações. Observou-se que ao simular os fatores separadamente, a correlação apresentada por elas apresenta pequenos desvios do valor desejado, como é mostrado na Figura 1. Dado que o preço do contrato é sensível a correlação dos fatores como ficou evidente na tabela 11, esses desvios podem ter impactos no cálculo do prêmio.

Com relação ao tempo de processamento apresentado na tabela 9, a solução de Margrabe foi significativamente mais rápida que as demais, apresentando a solução quase 100 vezes mais rápido que a do Monte Carlo usando 2 fatores. Entre os métodos numérico Monte Carlo usando apenas 1 fator foi ligeiramente mais rápido que diferenças finitas, e o Monte Carlo 2 fatores foi consideravelmente mais lento que os demais.

Esses tempos estão diretamente relacionados com os parâmetros utilizados nas simulações numéricas (252 passos e 10000 trajetórias para monte carlo e 32 passos para diferenças finitas). Esses valores foram utilizados baseados nos estudos de convergência realizados no Capítulo 3. Parâmetros distintos vão gerar tempos de processamento distinto e possivelmente inverter as posições dos métodos mais rápidos.

É importante ressaltar que apesar dos tempos de processamento próximos entre os dois métodos numéricos mais rápidos, as diferenças finitas calculam a solução para diversas combinações de pontos (instante de tempo e valores dos ativos), fornecendo diretamente a superfície de prêmios Figura 6, ao passo que Monte Carlo calcula a solução para um único ponto.

Dentre todas as ações presentes na tabela 6 optou-se por utilizar as ações do ITAU para realizar algumas análises de sensibilidade nos modelos. Nos primeiros testes apresentados na tabela 10, todos os modelos tiveram um bom comportamento para uma pequena variação na correlação e nas volatilidades.

Em seguida, aprofundou-se o estudo para o comportamento de uma opção de troca variando as volatilidades dos ativos subjacentes. Utilizando o modelo de Margrabe e Monte Carlo 1 fator, construiu-se uma superfície para os valores assumidos pelo prêmio da opção à medida que as volatilidades foram modificadas, como mostrados na Figura 11.

Nessa Figura é possível observar que o valor da opção aumenta à medida que a volatilidade entre os ativos subjacentes se torna cada vez mais diferentes uma da outra, já os valores mais baixos são observados quando as volatilidades dos ativos subjacentes são próximas, resultado similar ao descrito por Samanez (2013). Esse comportamento pode ser explicado pela alta correlação (0,94) entre ITUB3 e ITUB4, quando as suas volatilidades são semelhantes a probabilidade de divergência em seus valores na data de vencimento é menor, e assim, o valor estimado da opção é reduzido.

Para entender o que aconteceria numa situação em que a correlação entre as ações fosse diferente da observada pelo ITAU outras simulações foram rodadas alterando unicamente a correlação entre as ações. O resultado pode ser observado na Figura 12. Primeiramente nota-se que para valores de correlação maiores (próximas a 1), o nível da superfície como um todo é menor do que para correlações menores (próximas a -1), o que está alinhado com a Figura 13.

Fora isso, o formato da superfície se altera: para correlações menores (menores ou iguais a 0). O ponto de maior prêmio passa a ser para os maiores valores para ambas as volatilidades. Esse comportamento pode ser explicado, pois como correlação é negativa entre os fatores, a chance de divergência entre os valores no vencimento é alta, e tende a ser ainda maior à medida que as volatilidades aumentem.

Devido a importância da correlação no comportamento do prêmio dessa opção um estudo a parte foi rodado para observar a sensibilidade de cada um dos modelos as variações da correlação. Os resultados apresentados na Tabela 11 e Figura 13 mostram que todos os modelos foram capazes de capturar de maneira satisfatória a sensibilidade do prêmio em função da correlação.

Além disso o comportamento encontrado na Figura 13 indica que a medida que a correlação aumenta o prêmio diminui, resultado esperado dado que a baixa correlação pode aumentar as diferenças entre o valor das ações no vencimento do contrato, o que aumenta seu valor de acordo com a equação do *Payoff*.

6 CONCLUSÕES E PESQUISAS FUTURAS

6.1 Conclusões

Este trabalho calculou o preço teórico de opções de troca do mercado brasileiro utilizando ações listadas na B3. Estas foram calculadas primeiramente utilizando o modelo analítico dado pela fórmula de Margrabe, e em seguida utilizando modelos numéricos como Monte Carlo utilizando 1 e 2 fatores estocásticos e diferenças finitas explícito utilizando um único fator estocástico.

Os valores obtidos através dos métodos numéricos foram comparados ao analítico, observou-se que todos apresentaram resultados satisfatórios, os valores mais próximos ao de Margrabe foram obtidos pelo Monte Carlo 1 fator, seguidos pelas diferenças finitas e finalmente o Monte Carlo 2 fatores.

Com relação aos tempos de processamento, a ordem se manteve-se, sendo o Monte Carlo 1 fator o mais rápido, seguido pelas diferenças finitas (pouco tempo de diferença entre esses dois métodos) e finalmente bem mais demorado sendo o Monte Carlo 2 fatores. É importante notar que apesar de pouco tempo de diferença entre os dois métodos mais rápidos, as diferenças finitas computam o valor para diversos pontos de tempo e valores das ações, ao passo que o Monte Carlo calcula apenas para um único ponto. Além disso vale lembrar que a solução analítica apresentou um tempo significativamente menor que todos os métodos numéricos.

Alguns estudos de sensibilidades dos modelos aos parâmetros de entrada também foram realizados. Estudou-se o comportamento dos modelos em função da volatilidade das ações e da correlação. Observou-se que esse tipo de opção é extremamente sensível a variações de correlação entre as ações, e todos os modelos apresentaram um bom resultado para capturar essa sensibilidade.

6.2 Pesquisas futuras

Durante o desenvolvimento do trabalho alguns problemas de convergência foram encontrados para o método das diferenças finitas, esses foram contornados por ajustes no valor do passo da ação. Seria interessante adicionar ao escopo do projeto o método das diferenças finitas implícito e eventualmente até mesmo dos elementos finitos, e comparar os resultados obtidos tanto a nível custo computacional quanto de acurácia.

Além disso seria interessante para pesquisas futuras estender a aplicação do método das diferenças finitas explícito e passar a considerar 2 variáveis estocásticas, e comparar com os resultados obtidos no caso do método utilizando uma única variável.

Ainda no caso das resoluções via diferenças finitas seria interessante incorporar uma melhoria a ferramenta desenvolvida para que ela retornasse diretamente o prêmio da opção para valores intermediários aos *grids*. A versão atual da ferramenta não tem essa funcionalidade e o valor é obtido através de uma interpolação linear via *excel*. Seria extremamente útil automatizar esse processo dentro da ferramenta e utilizar uma interpolação mais próxima ao real comportamento da opção, sabe-se que para valores da ação próximo ao *strike* o comportamento é distante do linear.

Seria interessante também aprofundar os estudos das sensibilidades dos modelos aos parâmetros de entrada, o presente trabalho abordou as sensibilidades a correlação e as volatilidades das ações, mas seria de grande valia analisar por exemplo o comportamento em função do vencimento do contrato, e dos valores iniciais das ações.

Finalmente o escopo do trabalho poderia ser estendido para opções bidimensionais do tipo Spread, já que esta tem características muito similares com a de troca. Seria interessante fazer uma comparação do modelo analítico desenvolvido por Kirk (1995) com as soluções numéricas já desenvolvidas, é claro que existe a necessidade de fazer pequenos ajuste nas ferramentas desenvolvidas para aplicação em opções do tipo Spread.

REFERÊNCIAS

- BERNIS, Guillaume; GOBET, Emmanuel; KOHATSU-HIGA, Arturo. Monte Carlo evaluation of Greeks for multidimensional barrier and lookback options. *Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics*, v. 13, n. 1, p. 99-113, 2003.
- BLACK, Fischer; SCHOLES, Myron. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, v. 81, n. 3, p. 637-654, 1973.
- BOYLE, Phelim P. Options: A monte carlo approach. *Journal of financial economics*, v. 4, n. 3, p. 323-338, 1977.
- BRENNAN, Michael J.; SCHWARTZ, Eduardo S. The valuation of American put options. *The Journal of Finance*, v. 32, n. 2, p. 449-462, 1977.
- CARR, Peter. The valuation of sequential exchange opportunities. *The journal of Finance*, v. 43, n. 5, p. 1235-1256, 1988.
- DANHO, Sargon. Pricing Financial Derivatives with the FiniteDifference Method. 2017.
- GLASSERMAN, Paul; HEIDELBERGER, Philip; SHAHABUDDIN, Perwez. Efficient Monte Carlo methods for value-at-risk. 2000.
- HULL, John C. Options futures and other derivatives. Pearson Education India, 2003.
- KENSINGER, John W. The capital investment project as a set of exchange options. *Managerial Finance*, v. 14, n. 2/3, p. 16-27, 1988.
- KIRK, Ewan; ARON, J. Correlation in the energy markets. *Managing energy price risk*, v. 1, p. 71-78, 1995.
- MARGRABE, William. The value of an option to exchange one asset for another. *The journal of finance*, v. 33, n. 1, p. 177-186, 1978.
- MAYO, A. High-order accurate implicit finite difference method for evaluating American options. *The European Journal of Finance*, v. 10, n. 3, p. 212-237, 2004.
- MERTON, Robert C. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of economics and management science*, p. 141-183, 1973.
- SAMANEZ, Carlos P.; SOUZA, Giuliano CUI; BISSO, Claudio RS. Analysis and valuation of European-style and American-style exchange and spread options: the Brazilian case. *Revista Brasileira de Economia de Empresas*, v. 13, n. 1, 2013.
- ŠVÁBOVÁ, Lucia. Exchange option pricing using the Finite Difference Method. In: *Proceedings of the 6th International Scientific Conference Finance and Performance of Firms in Science, Education and Practise*. 2013. p. 782-789.
- VILLANI, Giovanni. A Monte Carlo approach to value exchange options using a single stochastic factor. In: *Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance*. Springer Milan, 2010. p. 305-314.
- WILMOTT, Paul. Paul Wilmott on quantitative finance. John Wiley & Sons,
- WINDCLIFF, Heath; FORSYTH, Peter A.; VETZAL, Ken R. Analysis of the stability of the linear boundary condition for the Black-Scholes equation. *Journal of Computational Finance*, v. 8, p. 65-92, 2004.

APÊNDICE A – Margrabe

```
def Margrabe_price(S1, S2, T, q1, q2, sigma1, sigma2, rho, option = 'call'):

    """
    Returns the analytical price using the Margrabe Formula Payoff Max(S1-S2,0)
    """

    #Payoff Max(S1-S2,0)
    #S1: spot price1
    #S2: spot price2
    #T: time to maturity
    #rho: Correlation
    #q1: rate of continuous dividend paying asset1
    #q2: rate of continuous dividend paying asset2
    #sigma1: volatility of underlying asset1
    #sigma2: volatility of underlying asset2

    sigma = np.sqrt(sigma1 ** 2 + sigma2 ** 2 - 2* rho* sigma1* sigma2 )

    d1 = (np.log(S1 / S2) + (q2 - q1 + (0.5 * (sigma ** 2))) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
    d2 = d1 - (sigma * np.sqrt(T))

    if option == 'call':
        price = S1* np.exp(-q1 * T)* ss.norm.cdf(d1) - S2* np.exp(-q2 * T) * ss.norm.cdf(d2)
    elif option == 'put':
        price = S2* np.exp(-q2 * T) * ss.norm.cdf(-d2) - S1* np.exp(-q1 * T)* ss.norm.cdf(-d1)

    return price
```

APÊNDICE B – Monte Carlo 2 fatores

```
def VetorSt1St2_LNBr(S1, S2, T, sigma1, sigma2, q1, q2, rho, trajetorias = 1000, passos = 100):

    """
    Returns two dataframes with the trajectories constructed through geometric
    Brownian motion. The generated trajectories respect the correlation between
    the assets. For the underlying price dynamics, LN(S) is used.
    """

    #S1: spot price1
    #S2: spot price2
    #T: time to maturity
    #sigma1: volatility of underlying asset1
    #sigma2: volatility of underlying asset2
    #q1: rate of continuous dividend paying asset1
    #q2: rate of continuous dividend paying asset2
    #rho: Correlation

    #time-step e o vector
    dt = T / passos
    vectTime = np.arange(0, T + 0.9 * dt, dt)

    # Building matrix with steps x trajectories dimensions
    vectSt1 = np.zeros((passos + 1, trajetorias))
    vectSt2 = np.zeros((passos + 1, trajetorias))

    # Initializing the asset value (first line)
    vectSt1[0,:] = S1
    vectSt2[0,:] = S2

    for i in range(1, passos + 1):

        # generating Brownian noise
        eps1 = np.random.randn(1, trajetorias)
        eps2 = rho* eps1 + np.random.randn(1, trajetorias)* np.sqrt(1 - rho**2)
        dWt1 = eps1* np.sqrt(dt)
        dWt2 = eps2* np.sqrt(dt)

        # Determining the dynamics of the underlying price
        vectSt1[i,:] = vectSt1[i-1,:]* np.exp(((q2 - q1)-(sigma1**2)/2)* dt + sigma1* dWt1)
        vectSt2[i,:] = vectSt2[i-1,:]* np.exp(((q2 - q1)-(sigma2**2)/2)* dt + sigma2* dWt2)

    df1 = pd.DataFrame(vectSt1, index = vectTime)
    df2 = pd.DataFrame(vectSt2, index = vectTime)
    return df1, df2
```

APÊNDICE C– Monte Carlo 1 fator

```
def VetorSt_LNBr_Numeraire(S1, S2, T, sigma1, sigma2, q1, q2, rho, trajetorias = 1000, passos
= 100):

    """
    An alternative to the VetorSt1St2_LNBr function, Instead of simulating the
    trajectories of Assets S1 and S2, there is a change of Numeraire and the trajectory
    of a single variable (S1/S2) is simulated.
    """

    #S1: spot price1
    #S2: spot price2
    #T: time to maturity
    #sigma1: volatility of underlying asset1
    #sigma2: volatility of underlying asset2
    #q1: rate of continuous dividend paying asset1
    #q2: rate of continuous dividend paying asset2
    #rho: Correlation

    S0 = S1/S2

    sigma = np.sqrt(sigma1 ** 2 + sigma2 ** 2 - 2* rho* sigma1* sigma2 )

    #Time-step vector
    dt = T / passos
    vectTime = np.arange(0, T + 0.9 * dt, dt)

    # Building matrix with steps x trajectories dimensions
    vectSt = np.zeros((passos + 1, trajetorias))

    # Initializing the asset value (first line)
    vectSt[0,:] = S0

    for i in range(1, passos + 1):
        nu = q2-q1

        # generating Brownian noise
        eps = np.random.randn(1, trajetorias)
        dWt = eps * np.sqrt(dt)

        # Determining the dynamics of the underlying price
        vectSt[i,:] = vectSt[i-1,:]* np.exp((nu-(sigma**2)/2)* dt + sigma* dWt)

    df = pd.DataFrame(vectSt, index = vectTime)

    return df
```

APÊNDICE D– Método das diferenças finitas

```
def Option_Value_3D_2Factors(Vol1, Vol2, Rho, q1, q2, PType, Expiration, NAS):

    """
    Returns a Dataframe with the Option value calculated as a function of the Asset value
    (Rows)
    and the Time to expiration (Columns). For the calculation, the Explicit Finite Difference
    method is used, dt is calculated to favor convergence. A change of numereire is used, the
    variable used is (S1/S2) and the Payoff given is Max(S1/S2-1,0).
    """

    #Vol1: volatility of underlying asset1
    #Vol2: volatility of underlying asset2
    #Rho: Correlation
    #q1: rate of continuous dividend paying asset1
    #q2: rate of continuous dividend paying asset2
    #PType: C for Call, P for Put
    #Expiration: time to maturity
    #NAS: Number of Asset Steps

    Vol = np.sqrt(Vol1**2 + Vol2**2 - 2*Vol1*Vol2*Rho)
    Int_Rate = -q2
    Strike = 1

    dS = 3 * Strike / NAS # #Infinity# is twice the strike
    # NAS is number of asset steps
    S = np.arange(0, 3*Strike + dS, dS)
    dt = (0.9 / Vol ** 2) / (NAS ** 2) # For stability
    NTS = round(Expiration / dt)+1 # Number of time steps
    dt = Expiration / NTS # To ensure that expiration is an integer number of time _steps away
    T = np.arange(0, (NTS+1)*dt, dt)
    T = np.round(T, 2)
    V = np.zeros((int(NAS) + 1, int(NTS) + 1))
    q = 1

    if PType == "P":# Test for call or put
        q = -1
        #Int Rate =
        print("Put")

    V[:, 0] = np.maximum(q * (S - Strike), 0) # Set up payoff
    #V[:, 0] = np.maximum(q * (S*np.exp(-(q2-q1)*NTS* dt) - Strike), 0) # Set up payoff

    for k in range(1, int(NTS)+1):
        for i in range(1, NAS):
            Delta = (V[i + 1, k - 1] - V[i - 1, k - 1]) / 2 / dS # Central difference
```

```

        Gamma = (V[i + 1, k - 1] - 2 * V[i, k - 1] + V[i - 1, k - 1]) / dS / dS
        # Central difference
        #Theta = -0.5 * (Vol**2) * (S[i]**2) * Gamma - Int_Rate * S[i] * Delta + Int_Rate
* V[i, k - 1]
        Theta = -0.5 * (Vol**2) * ((S[i]*np.exp(- (q2-q1) *k* dt))**2) * Gamma - Int_Rate
* (S[i]*np.exp(- (q2-q1) *k* dt)) * Delta + Int_Rate * V[i, k - 1]
        # Black-Scholes
        V[i, k] = V[i, k - 1] - dt * Theta
        V[0, k] = V[0, k - 1] * (1 - Int_Rate * dt) # Boundary condition at S=0
        #V[NAS, k] = S[NAS] - np.exp(1 - Int_Rate *k* dt)
        V[NAS, k] = 2 * V[NAS - 1, k] - V[NAS - 2, k] # Boundary condition at S=infinity
        df = pd.DataFrame(V, index = S, columns = T)
    return df

```