



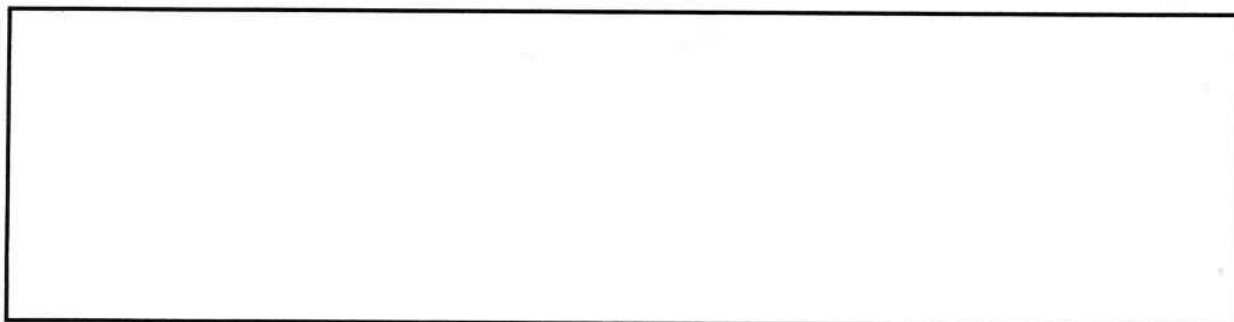
PROJETO DE FORMATURA / 2005 - 1º Semestre

**Material de Apoio a Sistemas de Potência
– Via Internet –**

ALUNOS: André Hooyu Caiafa
Erik Shinobe

ORIENTADOR: Nelson Kagan

COORDENADOR: Luiz C. R. Galvão





Agradecimentos

Este projeto foi desenvolvido com o apoio e coordenação dos professores Carlos M. V. Tahan, Luiz C. R. Galvão e Lourenço Matakas, contando também com a orientação e incentivo do professor Nelson Kagan.



Sumário

Agradecimentos	2
Sumário	3
Sinopse	6
Introdução	6
Objetivos	6
Metodologia e Desenvolvimento	7
Escopo do trabalho	7
Reagrupamento dos temas	8
Circuitos trifásicos simétricos equilibrados e desequilibrados	8
Valores por unidade	8
Componentes simétricas	8
Estudo de curto circuito na rede	8
Fluxo de potência em sistemas de potência	9
Representação dos Sistemas de Potência:	9
Álgebra matricial	9
Matriz de admitâncias nodais	9
Plataforma de desenvolvimento	10
Subprojetos desenvolvidos	10
Distribuição do material desenvolvido	10
Limitações	10
Resultados Obtidos	11
Circuitos Trifásicos Simétricos Equilibrados e Desequilibrados:	12
Circuitos Trifásicos Simétricos Equilibrados e Desequilibrados	13
Definição	13
Seqüência de fases	14
Representação fasorial	14
Operador α	15
Ligações Trifásicas	16
Ligação estrela	16
Ligação triângulo	19
Circuitos trifásicos com cargas desequilibradas	22
Estrela com impedância de aterramento	22
Carga estrela isolada	23
Potências	27
Potência de circuitos trifásicos	28
Teorema de Blondel	32
Exercícios interativos	35
Valores por Unidade:	36
Valores por Unidade	37
Definição e grandezas de base	37



Representação de transformadores em pu	38
Choque de bases	45
Diagrama Unifilar	50
Exercícios interativos	53
Componentes Simétricas:	55
Componentes Simétricas.....	56
Definição e Matrizes de transformação	56
Matriz de Impedância em Componentes Simétricas	59
Carga com Impedância de Aterramento	62
Circuitos Trifásicos desequilibrados.....	65
Transformadores Trifásicos em Componentes Simétricas.....	68
Exercícios interativos	71
Estudo de Curto-Circuito na Rede:	73
Estudo de Curto-Circuito na Rede.....	74
Introdução	74
Curto Trifásico	75
Curto Fase-Terra	81
Curto Dupla-Fase	88
Curto Dupla-Fase-Terra.....	90
Exercícios interativos	95
Fluxo de Potência em Sistemas de Potência:	97
Fluxo de Potência em Sistemas de Potência.....	98
Formulação do problema de fluxo de potência.....	98
Solução pelo método de Gauss-Seidel.....	100
Solução pelo método de Newton-Raphson	105
Exercícios interativos	109
Representação dos Sistemas de Potência:	111
Representação dos Sistemas de Potência: Álgebra Matricial.....	112
Multiplicação de matrizes	112
Partição de matrizes	113
Matriz nula	114
Matriz identidade.....	114
Matriz transposta	114
Inversão de matriz	114
Matriz cofatora e menor complementar	114
Determinante.....	115
Fórmula Clássica	115
Particionamento	115
Regra de Cramer.....	117
Representação dos Sistemas de Potência: Matriz de admitâncias nodais	118
Definição da matriz de admitâncias nodais	118
Definição de elementos	119
Barra:	119
Barra swing ou de referência:	119



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

Corrente injetada:	119
Tensões nodais:	119
Admitância de entrada (em curto-circuito).....	120
Admitância de transferência (em curto-circuito)	121
Montagem da matriz [Y].....	132
Montagem da matriz [Y] por inspeção	134
Propriedades da [Y]	136
Exercício interativo	139
Conclusões.....	140
Referências Bibliográficas.....	141
Anexos:	142
Listagem do código-fonte dos exercícios interativos:.....	143
Circuitos Trifásicos Simétricos Equilibrados e Desequilibrados:	143
Valores por Unidade:	145
Componentes Simétricas:	148
Estudo de Curto-Circuito na Rede:	150
Fluxo de Potência em Sistemas de Potência:	154
Representação dos Sistemas de Potência:	
Matriz de Admitâncias Nodais:	157
Bibliotecas de funções desenvolvidas:	158
comum.php:	158
exercícios_lib.php:.....	163
matrizes.php:	165
matrizes_cmpl.php:	169
ncomplexos.php:	174
Estrutura de diretórios e arquivos principais:	177



Sinopse

Material modular composto por conteúdo teórico (circuitos trifásicos, componentes simétricas, matriz de redes, etc...), exercícios resolvido na forma de exemplos e exercícios interativos, para apoio ao aluno nas disciplinas de introdução a sistemas de potência, sistemas de potência I e sistemas de potência II.

Introdução

O projeto em questão não tem a ambição de se tornar um "curso a distância" das disciplinas de sistemas de potência. Deve se esclarecer que o projeto serve como um complemento para o aprendizado das disciplinas "introdução a sistemas de potência", "sistemas de potência I" e "sistemas de potência II".

A idéia do projeto surgiu com a experiência própria obtida ao longo do curso de graduação. Sentimos que era necessário um material que enfatizasse mais a parte didática aplicada junto a exemplos e exercícios-chave em alguns tópicos abordados ao longo do curso de graduação.

O uso da internet como meio de divulgação foi uma escolha segura já que atualmente é uma tecnologia que permite o acesso de vários lugares, a qualquer hora do dia.

Objetivos

Esse projeto tem como finalidade o desenvolvimento de material de apoio ao aluno nas disciplinas de introdução a sistemas de potência, sistemas de potência I e sistemas de potência II para facilitar o aprendizado das mesmas.

Temos como meta inicial desenvolver um material modular composto por conteúdo teórico (circuitos trifásicos, componentes simétricas, matriz de redes, etc...), exercícios resolvidos e exercícios interativos, apoiando-se também na facilidade de distribuição e uso do material pela Internet.

Além de criar uma base de conteúdo, pretendemos também desenvolver de forma a tornar possível a expansão e gerenciamento do material disponibilizado.



Metodologia e Desenvolvimento

Devido à amplitude do projeto, optamos por selecionar os tópicos que julgamos como pontos-chave para o aprendizado de sistemas de potência na graduação e definimos nosso escopo de trabalho.

Uma vez definido o escopo, buscamos auxílio com o prof. Orientador Nelson Kagan para dividir o escopo de forma pedagógica, o que resultou em um reagrupamento dos temas selecionados objetivando facilitar o entendimento e desenvolvimento do projeto.

Escopo do trabalho

Os assuntos escolhidos para compor o escopo deste trabalho foram:

- ✎ Circuitos trifásicos
- ✎ Valores por unidade
- ✎ Componentes simétricas
- ✎ Estudo de curto circuito na rede
- ✎ Fluxo de potência em sistemas de potência
- ✎ Representação dos sistemas de potência
 - Álgebra Matricial
 - Matriz de admitâncias nodais (Y)



Reagrupamento dos temas

Circuitos trifásicos simétricos equilibrados e desequilibrados

- Definição
- Seqüência de fases
 - Representação fasorial
 - Operador alpha
- Ligações Trifásicas
 - Ligação estrela
 - Ligação triângulo (delta)
- Circuitos trifásicos com cargas desequilibradas
 - Estrela com impedância de aterramento
 - Carga estrela isolada
- Potências
 - Potência de circuitos trifásicos
 - Teorema de Blondel

Valores por unidade

- Definições e grandezas de base
- Representação de transformadores em pu
- Choque de bases
- Diagrama Unifilar

Componentes simétricas

- Definição e Matrizes de transformação
- Matriz de Impedância em Componentes Simétricas
- Carga com Impedância de Aterramento
- Circuitos Trifásicos desequilibrados
- Transformadores Trifásicos em Componentes Simétricas

Estudo de curto circuito na rede

- Introdução
- Curto trifásico
- Curto fase terra
- Curto dupla fase
- Curto dupla fase terra



Fluxo de potência em sistemas de potência

- Formulação do problema de fluxo de potência
- Solução pelo método de Gauss-Seidel
- Solução pelo método de Newton-Raphson

Representação dos Sistemas de Potência:

Álgebra matricial

- Multiplicação de Matrizes
- Partição de Matrizes
- Matriz nula
- Matriz identidade
- Matriz transposta
- Inversão de matriz
 - Matriz cofatora e menor complementar
 - Determinante
 - Fórmula Clássica
 - Particionamento
- Regra de Cramer

Matriz de admitâncias nodais

- Definição da matriz de admitância nodal
- Definição de elementos: barra, barra swing, corrente injetada
- Admitância de entrada (em curto circuito)
- Admitância de transferência (em curto circuito)
- Montagem da matriz Ybus
 - Modo de inspeção
 - Propriedades da matriz Ybus



Plataforma de desenvolvimento

Baseado na pesquisa de recursos disponíveis no servidor do PEA e no grau de interatividade do projeto, selecionamos como plataforma de desenvolvimento um servidor linux/apache, onde desenvolvemos atualmente a parte estrutural e interativa do site com a linguagem php.

Para a parte de documentação teórica, estamos fazendo uso do Openoffice e do MsOffice com a extensão do equations. Demais aplicativos que nos dão suporte ao desenvolvimento são: Gimp (editor de imagens), pspice (desenhos), Quanta (editoração de página htm/php) e Mozilla (testes de visualização e navegabilidade).

Subprojetos desenvolvidos

Para atingirmos nossos objetivos, geramos junto ao nosso projeto principal alguns subprojetos que podem ser reutilizados por futuros interessados.

Um deles seriam as bibliotecas de funções e objetos que tivemos que criar em php para manipular números complexos, operações matriciais com números reais e operações matriciais com números complexos.

Um outro subprojeto seria o uso da estrutura desenvolvida para expor material desenvolvido em outras disciplinas/projetos.

Distribuição do material desenvolvido

Tendo em mente facilitar a distribuição do material desenvolvido, disponibilizamos também junto com cada tópico o material na forma de documento portátil (pdf) que pode ser lido e impresso livremente, servindo também como guia/complemento de estudo ao aluno.

Limitações

Nos exercícios interativos, desenvolvemos pequenos programas que aplicassem o assunto abordado no tópico. O exercício interativo permite que certos parâmetros sejam modificados pelo aluno para entender a natureza do conceito, porém algumas limitações são impostas, como a rigidez da topologia dada.



Resultados Obtidos

Dado as limitações da mídia impressa, iremos apresentar nesta seção o material que está disponível sob a forma de documento portátil (pdf) em cada tópico, que retrata o conteúdo abordado da mesma forma.

Antes da apresentação do conteúdo do mesmo, é mostrada a página-índice do conteúdo em sua forma on-line.

Foi acrescentado também a cada tópico, como um subitem adicional, a tela dos exercícios interativos disponíveis do tópico na versão on-line.



Circuitos Trifásicos Simétricos Equilibrados e Desequilibrados:

Material de Apoio a Sistemas de Potência

::: Circuitos Trifásicos Simétricos Equilibrados e Desequilibrados :::

Definição

Sequência de Fases

Ligações Trifásicas

Circuitos trifásicos com cargas desequilibradas

Potências

Exercícios Interativos

Circuitos trifásicos

Valores por unidade

Componentes simétricas

Estudo de curto circuito na rede

Fluxo de potência em sistemas de potência

Representação dos sistemas de potência

● Circuitos trifásicos simétricos equilibrados e desequilibrados

- Definição
- Sequência de fases
 - Representação fasorial
 - Operador alpha
- Ligações Trifásicas
 - Ligação estrela
 - Ligação triângulo (delta)
- Circuitos trifásicos com cargas desequilibradas
 - Estrela com impedância de aterramento
 - Carga estrela isolada
- Potências
 - Potência de circuitos trifásicos
 - Teorema de Blondel
- Exercícios Interativos
 - Exercício 1 - Potência de circuitos trifásicos
 - Exercício 2 - Teorema de Blondel

| Circuitos trifásicos | Valores por unidade | Componentes simétricas | Estudo de curto circuito na rede
| Fluxo de potência em sistemas de potência | Representação dos sistemas de potência



Circuitos Trifásicos Simétricos Equilibrados e Desequilibrados

Definição

Chamamos de circuito trifásico, um circuito composto de um sistema de tensões do tipo:

$$e_1 = E_1 \cdot \cos \omega t$$

$$e_2 = E_2 \cdot \cos(\omega t - \theta_1)$$

$$e_3 = E_3 \cdot \cos(\omega t - \theta_2)$$

onde E_1, E_2 e E_3 são os valores de pico da função cossenoidal.

Neste guia nós abordaremos particularmente os sistemas trifásicos simétricos (as tensões têm o mesmo valor máximo e estão defasados em 120° entre si).

$$e_a = E \cdot \cos(\omega t + \theta) = E \sqrt{\theta}$$

$$e_b = E \cdot \cos(\omega t - (\theta - 120)) = E \sqrt{-(\theta - 120)}$$

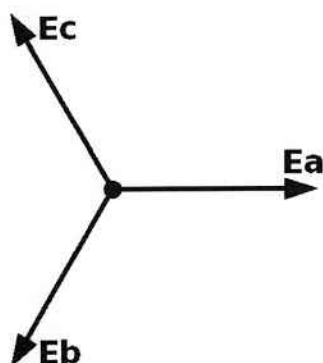
$$e_c = E \cdot \cos(\omega t - (\theta - 240)) = E \sqrt{-(\theta - 240)} = E \sqrt{\theta + 240}$$



Seqüência de fases

Seqüência de fases é a ordem em que ocorrem os valores máximos. Chamamos de seqüência direta ou positiva quando as fases ocorrem na ordem: ABC, CAB ou BCA, usando a mesma linha de raciocínio temos que seqüência inversa ou negativa seria ACB, BAC ou CBA.

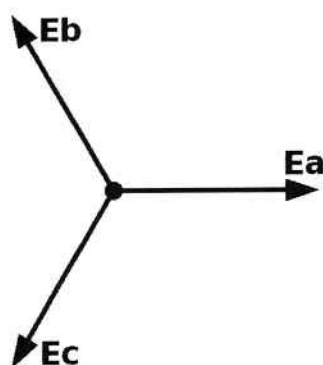
Representação fasorial



(figura 1 – seqüência positiva)

Repare que a seqüência de fase é obtida pela ordem de passagem das tensões pela referência quando fazemos os vetores girarem no sentido anti-horário.

Analogamente a seqüência negativa ficaria:



(figura 2 – seqüência negativa)

Exemplo:

Dado $\dot{V}_a = 127\sqrt{50}^\circ$, calcule $\dot{V}_b$ e $\dot{V}_c$ na seqüência direta e inversa.



Seqüência positiva

$$\dot{V}_a = 127 \angle 50^\circ$$

$$\dot{V}_b = 127 \angle 50^\circ - 120^\circ = 127 \angle -70^\circ$$

$$\dot{V}_c = 127 \angle 50^\circ - 240^\circ = 127 \angle -190^\circ$$

Seqüência negativa

$$\dot{V}_a = 127 \angle 50^\circ$$

$$\dot{V}_b = 127 \angle 50^\circ - 240^\circ = 127 \angle -190^\circ$$

$$\dot{V}_c = 127 \angle 50^\circ - 120^\circ = 127 \angle -70^\circ$$

Operador α

Como se pode notar, as tensões apresentam o mesmo módulo e uma defasagem de 120° , o operador α nada mais é que uma forma de defasar um fasor em 120°

$$\alpha = 1 \angle 120^\circ = 1 \angle -240^\circ$$

$$\alpha^2 = 1 \angle 120^\circ \cdot 1 \angle 120^\circ = 1 \angle 240^\circ = 1 \angle -120^\circ$$

No exemplo anterior poderíamos encontrar a seqüência positiva fazendo:

$$\dot{V}_a = 127 \angle 50^\circ$$

$$\dot{V}_b = \dot{V}_a \cdot \alpha^2 = 127 \angle 50^\circ \cdot 1 \angle -120^\circ = 127 \angle -70^\circ$$

$$\dot{V}_c = \dot{V}_a \cdot \alpha = 127 \angle 50^\circ \cdot 1 \angle -240^\circ = 127 \angle -190^\circ$$

E a negativa:

$$\dot{V}_a = 127 \angle 50^\circ$$

$$\dot{V}_b = \dot{V}_a \cdot \alpha = 127 \angle -190^\circ$$

$$\dot{V}_c = \dot{V}_a \cdot \alpha^2 = 127 \angle -70^\circ$$

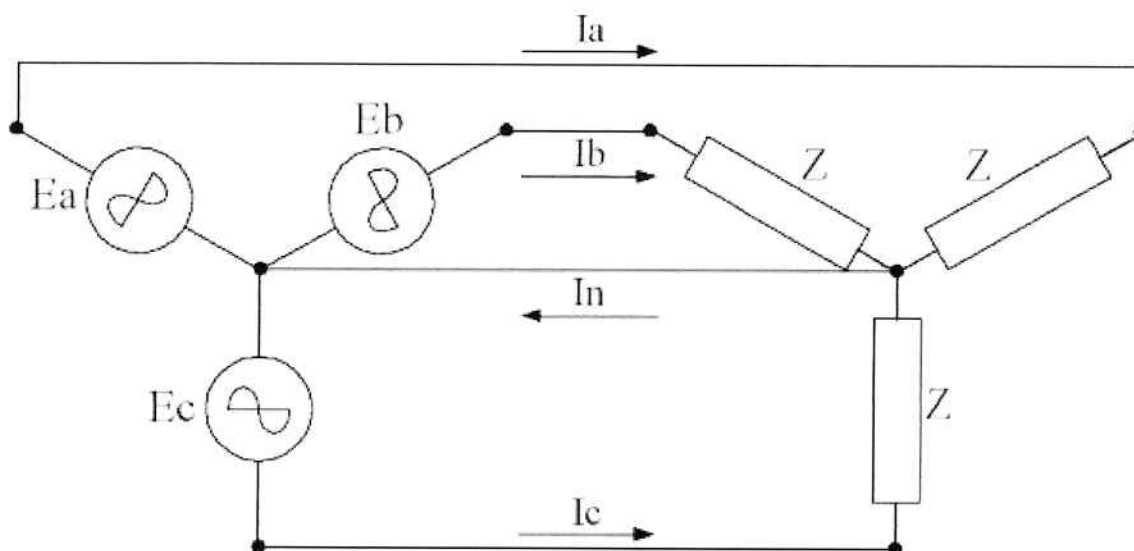


Ligações Trifásicas

Em Circuitos trifásicos nós podemos encontrar predominantemente dois tipos de ligações: triângulo (delta) e estrela.

Ligação estrela

A princípio iremos utilizar a ligação estrela equilibrada, ou seja, um operador trifásico alimentando uma carga trifásica equilibrada.



(figura 3 – ligação estrela)

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$$

$$\dot{E}_A = \bar{Z} \dot{I}_A$$

$$\dot{E}_B = \bar{Z} \dot{I}_B$$

$$\dot{E}_C = \bar{Z} \dot{I}_C$$

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A}{\bar{Z}}$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{E}_B}{\bar{Z}}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{E}_C}{\bar{Z}}$$

Considerando seqüência positiva



$$\dot{E}_B = \dot{E}_A \cdot \alpha^2$$

$$\dot{E}_C = \dot{E}_A \cdot \alpha$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{E}_A \cdot \alpha^2}{Z}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{E}_A \cdot \alpha}{Z}$$

$$\dot{I}_N = \frac{\dot{E}_A}{Z} + \frac{\dot{E}_A \cdot \alpha^2}{Z} + \frac{\dot{E}_A \cdot \alpha}{Z} = \frac{\dot{E}_A}{Z} \cdot (1 + \alpha^2 + \alpha) = \frac{\dot{E}_A}{Z} \cdot (1 + 1 \angle 120^\circ + 1 \angle -120^\circ) = 0$$

Podemos observar que para um circuito trifásico em estrela equilibrado não é necessário o fio de retorno.

Definições:

- ✎ Corrente de fase: corrente que percorre a bobina do gerador.
- ✎ Corrente de linha: corrente que percorre a ligação entre gerador e carga.
- ✎ Tensão de fase: tensão de uma fase e relação ao neutro.
- ✎ Tensão de linha: tensão de uma fase em relação a outra fase.

Pela figura anterior temos que :

Tensões de fase: $\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$

Tensões de linha: $\dot{E}_{AB}, \dot{E}_{BC}, \dot{E}_{CA}$

Correntes de fase: $\dot{I}_{NA} = \dot{I}_A, \dot{I}_{NB} = \dot{I}_B, \dot{I}_{NC} = \dot{I}_C$

Correntes de linha: $\dot{I}_{AA'} = \dot{I}_A, \dot{I}_{BB'} = \dot{I}_B, \dot{I}_{CC'} = \dot{I}_C$

Na ligação estrela a corrente de linha é igual a corrente de fase.

$$\dot{E}_{AB} = \dot{E}_A - \dot{E}_B = \dot{E}_A - \dot{E}_A \cdot \alpha^2 = \dot{E}_A (1 - \alpha^2) = \dot{E}_A (1 - 1 \angle 120^\circ) = \dot{E}_A \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ$$

$$\dot{E}_{BC} = \dot{E}_B - \dot{E}_C = \dot{E}_B \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ = \dot{E}_A \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ \cdot \alpha^2$$

$$\dot{E}_{CA} = \dot{E}_C - \dot{E}_A = \dot{E}_C \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ = \dot{E}_A \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ \cdot \alpha$$



Na ligação estrela as tensões de linha e fase estão defasadas de $\sqrt{3}\angle 30^\circ$

Utilizando uma matriz

$$\dot{V} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{AB} \\ \dot{V}_{BC} \\ \dot{V}_{CA} \end{bmatrix} = \sqrt{3}\angle 30^\circ \cdot \begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} = \sqrt{3}\angle 30^\circ \cdot \dot{V}_{AN} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$\dot{I} = \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = \dot{I}_A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Exemplo:

Dados $\bar{Z} = 10 + j10$ e $\dot{V}_{AN} = 127\angle 0^\circ$, determine as tensões de linha e fase e as correntes de linha e fase para a figura anterior

$$\dot{V}_{AN} = 127\angle 0^\circ$$

$$\bar{Z} = 10 + j10 \cong 14,142\angle 45^\circ$$

$$\dot{V}_{BN} = \dot{V}_{AN} \cdot \alpha^2 = 127\angle -120^\circ$$

$$\dot{V}_{CN} = \dot{V}_{AN} \cdot \alpha = 127\angle 120^\circ$$

$$\dot{V} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{AB} \\ \dot{V}_{BC} \\ \dot{V}_{CA} \end{bmatrix} = \sqrt{3}\angle 30^\circ \cdot \begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220\angle 30^\circ \\ 220\angle -90^\circ \\ 220\angle 150^\circ \end{bmatrix}$$

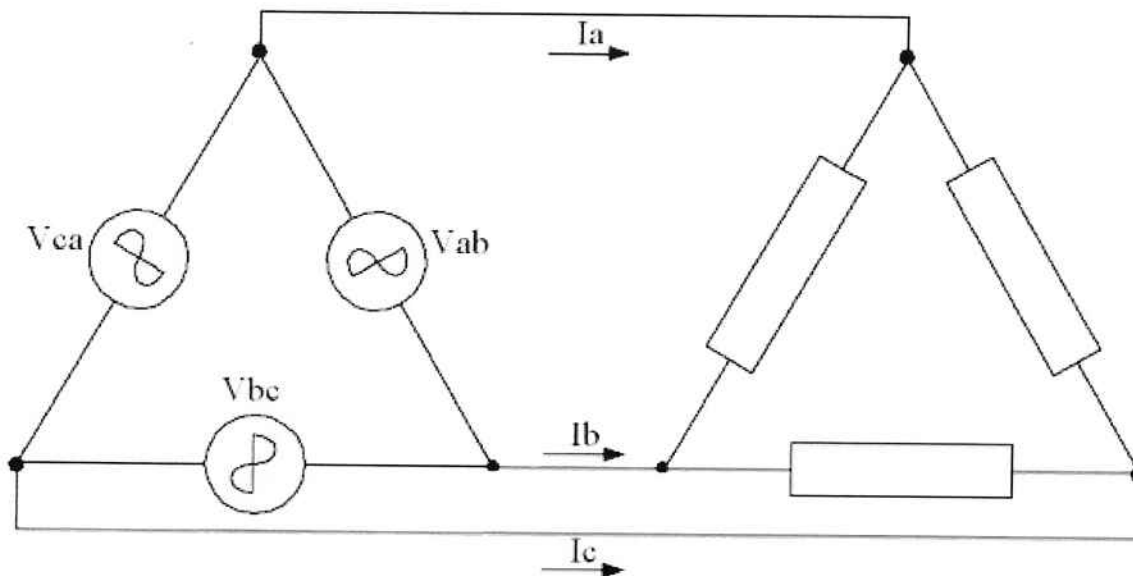
$$\dot{I}_A = \frac{127\angle 0^\circ}{14,142\angle 45^\circ} = 8,98\angle -45^\circ$$

$$\dot{I}_B = 8,98\angle -45^\circ \cdot \alpha^2 = 8,98\angle -165^\circ$$

$$\dot{I}_C = 8,98\angle -45^\circ \cdot \alpha = 8,98\angle 75^\circ$$



Ligação triângulo



(figura 4 – ligação triângulo)

Na ligação triângulo, podemos ver que as tensões de linha são iguais as de fase

$\dot{V}_{AB}, \dot{V}_{BC}, \dot{V}_{CA}$, tensões de linha e fase.

$\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$, correntes de linha.

$\dot{I}_{AB}, \dot{I}_{BC}, \dot{I}_{CA}$, correntes de fase.

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = \dot{I}_{AB} \cdot (1 - \alpha) = \dot{I}_{AB} \cdot \sqrt{3} \cdot \angle -30^\circ$$

$$\dot{I}_{BC} = \dot{I}_{AB} \cdot \alpha^2$$

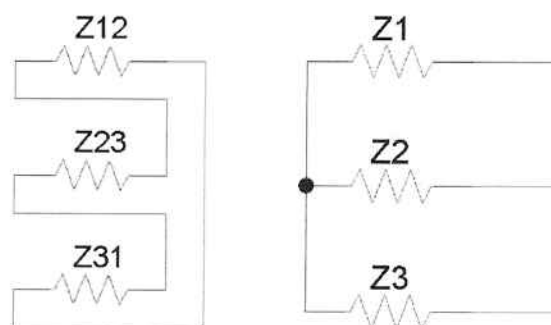
$$\dot{I}_{CA} = \dot{I}_{AB} \cdot \alpha$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = \dot{I}_{AB} \cdot (\alpha^2 - 1) = \dot{I}_{AB} \cdot \alpha^2 \cdot \sqrt{3} \cdot \angle -30^\circ = \dot{I}_{BC} \cdot \sqrt{3} \cdot \angle -30^\circ$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = \dot{I}_{AB} \cdot (\alpha - \alpha^2) = \dot{I}_{AB} \cdot \alpha \cdot \sqrt{3} \cdot \angle -30^\circ = \dot{I}_{CA} \cdot \sqrt{3} \cdot \angle -30^\circ$$



Observação: geralmente não se resolve exercícios usando a ligação triângulo, é mais simples utilizar a transformação $\Delta - Y$ e $Y - \Delta$.



(figura 5a e 5b – ligação triângulo e Y)

$$\dot{Z}_1 = \frac{\dot{Z}_{12} \cdot \dot{Z}_{31}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}$$

$$\dot{Z}_2 = \frac{\dot{Z}_{23} \cdot \dot{Z}_{12}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}$$

$$\dot{Z}_3 = \frac{\dot{Z}_{31} \cdot \dot{Z}_{23}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}$$

$$\dot{Z}_{12} = \frac{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2}{\dot{Z}_Y}$$

$$\dot{Z}_{23} = \frac{\dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_3}{\dot{Z}_Y}$$

$$\dot{Z}_{31} = \frac{\dot{Z}_3 \cdot \dot{Z}_1}{\dot{Z}_Y}$$

$$\dot{Z}_Y = \frac{1}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3}}$$

Exemplo:

$\dot{V}_{AB} = 220 \angle 0^\circ$, $\dot{Z} = 10 + j10$ determinar tensões de linha e fase, correntes de linha e fase

$$\dot{V}_{AB} = 220 \angle 0^\circ$$

$$\dot{V}_{BC} = 220 \angle 0^\circ \cdot 1 \angle -120^\circ = 220 \angle -120^\circ$$

$$\dot{V}_{CA} = 220 \angle 120^\circ$$



Para dizermos que um circuito é equivalente a tensão e corrente de linha não podem se alterar, logo para se substituir os geradores em Δ por Y, basta fazer

$$\dot{Z}_A = \frac{\dot{Z} \cdot \dot{Z}}{\dot{Z} + \dot{Z} + \dot{Z}} = \frac{\dot{Z} \cdot \dot{Z}}{3\dot{Z}} = \frac{\dot{Z}}{3} = \dot{Z}_B = \dot{Z}_C$$

$$\dot{V}_{AB} = 220 \angle 0^\circ$$

$$\dot{V}_{AN} \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ = \dot{V}_{AB}$$

$$\dot{V}_{AN} = \frac{220 \angle 0^\circ}{\sqrt{3} \angle 30^\circ} = 127 \angle -30^\circ$$

Logo

$$\dot{V}_{BN} = 127 \angle -150^\circ$$

$$\dot{V}_{CN} = 127 \angle -270^\circ$$

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{V}_{AN}}{\dot{Z}/3} = \frac{3\dot{V}_{AN}}{\dot{Z}} = 26,94 \angle -75^\circ$$

$$\dot{I}_B = 26,94 \angle -195^\circ = 26,94 \angle 165^\circ$$

$$\dot{I}_C = 26,94 \angle -315^\circ = 26,94 \angle 45^\circ$$

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{I}_A}{\sqrt{3} \angle 30^\circ} = 15,554 \angle -45^\circ$$

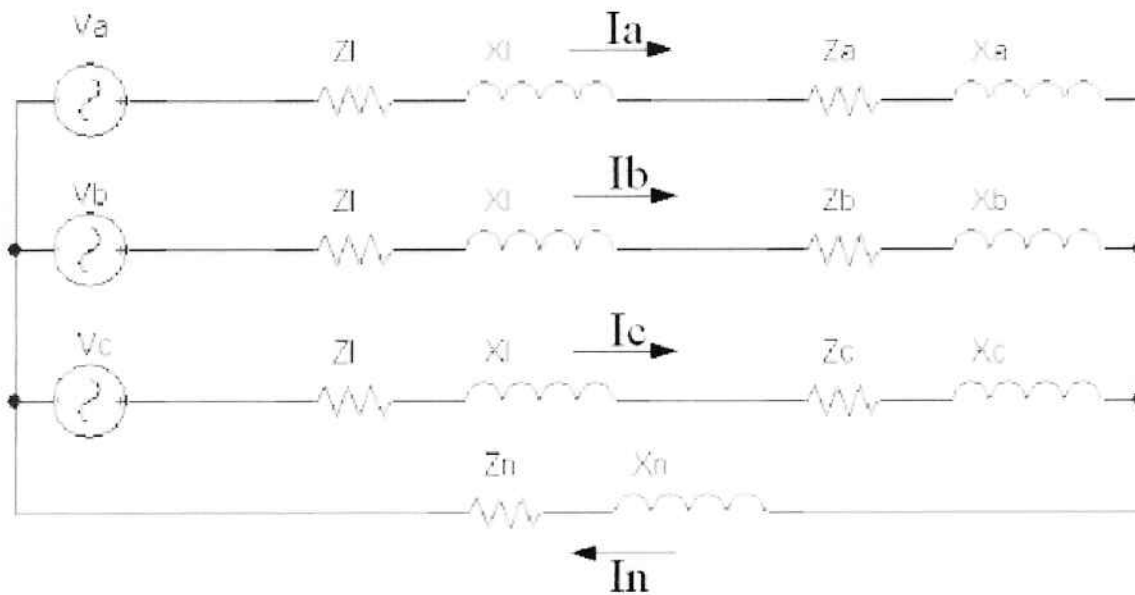
$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{I}_B}{\sqrt{3} \angle 30^\circ} = 15,554 \angle -165^\circ$$

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{I}_C}{\sqrt{3} \angle 30^\circ} = 15,554 \angle 75^\circ$$



Circuitos trifásicos com cargas desequilibradas

Estrela com impedância de aterramento



(figura 6 – Estrela com impedância de aterramento)

$\dot{Z}_L$ = impedância de linha

$$\dot{V}_{AN} = \dot{V}_{AN'} + \dot{V}_{N'N}$$

$$\dot{V}_{AN} = (\dot{Z}_A + \dot{Z}_L) \cdot \dot{I}_A + \dot{Z}_N \cdot \dot{I}_N$$

Analogamente

$$\dot{V}_{BN} = (\dot{Z}_B + \dot{Z}_L) \cdot \dot{I}_B + \dot{Z}_N \cdot \dot{I}_N$$

$$\dot{V}_{CN} = (\dot{Z}_C + \dot{Z}_L) \cdot \dot{I}_C + \dot{Z}_N \cdot \dot{I}_N$$

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$$

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{V}_{AN} - \dot{Z}_N \dot{I}_N}{\dot{Z}_A + \dot{Z}_L}$$



$$\dot{I}_B = \frac{\dot{V}_{BN} - \dot{Z}_N \dot{I}_N}{\dot{Z}_B + \dot{Z}_L}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{V}_{CN} - \dot{Z}_N \dot{I}_N}{\dot{Z}_C + \dot{Z}_L}$$

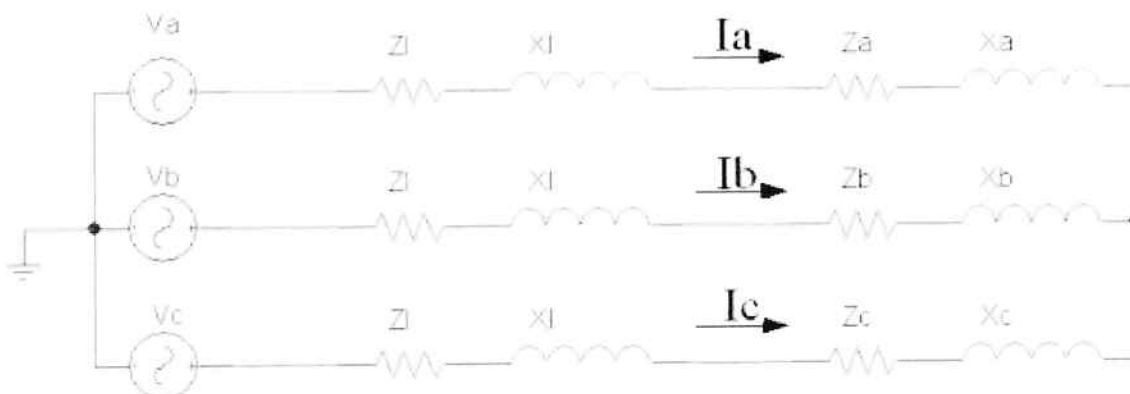
$$\dot{I}_N = \frac{\frac{\dot{V}_{AN}}{\dot{Z}_A + \dot{Z}_L} + \frac{\dot{V}_{BN}}{\dot{Z}_B + \dot{Z}_L} + \frac{\dot{V}_{CN}}{\dot{Z}_C + \dot{Z}_L}}{1 + \frac{\dot{Z}_N}{\dot{Z}_A + \dot{Z}_L} + \frac{\dot{Z}_N}{\dot{Z}_B + \dot{Z}_L} + \frac{\dot{Z}_N}{\dot{Z}_C + \dot{Z}_L}}$$

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{V}_{AN} - \dot{V}_{NN'}}{\dot{Z}_A + \dot{Z}_L}$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{V}_{BN} - \dot{V}_{NN'}}{\dot{Z}_B + \dot{Z}_L}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{V}_{CN} - \dot{V}_{NN'}}{\dot{Z}_C + \dot{Z}_L}$$

Carga estrela isolada



(figura 7 – Carga estrela isolada)

$$\dot{V}_{AN'} = \dot{V}_{AN} + \dot{V}_{NN'} = (\dot{Z}_A + \dot{Z}_L) \cdot \dot{I}_A$$

$$\dot{V}_{BN'} = \dot{V}_{BN} + \dot{V}_{NN'} = (\dot{Z}_B + \dot{Z}_L) \cdot \dot{I}_B$$

$$\dot{V}_{CN'} = \dot{V}_{CN} + \dot{V}_{NN'} = (\dot{Z}_C + \dot{Z}_L) \cdot \dot{I}_C$$



$$\dot{I}_A = \frac{\dot{V}_{AN} + \dot{V}_{NN'}}{\dot{Z}_L + \dot{Z}_A}$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{V}_{BN} + \dot{V}_{NN'}}{\dot{Z}_L + \dot{Z}_B}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{V}_{CN} + \dot{V}_{NN'}}{\dot{Z}_L + \dot{Z}_C}$$

Como não há corrente de retorno

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$$

$$\dot{V}_{NN'} = \frac{-\left(\frac{\dot{V}_{AN}}{\dot{Z}_L + \dot{Z}_A} + \frac{\dot{V}_{BN}}{\dot{Z}_L + \dot{Z}_B} + \frac{\dot{V}_{CN}}{\dot{Z}_L + \dot{Z}_C}\right)}{\frac{1}{\dot{Z}_L + \dot{Z}_A} + \frac{1}{\dot{Z}_L + \dot{Z}_B} + \frac{1}{\dot{Z}_L + \dot{Z}_C}}$$

Exemplo:

Para a figura 6 temos:

$$\dot{V}_{AN} = 127 \angle 0^\circ$$

$$\dot{Z}_L = 0,2 + j0,3$$

$$\dot{Z}_N = 0,1 + j0,2$$

$$\dot{Z}_A = 10$$

$$\dot{Z}_B = j10$$

$$\dot{Z}_C = -j10$$

Determine tensões de linha e fase, corrente de linha e fase, tensão e corrente no neutro da carga

$$\dot{V}_{AN} = 127 \angle 0^\circ$$

$$\dot{V}_{BN} = 127 \angle -120^\circ$$

$$\dot{V}_{CN} = 127 \angle 120^\circ$$

$$\dot{Z}_B = j10 = 10 \angle 90^\circ$$



$$\dot{Z}_C = -j10 = 10 \angle -90^\circ$$

$$\dot{Z}_L = 0,2 + j0,3 = 0,36 \angle 56,31^\circ$$

$$\dot{Z}_N = 0,1 + j0,2 = 0,223 \angle 63,43^\circ$$

$$\dot{I}_N = \frac{\frac{127 \angle 0^\circ}{10 + 0,36 \angle 56,31^\circ} + \frac{127 \angle -120^\circ}{10 \angle 90^\circ + 0,36 \angle 56,31^\circ} + \frac{127 \angle 120^\circ}{10 \angle -90^\circ + 0,36 \angle 56,31^\circ}}{1 + 0,223 \angle 63,43^\circ \cdot \left(\frac{1}{10 + 0,36 \angle 56,31^\circ} + \frac{1}{10 \angle 90^\circ + 0,36 \angle 56,31^\circ} + \frac{1}{10 \angle -90^\circ + 0,36 \angle 56,31^\circ} \right)}$$

$$\dot{I}_N = \frac{9,85 \angle -175,8^\circ}{1,01 \angle 1,175^\circ} \cong 9,75 \angle -177^\circ = 2,18 \angle -113,5^\circ$$

$$\dot{V}_{NN'} = 0,223 \angle 63,43^\circ \cdot 9,75 \angle -177^\circ = 2,18 \angle -113,5^\circ$$

$$\dot{I}_A = \frac{127 \angle 0^\circ - 2,18 \angle -113,5^\circ}{10 + 0,36 \angle 56,31^\circ} = 12,53 \angle -0,79^\circ$$

$$\dot{I}_B = \frac{127 \angle -120^\circ - 2,18 \angle -113,5^\circ}{10 \angle 90^\circ + 0,36 \angle 56,31^\circ} = 12,12 \angle 151^\circ$$

$$\dot{I}_C = \frac{127 \angle 120^\circ - 2,18 \angle -113,5^\circ}{10 \angle -90^\circ + 0,36 \angle 56,31^\circ} = 13,22 \angle -151^\circ$$

Exemplo:

Para a figura 7 temos:

$$\dot{V}_{AN} = 127 \angle 0^\circ$$

$$\dot{Z}_L = 0,2 + j0,3$$

$$\dot{Z}_A = 10$$

$$\dot{Z}_B = j10$$

$$\dot{Z}_C = -j10$$



Solução:

$$\dot{V}_{NN'} = \frac{-\left(\frac{127\angle 0^\circ}{10 + 0,36\angle 56,31^\circ} + \frac{127\angle -120^\circ}{10\angle 90^\circ + 0,36\angle 56,31^\circ} + \frac{127\angle 120^\circ}{10\angle -90^\circ + 0,36\angle 56,31^\circ}\right)}{\left(\frac{1}{10 + 0,36\angle 56,31^\circ} + \frac{1}{10\angle 90^\circ + 0,36\angle 56,31^\circ} + \frac{1}{10\angle -90^\circ + 0,36\angle 56,31^\circ}\right)}$$

$$\dot{V}_{NN'} = \frac{-(9,85\angle -175,8^\circ)}{0,102\angle 11,75^\circ} = 96,54\angle -177,56^\circ$$

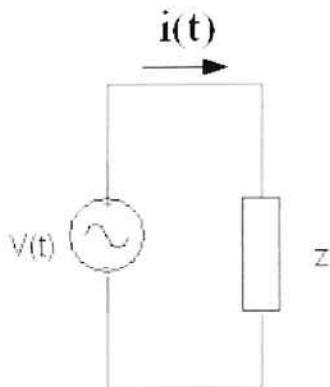
$$\dot{I}_A = \frac{127\angle 0^\circ - 96,54\angle -177,56^\circ}{10 + 0,36\angle 56,31^\circ} = 3,02\angle -9,346^\circ$$

$$\dot{I}_B = \frac{127\angle -120^\circ - 96,54\angle -177,56^\circ}{10\angle 90^\circ + 0,36\angle 56,31^\circ} = 19,07\angle 126^\circ$$

$$\dot{I}_C = \frac{127\angle 120^\circ - 96,54\angle -177,56^\circ}{10\angle -90^\circ + 0,36\angle 56,31^\circ} = 0,815\angle 60^\circ$$



Potências



(figura 8 – definição de $p(t)$)

Potência instantânea $p(t)$:

$$P(t) = v(t) \cdot i(t)$$

$$v(t) = V_p \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

$$i(t) = I_p \cdot \sin(\omega t + \delta)$$

$$V = \frac{V_p \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$I = \frac{I_p \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$P(t) = V \cdot I \cdot \cos(\theta - \delta) + V \cdot I \cdot \cos(2\omega t + \theta + \delta)$$

$V \cdot I \cdot \cos(\theta - \delta)$ = potência ativa, potência realmente absorvida pela carga que será transformada em trabalho.

$V \cdot I \cdot \cos(2\omega t + \theta + \delta)$ = potência flutuante, potência que será armazenada na carga, que mais tarde será devolvida a rede.

$$\theta - \delta = \varphi$$

$\cos(\varphi)$ = fator de potência.

Note que como cosseno é uma função par, não se pode determinar a natureza da carga apenas com o fator de potência.



Define-se como potência aparente o produto dos valores eficazes de tensão e corrente.

$$S = V.I = \text{potência aparente}$$

Potência reativa é a potência armazenada no bipólo e devolvida a rede constantemente.

$$Q = V.I.\sin(\varphi) = \text{potência reativa}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Unidades:

As potências ativa, reativa e aparente deveriam ter as mesmas unidades, mas a título de diferenciação cada uma apresenta uma unidade diferente.

P = watts (W)

Q = volt-ampére reativo (VAr)

S = volt-ampére (VA)

Podemos definir potência complexa como

$$\bar{S} = P + jQ = S \angle \varphi = \dot{V} \cdot \dot{I}^*$$

Potência de circuitos trifásicos

Sendo P_a, P_b, P_c as potências respectivas das fases A, B e C, a potência do circuito trifásico será:

$$P = P_A + P_B + P_C$$

$$P_A = V_{fA} \cdot I_{fA} \cdot \cos(\varphi_A)$$

$$P_B = V_{fB} \cdot I_{fB} \cdot \cos(\varphi_B)$$

$$P_C = V_{fC} \cdot I_{fC} \cdot \cos(\varphi_C)$$

Sendo o circuito trifásico e equilibrado

$$\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C = \varphi$$

$$V_{fA} = V_{fB} = V_{fC} = V_f = \text{tensão de fase}$$



$$P = 3.V_f.I_L.\cos(\varphi)$$

I_L = corrente de linha

Considerando valores de linha

Para carga Y

$$V_f = \frac{V_L}{\sqrt{3}}, \quad I_L = I_f$$

Para carga Δ

$$V_f = V_L, \quad I_f = \frac{I_L}{\sqrt{3}}$$

Então para ambos os casos temos:

$$P = \sqrt{3}.V_L.I_L.\cos(\varphi)$$

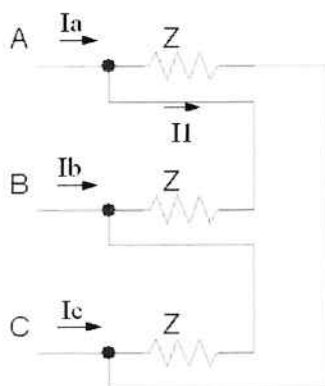
$$S = \sqrt{3}.V_L.I_L$$

$$Q = \sqrt{3}.V_L.I_L.\sin(\varphi)$$

Exemplo:

Dado $V_{AB} = 220V$ e $\dot{Z} = 10 + j10\Omega$

Calcule potência ativa, reativa e complexa consumida pela carga



(figura 9 – exemplo cálculo de potências em delta)

$$\dot{Z} = 10 + j10 = 14,142\sqrt{45^\circ} \Omega$$



$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{V}_{AB}}{\dot{Z}} = \frac{220}{14,142 \angle 45^\circ} = 15,556 \angle -45^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ = 26,944 \angle -75^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_B = 26,944 \angle -75^\circ - 120^\circ = 26,944 \angle 165^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = 26,944 \angle -75^\circ + 120^\circ = 26,944 \angle 45^\circ \text{ A}$$

$$\phi = 0 - (-45^\circ) = 45^\circ$$

$$P = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos(\phi) \\ = \sqrt{3} \cdot 220 \cdot 26,944 \cdot \cos(45^\circ) = 10267,043 \text{ W}$$

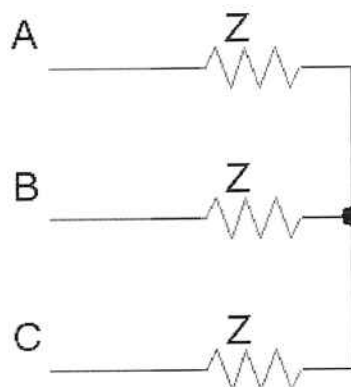
$$Q = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \sin(45^\circ) = 1026,043 \text{ Var}$$

$$\bar{S} = P + jQ = 10267,043 + j10267,043 \text{ VA}$$

Exemplo:

Dado $\dot{V}_{AB} = 380 \angle 30^\circ \text{ V}$ e $\dot{Z} = 6 + j8 \Omega$

Calcule a potência ativa, reativa e complexa consumida pela carga.



(figura 10 – exemplo cálculo de potências em Y)

$$\dot{Z} = 10 \angle 53,13^\circ \Omega$$



$$\dot{V}_{AN} = \frac{\dot{V}_{AB}}{\sqrt{3}} = \frac{380 \angle 30^\circ}{\sqrt{3}} = 219,39 \text{ V}$$

$$P = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos(\varphi)$$

$$I_f = \frac{\dot{V}_{AN}}{10 \angle 53,13^\circ} = 21,94 \angle -53,13^\circ \text{ A}$$

$$P = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 21,94 \cdot \cos(53,13^\circ) = 8664,29 \text{ W}$$

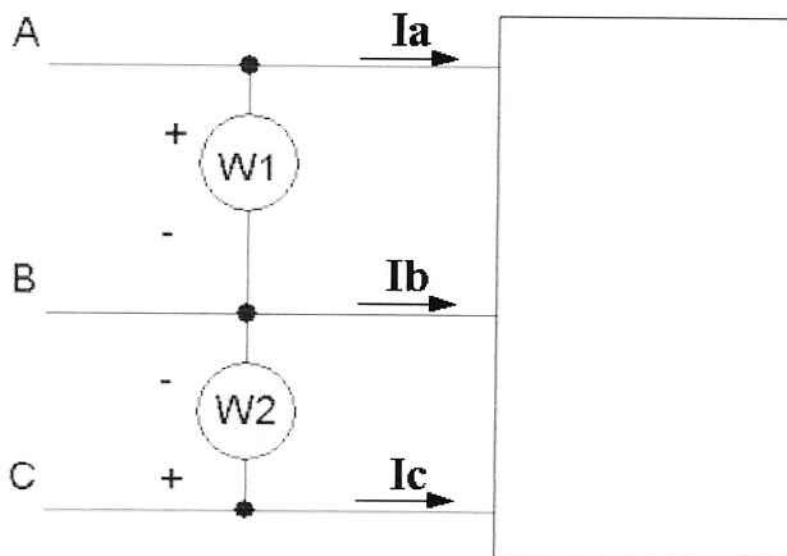
$$Q = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \sin(\varphi) = 11552,3477 \text{ Var}$$

$$\bar{S} = 8664,29 + j1152,3477 \text{ VA}$$



Teorema de Blondel

O teorema de Blondel mostra que num sistema polifásico a n-fios, a potência pode ser medida utilizando-se n-1 wattímetros, desde que a tensão seja medida em relação a mesma fase



(figura 11 – blondel)

$$W_1 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T P_1 dt = \Re[\dot{V}_{AC} \cdot I_A^*]$$

$$P_1 = \dot{V}_{AC} \cdot \dot{I}_A$$

$$W_2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T P_2 dt = \Re[\dot{V}_{BC} \cdot I_B^*]$$

$$P_2 = \dot{V}_{BC} \cdot \dot{I}_B$$

Exemplo:

Uma linha trifásica simétrica alimenta 2 cargas trifásicas equilibradas tais que:

1- ligação Y impedância por fase $\dot{Z}_1 = 20 + j20 \, \Omega$

2- ligação Δ impedância por fase $\dot{Z}_2 = 60 - j60 \, \Omega$

$$\dot{V}_L = 220V$$



Calcule:

- módulo das correntes de linha
- potências ativa absorvida pelas cargas
- potência lida em dois wattímetros ligados em blondel com a fase C como referência, sendo que é retirada a impedância da carga 2 entre as fases B e C.

a)

$$\dot{I}_{A1} = \frac{\dot{V}_{AN}}{\dot{Z}_1} = \frac{\dot{V}_{AB}/\sqrt{3}}{\dot{Z}_1} = \frac{220/\sqrt{3}}{20 + j20} = 4,49 \angle -45^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{A2} = \dot{I}_{AB2} \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ = \frac{\dot{V}_{AB}}{\dot{Z}_2} \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ = 4,49 \angle 45^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{A1} + \dot{I}_{A2} = 6,35 \text{ A}$$

b)

carga 1

$$\bar{S} = 3 \cdot \dot{V}_{AN} \cdot \dot{I}_{A1}^* = 3 \cdot 127 \cdot 4,49 \angle 45^\circ = 1209,6 + j1209,6 \text{ VA}$$

$$P_1 = 1209,6 \text{ W}$$

carga 2

$$P_2 = \sqrt{3} \cdot \dot{V}_L \cdot \dot{I}_L \cdot \cos(\varphi) = \sqrt{3} \cdot 220 \cdot 4,49 \cdot \cos(45^\circ) = 1209,6 \text{ W}$$

$$P = P_1 + P_2 = 2419,2 \text{ W}$$

c)

$$W_1 = \Re[V_{AC} \cdot \dot{I}_A^*]$$

$$W_2 = \Re[V_{BC} \cdot \dot{I}_B^*]$$

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{A1} + \dot{I}_{A2}$$

$$\dot{I}_{A1} = 4,49 \angle -45^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{A2} = \dot{I}_{AB2} - \dot{I}_{CA2}$$



$$\dot{I}_{AB2} = \frac{\dot{V}_{AB}}{\dot{Z}_2} = \frac{220 \angle 30^\circ}{60 - j60} = 2,59 \angle 75^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{CA2} = \frac{\dot{V}_{CA}}{\dot{Z}_2} = 2,59 \angle 195^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{A2} = 4,49 \angle 45^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{B1} + \dot{I}_{B2}$$

$$\dot{I}_{B1} = 4,49 \angle -165^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{B2} = -\dot{I}_{AB2} = -2,59 \angle 75^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_B = 6,2 \angle -143,8^\circ \text{ A}$$

$$W_1 = \Re[1397 \angle -30^\circ] = 1397 \cdot \cos(-30^\circ) = 1209,8 \text{ W}$$

$$W_2 = \Re[220 \angle -90^\circ \cdot 6,2 \angle 143,8^\circ] = 1364 \cdot \cos(53,8^\circ) = 805,6 \text{ W}$$

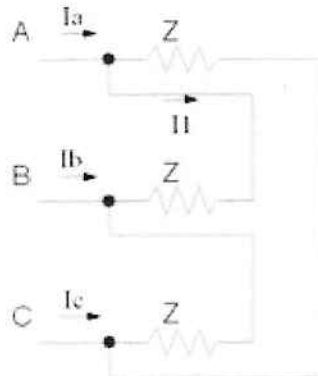
$$P = W_1 + W_2 = 2015,4 \text{ W}$$



Exercícios interativos

::: Exercício - Circuitos Trifásicos :::

Exercício 1 - Potência de circuitos trifásicos:



Sendo: $V_{ab} = 220$ [V] e $Z = (10 + j10)$ [ohms]

Determine P, Q e S consumida pela carga

> Resposta (decimais: 4)

Exercício 2 - Teorema de Blondel:

Para uma linha trifásica simétrica alimenta 2 cargas trifásicas equilibradas tais que:

1. Ligação Y com impedância por fase $Z_1 = 20 + j20$ [ohms]
2. Ligação Δ com impedância por fase $Z_2 = 60 + j-60$ [ohms]
3. $V_L = 220$ [V]

Determine:

1. Módulo das correntes de linha
2. Potências ativa absorvida pelas cargas
3. Potência lida em dois wattímetros ligados em blondel com a fase C como referência, sendo que é retirada a impedância da carga 2 entre as fases B e C.

> Resposta (decimais: 4)



Valores por Unidade:

Material de Apoio a Sistemas de Potência

::: Valores por Unidade :::

Definições e
grandezas de
base

Representação
de traços em pu

Choque de bases

Diagrama
Unifilar

Exercícios
Interativos

Circuitos
trifásicos

Valores por
unidade

Componentes
simétricas

Estudo de curto
circuito na rede

Fluxo de
potência em
sistemas de
potência

Representação
dos sistemas de
potência

● Valores por unidade



- Definições e grandezas de base
- Representação de transformadores em pu
- Choque de bases
- Diagrama Unifilar
- Exercícios Interativos
 - Exercício 1 - Representação de transformadores em pu
 - Exercício 2 - Choque de bases

| Circuitos trifásicos | Valores por unidade | Componentes simétricas | Estudo de curto circuito na rede
| Fluxo de potência em sistemas de potência | Representação dos sistemas de potência



Valores por Unidade

Definição e grandezas de base

Os valores pu nada mais são do que a normalização dos principais grandezas elétricas (corrente, tensão, impedância e potência). Essa mudança é utilizada para facilitar o cálculo em redes elétricas.

Os valores que utilizaremos como referência para a normalização são chamados de valores de base. Como $V=Z.I$ e $S=V.I$, podemos observar facilmente que basta fixar duas grandezas e as demais são resultante das equações acima citadas.

Usualmente são fixados os valores de tensão e potência.

$$I_{base} = \frac{S_{base}}{V_{base}}$$

$$Z_{base} = \frac{V_{base}}{I_{base}} = \frac{(V_{base})^2}{S_{base}}$$

Para se transformar V , I , Z e S quaisquer para valores pu, fazemos:

$$v = \frac{V}{V_{base}} pu$$

$$i = \frac{I}{I_{base}} pu$$

$$z = \frac{Z}{Z_{base}} pu$$

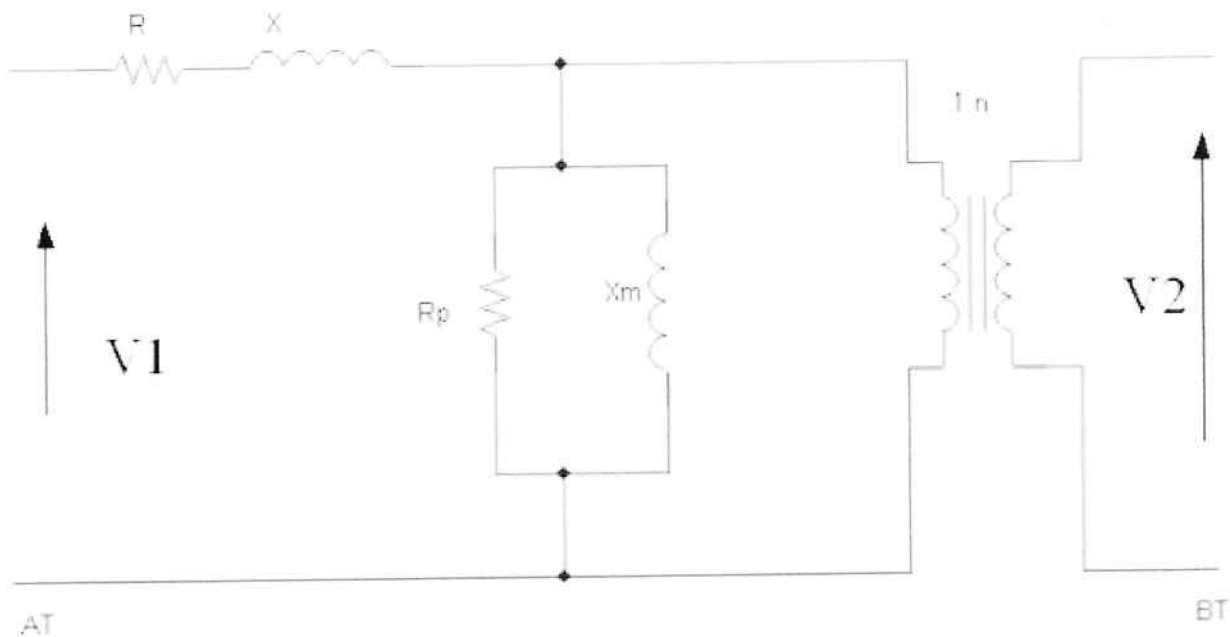
$$s = \frac{S}{S_{base}} pu$$

(*) note que os valores pu são representados por letras minúsculas.



Representação de transformadores em pu

Uma das maiores vantagens de se utilizar valores pu, é a possibilidade de se reduzir qualquer trafo de relação 1:n para um de 1:1.



(figura 1 – transformador 1:n)

Passando para pu fica:

No lado de baixa tem-se:

V_{b1} = tensão de base no lado de baixa

S_{b1} = potência de base no lado de baixa

Logo:

$$Z_{b1} = \frac{(V_{b1})^2}{S_{b1}}$$

$$v_1 = \frac{V_1}{V_{b1'}}$$

$$r = \frac{R}{Z_{b1}}$$

$$x = \frac{X}{Z_{b1}}$$



$$r_p = \frac{R_p}{Z_{b1}}$$

$$x_m = \frac{X_m}{Z_{b1}}$$

No lado de alta tem-se:

V_{b2} = tensão de base do lado de alta

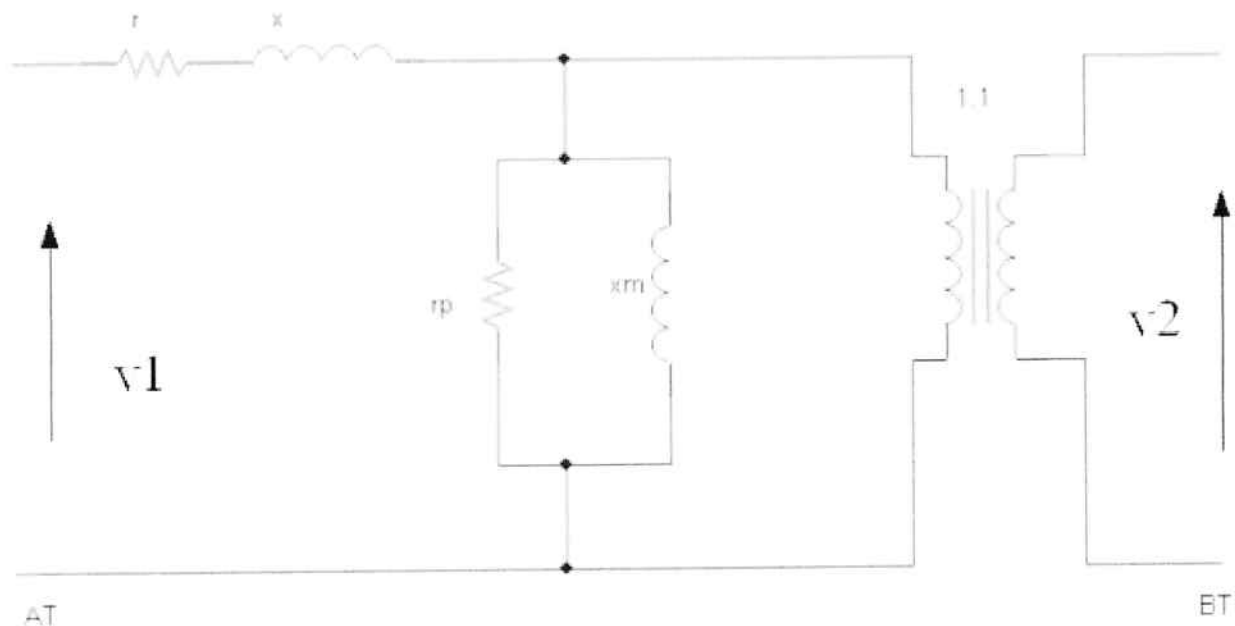
S_{b2} = potência de base no lado de alta

Como num trafo ideal há a conservação de potência:

$$S_{b1} = S_{b2}$$

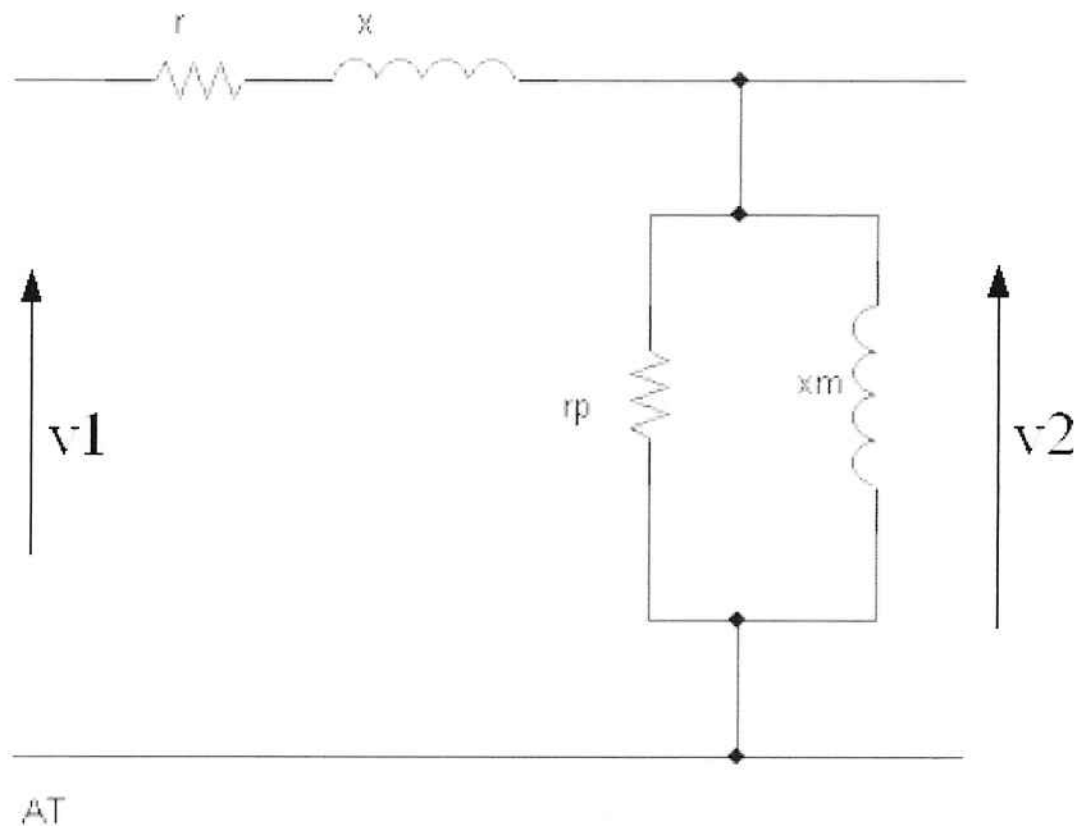
$$v_2 = \frac{V_2}{V_{b2}}$$

Logo o circuito fica:



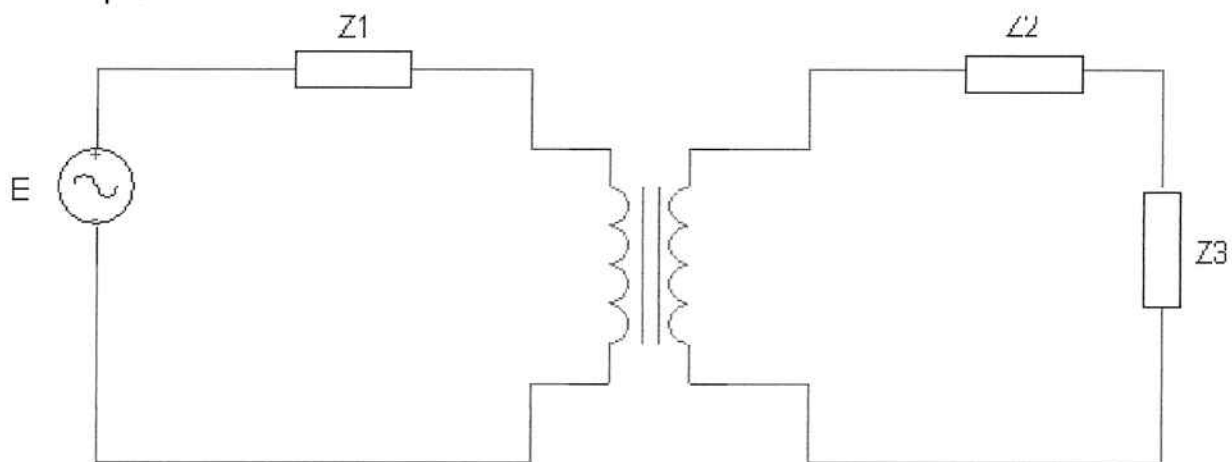
(figura 2 – transformador 1:1)

Mas como o trafo é de relação 1:1 o circuito fica:



(figura 3 – transformador 1:1)

Exemplo:



(figura 4 – exemplo)

$$E = 8000 \text{ V}$$

Dados do trafo 8000/220 V 50KVA $r = 1\%$ e $x = 2\%$

$$Z_1 = (10 + j10)\Omega$$

$$Z_2 = (15 + j15)\Omega$$



$$Z_3 = (100 + j150)\Omega$$

Encontrar tensão e corrente na carga Z_3

Solução:

$$V_{b1} = 8000 \text{ V}$$

$$S_{b1} = 50 \text{ KVA}$$

$$Z_{b1} = \frac{(8000)^2}{50000} = 1280\Omega$$

$$e_1 = \frac{8000}{8000} = 1pu$$

$$z_1 = \frac{10 + j10}{1280} = 0,0078125 + j0,0078125pu$$

$$r_e = 0,01pu$$

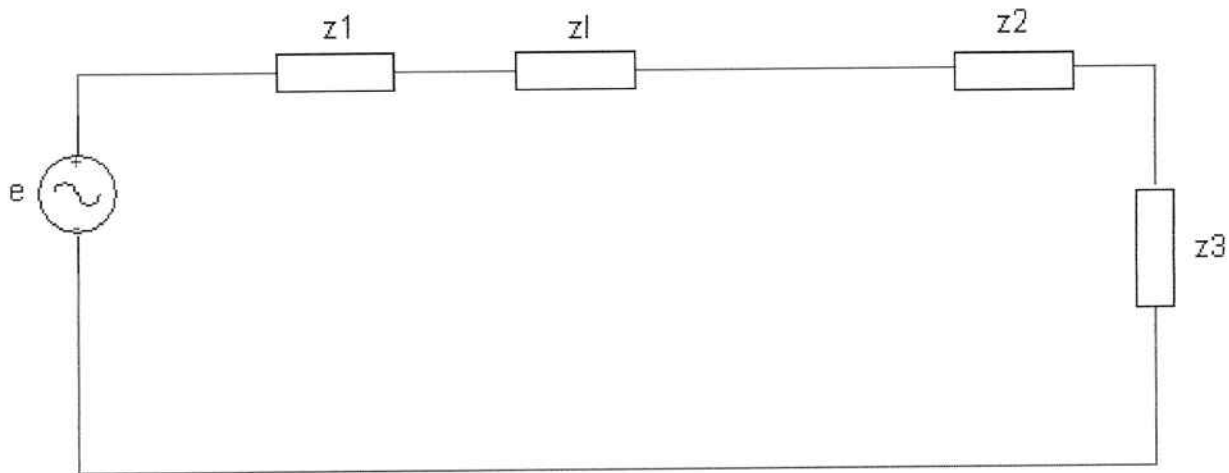
$$x_e = 0,02pu$$

$$V_{b2} = 220V$$

$$S_{b2} = 50 \text{ KVA}$$

$$Z_{b2} = \frac{(220)^2}{50000} = 0,968\Omega$$

$$z_2 = \frac{15 + j15}{0,968} = 15,4958 + j15,4958pu$$



(figura 5 – exemplo)

$$\dot{i}_{carga} = \frac{\dot{e}}{\dot{z}_1 + \dot{z}_2 + \dot{z}_3 + \dot{z}_e} = \frac{1}{118,82 + j170,48} = 0,0027516 - j0,003948pu$$

$$\dot{v}_{carga} = \dot{z}_3 \cdot \dot{i} = 0,896 + j1,8535pu$$

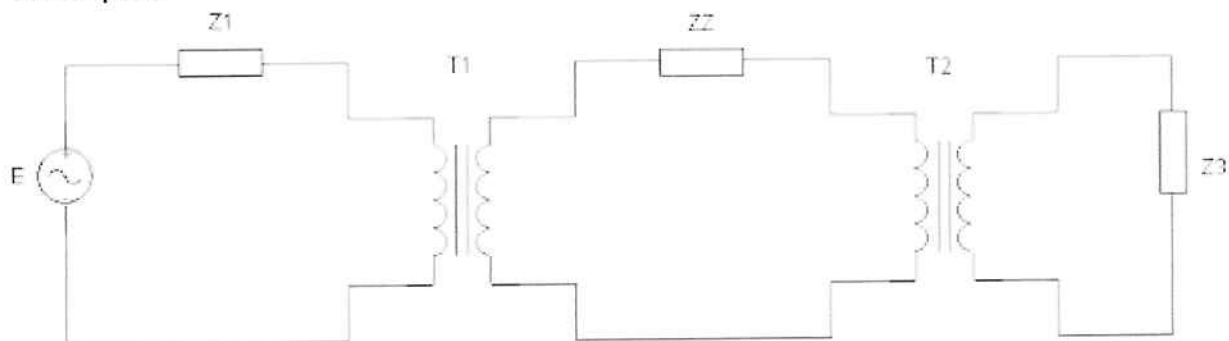
$$\dot{I}_{b2} = \frac{50000}{220} = 227,27 A$$

$$\dot{I}_{carga} = \dot{i}_{carga} \cdot \dot{I}_{b2} = 1,09 \angle -55,1^\circ A$$

$$\dot{V}_{carga} = \dot{v}_{carga} \cdot \dot{V}_{b2} = 197,167 V$$

Ao se trabalhar com mais de um trafo é importante utilizar a mesma potência de base para todos.

Exemplo:



(figura 6 – exemplo)



Dados do trafo 1 : 8000/220 V 50KVA $r = 1\%$ e $x = 2\%$

Dados do trafo 2 : 220/440V 40KVA $r = 2\%$ e $x = 5\%$

$$\dot{E} = 8000 \text{ V}$$

$$\dot{Z}_1 = (10 + j10)\Omega$$

$$\dot{Z}_2 = (15 + j15)\Omega$$

$$\dot{Z}_3 = (100 + j150)\Omega$$

Calcule a tensão e a corrente na carga $\dot{Z}_3$

Solução:

Vamos adotar como S_{base} universal a maior potência nominal entre os transformadores.

$$\dot{S}_{base} = 50 \text{ KVA}$$

$$\dot{V}_{b1} = 8000 \text{ V}$$

$$\dot{Z}_{b1} = 1280\Omega$$

$$\dot{e}_1 = 1pu$$

$$\dot{z}_1 = (0,0078125 + j0,0078125)pu$$

$$\dot{r}_{e1} = 0,01pu$$

$$\dot{V}_{b2} = 220 \text{ V}$$

$$\dot{Z}_{b2} = 0,968\Omega$$

$$\dot{z}_2 = (15,4958 + j15,4958)pu$$

$\dot{r}_{e2} = 0,02pu$ e $\dot{x}_{e2} = 0,05pu$ para $\dot{S}_{base} = 40 \text{ KVA}$, mas como queremos para

$$\dot{S}_{base} = 50 \text{ KVA}$$

vem

$$\dot{r}_{e2} = 0,02 \cdot \frac{(V_{base})^2}{40000} \cdot \frac{50000}{(V_{base})^2} = 0,025pu$$

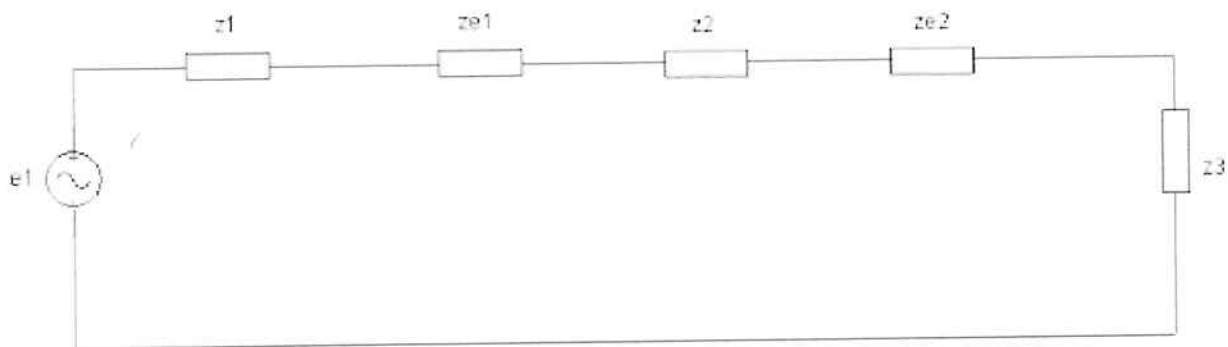


$$\dot{x}_{e2} = 0,05 \cdot \frac{(V_{base})^2}{40000} \cdot \frac{50000}{(V_{base})^2} = 0,0625 pu$$

$$\dot{V}_{b3} = 440 V$$

$$\dot{Z}_{b3} = \frac{(440)^2}{50000} = 3,872 \Omega$$

$$\dot{Z}_3 = \frac{100 + j150}{3,872} = (25,826 + j38,74) pu$$



(figura 7 – exemplo)

$$\dot{i} = \frac{1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_{e1} + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_{e2} + \dot{Z}_3} = (0,00887 - j0,01165) pu$$

$$\dot{V} = \dot{i} \cdot \dot{Z}_3 = (0,68 + j0,0428) pu$$

$$\dot{I}_{b3} = \frac{50000}{440}$$

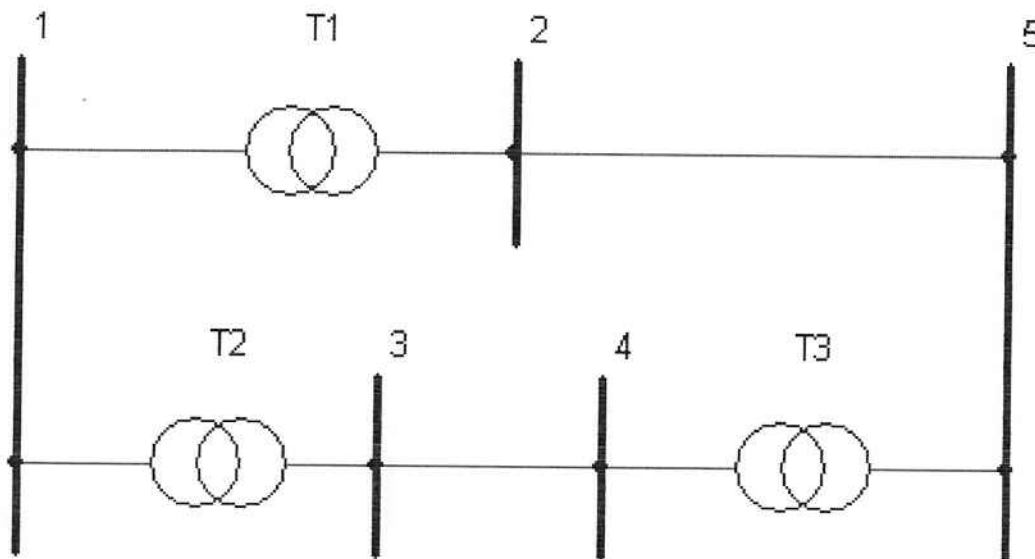
$$\dot{I} = \dot{i} \cdot \dot{I}_{b3} = (1,008 - j1,324) A$$

$$\dot{V} = (294,43 + j18,82) V$$



Choque de bases

Choque de bases é um problema que usualmente ocorre em malhas de redes radiais. O problema acontece quando não é possível fixar a tensão de base em todas as áreas desejadas.



(figura 8 – choque de bases)

$$T_1 \quad n_1 : n_2$$

$$T_2 \quad n_3 : n_4$$

$$T_3 \quad n_5 : n_6$$

Área 1 = primário de T_1 e T_2

$$V_{b1}, S_1$$

Área 2 = primário de T_3 e secundário de T_2

$$V_{b2}, S_2$$

Área 3 = secundário de T_3 e T_1

$$V_{b3}, S_3$$

Pela relação de espiras:

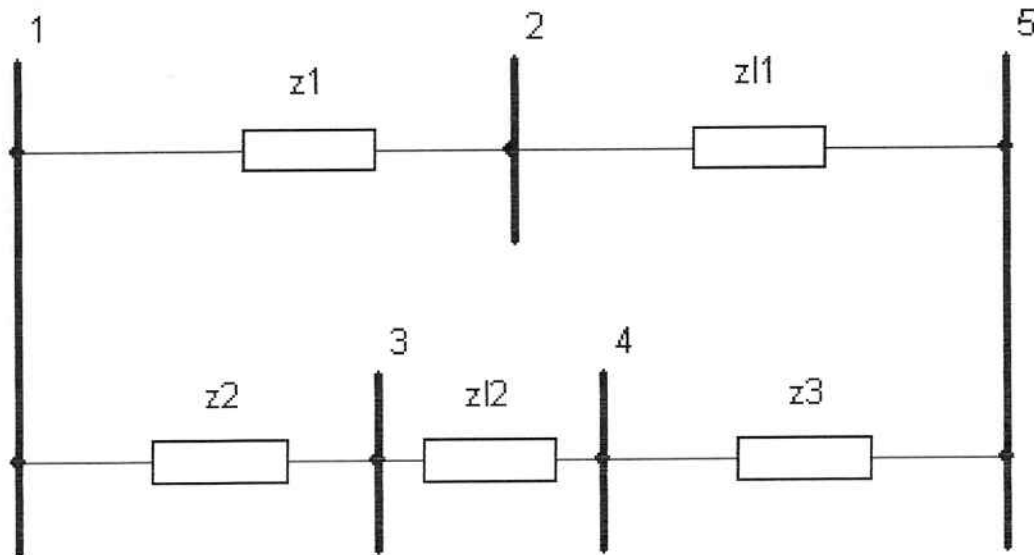
$$V_{b2} = \frac{n_2}{n_1} \cdot V_{b1}$$



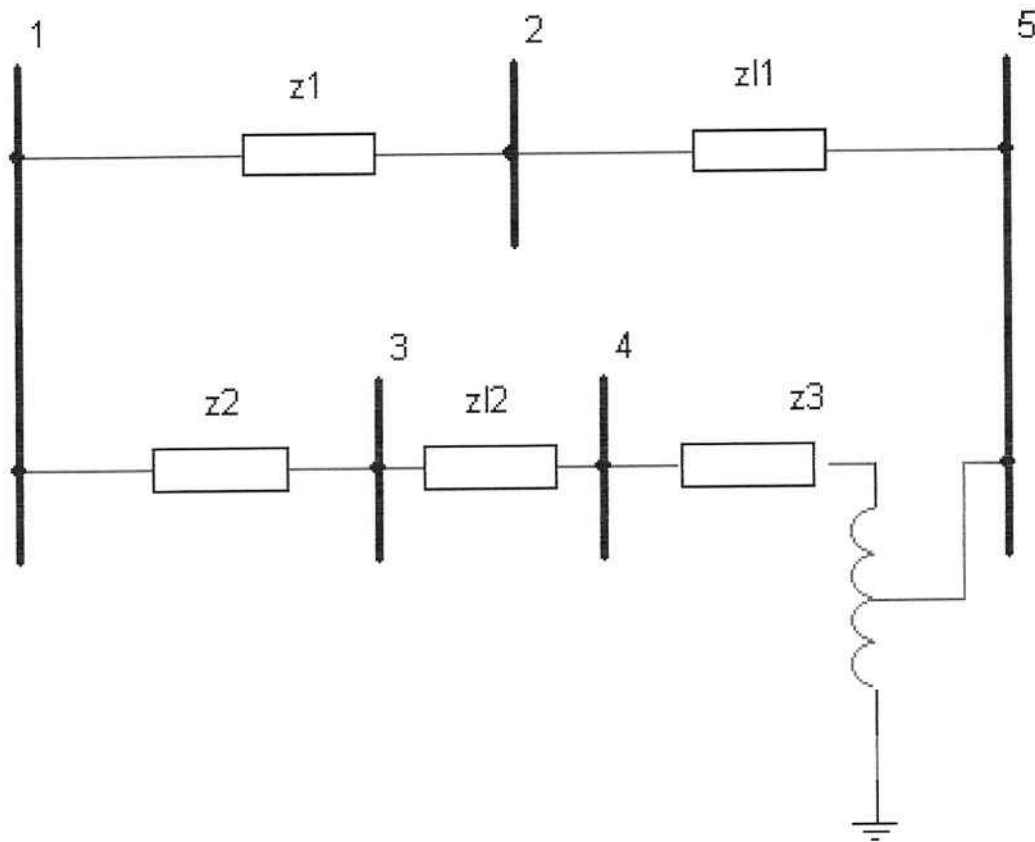
$$V_{b3} = \frac{n_4}{n_3} \cdot V_{b1}$$

$$V_{b2} = V_{b3} \cdot \frac{n_6}{n_5} = V_{b1} \cdot \frac{n_4}{n_3} \cdot \frac{n_6}{n_5} \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \frac{n_4}{n_3} \cdot \frac{n_6}{n_5}$$

O choque de bases ocorrerá quando a relação acima não puder ser respeitada, caso ocorra o choque de base, o modelo em pu terá de ser apresentado na forma de um auto-transformador de relação de espiras 1:α



(figura 9 – choque de bases)



(figura 10 – choque de bases)

α deverá ser tal que faça a expressão a ser respeitada ou seja com:

$$\frac{n_2}{n_1} \neq \frac{n_4}{n_3} \cdot \frac{n_6}{n_5}, \alpha \text{ será tal que}$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{n_4}{n_3} \cdot \frac{n_6}{n_5} \cdot \alpha$$

Exemplo:

T1: 22KV:13,2KV 10MVA $x=5\%$

T2: 22KV:15,6KV 1MVA $x=0,6\%$

T3: 15,6KV:12,5KV 1MVA $x=0,7\%$

$$\frac{13,2}{22} = \frac{15,6 \cdot 12,5 \cdot \alpha}{15,6 \cdot 22}$$

$$\alpha = \frac{13,2 \cdot 22}{22 \cdot 12,5} = \frac{13,2}{12,5} = 1,056$$



$$\dot{Z}_{linha} = 5 + j5\Omega$$

A primeira coisa a se fazer é escolher a S_{base} a ser adotada, geralmente é escolhida a maior potência "disponível", no caso temos transformadores de 10MVA e 1 MVA, por isso adotaremos 10 MVA como S_{base}

$$\dot{Z}_{l1} = (5 + j5) \cdot \frac{S_{base}}{(V_{base})^2} = (5 + j5) \cdot \frac{10 \cdot 10^6}{(13,2 \cdot 10^3)^2} = 0,2054 + j0,287 pu$$

$$\dot{Z}_{l2} = (5 + j5) \cdot \frac{S_{base}}{(V_{base})^2} = (5 + j5) \cdot \frac{10 \cdot 10^6}{(15,6 \cdot 10^3)^2} = 0,2054 + j0,2054 pu$$

Note que as impedâncias dadas em porcentagens já estão em pu, deve-se apenas transformar para a base de potência comum.

$$\dot{Z}_{T1} = j0,05 pu \text{ (já está na base correta)}$$

$$\dot{Z}_{T2} = j0,006 \cdot \frac{(V_{base})^2}{10^6} \cdot \frac{10 \cdot 10^6}{(V_{base})^2} = j0,06 pu$$

$$\dot{Z}_{T3} = j0,007 \cdot \frac{(V_{base})^2}{10^6} \cdot \frac{10 \cdot 10^6}{(V_{base})^2} = j0,07 pu$$

Carga : 0,8MVA $\cos \phi = 0,6$ indutivo a 12KV

Gerador = 1pu

$$e - v = i_1(z_{l1} + z_{T1})$$

$$e - \frac{\dot{V}}{\dot{\alpha}} = i_2(\dot{Z}_{l2} + \dot{Z}_{T2} + \dot{Z}_{T3})$$

$$\dot{V} = \frac{12}{13,2} = 0,91 pu$$

$$i = \frac{\dot{S}}{\dot{V}} = \frac{0,8 \angle 10}{0,91} = 0,88 pu$$

$$\cos \phi = 0,6 \Rightarrow \phi = 53,13^\circ$$



$$\dot{i}_1 + \frac{\dot{i}_2}{\alpha} = i$$

$$i = 0,088 \sqrt{-53,13^\circ} pu$$

$$\dot{i}_2 \cdot (\dot{Z}_{l2} + \dot{Z}_{T2} + \dot{Z}_{T3}) = \dot{e} - \frac{\dot{V}}{\alpha}$$

$$\dot{i}_2 = \frac{(\dot{e} - \frac{\dot{V}}{\alpha})}{(\dot{Z}_{l2} + \dot{Z}_{T2} + \dot{Z}_{T3})} \Leftrightarrow \dot{i}_2 = \frac{[(\dot{i} - \frac{\dot{i}_2}{\alpha})(\dot{Z}_{l1} + \dot{Z}_{T1})(-\frac{\dot{V}}{\alpha}) + \dot{V}]}{\dot{Z}_{l2} + \dot{Z}_{T2} + \dot{Z}_{T3}} \Leftrightarrow$$

$$\dot{i}_2(\dot{Z}_{l2} + \dot{Z}_{T2} + \dot{Z}_{T3}) = \dot{i} \cdot \dot{Z}_{l1} + \dot{i} \cdot \dot{Z}_{T1} - \frac{\dot{i}_2}{\alpha} \cdot (\dot{Z}_{l1} + \dot{Z}_{T1}) - \dot{V} \cdot (\frac{1}{\alpha} - 1) \Leftrightarrow$$

$$\dot{i}_2 \cdot (\dot{Z}_{l2} + \dot{Z}_{T2} + \dot{Z}_{T3}) + \frac{\dot{i}_2}{\alpha} (\dot{Z}_{l1} + \dot{Z}_{T1}) - \dot{V} (\frac{1}{\alpha} - 1) \Leftrightarrow$$

$$\dot{i}_2 \cdot (\dot{Z}_{l2} + \dot{Z}_{T2} + \dot{Z}_{T3} + \frac{\dot{Z}_{l1}}{\alpha} + \frac{\dot{Z}_{T1}}{\alpha}) = \dot{i} \cdot (\dot{Z}_{l1} + \dot{Z}_{T1}) - \dot{V} \cdot (\frac{1}{\alpha} - 1) \Leftrightarrow$$

$$\dot{i}_2 = \frac{\dot{i} \cdot (\dot{Z}_{l1} + \dot{Z}_{T1}) - \dot{V} \cdot (\frac{1}{\alpha} - 1)}{\dot{Z}_{l2} + \dot{Z}_{T2} + \dot{Z}_{T3} + \frac{\dot{Z}_{l1}}{\alpha} + \frac{\dot{Z}_{T1}}{\alpha}}$$

$$\dot{i}_2 = \frac{0,088 \sqrt{-53,13^\circ} \cdot (0,287 + j0,287 + j0,05) - 0,91(\frac{1}{1,056} - 1)}{0,2054 + j0,2054 + j0,06 + j0,07 + \frac{0,287 + j0,287}{1,056} + \frac{j0,05}{1,056}} pu$$

$$\dot{i}_2 = 0,1076 \sqrt{-55,49^\circ} pu$$

$$\dot{i}_1 = \dot{i} - \frac{\dot{i}_2}{\alpha} = 0,0144 \sqrt{109,97^\circ} pu$$

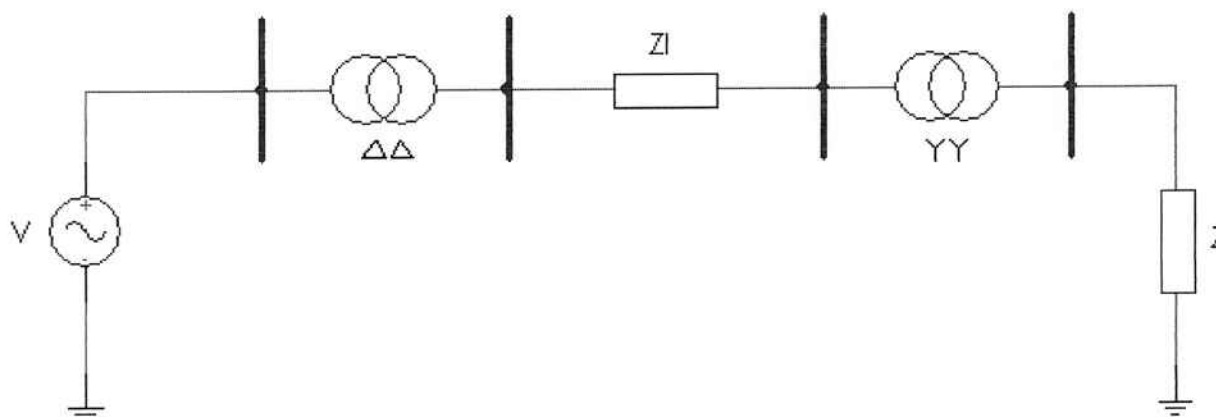
$$\dot{e} = \dot{i}_1 \cdot (\dot{Z}_{l1} + \dot{Z}_{T1}) + \dot{V}$$

$$\dot{e} = 0,0144 \sqrt{109,97^\circ} \cdot (0,287 + j0,287 + j0,05) + 0,91 = 0,904 \sqrt{0,141^\circ} pu$$



Diagrama Unifilar

Todos os circuitos trifásicos equilibrados podem ser resolvidos para uma única fase que pode ser usado para se encontrar as outras fases, logo o diagrama unifilar serve para simplificar os diagramas de circuito.



(figura 11 – diagrama unifilar)

O nível de detalhe de um diagrama unifilar depende do propósito do diagrama, para o estudo de uma carga, não importa o lugar exato de um disjuntor ou outros componentes de proteção, um bom diagrama é aquele que apresenta apenas os detalhes pertinentes.

Como foi visto no começo do capítulo, uma das grandes vantagens do sistema pu, é quando há a presença de transformadores ao longo do circuito, no caso de sistemas trifásicos ocorre o mesmo com algumas ressalvas. Para transformadores trifásicos há quatro tipos de ligações mais comuns Y/Y , Δ/Δ , Y/Δ e Δ/Y .

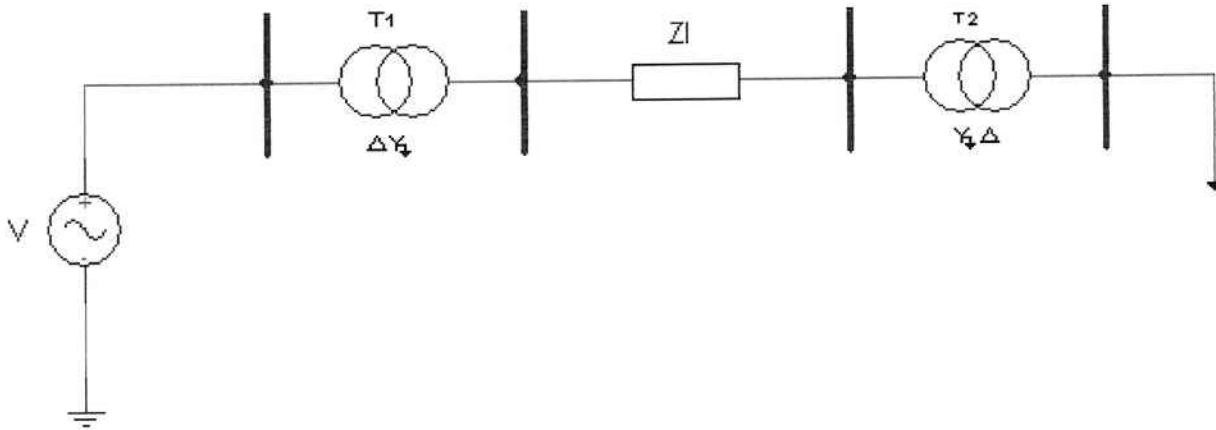
Para as ligações Y/Y e Δ/Δ , não há qualquer modificação em relação aos circuitos monofásicos. Já na ligação Y/Δ e Δ/Y há alguns problemas em relação as fases das tensões e correntes, pois uma tensão de linha primária irá induzir uma tensão de fase no secundário defasado de 30° e vice-versa.

No caso Δ/Y há uma rotação de 30° do primário para o secundário e no caso Y/Δ -30° . Por isso quando usamos o diagrama unifilar para circuitos trifásicos, é necessário termos alguns cuidados.



Exemplo:

Dado a diagrama unifilar abaixo calcule as tensões em todas as barras em pu para $S_{base} = 130 \text{ KVA}$ e $V_{base} = \text{tensão nominal}$



(figura 12 – exemplo de diagrama unifilar)

T1 : ligação $\Delta / Y_{aterrada}$ 42/20KV $r=3\%$, $x= 4\%$,130KVA

T2 : ligação $\Delta / Y_{aterrada}$ 20/13,2KV $r=5\%$, $x=6\%$, 120KVA

Linha : $5+j5 \Omega$

Carga : Absorve 95KW com $\cos \phi = 0,85$ indutivo e 13,2KV

$$\dot{Z}_{T1} = 0,03 + j0,04 \text{ pu}$$

$$\dot{Z}_{T2} = (0,05 + j0,06) \cdot \frac{1}{120} \cdot 130 = 0,0541 + j0,065 \text{ pu}$$

$$\dot{Z}_l = (5 + j5) \cdot \frac{130 \cdot 10^3}{(120 \cdot 10^3)^2} = 0,000045 + j0,000045 \text{ pu}$$

Na carga:

$$v_4 = 1 \text{ pu}$$

$$i = \frac{p}{v \cdot \cos \phi} = \frac{95/130}{1 \cdot 0,85} = 0,86 \text{ pu}$$

$$\dot{v}_4 = 1 \angle 31,8^\circ \text{ pu}$$



$$\dot{V}_3 = (1\angle 31,8^\circ + \dot{Z}_3 \cdot j) \cdot 1\angle 30^\circ \Rightarrow$$

$$\dot{V}_3 = (1\angle 31,8^\circ + (0,0541 + j0,0651)) \cdot 1\angle 30^\circ \Rightarrow$$

$$\dot{V}_3 = 1,083\angle 68,95^\circ pu$$

Repare que o termo $1\angle 30^\circ$ foi colocado devido a presença do transformador T2

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_3 + \dot{Z}_l \cdot 1\angle 30^\circ \Rightarrow$$

$$\dot{V}_2 = (1,083\angle 68,95^\circ + (0,000045 + j0,000045) \cdot 1\angle 30^\circ) \Rightarrow$$

$$\dot{V}_2 = 1,083\angle 68,95^\circ pu$$

Como não há transformadores neste trecho não é necessário alterar a tensão:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 \cdot 1\angle -30^\circ + \dot{Z}_{T1} \cdot j \cdot 1\angle -30^\circ \cdot 1\angle 30^\circ \Rightarrow$$

$$\dot{V}_1 = (1,083\angle 68,95^\circ \cdot 1\angle -30^\circ + (0,03 + j0,04)) \Rightarrow$$

$$\dot{V}_1 = 1,1317\angle 39,57^\circ pu$$

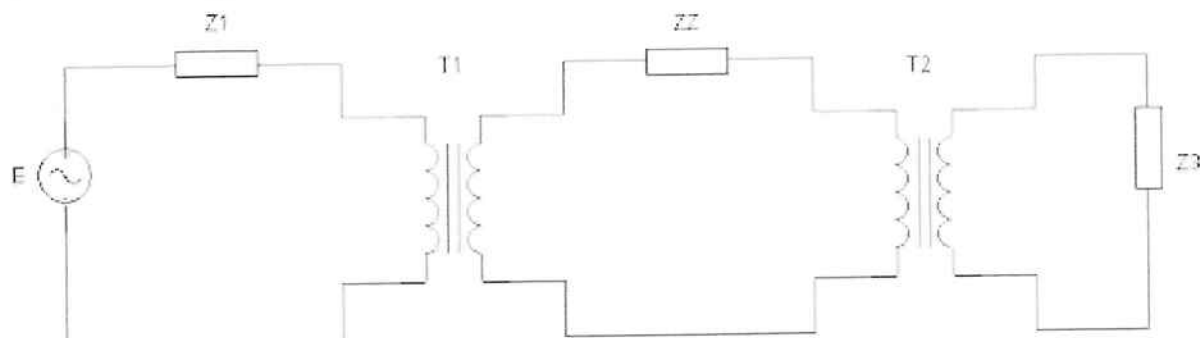
Aqui o termo $1\angle -30^\circ$ é posto devido a presença do transformador T1



Exercícios interativos

::: Exercício - Valores por unidade :::

Exercício 1 - Representação de transformadores em pu:



Dados do trafo 1:

8000 / 220 [V]

50 [KVA]

$r = 1$ %

$x = 2$ %

Dados do trafo 2:

220 / 440 [V]

40 [KVA]

$r = 2$ %

$x = 5$ %

$E = 8000$ [V]

$Z_1 = (10 + j 10)$ [ohm]

$Z_2 = (15 + j 15)$ [ohm]

$Z_3 = (100 + j 150)$ [ohm]

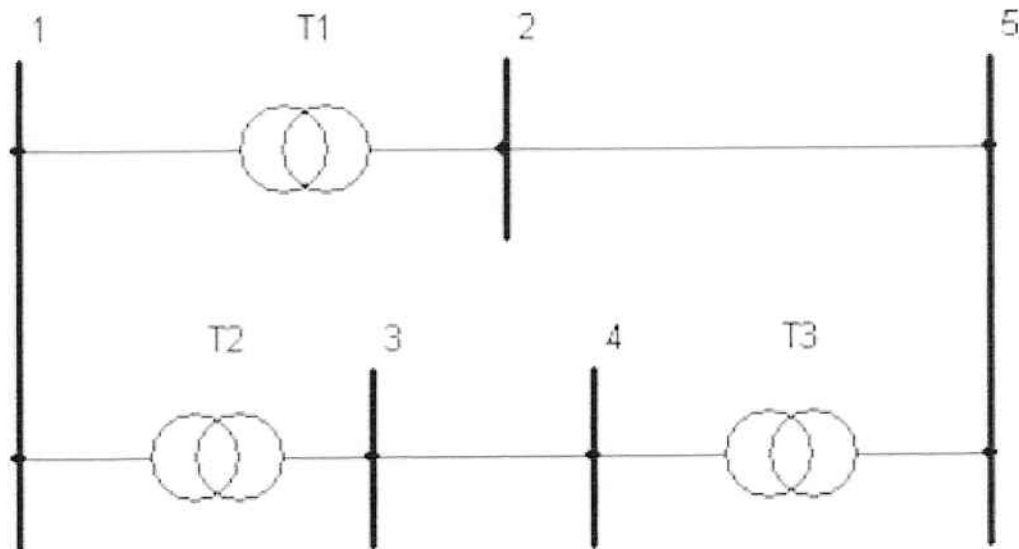
Calcule a tensão e a corrente na carga Z_3

> Resposta (decimais: 4)



∴ Exercício - Valores por unidade ∴

Exercício 2 - Choque de bases:



Dados:

Trafo 1

22 / 13.2 [KV]

10 [MVA]

$x = 5$ %

Trafo 2

22 / 15.6 [KV]

1 [MVA]

$x = 0.6$ %

Trafo 3

15.6 / 12.5 [KV]

1 [MVA]

$x = 0.7$ %

$Z_{\text{linha}} = (5 + j 5)$ [ohm]

Carga: 0.8 [MVA] com $\cos(\phi) = 0.6$ ☒ indutivo ☐ capacitivo a 12 [KV]

Gerador = 1 pu

Calcule ' I_1 ', ' I_2 ' e ' e '

> Resposta (decimais: 4)



Componentes Simétricas:

Material de Apoio a Sistemas de Potência

:: Componentes Simétricas ::

Definição e
Matrizes de
transformação

Matriz de
Impedância em
Componentes
Simétricas

Carga com
Impedância de
Aterramento

Circuitos
Trifásicos
desequilibrados

Transformadores
Trifásicos em
Componentes
Simétricas

Exercícios
Interativos

Circuitos
trifásicos

Valores por
unidade

Componentes
simétricas

Estudo de curto
circuito na rede

Fluxo de
potência em
sistemas de
potência

Representação
dos sistemas de
potência

● Componentes simétricas

- Definição e Matrizes de transformação
- Matriz de Impedância em Componentes Simétricas
- Carga com Impedância de Aterramento
- Circuitos Trifásicos desequilibrados
- Transformadores Trifásicos em Componentes Simétricas
- Exercícios Interativos
 - Exercício 1 - Matriz de Impedância em Componentes Simétricas
 - Exercício 2 - Circuitos Trifásicos desequilibrados

| Circuitos trifásicos | Valores por unidade | Componentes simétricas | Estudo de curto circuito na rede
| Fluxo de potência em sistemas de potência | Representação dos sistemas de potência



Componentes Simétricas

Definição e Matrizes de transformação

Em circuitos trifásicos equilibrados, a resolução pode ser reduzida para a solução de um circuito monofásico simples. Mas no caso em que a simetria não pode ser mantida, o cálculo iria requerer um trabalho nas três fases simultaneamente, visando uma abordagem mais simples foi desenvolvida a teoria de componentes simétricas.

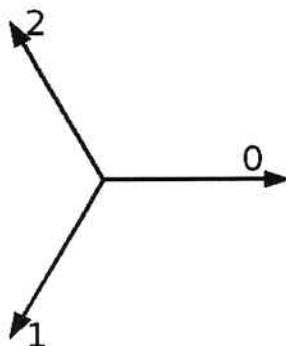
Qualquer conjunto de grandezas trifásicas pode ser decomposto em três seqüências de fasores de mesmo módulo: seqüência zero, positiva e negativa.

Seqüência-zero: três fasores de mesmo módulo e fase



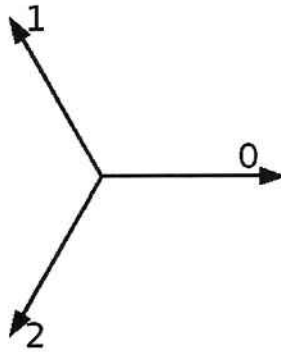
(figura 1 – seqüência zero)

Seqüência-positiva: três fasores de igual módulo e defasados de 120° em seqüência direta.



(figura 2 – seqüência positiva)

Seqüência-negativa: três fasores de igual módulo e defasados de 120° em seqüência inversa.



(figura 3 – seqüência negativa)

Em outras palavras, para um seqüência $\dot{V}$ qualquer fica :

$$\begin{aligned} [\dot{V}] &= \dot{V}_0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \dot{V}_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} + \dot{V}_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ [\dot{V}] &= \begin{bmatrix} \dot{V}_0 + \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \\ \dot{V}_0 + \alpha^2 \cdot \dot{V}_1 + \alpha \cdot \dot{V}_2 \\ \dot{V}_0 + \alpha \cdot \dot{V}_1 + \alpha^2 \cdot \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sendo $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} = [T] = \text{matriz de transformação de componentes}$

simétricos, e os índices 0,1 e 2 representam respectivamente as seqüências zero, positiva e negativa.

$$[\dot{V}] = [T] \cdot \begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = [T]^{-1} \cdot [\dot{V}]$$



Exemplo:

$$\text{Dado } [\dot{V}] = \begin{bmatrix} 270 \angle 0^\circ \\ 270 \angle -120^\circ \\ 270 \angle 120^\circ \end{bmatrix} V, \text{ encontre } \begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = [T]^{-1} \cdot [\dot{V}] = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 270 \angle 0^\circ \\ 270 \angle -120^\circ \\ 270 \angle 120^\circ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 270 \angle 0^\circ \\ 0 \end{bmatrix} V$$

Exemplo:

$$\text{Dado } [\dot{I}] = \begin{bmatrix} 100 \angle 0^\circ \\ 90 \angle 90^\circ \\ 80 \angle -90^\circ \end{bmatrix} A \text{ encontre } \begin{bmatrix} \dot{I}_0 \\ \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_0 \\ \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = [T]^{-1} [\dot{I}] = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \angle 0^\circ \\ 90 \angle 90^\circ \\ 80 \angle -90^\circ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_0 \\ \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33,5 \angle 5,7^\circ \\ 15,83 \angle -173^\circ \\ 82,425 \angle -1,16^\circ \end{bmatrix} A$$



Matriz de Impedância em Componentes Simétricas

Para se poder usar componentes simétricas para a matriz de impedância não basta aplicar somente a matriz de transformação, é preciso respeitar o equacionamento também.

Para se obter $[\dot{V}_{CS}] = [\dot{Z}_{CS}] \cdot [\dot{I}_{CS}]$ fazemos os seguintes cálculos:

$$[\dot{V}] = [T] \cdot [\dot{V}_{CS}]$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix}$$

$$[\dot{I}] = [T] \cdot [\dot{I}_{CS}]$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_0 \\ \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Como } [\dot{V}] = [\dot{Z}] \cdot [\dot{I}]$$

$$[T] \cdot [\dot{V}_{CS}] = [\dot{Z}] \cdot [T] \cdot [\dot{I}_{CS}] , \text{ isolando-se } [\dot{V}_{CS}] \text{ fica:}$$

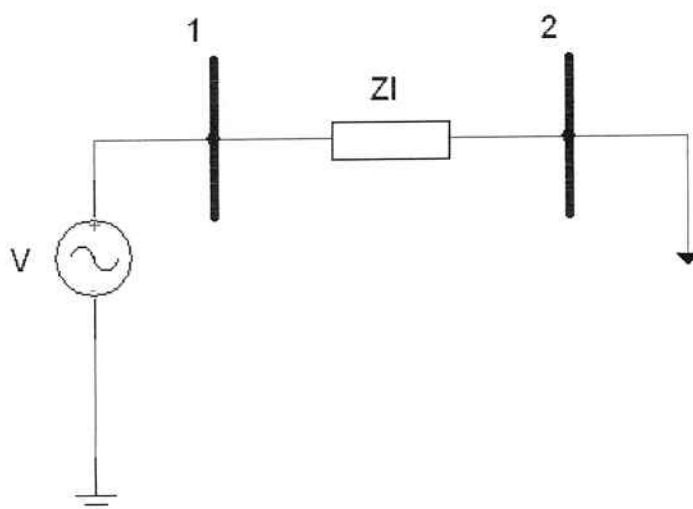
$$[T]^{-1} \cdot [T] \cdot [\dot{V}_{CS}] = [T]^{-1} \cdot [\dot{Z}] \cdot [T] \cdot [\dot{I}_{CS}]$$

$$[\dot{V}_{CS}] = [T]^{-1} \cdot [\dot{Z}] \cdot [T] \cdot [\dot{I}_{CS}] , \text{ logo}$$

$$[\dot{Z}_{CS}] = [T]^{-1} \cdot [\dot{Z}] \cdot [T]$$

Exemplo:

Dado o diagrama unifilar abaixo calcule $[\dot{V}_{CS}]$, $[\dot{I}_{CS}]$ e $[\dot{Z}_{CS}]$.



(figura 4 – exemplo de cálculo de $[Z]$)

$$\dot{Z}_l = 3 + j4\Omega$$

Carga em estrela aterrada com $\dot{Z}_A = \dot{Z}_B = \dot{Z}_C = 10 + j10\Omega$

$$[\dot{V}] = \begin{bmatrix} 220\sqrt{0^\circ} \\ 220\sqrt{-120^\circ} \\ 220\sqrt{120^\circ} \end{bmatrix} V$$

$$[\dot{V}_{CS}] = [T]^{-1} \cdot [V]$$

$$[\dot{V}_{CS}] = [T]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 220\sqrt{0^\circ} \\ 220\sqrt{-120^\circ} \\ 220\sqrt{120^\circ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 220\sqrt{0^\circ} \\ 0 \end{bmatrix} V$$

$$[\dot{Z}] = \begin{bmatrix} (3 + j4) + (10 + j10) & 0 & 0 \\ 0 & (3 + j4) + (10 + j10) & 0 \\ 0 & 0 & (3 + j4) + (10 + j10) \end{bmatrix} \Omega$$

$$[\dot{Z}] = \begin{bmatrix} 13 + j14 & 0 & 0 \\ 0 & 13 + j14 & 0 \\ 0 & 0 & 13 + j14 \end{bmatrix} \Omega$$



$$[\dot{Z}_{CS}] = [T]^{-1} \cdot [\dot{Z}] \cdot [T] \Rightarrow$$

$$[\dot{Z}_{CS}] = \begin{bmatrix} 19,10 \angle 47,12^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 19,10 \angle 47,12^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 19,10 \angle 47,12^\circ \end{bmatrix} \Omega$$

$$[\dot{V}_{CS}] = [\dot{Z}_{CS}] \cdot [\dot{I}_{CS}]$$

$$[\dot{I}_{CS}] = [\dot{Z}_{CS}]^{-1} \cdot [\dot{V}_{CS}]$$

$$[\dot{I}_{CS}] = \begin{bmatrix} 13 + j14 & 0 & 0 \\ 0 & 13 + j14 & 0 \\ 0 & 0 & 13 + j14 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 220 \angle 0^\circ \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[\dot{I}_{CS}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 11,5 \angle -47,12^\circ \\ 0 \end{bmatrix} A$$



Carga com Impedância de Aterramento

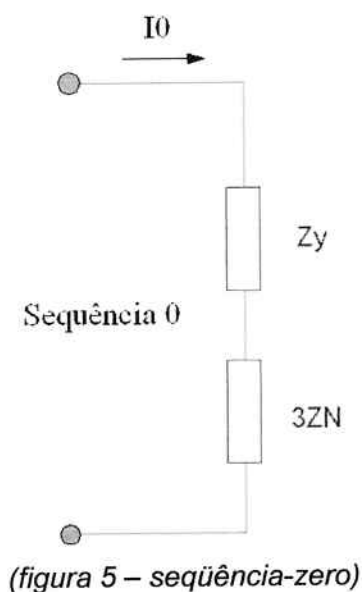
No caso da carga estiver aterrada com uma impedância de aterramento $\dot{Z}_N$ há uma ligeira mudança nas equações, que regem o circuito.

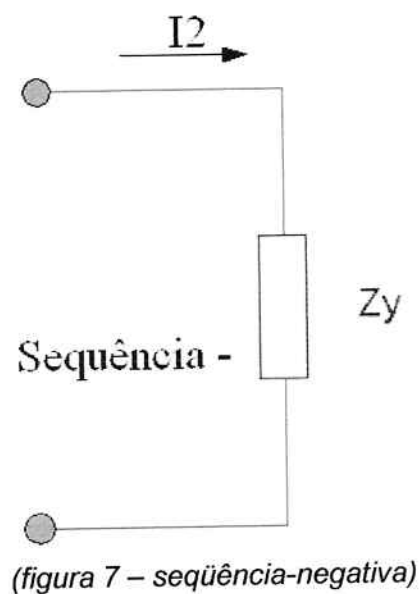
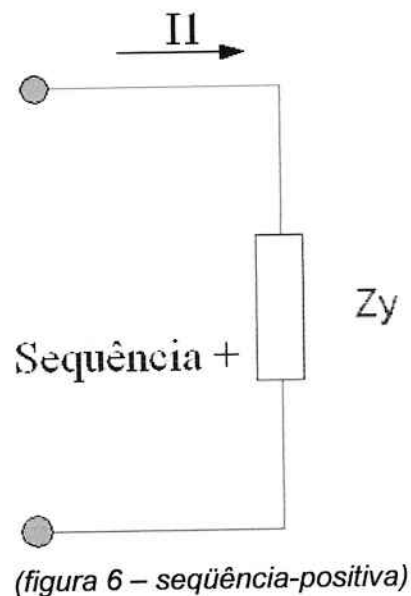
$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AN'} \\ \dot{V}_{BN'} \\ \dot{V}_{CN'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_N + \dot{Z}_A & \dot{Z}_N & \dot{Z}_N \\ \dot{Z}_N & \dot{Z}_N + \dot{Z}_B & \dot{Z}_N \\ \dot{Z}_N & \dot{Z}_N & \dot{Z}_N + \dot{Z}_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix}$$

$$[T] \cdot \begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_N + \dot{Z}_A & \dot{Z}_N & \dot{Z}_N \\ \dot{Z}_N & \dot{Z}_N + \dot{Z}_B & \dot{Z}_N \\ \dot{Z}_N & \dot{Z}_N & \dot{Z}_N + \dot{Z}_C \end{bmatrix} \cdot [T] \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_0 \\ \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_Y + \dot{Z}_N & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Z}_Y & 0 \\ 0 & 0 & \dot{Z}_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_0 \\ \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \text{ onde } \dot{Z}_Y = \dot{Z}_A = \dot{Z}_B = \dot{Z}_C$$

Como podemos notar a impedância de aterramento altera apenas a componente simétrica da seqüência-zero. A carga poderia ser representada como:

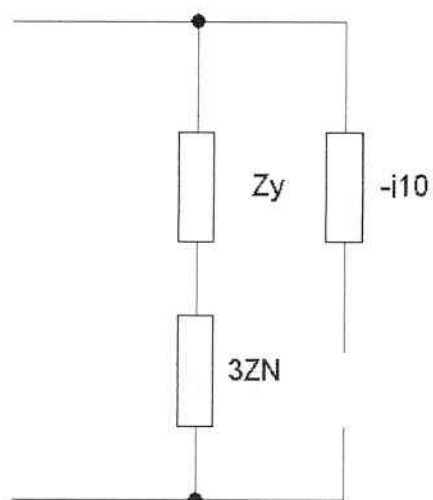




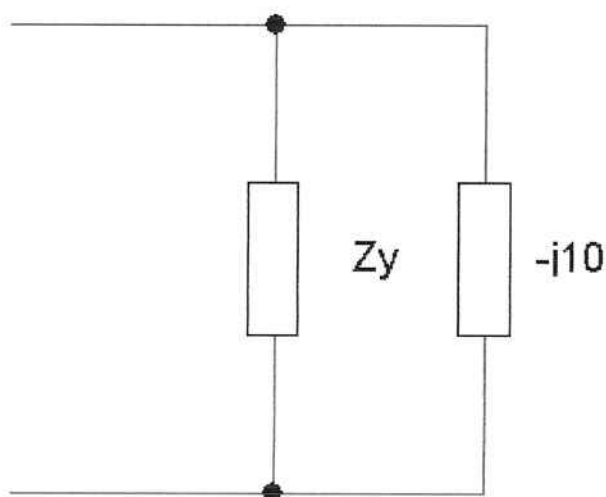
Note que para o caso anterior com carga em estrela aterrada basta fazer $\dot{Z}_N = 0$, e para não aterrada $\dot{Z}_N = \infty$, que vale também para carga em delta já que não há caminho de retorno da corrente.

Exemplo:

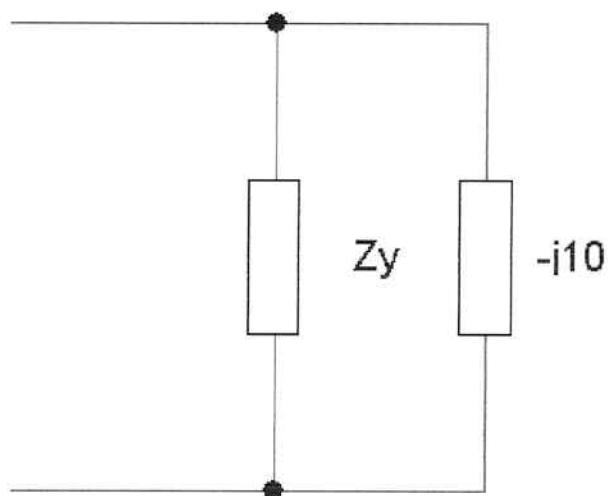
Desenhe os circuitos equivalentes em componentes simétricas para uma carga em estrela aterrada com $\dot{Z}_N = j0,25\Omega$ e $\dot{Z}_A = \dot{Z}_B = \dot{Z}_C = 10 + j12\Omega$, em uma carga delta em paralelo com $\dot{Z}_\Delta = -j15\Omega$



(figura 8 – exemplo - seqüência-zero)



(figura 9 – exemplo - seqüência-positiva)



(figura 10 – exemplo - seqüência-negativa)



Circuitos Trifásicos desequilibrados

O mesmo princípio pode ser usado para se utilizar em circuitos desequilibrados, sem haver qualquer tipo de adaptação especial.

Exemplo:

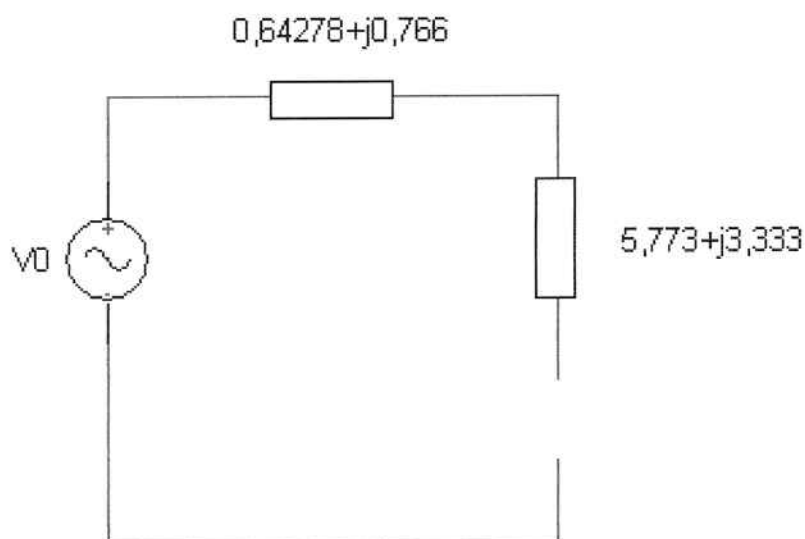
Uma carga tipo delta com $\dot{Z}_\Delta = 20\sqrt{30^\circ}\Omega$ com $\dot{Z}_l = 1\sqrt{50^\circ}\Omega$ para cada fase, nesse exercício iremos utilizar uma alimentação desbalanceada. Calcule as correntes de linha.

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_A \\ \dot{V}_B \\ \dot{V}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220\sqrt{0^\circ} \\ 230\sqrt{10^\circ} \\ 250\sqrt{30^\circ} \end{bmatrix} V$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = [T]^{-1}[\dot{V}] = \begin{bmatrix} 227,74\sqrt{13,97^\circ} \\ 34,41\sqrt{-45,65^\circ} \\ 39,38\sqrt{-129,52^\circ} \end{bmatrix} V$$

$$\dot{Z}_l = 1\sqrt{50^\circ} = 0,6428 + j0,7660\Omega$$

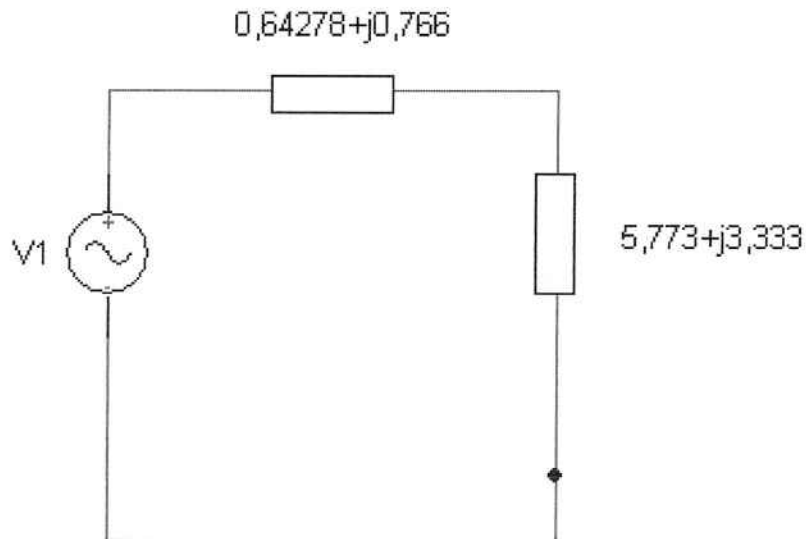
$$\dot{Z}_{\Delta 0} = \dot{Z}_{\Delta 1} = \dot{Z}_{\Delta 2} = \frac{20\sqrt{30^\circ}}{3} = 5,7735 + j3,3333\Omega$$



(figura 11 – seqüência-zero)



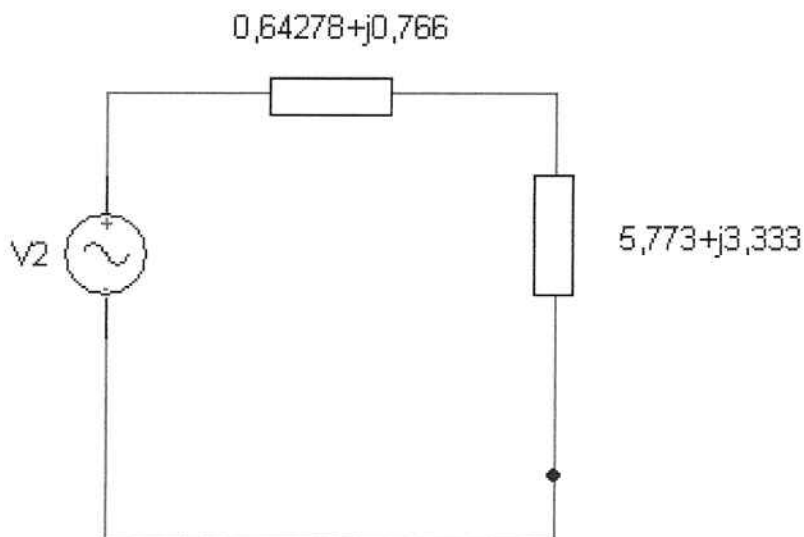
$$\dot{I}_0 = 0$$



(figura 12 – exemplo - seqüência-positiva)

$$\dot{V} = \dot{Z} \cdot \dot{I}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_1}{\dot{Z}_1} = \frac{34,41 \angle -45,65^\circ}{1 \angle 50^\circ + \frac{20 \angle 30^\circ}{3}} = 4,52 \angle -78,22^\circ \text{ A}$$



(figura 13 – exemplo - seqüência-negativa)



$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_2}{\dot{Z}_2} = \frac{39,38 \angle -129,52^\circ}{1 \angle 50^\circ + \frac{20 \angle 30^\circ}{3}} = 5,17 \angle -162^\circ \text{ A}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = [T] \cdot [\dot{I}_{CS}] = [T] \cdot \begin{bmatrix} 0 \angle 0^\circ \\ 4,52 \angle -78,22^\circ \\ 5,17 \angle -162,09^\circ \end{bmatrix}$$

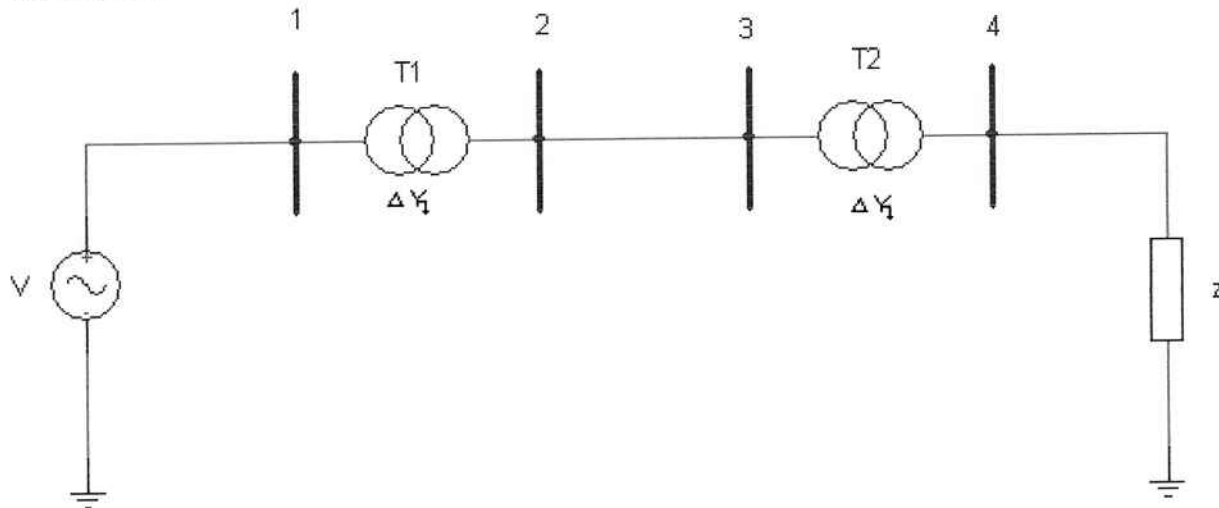
$$[I] = \begin{bmatrix} 7,22 \angle -123,6^\circ \\ 2,10 \angle -102,54^\circ \\ 9,21 \angle 61,10^\circ \end{bmatrix} \text{ A}$$



Transformadores Trifásicos em Componentes Simétricas

Ainda utilizando a mesma lógica, voltada para transformadores veremos que novamente apenas a seqüência-zero seria afetada.

Exemplo:



(figura 14 – exemplo)

T1: 5MVA, $x_0 = x_1 = x_2 = 5\%$, 13,8/3,8KV delta/estrela aterrada

T2: 1MVA, $x_0 = x_1 = x_2 = 5\%$, 3,8/1KV delta/estrela aterrada

Linha: $x_1 = x_2 = 0.4\Omega$, $x_0 = 2\Omega$

$$\text{Carga: } [\dot{Z}] = \begin{bmatrix} \dot{Z}_0 \\ \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + j5 \\ 5 - j5 \\ 5 - j5 \end{bmatrix} K\Omega$$

$$S_{\text{base}} = 1 \text{ MVA}$$

$$\dot{Z}_{T1} = \dot{Z}_{T2} = \dot{Z}_{T2} = j0,5 \cdot \frac{13,8^2}{5} \cdot \frac{1}{13,8^2} = j0,01pu$$

$$\dot{Z}_{l1} = \dot{Z}_{l2} = j0,4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3,8^2} = j0,0277pu$$

$$\dot{Z}_{l0} = j2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3,8^2} = j0,1385pu$$

$$\dot{Z}_{T20} = \dot{Z}_{T21} = \dot{Z}_{T22} = j0,05pu$$

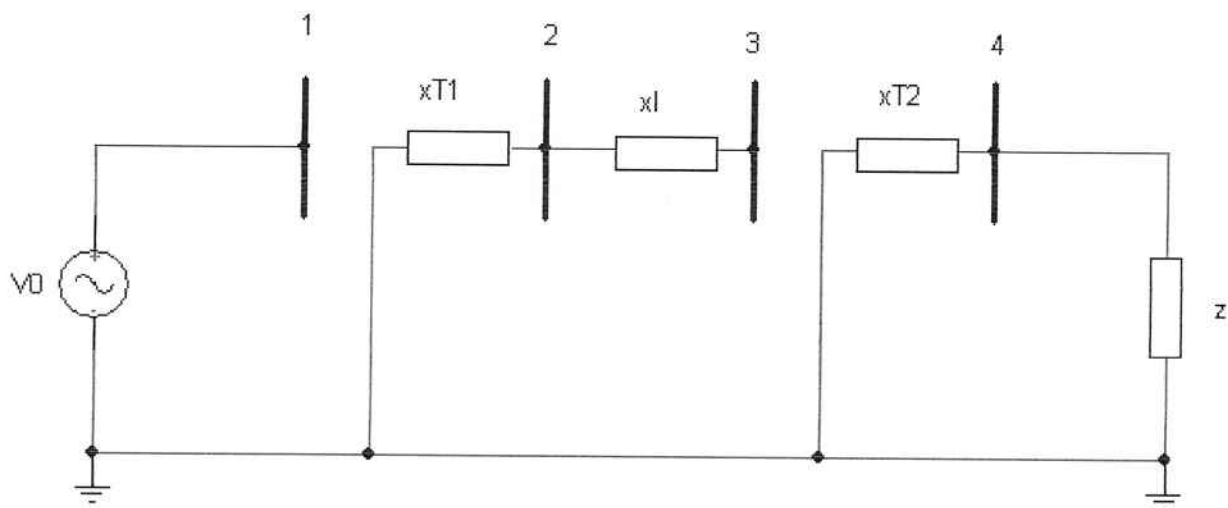


Carga:

$$\dot{z}_0 = 5 + j5pu$$

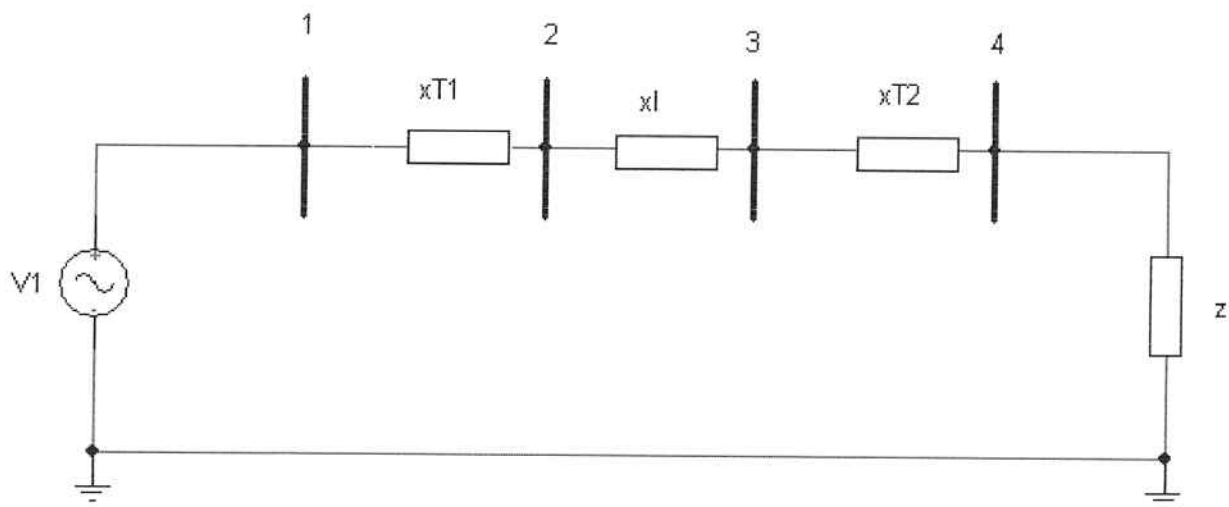
$$\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = 5 - j5pu$$

$$[\dot{V}_{CS}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \angle -90^\circ \\ 1 \angle 120^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6444 \angle 75^\circ \\ 0,413 \angle -23,79^\circ \\ 0,644 \angle -45^\circ \end{bmatrix} pu$$



(figura 15 – exemplo – seqüência-zero)

$$\dot{i}_0 = 0pu$$



(figura 16 – exemplo – seqüência-positiva)



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

$$z = j0,01 + j0,0277 + j0,05 + 5 - j5 = 5 - j4,9123pu$$

$$i = \frac{v}{z} = \frac{0,413 \angle -23,79^\circ}{5 - j4,9123} = 0,0589 \angle 20,7^\circ pu$$

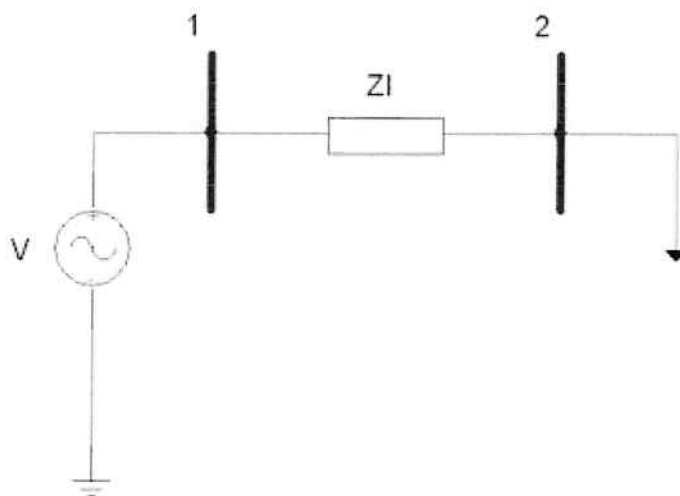


Exercícios interativos

::: Exercício - Componentes Simétricas :::

Exercício 1 - Matriz de Impedância em Componentes Simétricas:

Para o diagrama unifilar abaixo:



Dados:

$$Z_L = (3 + j 4) \text{ [ohms]}$$

$$Z_A = Z_B = Z_C = (10 + j 10) \text{ [ohms]}$$

$$V = 220 \text{ [V]}$$

Calcule $[\dot{V}_{cs}]$, $[\dot{I}_{cs}]$ e $[\dot{Z}_{cs}]$.

> Resposta (decimais: 4)



::: Exercício - Componentes Simétricas :::

Exercício 2 - Circuitos Trifásicos desequilibrados:

Calcule as correntes de linha para uma carga tipo delta dado que:

$$Z_{\text{delta}} = (17.32 + j 10) \text{ [ohm]}$$

$$Z_{\text{linha}} = (0.643 + j 0.766) \text{ [ohm]} \text{ para cada fase}$$

Alimentação desbalanceada:

$$V_A = 220 \angle 0^\circ \text{ [V]}$$

$$V_B = 230 \angle 10^\circ \text{ [V]}$$

$$V_C = 250 \angle 30^\circ \text{ [V]}$$

> Resposta (decimais: 4)



Estudo de Curto-Circuito na Rede:

Material de Apoio a Sistemas de Potência

::: Estudo de Curto-Circuito na Rede :::

Introdução

Curto trifásico

Curto fase-terra

Curto dupla-fase

Curto dupla-fase-terra

Exercícios Interativos

Circuitos trifásicos

Valores por unidade

Componentes simétricas

Estudo de curto circuito na rede

Fluxo de potência em sistemas de potência

Representação dos sistemas de potência

- Estudo de curto circuito na rede



- Introdução
- Curto trifásico
- Curto fase-terra
- Curto dupla-fase
- Curto dupla-fase-terra
- Exercícios interativos
 - Exercício 1 - Curto Trifásico e Curto Fase-Terra
 - Exercício 2 - Curto Dupla-Fase

| Circuitos trifásicos | Valores por unidade | Componentes simétricas | Estudo de curto circuito na rede
| Fluxo de potência em sistemas de potência | Representação dos sistemas de potência



Estudo de Curto-Circuito na Rede

Introdução

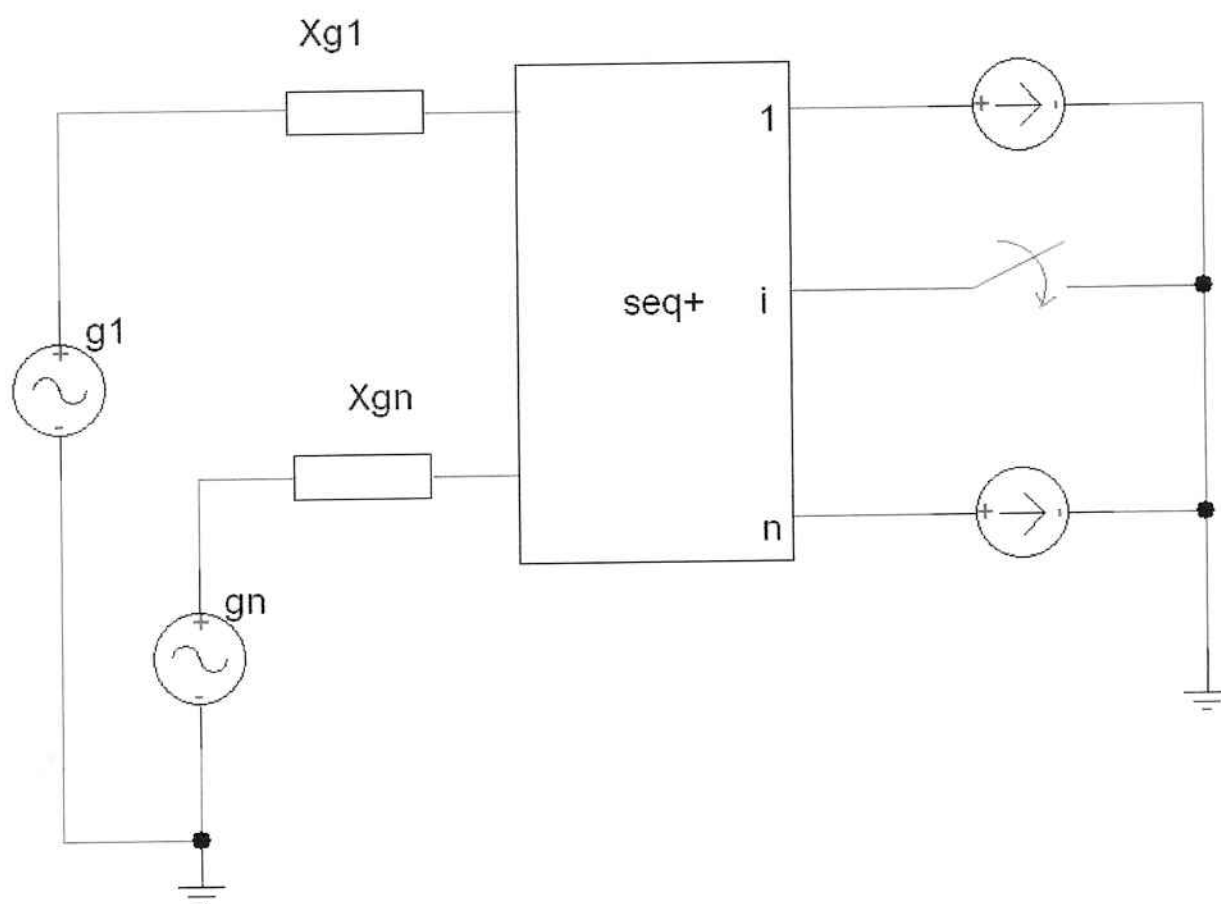
Neste capítulo veremos como calcular os efeitos causados pela queda de raios, falhas mecânicas e outros incidentes que ocorrem comumente em um sistema elétrico. O que geralmente ocorre nos casos anteriores é um aumento significativo da corrente por um certo período de tempo. É importante sabermos a dimensão desse aumento para podermos preparar um plano de proteção adequado ao sistema.



Curto Trifásico

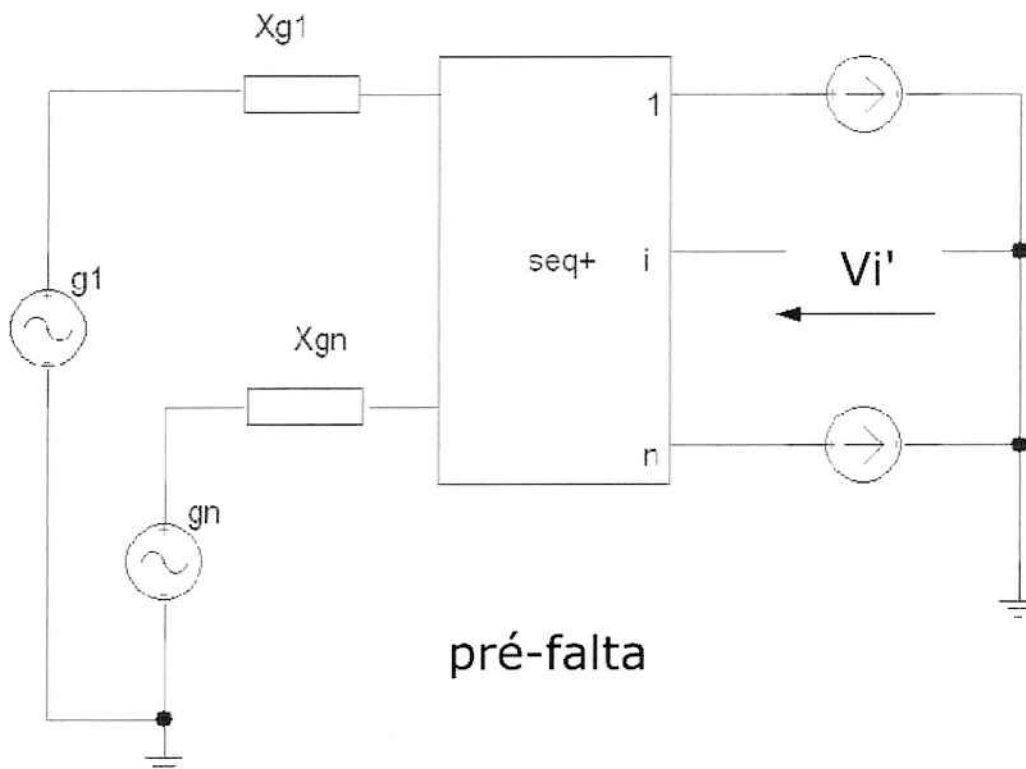
Para resolvermos a maioria dos problemas a seguir iremos utilizar dois teoremas básicos aprendidos no curso de circuitos II: O teorema da superposição e do equivalente de thevenin.

Para uma rede com cargas e geradores



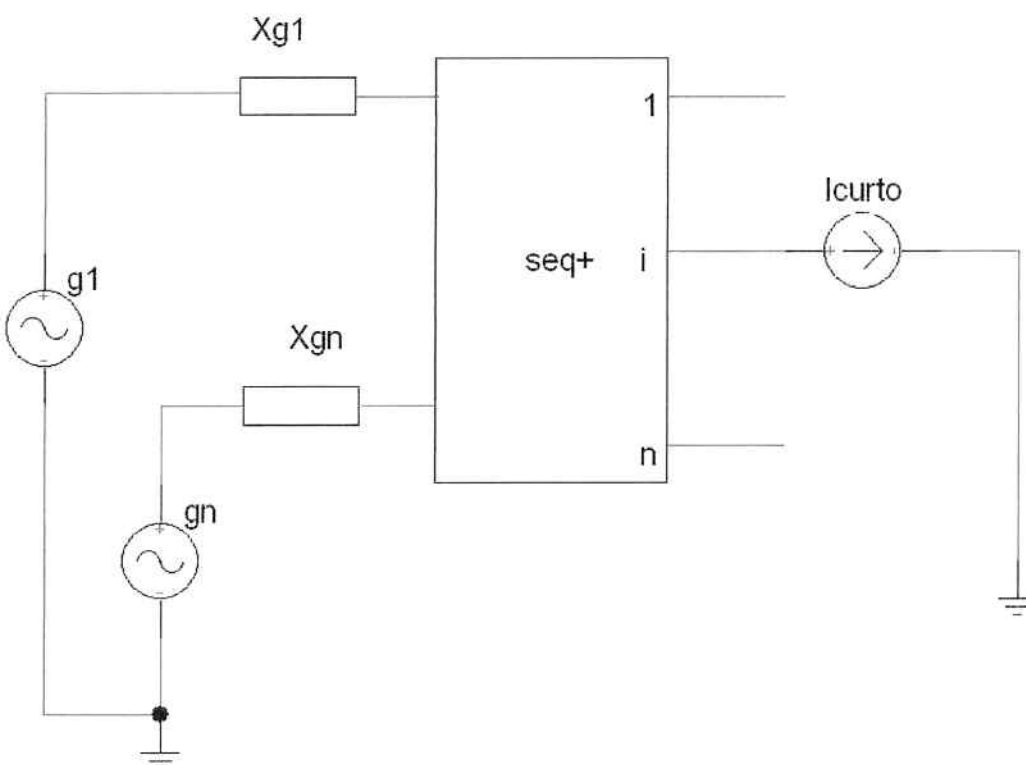
(figura 1 – rede com cargas e geradores)

Supondo-se o curto numa barra i qualquer, aplicando-se o teorema da superposição temos o seguinte sistema equivalente:



pré-falta

(figura 2 – rede com cargas e geradores na situação de pré-falta)



(figura 3 – rede com cargas e geradores na situação de curto)



$$\dot{V}_i = \dot{V}_i' + \dot{V}_i'' \Rightarrow 0 = \dot{V}_i' + \dot{V}_i'' \Rightarrow \dot{V}_i' = -\dot{Z}_{ii} \cdot \dot{I}_{defi}$$

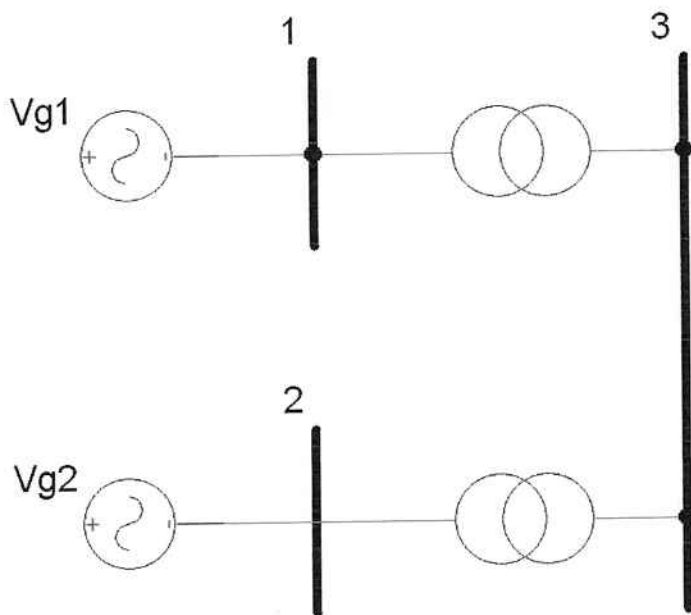
$$\dot{V}_1 = \dot{V}_1' + \dot{V}_1''$$

$$\dot{V}_n = \dot{V}_n' + \dot{V}_n''$$

Exemplo 1:

Na rede abaixo se pede:

- A corrente de falta na barra 3 para um curto trifásico para a mesma, com pré-falta em vazio.
- Tensão nos geradores.
- Correntes nas barras 1 e 2.



(figura 4 – rede para o exemplo 1)

Dados:

$$x_{t13} = j0,1pu$$

$$x_{t23} = j0,2pu$$

$$x_{g1} = j0,05pu$$

$$x_{g2} = 0,1pu$$

Resolução:

$$\dot{V}_3 = 0 \Rightarrow 1 + \dot{Z}_{33} \cdot (-I_{curto}) \Rightarrow \dot{I}_{curto} = \frac{1}{\dot{Z}_{33}}$$



$$[Y] = (-j) \cdot \begin{pmatrix} 30 & 0 & -10 \\ 0 & 15 & -5 \\ -10 & -5 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (-j) \cdot \begin{pmatrix} 30 & 0 & -10 \\ 0 & 15 & -5 \\ -10 & -5 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{Z}_{13} \\ \dot{Z}_{23} \\ \dot{Z}_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{Z}_{13} \\ \dot{Z}_{23} \\ \dot{Z}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j0,0333 \\ j0,0333 \\ j0,1 \end{bmatrix} pu$$

$$\dot{I}_{curto} = \frac{1}{\dot{Z}_{33}} = \frac{1}{j0,1} = -j10 pu$$

$$\dot{V}_{g1} = 1 - \dot{Z}_{13} \cdot \dot{I}_{curto} = 1 - j0,0333 \cdot (-j10) = 0,667 pu$$

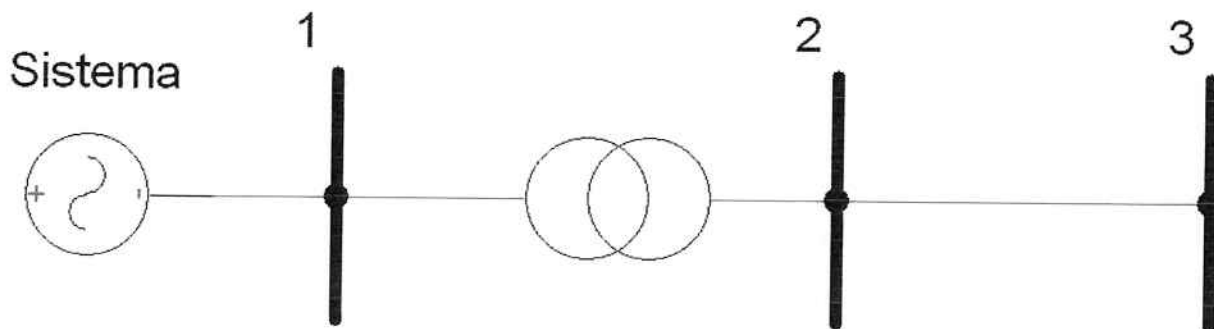
$$\dot{V}_{g2} = 1 - \dot{Z}_{23} \cdot \dot{I}_{curto} = 1 - j0,0333 \cdot (-j10) = 0,667 pu$$

$$\dot{I}_{13} = \frac{\dot{V}_1 - \dot{V}_3}{\dot{Z}_{t13}} = \frac{0,667 - 0}{j0,1} = -j6,67 pu$$

$$\dot{I}_{23} = \frac{\dot{V}_2 - \dot{V}_3}{\dot{Z}_{t23}} = \frac{0,667 - 0}{j0,2} = -j3,33 pu$$

Exemplo 2:

Calcular correntes e tensões na rede para um curto trifásico na barra 3.



(figura 5 – rede para o exemplo 2)

Dados:

Potências de curto na barra 1: $\bar{S}_{3\phi} = j1000 MVA$, $\bar{S}_{1\phi} = j1200 MVA$

Trafo delta-estrela aterrado, 138/13,8KV $S_{nom} = 60 MVA$, $x = 5\%$

Linha 2-3 10KM, $\dot{x} = j0,5 \Omega / KM$, $V_{nom} = 13,8 KV$



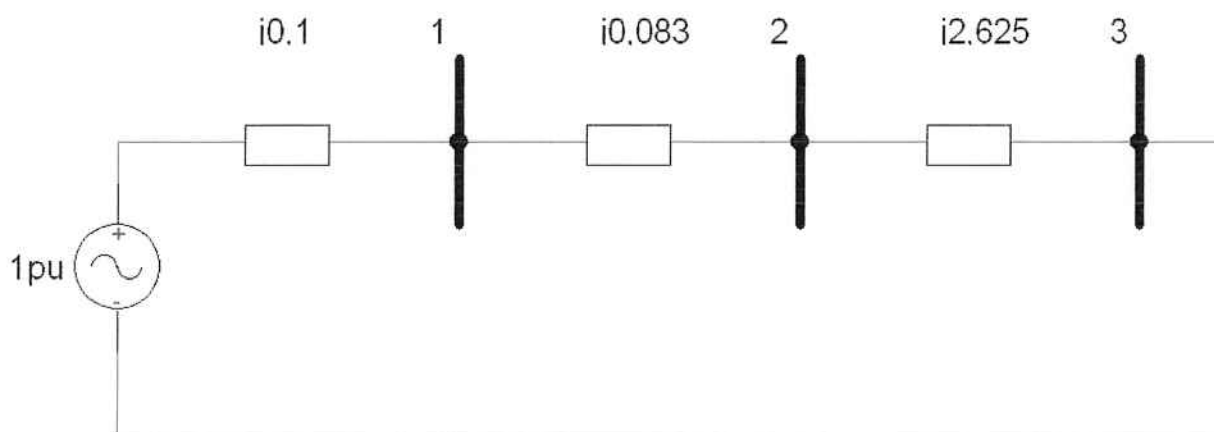
Resolução:

$$x_{linha} = \frac{0,5 \cdot 10}{\dot{z}_b} = \frac{5}{(13,8)^2} = 2,6255 pu$$

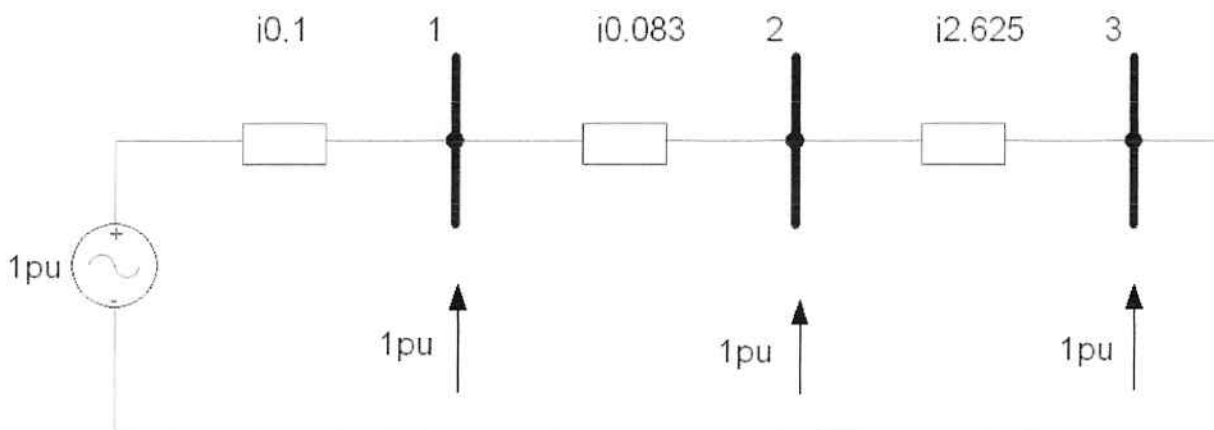
$$\dot{x}_t = 0,05 \cdot \frac{(13,8)^2}{60} \cdot \frac{100}{(13,8)^2} = 0,0833 pu$$

$$\bar{s}_{3\phi} = \frac{j1000}{S_b} = \frac{j1000}{100} = j10 pu$$

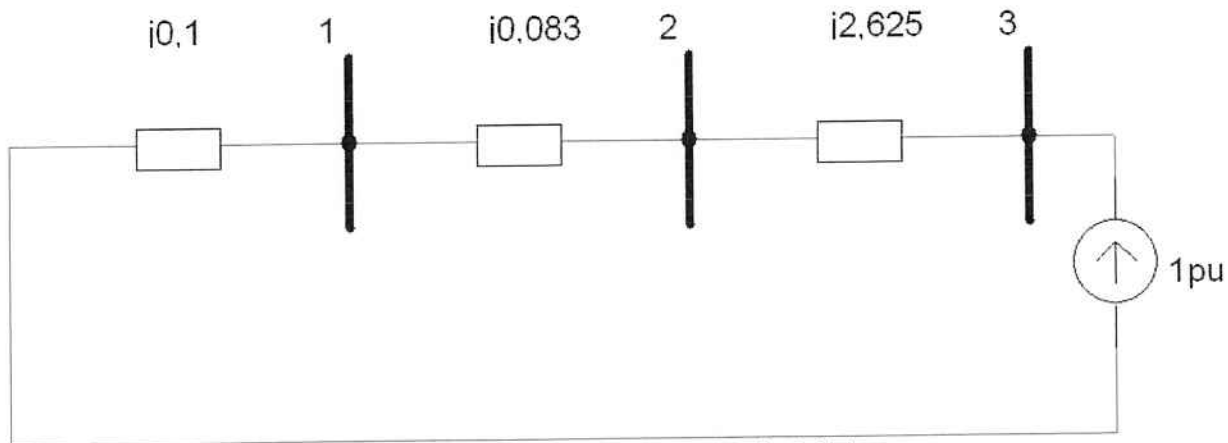
$$\dot{z}_{eq1} = \frac{1}{s_{3\phi}^*} = \frac{1}{-j10} = j0,1 pu$$



(figura 6 – resultado da superposição das figuras 7 e 8 para a rede)



(figura 7 – rede na situação de pré-falta)



(figura 8 – rede na situação de falta)

$$[Y] = -j \begin{bmatrix} 22 & -12 & 0 \\ -12 & 12,381 & -0,381 \\ 0 & -0,381 & 0,381 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -j \begin{bmatrix} 22 & -12 & 0 \\ -12 & 12,381 & -0,381 \\ 0 & -0,381 & 0,381 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_{13} \\ \dot{z}_{23} \\ \dot{z}_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{z}_{13} \\ \dot{z}_{23} \\ \dot{z}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j0,1 \\ j0,1833 \\ j2,808 \end{bmatrix} pu$$

A impedância de thevenin na barra 3 é $\dot{z}_{th3} = \dot{z}_{33} = j2,808 pu$

$$\dot{I}_{curto} = \frac{1}{j2,808} = -j0,3561 pu$$

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_1' + \dot{V}_1'' = 1 - \dot{z}_{13} \cdot \dot{I}_{curto} = 1 - j0,1(-j0,3561) = 0,9644 pu$$

$$\dot{V}_2 = 1 - \dot{z}_{23} \cdot \dot{I}_{curto} = 1 - j0,1833(-j0,3561) = 0,9347 pu$$

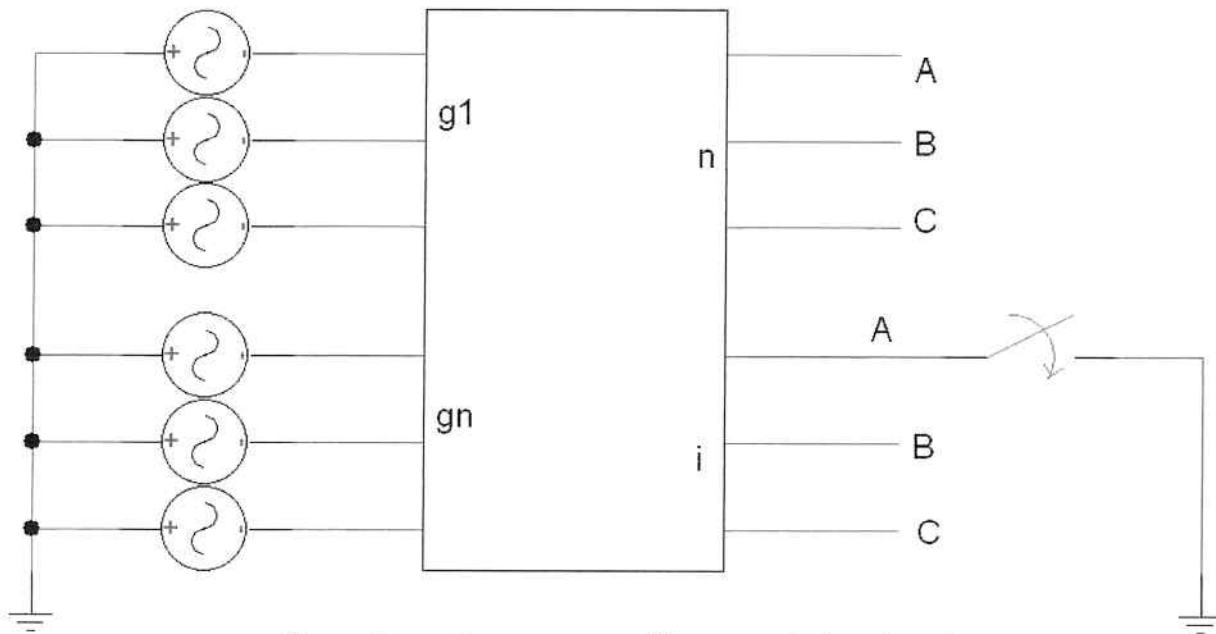
$$\dot{V}_3 = 1 - \dot{z}_{33} \cdot \dot{I}_{curto} = 0$$

$$\dot{I}_{12} = \frac{\dot{V}_1 - \dot{V}_2}{\dot{z}_{12}} = \frac{0,9644 - 0,9347}{j0,0833} = -j0,356 pu$$



Curto Fase-Terra

Para o curto fase-terra as condições de contorno irão se alterar um pouco



(figura 9 – rede para exemplificar o curto fase-terra)

Para a barra i temos que $\dot{V}_A = 0$
 $\dot{I}_B = \dot{I}_C = 0$

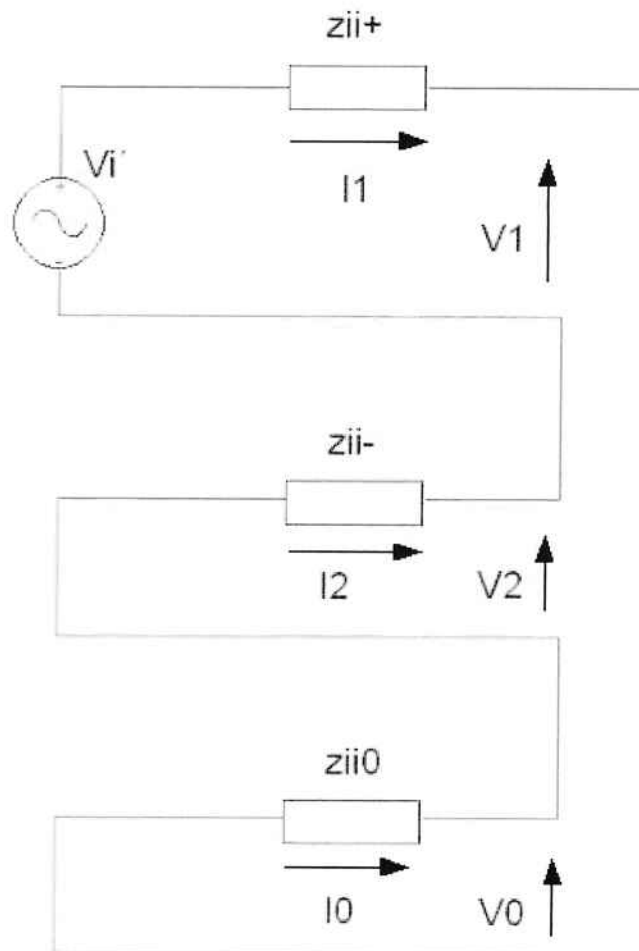
$$\text{Como } \begin{bmatrix} \dot{V}_A \\ \dot{V}_B \\ \dot{V}_C \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} \dot{I}_0 \\ \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = [T]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix}$$

Temos então que

$$\dot{V}_A = \dot{V}_0 + \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = 0$$

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \frac{1}{3} \cdot \dot{I}_A$$

Então o circuito equivalente em componentes simétricas fica,



(figura 10 – circuito equivalente em componentes simétricas para o curto fase-terra)

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_1'}{\dot{Z}_{11}^+ + \dot{Z}_{11}^- + \dot{Z}_{11}^0}, \text{ na maioria dos casos } \dot{Z}_{11}^+ = \dot{Z}_{11}^- \text{ e } \dot{V}_1' = 1 \text{ pu}$$

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \frac{1}{2\dot{Z}_{11}^+ + \dot{Z}_{11}^0} \Rightarrow \dot{I}_A = \frac{3}{2\dot{Z}_{11}^+ + \dot{Z}_{11}^0}$$

$$\dot{V}_1 = \frac{\dot{Z}_{11}^+ + \dot{Z}_{11}^0}{2\dot{Z}_{11}^+ + \dot{Z}_{11}^0}$$

$$\dot{V}_2 = \frac{-\dot{Z}_{11}^+}{2\dot{Z}_{11}^+ + \dot{Z}_{11}^0}$$

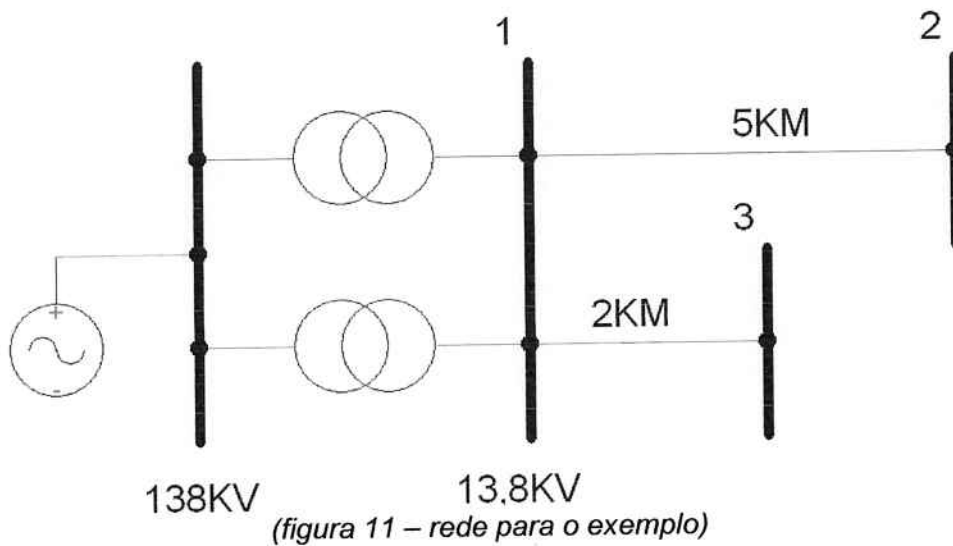
$$\dot{V}_0 = \frac{-\dot{Z}_{11}^0}{2\dot{Z}_{11}^+ + \dot{Z}_{11}^0}$$



Exemplo:

Para a rede abaixo se pede:

- a) para um curto trifásico na barra 2 determinar $\dot{V}_3; \dot{I}_{curto}$
 b) para um curto fase-terra na barra 2 determinar $\dot{V}_3; \dot{I}_{curto}$



Dados:

$$\dot{S}_{3\phi} = 400MVA; \dot{S}_{1\phi} = 500MVA;$$

$$\text{linhas } \dot{z} = j0,5\Omega / KM$$

Resolução:

$$\dot{z}_g^+ = \frac{1}{\dot{s}_{3\phi}^*} = \frac{100}{j400} = -j0,25pu$$

$$\dot{z}_g^0 = \frac{3}{\dot{s}_{1\phi}^*} - \frac{2}{\dot{s}_{3\phi}^*} = \frac{3}{-j5} - \frac{2}{-j4} = j0,1pu$$

$$\dot{z}_{12}^+ = \frac{j0,5.5}{13,8^2 / 100} = j1,3128pu$$

$$\dot{z}_{12}^0 = \frac{j1,5.5}{13,8^2 / 100} = j3,982pu$$

$$\dot{z}_{13}^+ = j0,5251pu$$



$$\dot{z}_{13}^0 = j1,5753pu$$

a)

$$[Y]^+ = [Y]^- = -j \cdot \begin{bmatrix} 4 + 0,7618 + 1,9044 & -0,7618 & -1,9044 \\ -0,7618 & 0,7168 & 0 \\ -1,9044 & 0 & 1,9044 \end{bmatrix} =$$

$$[Y]^+ = [Y]^- = -j \cdot \begin{bmatrix} 6,662 & -0,7618 & -1,9044 \\ -0,7618 & 0,7618 & 0 \\ -1,9044 & 0 & 1,9044 \end{bmatrix} pu$$

$$[Y]^0 = -j \cdot \begin{bmatrix} 10,8887 & -0,2539 & -0,6348 \\ -0,2539 & 0,2539 & 0 \\ -0,6348 & 0 & 0,6348 \end{bmatrix} pu$$

$$[Z]^+ = [Z]^- = [Y]^{+^{-1}} = j \cdot \begin{bmatrix} 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 1,562 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,7753 \end{bmatrix} pu$$

$$[Z]^0 = [Y]^{0^{-1}} = j \cdot \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 4,0385 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 1,6753 \end{bmatrix} pu$$

$$\dot{I}_{3\phi,2} = \frac{1}{Z_{22}^+} = \frac{1}{j1,5662} = -j0,6384pu = \dot{I}_2^+$$

$$\dot{V}_3^+ = 1 - \dot{z}_{32}^+ \cdot \dot{I}_2^+ = 1 - j0,25 \cdot (-j0,6384) = 0,8404pu$$

b)

$$\dot{I}_2^+ = \dot{I}_2^0 = \dot{I}_2^- = \frac{1}{2 \cdot \dot{z}_{22}^+ + \dot{z}_{22}^0} = \frac{1}{2 \cdot j1,5662 + j4,0385} = -j0,1394pu$$

$$\dot{I}_{1\phi,2} = 3 \cdot \dot{I}_2^+ = -j0,4183pu$$

$$\dot{V}_3^+ = 1 - \dot{z}_{32}^+ \cdot \dot{I}_2^+ = 1 - j0,25 \cdot (-j0,1394) = 0,9651pu$$

$$\dot{V}_3^- = -\dot{z}_{32}^+ \cdot \dot{I}_2^- = -j0,25 \cdot (j0,1394) = -0,0349pu$$



$$\dot{V}_3^0 = -Z_{32}^0 \cdot \dot{I}_2^0 = -j0,1 \cdot (-j0,1394) = -0,01394 pu$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{3,A} \\ \dot{V}_{3,B} \\ \dot{V}_{3,C} \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} -0,01394 \\ 0,9651 \\ -0,0349 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9162 \\ 0,989 \angle -118,9^\circ \\ 0,989 \angle 118,9^\circ \end{bmatrix} pu$$

Exemplo:

Para a rede abaixo calcule:

- Correntes de falta;
- As contribuições dos geradores e as correspondentes tensões para curto trifásico e fase-terra na barra 2.

Dados:

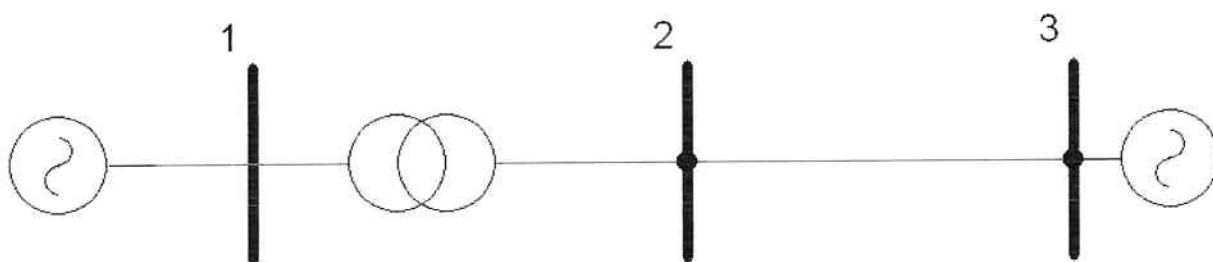
$$\dot{x}_{g1}^+ = \dot{x}_{g1}^- = \dot{x}_{g1}^0 = j0,1 pu$$

$$\dot{x}_{trafo}^+ = \dot{x}_{trafo}^- = \dot{x}_{trafo}^0 = j0,05 pu$$

$$\dot{x}_{linha}^+ = \dot{x}_{linha}^- = j0,5 pu$$

$$\dot{x}_{linha}^0 = j1,5 pu$$

$$\dot{x}_{g3}^+ = \dot{x}_{g3}^- = \dot{x}_{g3}^0 = j0,8 pu$$



(figura 12 – rede para o exemplo)

Resolução:

$$[Y]^+ = -j \cdot \begin{bmatrix} 30 & -20 & 0 \\ -20 & 22 & -2 \\ 0 & -2 & 3,25 \end{bmatrix} pu$$



$$[Z]^+ = j \cdot \begin{bmatrix} 0,931 & 0,0897 & 0,0552 \\ 0,0897 & 0,1345 & 0,0828 \\ 0,0552 & 0,0828 & 0,3586 \end{bmatrix} pu$$

$$[Y]^0 = -j \cdot \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20,667 & -0,667 \\ 0 & -0,667 & 1,917 \end{bmatrix} pu$$

$$[Z]^0 = j \cdot \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0489 & 0,017 \\ 0 & 0,017 & 0,5276 \end{bmatrix} pu$$

Para o curto trifásico:

$$\dot{I}_{curto3\phi,2} = \frac{1}{\dot{Z}_{22}^+} = \frac{1}{j0,1345} = -j7,4349 pu$$

$$\dot{V}_1 = 1 - \dot{Z}_{12}^+ \cdot \dot{I}_{curto3\phi,2}^+ = 1 - j0,0897 \cdot (-j7,4349) = 0,333 pu$$

$$\dot{I}_{g1} = \frac{1 - 0,333}{j0,1} = -j0,6,667 pu$$

$$\dot{V}_3 = 1 - \dot{Z}_{32}^+ \cdot \dot{I}_{curto3\phi,2}^+ = 1 - j0,0828 \cdot (-j7,4349) = 0,3844 pu$$

$$\dot{I}_{g2} = \frac{1 - 0,3844}{j0,8} = -0,7695 pu$$

Para o curto fase-terra:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \dot{I}_0 = \frac{1}{2 \cdot j0,1345 + j0,0489} = -j3,1456 pu$$

$$\dot{I}_{curto1\phi,2} = 3 \cdot \dot{I}_0 = -j9,4365 pu$$

$$\dot{V}_1^+ = [1 - j0,0897 \cdot (-j3,1456)] \cdot 1 \cdot \sqrt{-30^\circ} = 0,7178 \sqrt{-30^\circ} pu$$



$$\dot{V}_1^- = [0 - j0,0897 \cdot (-j3,1456)] \cdot 1 \angle 30^\circ = 0,2822 \angle 30^\circ pu$$

$$\dot{V}_1^0 = [0 - 0 \cdot (-j3,1456)] = 0 pu$$

$$\dot{I}_{g1}^+ = \frac{1 \angle -30^\circ - 0,7178 \angle -30^\circ}{j0,1} = 2,822 \angle -120^\circ pu$$

$$\dot{I}_{g1}^- = \frac{0 + 0,2822 \angle 30^\circ}{j0,1} = 2,822 \angle -60^\circ pu$$

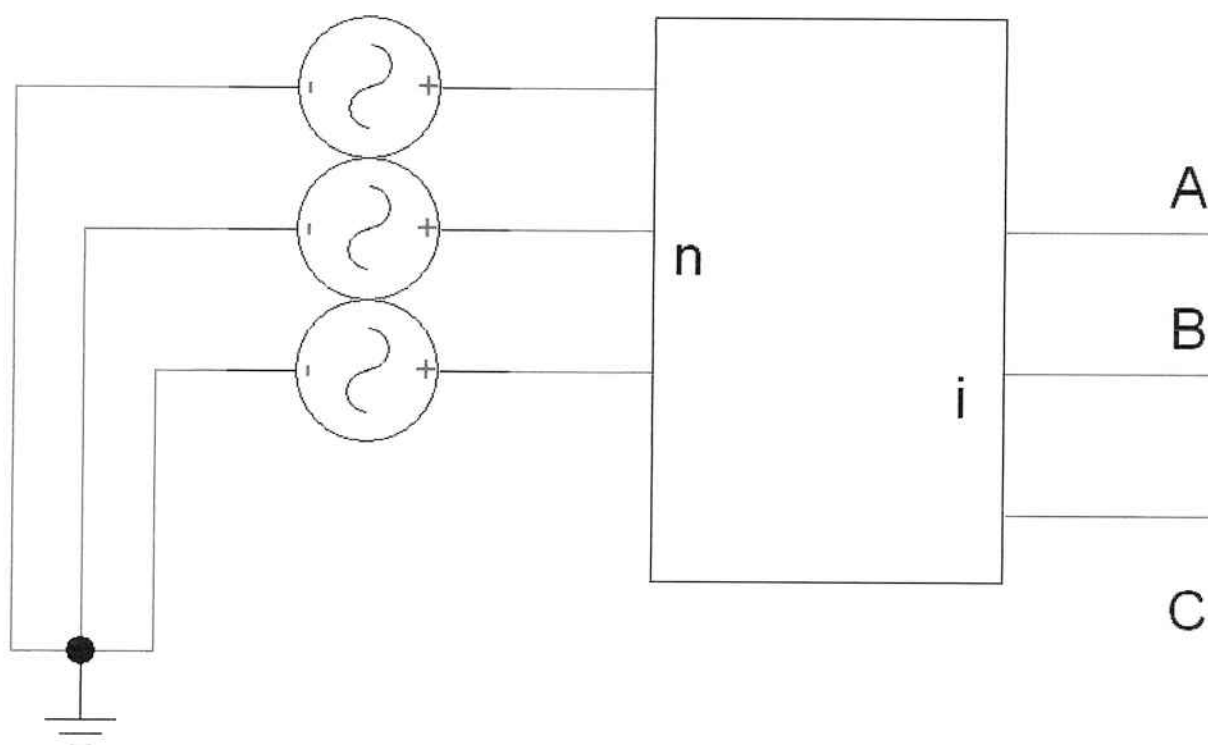
$$\dot{I}_{g0}^0 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{g1,A} \\ \dot{I}_{g1,B} \\ \dot{I}_{g1,C} \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2,822 \angle -120^\circ \\ 2,822 \angle -60^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j4,887 \\ j4,887 \\ 0 \end{bmatrix} pu$$



Curto Dupla-Fase

Para um curto dupla fase nós continuaremos segundo a mesma linha de raciocínio.



(figura 13 – rede para exemplificar o curto dupla-fase)

As condições de contorno são: $\dot{I}_A = 0, \dot{I}_B = -\dot{I}_C, \dot{V}_B = \dot{V}_C$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_0 \\ \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = [T]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{I}_B \\ -\dot{I}_B \end{bmatrix}$$

$$\dot{I}_0 = 0$$

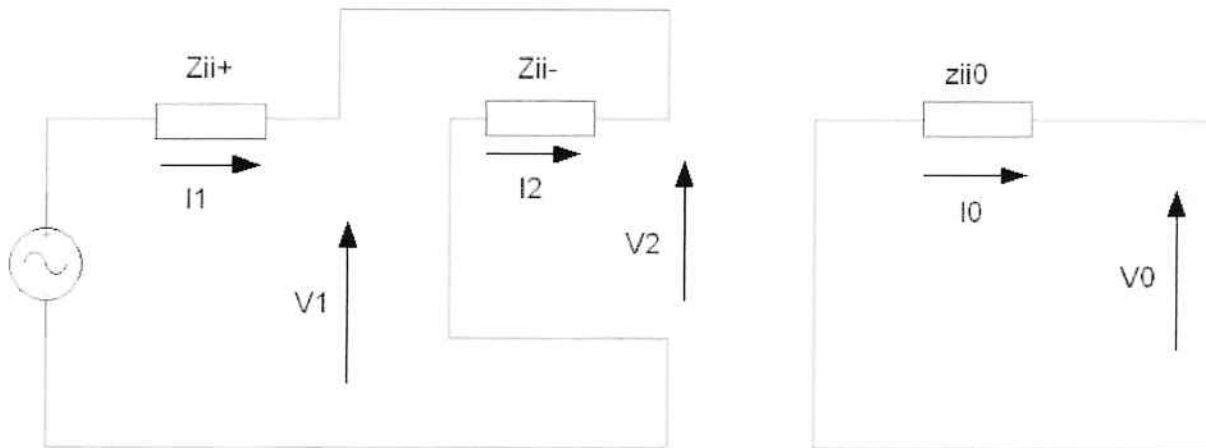
$$\dot{I}_1 = -\dot{I}_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = [T]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dot{V}_A \\ \dot{V}_B \\ \dot{V}_C \end{bmatrix}$$



$$\dot{V}_0 = \frac{1}{3} \cdot (\dot{V}_A + 2\dot{V}_B)$$

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \frac{1}{3} (\dot{V}_A - \dot{V}_B)$$



(figura 14 – circuito equivalente em componentes simétricas para o curto dupla-fase)

$$\dot{I}_1 = -\dot{I}_2 = \frac{1}{\dot{Z}_{ii}^+ + \dot{Z}_{ii}^-}$$

$$\text{Como } \dot{Z}_{ii}^+ = \dot{Z}_{ii}^- \Rightarrow \dot{I}_1 = \frac{1}{2 \cdot \dot{Z}_{ii}^+}$$

Temos então que:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \frac{\dot{Z}_{ii}^+}{\dot{Z}_{ii}^- + \dot{Z}_{ii}^+} = \frac{1}{2}$$

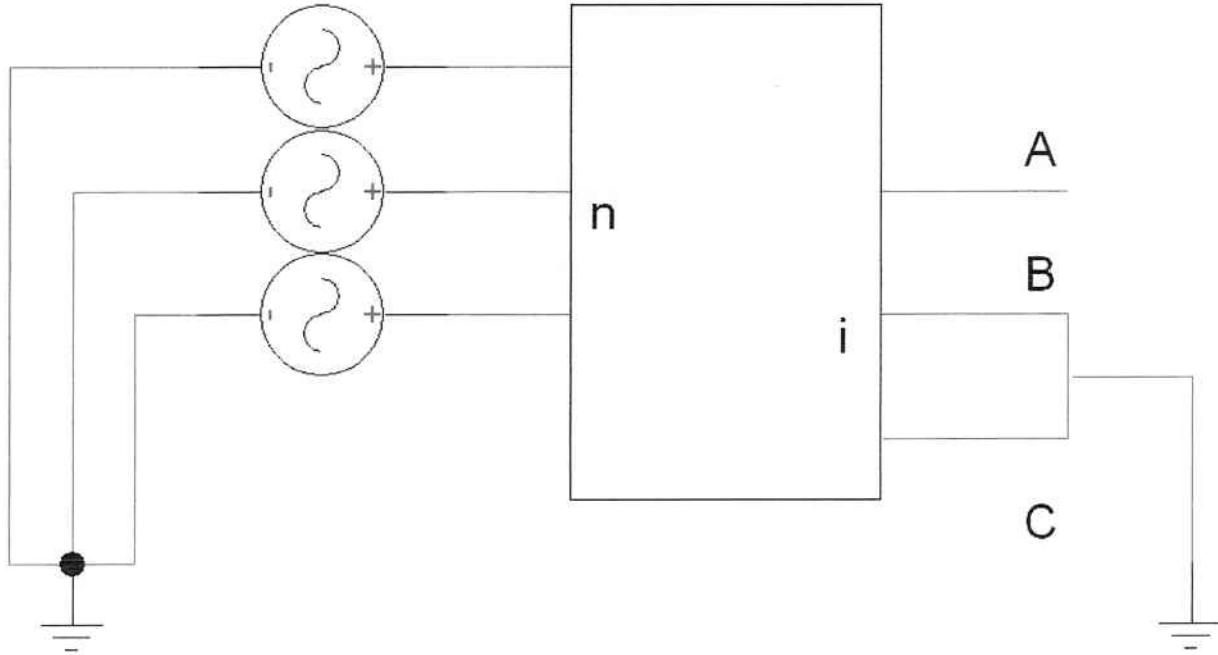
$$\begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2 \cdot \dot{Z}_{ii}^+}$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{\text{curto}2\phi} = -j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\dot{Z}_{ii}^+}$$



Curto Dupla-Fase-Terra

Para a figura abaixo as condições de contorno ficam:

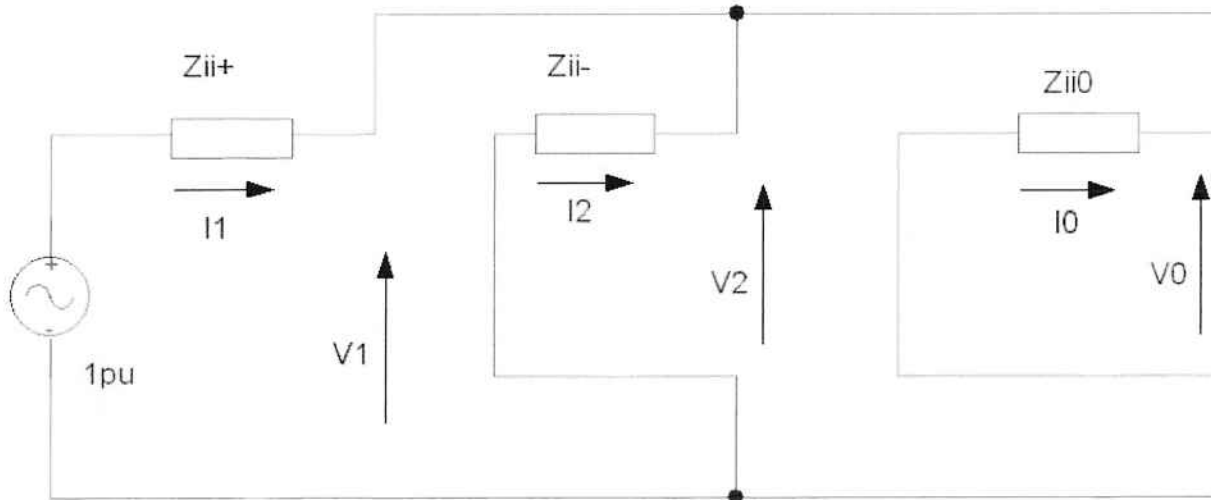


(figura 15 – rede para exemplificar o curto dupla-fase-terra)

$$\dot{I}_A = 0; \dot{V}_B = \dot{V}_C = 0 \text{ logo,}$$

$$\dot{I}_A = \dot{I}_0 + \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = [T]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dot{V}_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{V}_0 = \dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \frac{1}{3} \cdot \dot{V}_A$$



(figura 16 - circuito equivalente em componentes simétricas para o curto dupla-fase-terra)

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{Z}_{ii}^+ + \dot{Z}_{ii}^0}{\dot{Z}_{ii}^+ \cdot (\dot{Z}_{ii}^+ + 2 \cdot \dot{Z}_{ii}^0)}$$

$$\dot{V}_1 = \frac{\dot{Z}_{ii}^0}{\dot{Z}_{ii}^+ + 2 \cdot \dot{Z}_{ii}^0}$$

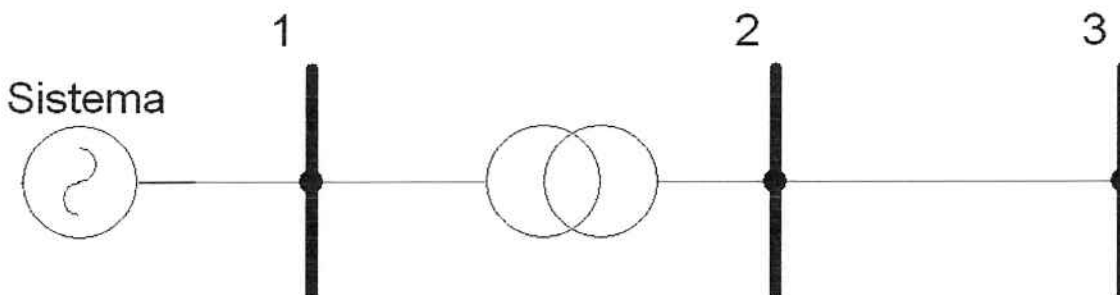
$$\dot{I}_2 = \frac{-\dot{V}_1}{\dot{Z}_{ii}^+} = \frac{-\dot{Z}_{ii}^0}{\dot{Z}_{ii}^+ \cdot (\dot{Z}_{ii}^+ + 2 \cdot \dot{Z}_{ii}^0)}$$

$$\dot{I}_0 = \frac{-\dot{V}_1}{\dot{Z}_{ii}^0} = \frac{-1}{\dot{Z}_{ii}^+ + 2 \cdot \dot{Z}_{ii}^0}$$

Exemplo:

Para a rede abaixo com um curto dupla fase na barra 3, calcule:

- Corrente de curto;
- Tensões na barra 1;
- Corrente no gerador.



(figura 17 – rede para o exemplo)



Dados:

potência de curto na barra 1 $\bar{S}_{3\phi} = j1000MVA$; $\bar{S}_{1\phi} = j800MVA$

trafo 1 $\dot{S}_{nom} = 50MVA$; $138 / 13,8kv$; $\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = \dot{x}_2$ delta-estrela-aterrada

linha $\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = j0,1pu$; $\dot{z}_0 = j0,4pu$ na base 100MVA

Resolução:

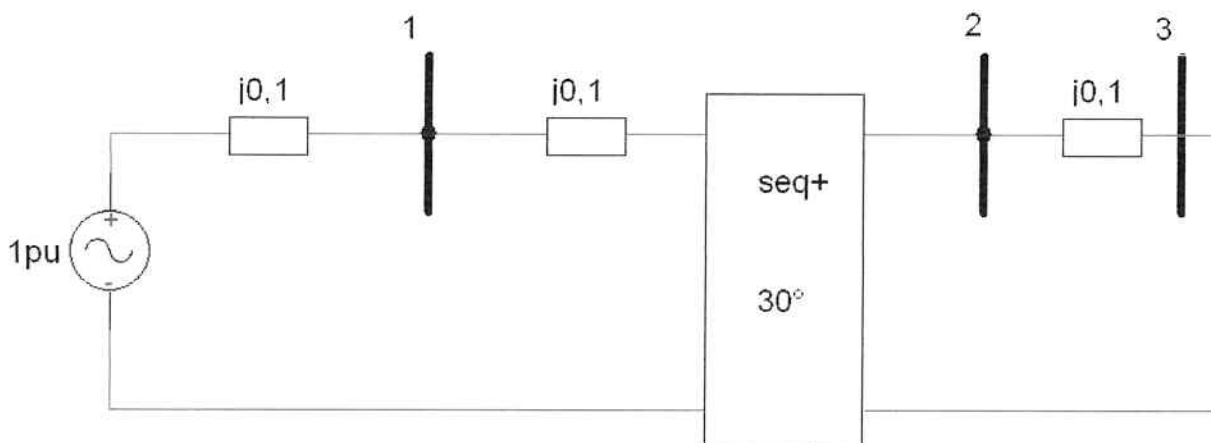
$$\bar{S}_{3\phi} = j \frac{1000}{100} = j10pu = \dot{V}_{nom} \cdot \dot{I}_{3\phi}^* = 1 \cdot \dot{I}_{3\phi}^* = \frac{1}{\dot{Z}_g^+} \Rightarrow \dot{Z}_g^+ = j0,1pu$$

$$\dot{S}_{1\phi} = \frac{j800}{100} = j0,8pu = \dot{I}_{1\phi}^*$$

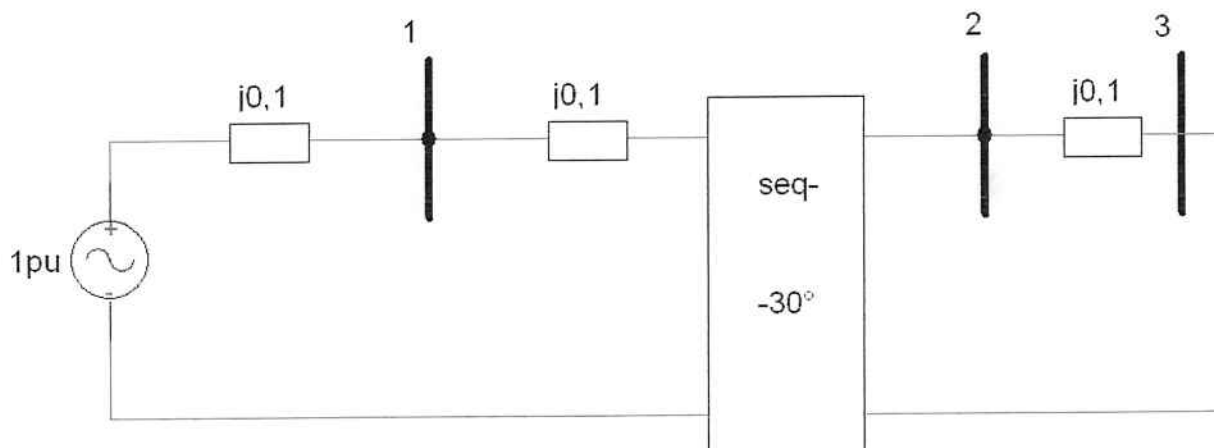
$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \dot{I}_0 = \frac{1}{2 \cdot \dot{Z}_g^+ + \dot{Z}_g^0} \Leftrightarrow \dot{I}_A = \dot{I}_{1\phi} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = \frac{3}{2 \cdot \dot{Z}_g^+ + \dot{Z}_g^0}$$

$$\dot{Z}_g^0 = \frac{3}{\dot{S}_{1\phi}^*} - 2 \cdot \dot{Z}_g^+ = \frac{3}{-j8} - 2 \cdot j0,1 = j0,175pu$$

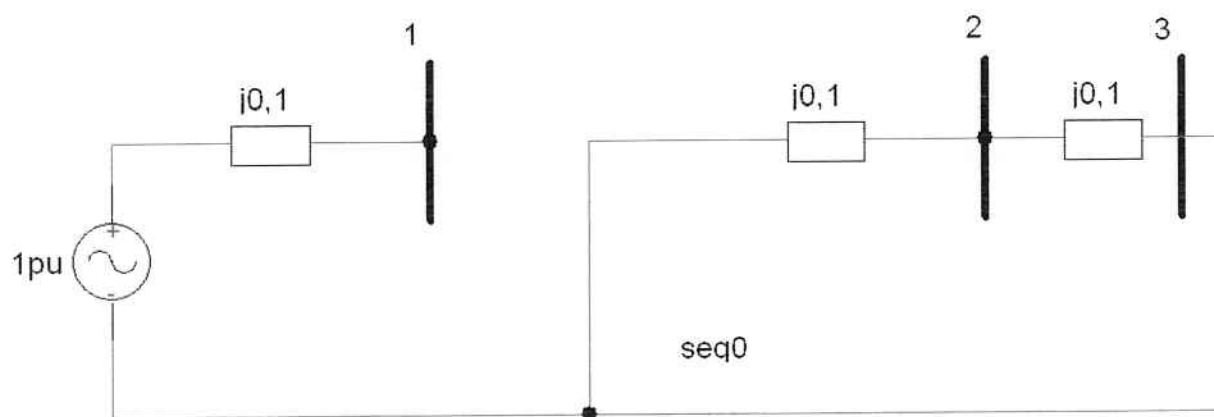
Por thevenin:



(figura 18 – seqüência positiva para a rede)



(figura 19 - seqüência negativa para a rede)



(figura 20 - seqüência zero para a rede)

$$\dot{z}_{33}^+ = j0,3pu$$

$$\dot{z}_{23}^+ = j0,2pu$$

$$\dot{z}_{13}^+ = j0,1pu$$

$$\dot{z}_{33}^0 = j0,5pu$$

$$\dot{z}_{23}^0 = j0,1pu$$

$$\dot{z}_{13}^0 = 0$$

Dupla fase:

$$-\dot{I}_2 = \dot{I}_1 = \frac{1}{2 \cdot j0,3} = -j1,6667pu$$



$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \frac{1}{2} pu$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{A3} \\ \dot{I}_{B3} \\ \dot{I}_{C3} \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -j1,6667 \\ j1,6667 \end{bmatrix} pu$$

$$\dot{I}_{B3} = -\dot{I}_{C3} = \dot{I}_{curto2\phi} = -2,8868 pu$$

$$\dot{V}_1^+ = (1 - \dot{z}_{13}^+ \cdot \dot{I}_1) \cdot \sqrt{-30^\circ} = [1 - j0,1 \cdot (-j1,6667)] \cdot \sqrt{-30^\circ} = 0,8333 \sqrt{-30^\circ} pu$$

$$\dot{V}_1^0 = 0$$

$$\dot{V}_1^- = (-\dot{z}_{13}^+ \cdot \dot{I}_2) \sqrt{30^\circ} = (-j0,1 \cdot j1,6667) \cdot \sqrt{30^\circ} = 0,1667 \sqrt{30^\circ} pu$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{A1} \\ \dot{V}_{B1} \\ \dot{V}_{C1} \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0,8333 \sqrt{-30^\circ} \\ 0,1667 \sqrt{30^\circ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9279 \sqrt{-21^\circ} \\ 0,9279 \sqrt{-158,95^\circ} \\ 0,6666 \sqrt{90^\circ} \end{bmatrix}$$

$$\dot{I}_g^+ = \frac{1 \sqrt{-30^\circ} - 0,8333 \sqrt{-30^\circ}}{j0,1} = 1,667 \sqrt{-120^\circ} pu$$

$$\dot{I}_g^- = \frac{0 - 0,1667 \sqrt{30^\circ}}{j0,1} = 1,667 \sqrt{120^\circ} pu$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{gA} \\ \dot{I}_{gB} \\ \dot{I}_{gC} \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1,667 \sqrt{-120^\circ} \\ 1,667 \sqrt{120^\circ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,667 \\ -1,667 \\ 3,333 \end{bmatrix} pu$$

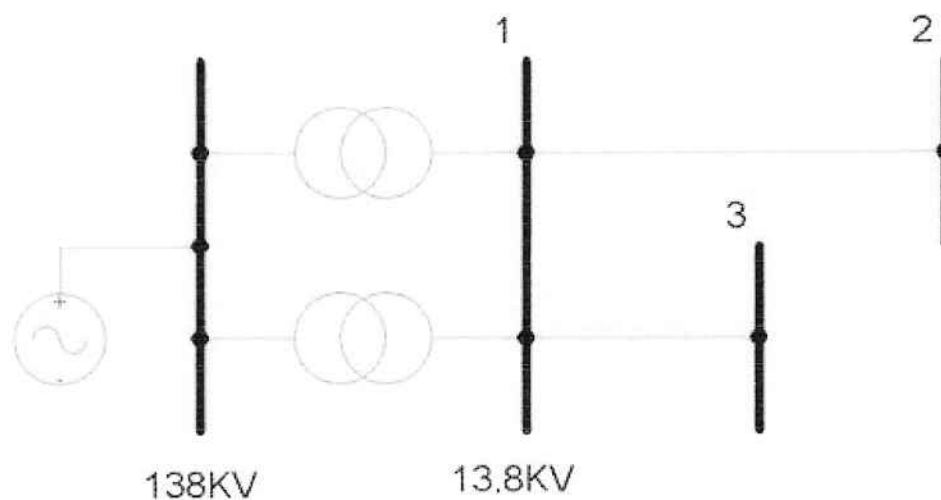


Exercícios interativos

::: Exercício - Estudo de Curto-Circuito na Rede :::

Exercício 1 - Curto trifásico e curto fase-terra:

Na rede abaixo, para um curto na barra 2, determine V_3 e I_{curto} .



Dados:

$$S_{3\phi} = 400 \text{ [MVA]}$$

$$S_{1\phi} = 500 \text{ [MVA]}$$

Linhas:

$$X_1 = j 0.5 \text{ [ohms/Km]}$$

$$X_0 = j 1.5 \text{ [ohms/Km]}$$

$$L_{12} = 5 \text{ [Km]}$$

$$L_{13} = 2 \text{ [Km]}$$

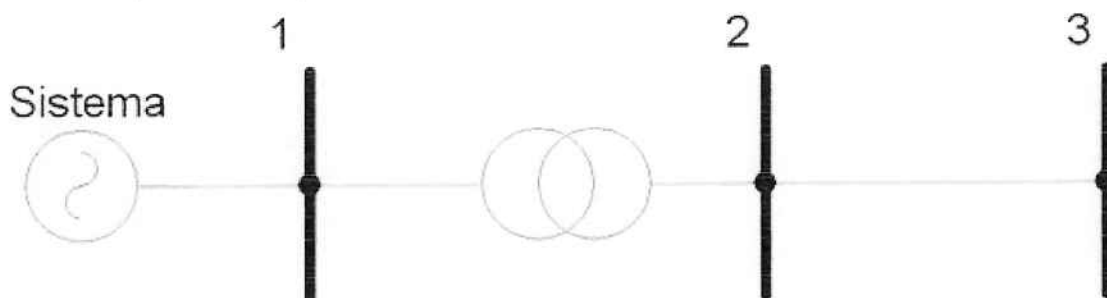
> Resposta (decimais: 4)



:: Exercício - Estudo de Curto-Circuito na Rede ::

Exercício 2 - Curto Dupla-Fase:

Calcule os seguintes itens para um curto dupla fase na barra 3 da rede abaixo:



- a) Corrente de curto;
- b) Tensões na barra 1;
- c) Corrente no gerador.

Dados:

Potência de curto na barra 1:

$$S_{3\phi} = j \ 1000 \quad [\text{MVA}]$$

$$S_{1\phi} = j \ 800 \quad [\text{MVA}]$$

Trafo:

$$138 \quad / \quad 13.8 \quad [\text{KV}]$$

$$50 \quad [\text{MVA}]$$

$$x_0 = x_1 = x_2 = 5 \quad \%$$

delta - estrela aterrada

Linha:

$$z_1 = z_2 = j \ 0.1 \quad [\text{pu}] \quad (\text{na base } 100 \text{ MVA})$$

$$z_0 = j \ 0.4 \quad [\text{pu}] \quad (\text{na base } 100 \text{ MVA})$$

> Resposta (decimais: 4)



Fluxo de Potência em Sistemas de Potência:

Material de Apoio a Sistemas de Potência

:: Fluxo de Potência em Sistemas de Potência ::

Formulação do
problema de
fluxo de
potência

Solução pelo
método de
Gauss-Seidel

Solução pelo
método de
Newton-Raphson

Exercícios
Interativos

Circuitos
trifásicos

Valores por
unidade

Componentes
simétricas

Estudo de curto
circuito na rede

Fluxo de
potência em
sistemas de
potência

Representação
dos sistemas de
potência

- Fluxo de potência em sistemas de potência

- Formulação do problema de fluxo de potência
- Solução pelo método de Gauss-Seidel
- Solução pelo método de Newton-Raphson
- Exercícios Interativos
 - Exercício 1 - Solução pelo método de Gauss-Seidel
 - Exercício 2 - Solução pelo método de Newton-Raphson

| Circuitos trifásicos | Valores por unidade | Componentes simétricas | Estudo de curto circuito na rede
| Fluxo de potência em sistemas de potência | Representação dos sistemas de potência



Fluxo de Potência em Sistemas de Potência

Formulação do problema de fluxo de potência

O estudo de fluxo de potência permite-nos avaliar vários elementos, o primeiro resultante desse estudo é o módulo e a fase da voltagem em todas as barras do sistema e a potência reativa no sistema.

Estes dados são importantes para se encontrar o ponto ideal de operação do sistema, assim como no projeto de expansão do mesmo. Ele também é muito útil para se observar o impacto da entrada de novas cargas.

As equações que nos permitem calcular o fluxo num sistema são algébricas e não lineares devido a modelagem utilizada e o interesse de se estudar a operação em regime permanente senoidal.

Para a dedução a seguir utilizaremos exclusivamente valores em pu para facilitarmos os cálculos.

$$\dot{S} = \dot{V} \cdot \dot{I}^*$$

$$P - jQ = \dot{V}^* \cdot \dot{I}$$

$[\dot{I}] = [\dot{Y}] \cdot [\dot{V}]$, para uma linha/barra i qualquer da matriz/sistema fica:

$$P_i = \dot{Y}_{i1} \cdot \dot{V}_1 + \dot{Y}_{i2} \cdot \dot{V}_2 + \dots + \dot{Y}_{in} \cdot \dot{V}_n, \text{ logo:}$$

$$P_i - jQ_i = \dot{V}_i^* \cdot \sum_{j=1}^n \dot{Y}_{ij} \cdot \dot{V}_j$$

Note que P e Q positivos indicam potência sendo injetada no sistema e P e Q negativos indicam potência sendo absorvida do sistema.

Como a equação é complexa, podemos escrever duas equações reais para cada barra do sistema, o que nos indica que podemos ter até duas incógnitas por barra.

Da equação vem as seguintes deduções:



$$P_i = \sum_{j=1}^n \dot{V}_i \dot{V}_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} - B_{ij} \sin \theta_{ij})$$

$$Q_i = - \sum_{j=1}^n \dot{V}_i \dot{V}_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} + B_{ij} \cos \theta_{ij})$$

para : $\dot{V}_i = V_i \angle \theta_i$

$$\dot{V}_j = V_j \angle \theta_j$$

$$\dot{Y}_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}$$

$$\theta_{ji} = \theta_j - \theta_i$$

Cada barra do sistema apresenta quatro variáveis (V , θ , P , Q). Como só podemos ter apenas duas incógnitas por barras, daremos uma denominação para cada barra dependendo das incógnitas apresentadas.

Barra de carga:

P , Q conhecidos

V , θ incógnitas

Barra de geração:

P , V conhecidos

Q , θ incógnitas

Barra Swing :

V , θ conhecidos

P , Q incógnitas

Lembrando que um sistema tem que ter uma barra swing.

Para se resolver problemas de estudo de fluxo de potência nós temos basicamente dois métodos de resolução: Gauss-Seidel e Newton-Raphson.



Solução pelo método de Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel se baseia na resolução das equações por iteração. Rearranjando-se as equações temos:

$$\dot{V}_i = \frac{1}{\dot{Y}_{ii}} \left[\frac{P_i - jQ_i}{V_i^*} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \dot{Y}_{ij} \cdot \dot{V}_j \right]$$

Exemplo:

Encontre as raízes da equação abaixo utilizando iteração

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 = 0$$

Fatorando fica:

$$f(x) = (x-2) \cdot (x-3) = 0$$

$$x = 2 \text{ ou } x = 3$$

Por iteração fica:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x^2 = 5x - 6$$

$$x = \sqrt{5x - 6}$$

$$x^{(h)} = \sqrt{5x^{h-1} - 6}$$

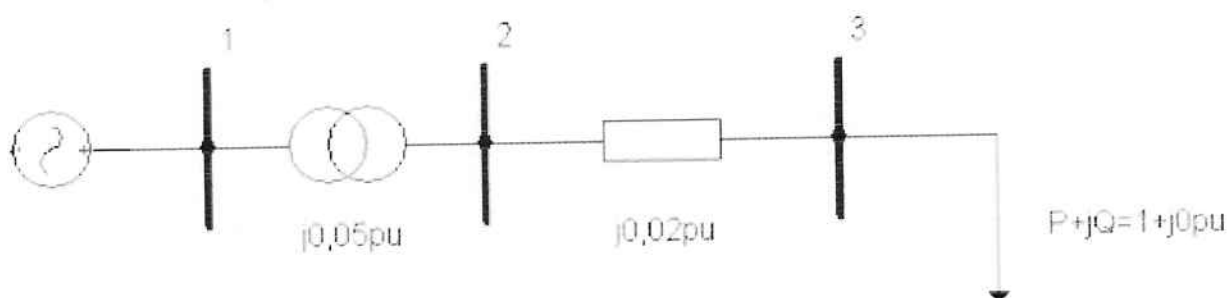
h	x
0	4 (chute)
1	3,741
2	3,5648
3	3,4386
4	3,3456
:	:
18	3,02
19	3,017
20	3,014

Agora que entendemos o que é iteração iremos aplicar o mesmo princípio para a resolução das equações de fluxo de potência.



Exemplo:

Calcular $\dot{V}_2, \dot{V}_3$ sabendo-se que $\dot{V}_1 = 1\angle 0^\circ \text{ pu}$



(figura 1 – exemplo Gauss-Seidel)

$$\dot{V}_2^{(h)} = \frac{1}{\dot{Y}_{22}} \left[\frac{P_2 - jQ_2}{V_2^{*(h-1)}} - \dot{Y}_{21} \dot{V}_1^{(h-1)} - \dot{Y}_{23} \dot{V}_3^{(h-1)} \right]$$

$$\dot{V}_3^{(h)} = \frac{1}{\dot{Y}_{33}} \left[\frac{P_3 - jQ_3}{V_3^{*(h-1)}} - \dot{Y}_{31} \dot{V}_1^{(h-1)} - \dot{Y}_{32} \dot{V}_2^{(h-1)} \right]$$

Como não há carga ligada à barra 2, $P_2 - Q_2 = 0 + j0 \text{ pu}$

$$[\dot{Y}] = \begin{bmatrix} -j20 & j20 & 0 \\ j20 & -j70 & j50 \\ 0 & j50 & -j50 \end{bmatrix}$$

$$\dot{V}_2^{(h)} = \frac{1}{-j70} [-j20 - j50 \dot{V}_3^{(h-1)}]$$

$$\dot{V}_3^{(h)} = \frac{1}{-j50} \left[\frac{(-1 - j0)}{V_3^{*(h-1)}} - 0 - j50 \dot{V}_2^{(h-1)} \right]$$

$$\dot{V}_2^{(h)} = 0,2857 + 0,7143 \dot{V}_3^{(h-1)}$$

$$\dot{V}_3^h = \frac{-j0,02}{V_3^{*(h-1)}} + \dot{V}_2^{(h-1)}$$

Chutando $\dot{V}_2^{(0)} = 1\angle 0^\circ \text{ pu}$, $\dot{V}_3^{(0)} = 1\angle 0^\circ \text{ pu}$



$h=1$

$$\dot{V}_2^{(1)} = 0,2857 + 0,7143 \cdot 1 \angle 0^\circ = 1 \angle 0^\circ pu$$

$$\dot{V}_3^{(1)} = \frac{-j0,02}{1 \angle 0^\circ} + 1 \angle 0^\circ = 1,0002 \angle -1,146^\circ pu$$

$h=2$

$$\dot{V}_2^{(2)} = 0,2857 + 0,7143 \cdot 1,0002 \angle -1,146^\circ = 1,0001 \angle -0,818^\circ pu$$

$$\dot{V}_3^{(2)} = \frac{-j0,02}{1,0002 \angle 1,146^\circ} + 1 \angle 0^\circ = 0,9998 \angle -1,146^\circ pu$$

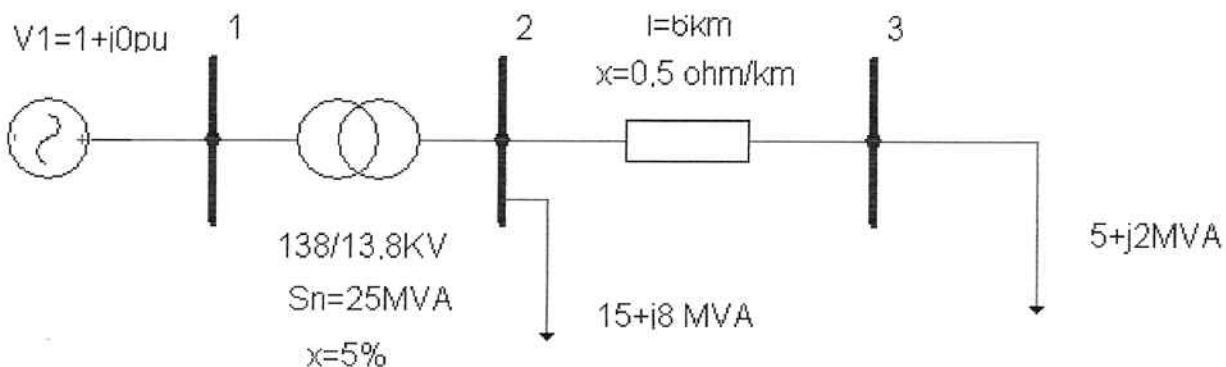
$h=3$

$$\dot{V}_2^{(3)} = 0,2857 + 0,7143 \cdot 0,9998 \angle -1,146^\circ = 0,9998 \angle -0,818^\circ pu$$

$$\dot{V}_3^{(3)} = \frac{-j0,02}{0,9998 \angle 1,146^\circ} + 1,0001 \angle -0,818^\circ = 0,9998 \angle -1,146^\circ pu$$

Exemplo:

Calcule $\dot{V}_2, \dot{V}_3$ (em pu)



(figura 2 – exemplo Gauss-Seidel)

$$S_b = 100 MVA$$

$$V_{b1} = 138 KV$$



$$V_{b2} = 13,8KV$$

$$x_{T1} = j0,05 \cdot \frac{13,8^2}{25} \cdot \frac{100}{13,8^2} = j0,05 \cdot 4 = j0,2pu \Rightarrow y_{T1} = -j5pu$$

$$x_l = j \frac{0,5 \cdot 6}{\left(\frac{13,8^2}{100}\right)} = j4,58pu \Rightarrow y_l = -j0,635pu$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} -j5 & j5 & 0 \\ j5 & -j5,635 & j0,635 \\ 0 & j0,635 & -j0,635 \end{bmatrix} pu$$

$$\dot{V}_2^{(h)} = \frac{1}{-j5,635} \cdot \left[\frac{-0,15 + j0,08}{V_2^{*(h-1)}} - j5 \cdot 1 \angle 0^\circ - j0,635 \cdot \dot{V}_3^{(h-1)} \right]$$

$$\dot{V}_2^{(k)} = 0,8873 + \frac{0,0302 \angle -118^\circ}{\dot{V}_2^{*(h-1)}} + 0,1127 \cdot \dot{V}_3^{(h-1)}$$

$$\dot{V}_3^{(h)} = \frac{1}{-j0,635} \cdot \left[\frac{-0,05 + j0,02}{\dot{V}_3^{*(h-1)}} - j0,635 \cdot \dot{V}_2^{(h-1)} \right]$$

$$\dot{V}_3^{(h)} = \left[\frac{0,0848 \angle -112^\circ}{\dot{V}_3^{*(h-1)}} + \dot{V}_2^{(h-1)} \right]$$

h=0 :

$$\dot{V}_2^{(0)} = 1 \angle 0^\circ pu$$

$$\dot{V}_3^{(0)} = 1 \angle 0^\circ pu$$

h=1

$$\dot{V}_2^{(1)} = 0,8873 + \frac{0,0302 \angle -118^\circ}{1 \angle 0^\circ} + 0,1127 \cdot 1 \angle 0^\circ = 0,986 \angle -1,55^\circ pu$$



$$\dot{V}_3^{(1)} = \frac{0,0848 \angle -112^\circ}{1 \angle 0^\circ} + 1 \angle 0^\circ = 0,9714 \angle -4,64^\circ pu$$

h=2

$$\dot{V}_2^{(2)} = 0,8873 + \frac{0,0302 \angle -118^\circ}{0,986 \angle 1,55^\circ} + 0,1127 \cdot 0,9714 \angle -4,64^\circ = 0,982 \angle -2,07^\circ pu$$

$$\dot{V}_3^{(2)} = \frac{0,0848 \angle -112^\circ}{0,9714 \angle 4,64^\circ} + 0,986 \angle -1,55^\circ = 0,9523 \angle -6,31^\circ pu$$

h=3

$$\dot{V}_2^{(3)} = 0,8873 + \frac{0,0302 \angle -118^\circ}{0,986 \angle 2,07^\circ} + 0,1127 \cdot 0,9523 \angle -6,31^\circ = 0,979 \angle -2,25^\circ pu$$

$$\dot{V}_3^{(3)} = \frac{0,0848 \angle -112^\circ}{0,9523 \angle 6,31^\circ} + 0,982 \angle -2,07^\circ = 0,946 \angle -6,91^\circ pu$$



Solução pelo método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson se baseia no teorema do valor médio, na expansão em série de Taylor e na iteração.

Para uma função $f(x)$ qualquer, aplicando-se o teorema do valor médio temos que:

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Onde $f'(x_0)$ é a derivada da função aplicada ao ponto x_0 e $-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \Delta x$

Exemplo:

Encontre as raízes da função $f(x)$

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\text{Por fatoração } f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1) \cdot (x - 4) = 0$$

Aplicando o método de Newton-Raphson fica:

$$f'(x) = 2x - 4 = 0$$

h	$x^{(h)}$	$f(x^{(h)})$	$f'(x^{(h)})$	$\Delta x^{(h)}$
0	5	8	6	-1,33
1	3,66	1,777	3,33	-0,533
2	3,133	0,2844	2,2666	-0,125
3	3,0078	0,1566	2,0156	-0,0077
4	3,0008	0,0016	2,0016	-0,0008

Como é fácil de perceber a maior vantagem em relação ao método de Gauss-Seidel, é a velocidade de convergência da função. E a maior desvantagem é a utilização da derivada que nem sempre é fácil de se obter.

O próximo passo a se dar é generalizar o método para um sistema de equações não-lineares.

Para : $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$



$$-\begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}$$

Onde $\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$ é o jacobiano do sistema, rearranjando-se fica:

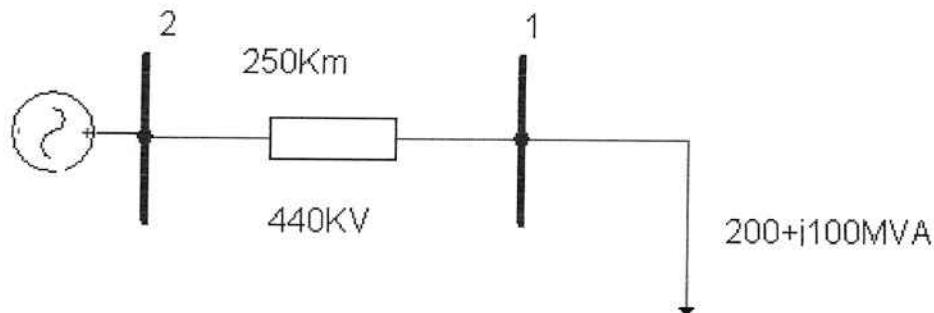
$$[\Delta x] = -[J]^{-1} \cdot [f(x)]$$

Na análise de fluxo de potência utilizaremos as seguintes equações:

$$P_i = \sum_{j=1}^n \dot{V}_i \dot{V}_j \cdot (G_{ij} \cdot \cos \theta_{ij} - B_{ij} \cdot \sin \theta_{ij})$$

$$Q_i = -\sum_{j=1}^n \dot{V}_i \dot{V}_j \cdot (G_{ij} \cdot \sin \theta_{ij} + B_{ij} \cdot \cos \theta_{ij})$$

Exemplo:



(figura 3 – exemplo Newton-Raphson)

Barra 1: $P=200\text{MW}$, $Q=100\text{MVar}$

Barra 2 : $\dot{V}_2 = 440 \angle 0^\circ \text{KV}$

Linha : $\dot{z} = (0,01 + j0,5) \Omega/\text{Km}$

$C = 10 \text{ nF/Km}$

$S_b = 100 \text{ MVA}$

Calcule $\dot{V}_1$



$$z = 250(0,01 + j0,5) \cdot \frac{100}{440^2} = 0,0013 + j0,0646 pu \Rightarrow y = (0,311 - j15,47) pu$$

$$y_c = \frac{1}{2} (j377 \cdot 250 \cdot 10 \cdot 10^{-9}) \cdot \frac{440^2}{100} = j0,912 pu$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} 0,311 - j14,558 & -0,311 + j15,47 \\ -0,311 + j15,47 & 0,311 - j14,558 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \sum_{j=1}^2 \dot{V}_1 \dot{V}_j (G_{1j} \cos \theta_{1j} - B_{1j} \sin \theta_{1j}) = -2$$

$$-Q_1 = \sum_{j=1}^2 \dot{V}_1 \dot{V}_j (G_{1j} \sin \theta_{1j} + B_{1j} \cos \theta_{1j}) = -1$$

$$f_1(\theta_1, V_1, \theta_2, V_2) = \sum_{j=1}^2 \dot{V}_1 \dot{V}_j (G_{1j} \cos \theta_{1j} - B_{1j} \sin \theta_{1j}) + 2 = 0$$

$$f_2(\theta_1, V_1, \theta_2, V_2) = \sum_{j=1}^2 \dot{V}_1 \dot{V}_j (G_{1j} \sin \theta_{1j} + B_{1j} \cos \theta_{1j}) + 1 = 0$$

$$f_1 = V_1^2 \cdot 0,311 + V_1 \cdot [(-0,311) \cos \theta_1 + 15,47 \sin \theta_1] + 2 = 0$$

$$f_2 = V_1^2 \cdot 14,558 + V_1 [(-0,311) \sin \theta_1 - 15,47 \cos \theta_1] + 1 = 0$$

$$\text{Adotando } \theta_1^{(0)} = 0^\circ, V_1^{(0)} = 1 pu$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} = V_1 \cdot [0,311 \sin \theta_1 + 15,47 \cos \theta_1] = 15,47 pu$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial V_1} = 2 \cdot 0,311 \cdot V_1 + [(-0,311) \cos \theta_1 + 15,47 \sin \theta_1] = 0,311 pu$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} = V_1 \cdot [-0,311 \sin \theta_1 + 15,47 \cos \theta_1] = -0,311 pu$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial V_1} = 2 \cdot 14,558 \cdot V_1 + [(-0,311) \sin \theta_1 - 15,47 \cos \theta_1] = 13,646 pu$$



$$f_1(\theta_1^{(0)}, V_1^{(0)}, \theta_2, V_2) = 2pu$$

$$f_2(\theta_1^{(0)}, V_1^{(0)}, \theta_2, V_2) = 0,088pu$$

$$\begin{bmatrix} 15,47 & 0,311 \\ -0,311 & 13,646 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta V_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 \\ 0,088 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,12909 \\ -0,009391 \end{bmatrix}$$

$$V_1^{(1)} = 1 - 0,00931 = 0,990609pu$$

$$\theta_1^{(1)} = 0 - 0,12909 = -0,12909rad$$

$$\frac{\partial f_1^1}{\partial \theta_1} = 15,1575pu$$

$$\frac{\partial f_1^1}{\partial V_1} = -1,68pu$$

$$\frac{\partial f_2^1}{\partial \theta_1} = -2,2783pu$$

$$\frac{\partial f_2^1}{\partial V_1} = 13,541pu$$

$$f_1(\theta_1^{(1)}, V_1^{(1)}, \theta_2, V_2) = 0,02689pu$$

$$f_2(\theta_1^{(1)}, V_1^{(1)}, \theta_2, V_2) = 0,1283pu$$

$$\begin{bmatrix} 15,1575 & -1,68 \\ -2,2783 & 13,541 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta V_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0,02689 \\ 0,1283 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0029 \\ -0,0099 \end{bmatrix}$$

$$V_1^{(2)} = 0,9877pu$$

$$\theta_1^{(2)} = -0,13899rad$$

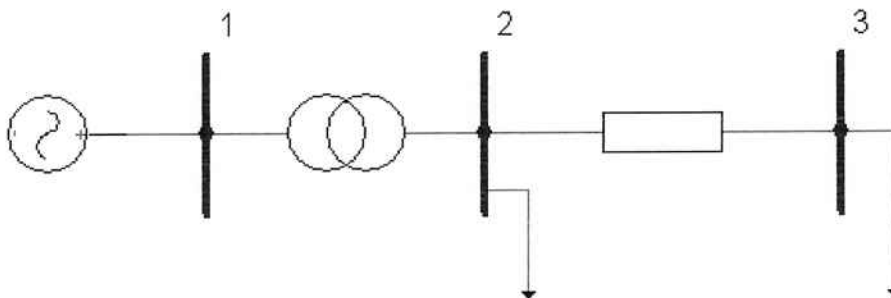


Exercícios interativos

:: Exercício - Fluxo de potência em sistemas de potência ::

Exercício 1 - Solução pelo método de Gauss-Seidel:

Calcule V_2 e V_3 (em pu) para a rede abaixo:



Dados:

$$V_1 = 1 + j 0 \text{ [pu]}$$

Trafo:

$$138 / 13.8 \text{ [KV]}$$

$$S_n = 25 \text{ [MVA]}$$

$$x = 5 \%$$

Linha:

$$L = 6 \text{ [Km]}$$

$$x = 0.5 \text{ [ohms/Km]}$$

$$\text{Carga na barra 2: } 15 + j 8 \text{ [MVA]}$$

$$\text{Carga na barra 3: } 5 + j 2 \text{ [MVA]}$$

Iterações: 5 iterações ou erro de 0.1

(máximo de 20 iterações ou erro de 0.00001 em qualquer que seja a escolha)

Dados auxiliares:

$$S_b = 100 \text{ [MVA]}$$

$$V_{b1} = 138 \text{ [KV]}$$

$$V_{b2} = 13.8 \text{ [KV]}$$

$$V_2(0) = 1 < 0^\circ \text{ [pu]}$$

$$V_3(0) = 1 < 0^\circ \text{ [pu]}$$

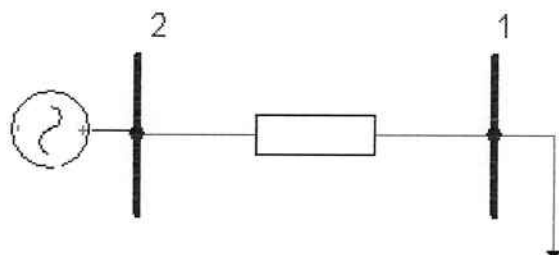
> Resposta (decimais: 4)



::: Exercício - Fluxo de potência em sistemas de potência :::

Exercício 2 - Solução pelo método de Newton-Raphson:

Calcule V_1 (em pu) e θ_1 (em rad) para a rede abaixo:



Dados:

Barra 1: $P = 200$ [MW], $Q = 100$ [MVar]

Barra 2: $V_2 = 440$ < 0 ° [KV]

Linha:

$Z = (0.01 + j 0.5)$ [ohms/Km]

Comprimento = 250 [Km]

$C = 10$ [nF/Km]

Iterações: ☒ 5 ☐ 10 iterações ou erro de ☐ 0.01 pu ☐ 0.00000001

(máximo de 10 iterações ou erro de 0.00000001 em qualquer que seja a escolha)

Dados auxiliares:

$S_b = 100$ [MVA]

$V_1(0) = 1$ [pu]

$\theta(0) = 0$ [rad]

> Resposta (decimais: 4)



Representação dos Sistemas de Potência:

Material de Apoio a Sistemas de Potência

::: Representação dos Sistemas de Potência :::

Álgebra matricial

Matriz de admitâncias nodais

Circuitos trifásicos

Valores por unidade

Componentes simétricas

Estudo de curto circuito na rede

Fluxo de potência em sistemas de potência

Representação dos sistemas de potência

• Álgebra matricial



- Multiplicação de Matrizes
- Partição de Matrizes
- Matriz nula
- Matriz identidade
- Matriz transposta
- Inversão de matriz
 - Matriz cofatora e menor complementar
 - Determinante
 - Fórmula Clássica
 - Particionamento
- Regra de Cramer

• Matriz de admitâncias nodais



- Definição da matriz de admitância nodal
- Definição de elementos: barra, barra swing, corrente injetada
- Admitância de entrada (em curto circuito)
- Admitância de transferência (em curto circuito)
- Montagem da matriz Ybus
 - Modo de inspeção
 - Propriedades da matriz Ybus
- Exercício Interativo



Representação dos Sistemas de Potência: Álgebra Matricial

Utilizamos a álgebra matricial em sistemas de potência como uma ferramenta para nos auxiliar a organizar e manipular dados diversos, tendo como resultado uma forma mais compacta para extrairmos as informações desejadas.

Para os demais tópicos assumir que:

$$[X] = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix} \text{ e } [Y] = \begin{bmatrix} y_{11} & \dots & y_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & \dots & y_{nm} \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

Para realizarmos a multiplicação $[X].[Y]$, temos como condição necessária que o número de colunas de $[X]$ seja igual ao número de linhas de $[Y]$. Devemos lembrar também que a propriedade comutativa não se aplica na multiplicação de matrizes.

Dado que $[R]$ é a matriz resultante da operação $[X].[Y]$, $[R]$ terá o número de linhas de $[X]$ e o número de colunas de $[Y]$.

Supondo que $[X]$ seja uma matriz $(a \times m)$ e $[Y]$ seja uma matriz $(m \times b)$, definimos então que cada elemento de $[R]$ será dado por:

$$r_{ik} = \sum_{j=1}^m x_{ij} \times y_{jk} \text{ com } (i = 1, 2, \dots, a \text{ e } k = 1, 2, \dots, b)$$

Resultando então uma matriz $[R]$ cuja dimensão será $(a \times b)$.



Partição de matrizes

A partição de matrizes nada mais é que dividir uma dada matriz em submatrizes, de forma a destacar determinadas regiões.

Exemplo:

Dado a matriz $[E] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{12} & e_{25} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} & e_{45} \\ e_{51} & e_{52} & e_{53} & e_{54} & e_{55} \end{bmatrix}$

particionamos em $[E] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} & e_{45} \\ e_{51} & e_{52} & e_{53} & e_{54} & e_{55} \end{bmatrix}$

De forma que obtemos então quatro submatrizes:

$$[E] = \left[\begin{array}{c|c} [E_1] & [E_2] \\ \hline [E_3] & [E_4] \end{array} \right]$$

sendo

$$[E_1] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}$$

$$[E_2] = \begin{bmatrix} e_{13} & e_{14} & e_{15} \\ e_{23} & e_{24} & e_{25} \end{bmatrix}$$

$$[E_3] = \begin{bmatrix} e_{31} & e_{32} \\ e_{41} & e_{42} \\ e_{51} & e_{52} \end{bmatrix}$$

$$[E_4] = \begin{bmatrix} e_{33} & e_{34} & e_{35} \\ e_{43} & e_{44} & e_{45} \\ e_{53} & e_{54} & e_{55} \end{bmatrix}$$



Matriz nula

Matriz na qual todos os seus elementos são nulos. Sua representação é dada por $[0]$.

Matriz identidade

Matriz quadrada e diagonal em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1.

Desta forma, a matriz identidade pode ser comutada na multiplicação. Sua representação é dada por $[I]$.

Matriz transposta

Dada uma certa matriz $[X]$ de dimensões $(a \times b)$, definimos sua transposta $[X]^t$ como sendo uma matriz cujas colunas da matriz principal são as linhas da matriz transposta, ou seja:
 $[X](a \times b) \rightarrow [X]^t(b \times a)$

Destacamos também a seguinte propriedade:

Se $[R] = [X].[Y]$, então $[R]^t = [X]^t.[Y]^t$

Inversão de matriz

Dizemos que a matriz $[X]^{-1}$ é a inversa de $[X]$ quando $[X]^{-1}.[X] = [I]$, ou seja, o produto de uma dada matriz por sua inversa resulta na matriz identidade.

Temos como condição necessária para inverter uma matriz quadrada que a matriz deve ser não-singular (ver determinante).

Matriz cofatora e menor complementar

Para uma dada matriz quadrada $[X]$, definimos como sendo o menor complementar associado a um elemento x_{ij} , indicado por M_{ij} , o determinante da matriz obtida de $[X]$ pela supressão da linha 'i' e da coluna 'j'.

Ou seja, dado $[X] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$ temos que $M_{12} = \det \begin{bmatrix} x_{11} & x_{13} \\ x_{31} & x_{33} \end{bmatrix}$



O cofator do elemento x_{ij} é definido como sendo:

$$CF_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Determinante

Definimos como sendo o determinante de uma certa matriz quadrada $[X]$, de dimensões $(n \times n)$, o número:

$$\det[X] = \sum_{i=1}^n x_{ij} \cdot CF_{ir}$$

Para o caso particular de uma matriz (2×2) , temos que a fórmula anterior implica em:

$$\det[X] = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (a \cdot d) - (b \cdot c)$$

Dizemos que uma matriz é não singular quando $\det[X] \neq 0$.

Fórmula Clássica

Dada a matriz quadrada $[X]$ não-singular, a sua inversa é calculada por:

$$[X]^{-1} = \frac{1}{\det[X]} \cdot \begin{bmatrix} \text{Matriz_dos_cofatores} \\ \text{de_X_transposta} \end{bmatrix}$$

ou seja

$$[X]^{-1} = \frac{1}{\det[X]} \cdot \begin{bmatrix} CF_{11} & CF_{21} & \dots & CF_{n1} \\ CF_{12} & CF_{22} & \dots & CF_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CF_{1n} & CF_{2n} & \dots & CF_{nn} \end{bmatrix}$$

Particionamento

Uma outra forma de obtermos a inversão de uma dada matriz é através da técnica de particionamento de matrizes, que pode ser mais interessante em certas aplicações.

Temos então que dada uma matriz $[A]$, podemos particioná-la da seguinte forma:

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_1] & [A_2] \\ [A_3] & [A_4] \end{bmatrix}$$

e sabendo que $[A] \cdot [A]^{-1} = [I]$, escrevemos:



$$\begin{bmatrix} [A_1] & [A_2] \\ [A_3] & [A_4] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [B_1] & [B_2] \\ [B_3] & [B_4] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [I] \end{bmatrix}$$

e efetuando vem:

$$\begin{cases} [A_1] \cdot [B_1] + [A_2] \cdot [B_3] = [I] \\ [A_1] \cdot [B_2] + [A_2] \cdot [B_4] = [0] \\ [A_3] \cdot [B_1] + [A_4] \cdot [B_3] = [0] \\ [A_3] \cdot [B_2] + [A_4] \cdot [B_4] = [I] \end{cases}$$

que resolvemos e obtemos:

$$\begin{aligned} [B_1] &= \left[[A_1] - [A_2] \cdot [A_4]^{-1} \cdot [A_3] \right]^{-1} \\ [B_2] &= -[B_1] \cdot [A_2] \cdot [A_4]^{-1} \\ [B_3] &= -[A_4]^{-1} \cdot [A_3] \cdot [B_1] \\ [B_4] &= \left[[A_4] - [A_3] \cdot [A_1]^{-1} \cdot [A_2] \right]^{-1} \end{aligned}$$



Regra de Cramer

Utilizamos a regra de Cramer para solucionar sistemas de equações lineares a n equações e n incógnitas, basicamente utilizando matrizes e determinantes.

Para um dado sistema:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases}$$

Definimos como sendo a sua matriz principal ($[Mp]$) a matriz formada pelos coeficientes das incógnitas.

$$[Mp] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definimos também a matriz de cada incógnita b_i ($[M_{bi}]$), que é construída substituindo na matriz principal $[Mp]$ a coluna i correspondente pela coluna dos termos independentes.

Exemplo:

A matriz da incógnita b_1 seria dada por: $[M_{b1}] = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

A regra de Cramer nos garante que: $b_i = \frac{\det[M_{bi}]}{\det[Mp]}$

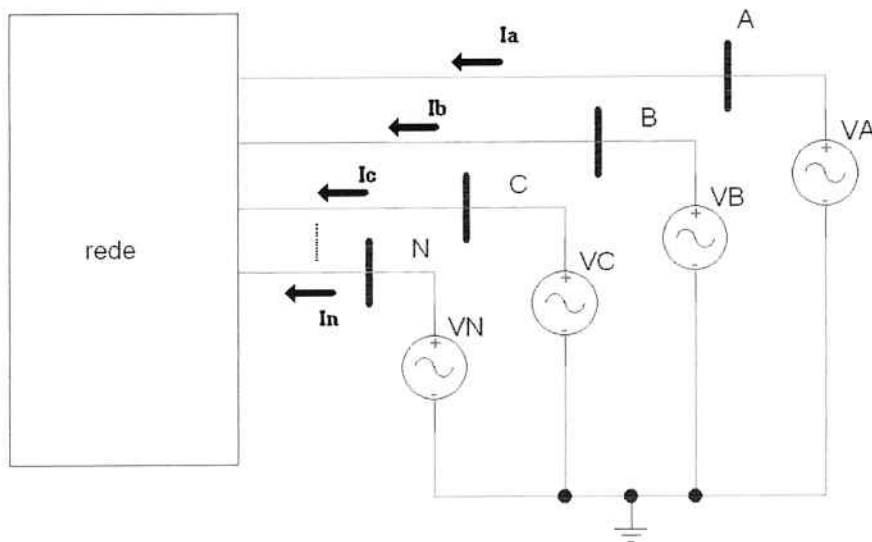


Representação dos Sistemas de Potência: Matriz de admitâncias nodais

Definição da matriz de admitâncias nodais

A matriz $[Y]$ nada mais é do que uma matriz que relaciona as correntes aplicadas numa rede elétrica com as respectivas tensões nas barras da mesma.

A forma que a matriz $[Y]$ se relaciona com ambas pode ser expressa pela seguinte fórmula: $[I]=[Y].[V]$



(figura 1 – correntes injetadas na rede)

$$[I] = \begin{bmatrix} I_a \\ I_c \\ I_b \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \text{vetor das correntes injetadas}$$

$$[V] = \begin{bmatrix} V_a \\ V_c \\ V_b \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \text{vetor das tensões das barras}$$



Definição de elementos

Barra:

Nada mais é do que um nó, ou seja é a junção de um ou mais bipolos.

Barra swing ou de referência:

Como o próprio nome sugere é a barra em que as tensões das outras barras são medidas, ela não é necessariamente parte da rede.

Corrente injetada:

São correntes que são injetadas na rede em uma barra da rede. Por convenção as correntes que entram numa barra são positivas enquanto as que saem são as negativas.

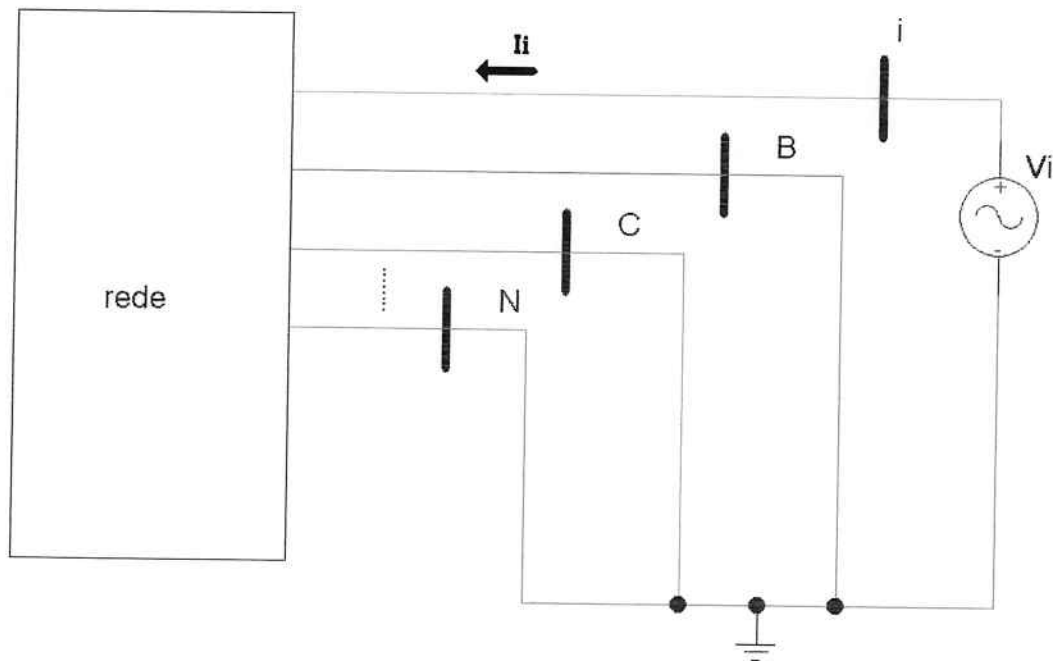
Tensões nodais:

São as tensões medidas entre uma barra qualquer e a barra swing.



Admitância de entrada (em curto-circuito)

Admitância de entrada é a relação entre uma corrente I_i e a tensão V_i aplicadas numa barra i qualquer enquanto as demais barras estão curto-circuitadas com a swing.



(figura 2 – determinação da admitância de entrada)

$y_{ii} = \frac{I_i}{E_i}$, as admitâncias de entrada irão compor diagonal principal da matriz $[Y]$.



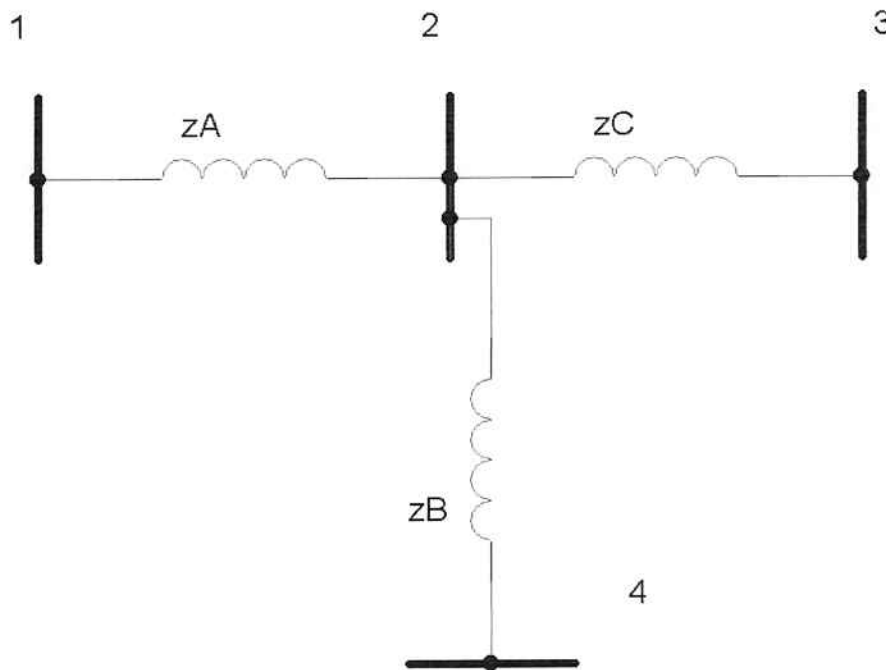
Admitância de transferência (em curto-circuito)

Admitância de transferência é a relação entre a tensão aplicada barra i (com as demais barras curto-circuitadas) e as correntes medidas nas demais barras.

$y_{ij} = \frac{I_j}{E_i}$, note que $y_{ij} = y_{ji}$, logo a matriz $[Y]$ é simétrica.

Para se obter a matriz $[Y]$ completa é preciso repetir o processo para cada barra, lembrando de aproveitar a simetria da matriz.

Exemplo:



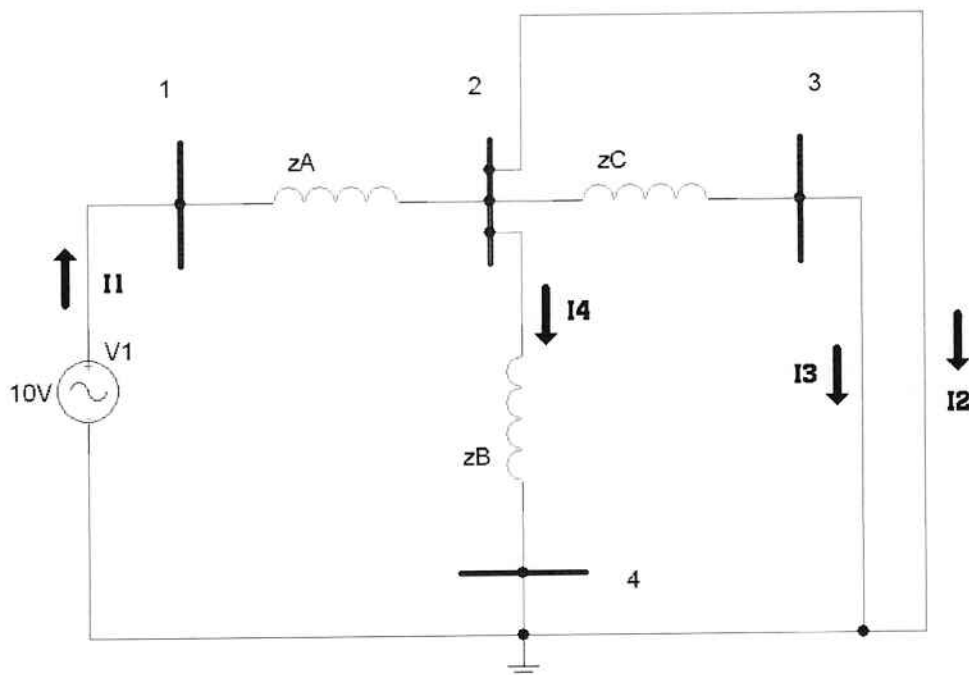
(figura 3 – exemplo)

$$E_1 = 10 \text{ V}$$

$$Z_a = 2 \text{ } \Omega$$

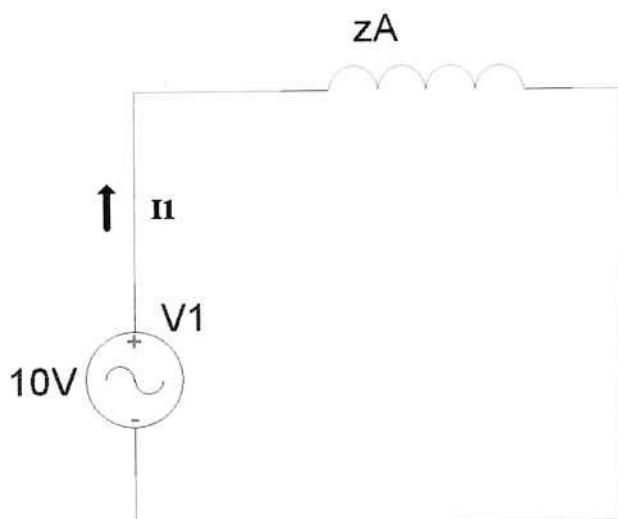
$$Z_b = 3 \text{ } \Omega$$

$$Z_c = 7 \text{ } \Omega$$



(figura 4 – exemplo - determinação da matriz [Y])

$$y_{11} = \frac{I_1}{E_1}$$



(figura 5 – exemplo - determinação da matriz [Y])

$$E_1 = Z_a \cdot I_1$$

$$Z_a = \frac{V_1}{I_1} = \frac{1}{y_{11}} \Rightarrow y_{11} = \frac{1}{Z_a} = 0,5S$$



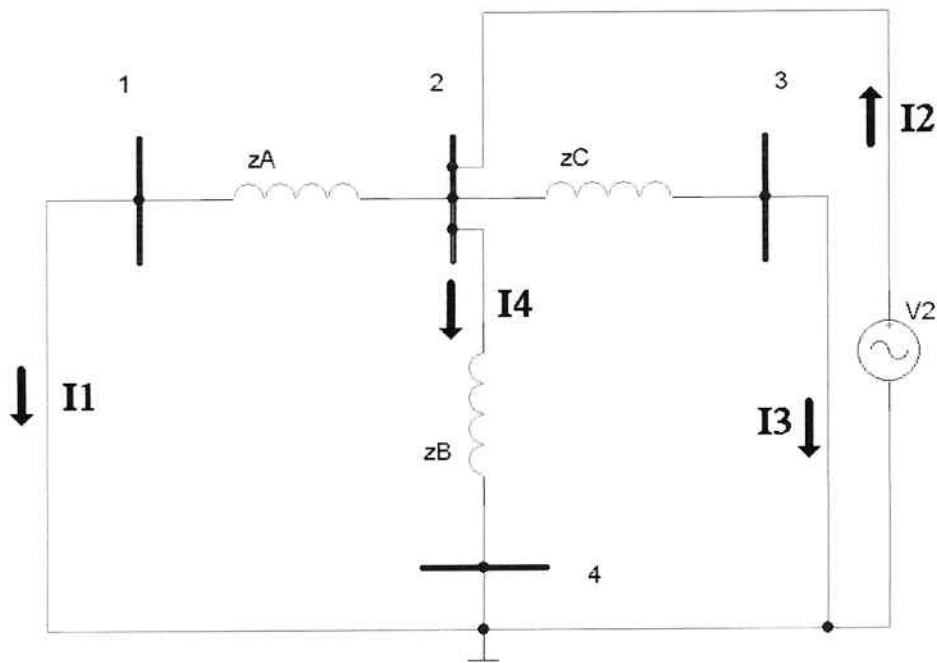
$$y_{21} = \frac{I_2}{E_1}$$

$$I_2 = -I_1$$

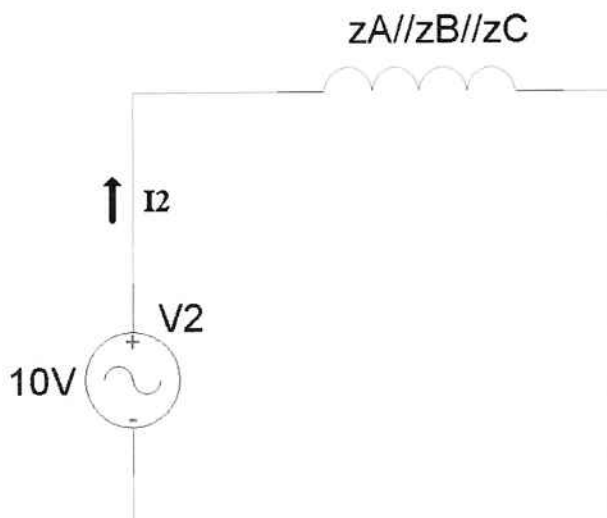
$$y_{21} = -y_{11} = -0,5S$$

$$y_{31} = \frac{I_3}{V_1}$$

$$I_3 = 0 \Rightarrow y_{31} = 0 = y_{13}$$



(figura 6 – exemplo - determinação da matriz [Y])



(figura 7 – exemplo - determinação da matriz [Y])

$$y_{22} = \frac{I_2}{V_2}$$

$$Z_a // Z_b // Z_c = 0,9762\Omega = Z_{eq}$$

$$I_2 = \frac{10}{0,9762} \cong 10,244$$

$$V_2 = Z_{eq} \cdot I_2$$

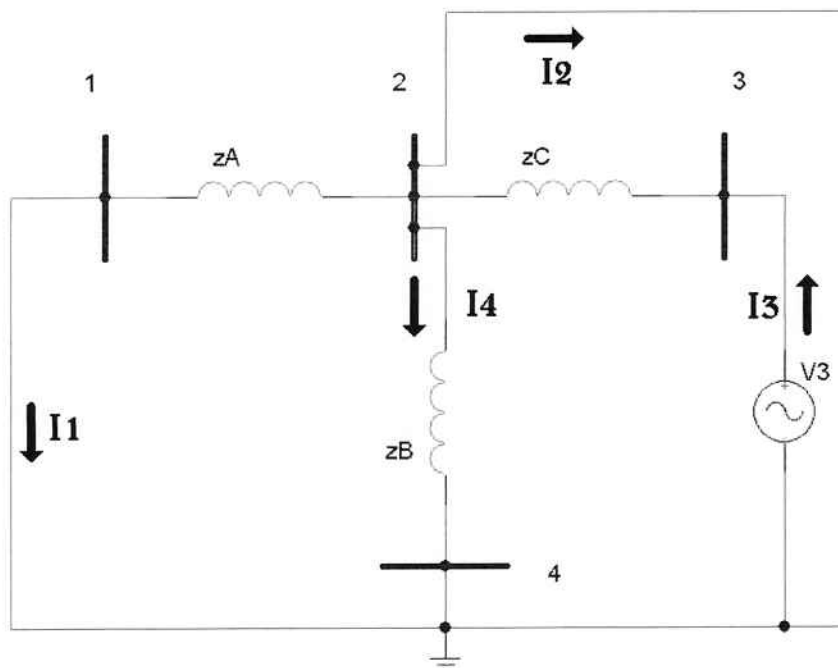
$$y_{22} = \frac{10}{10,244} = 0,9762$$

$$y_{32} = \frac{I_3}{V_2}$$

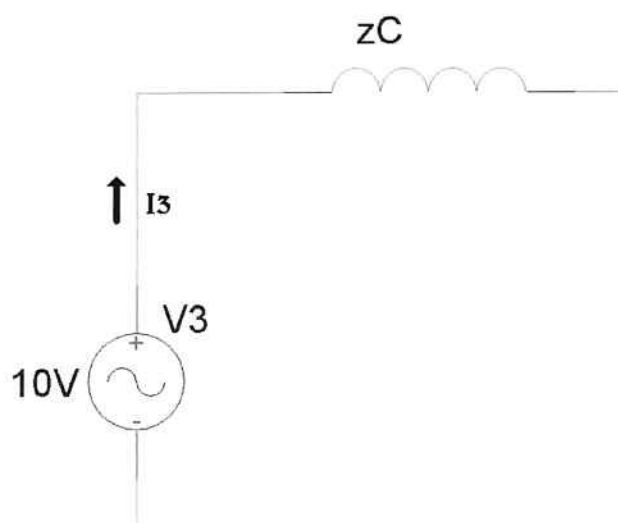
$$V_2 = Z_c \cdot I_3$$

$$I_3 = \frac{10}{7} \cong 1,43A$$

$$y_{32} = \frac{1,43}{10} = 0,143S$$



(figura 8 – exemplo - determinação da matriz [Y])



(figura 9 – exemplo - determinação da matriz [Y])

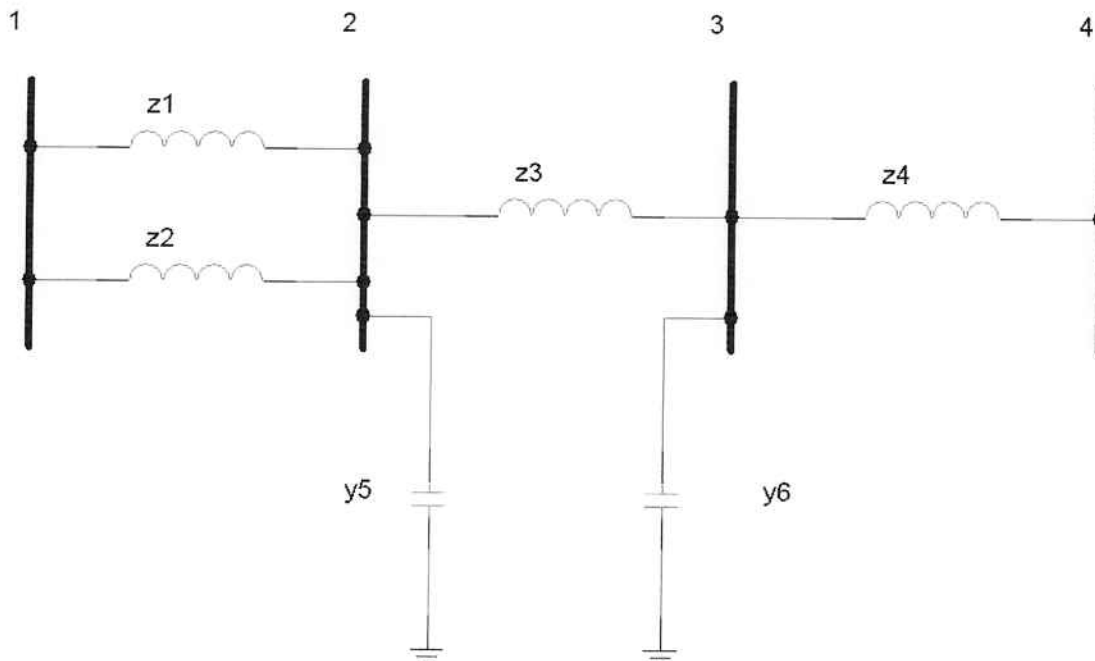
$$y_{33} = \frac{I_3}{V_3}$$

$$I_3 = \frac{V_3}{Z_C} = \frac{10}{7} \cong 1,43$$

$$y_{33} = \frac{1,43}{10} = 0,143$$



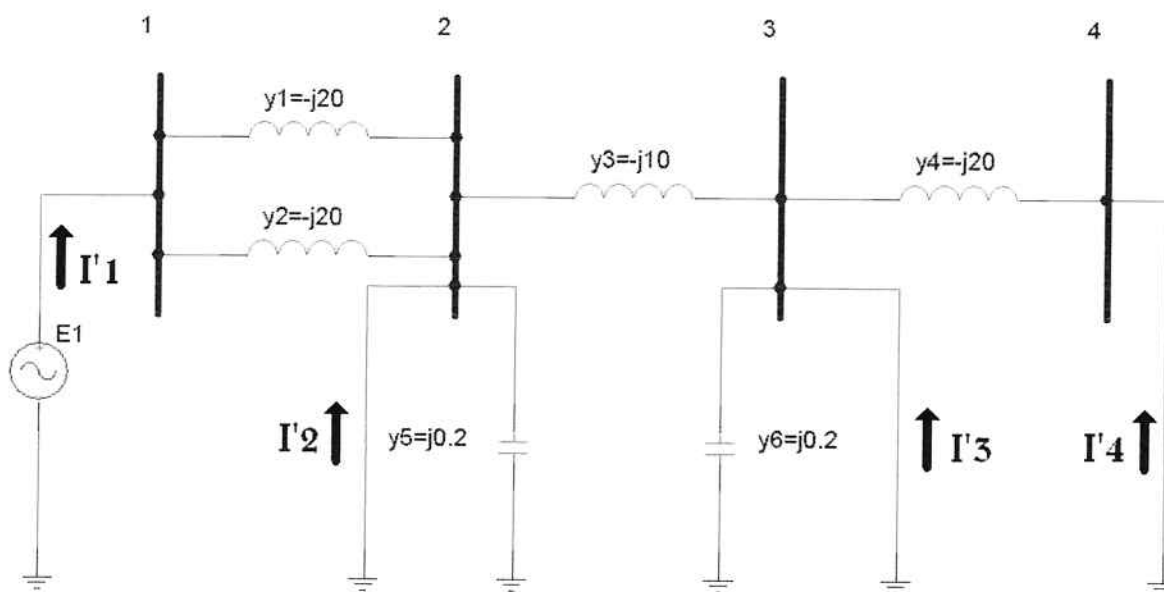
Exemplo:



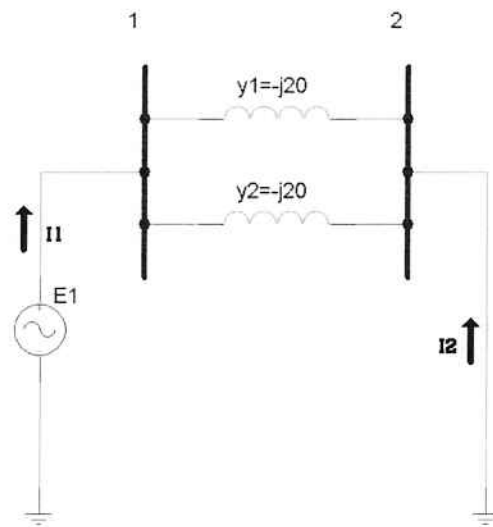
(figura 10 – exemplo)

$$y_1 = \frac{1}{z_1} = -j20 = y_2 = y_4$$

$$y_3 = \frac{1}{z_3} = -j10$$



(figura 11 – exemplo - determinação da matriz [Y])



(figura 12 – exemplo - determinação da matriz [Y])

$$I'_1 = -j20.E_1 = j20.E_1$$

$$I'_1 = -j40.E_1$$

$$\frac{I'_1}{E_1} = -j40 = y_{11}$$

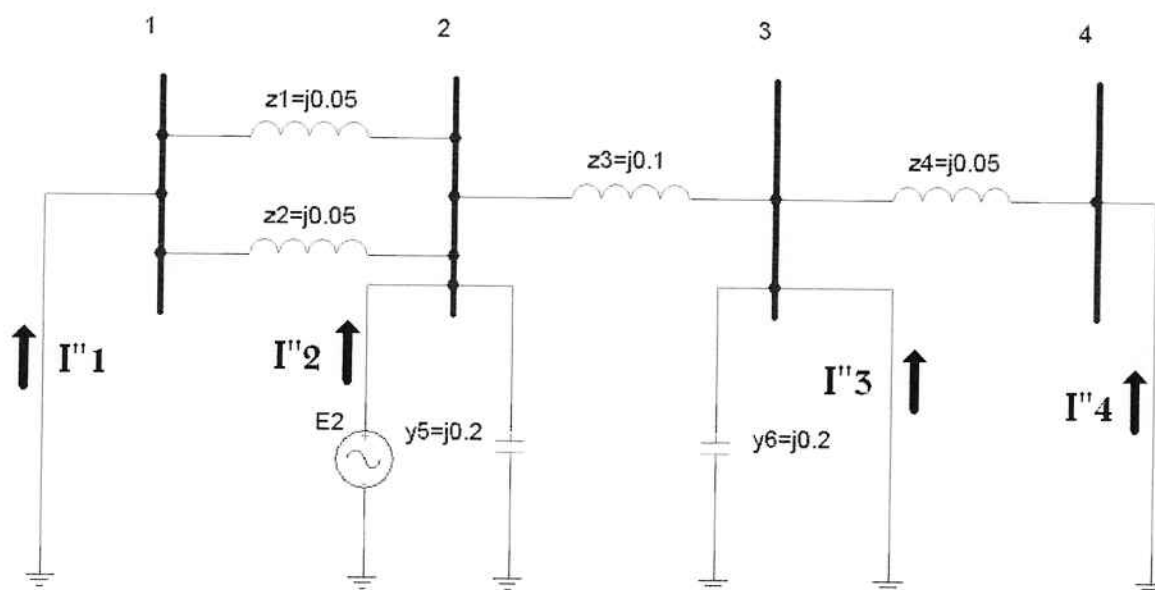
$$I'_2 = -(-j20.E_1 - j20.E_1)$$

$$I'_2 = j40.E_1$$

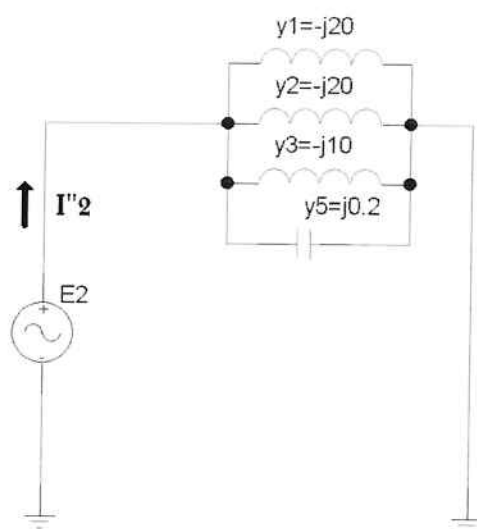
$$\frac{I'_2}{E_1} = j40 = y_{21} = y_{12}$$

$$I'_3 = 0 \Rightarrow y_{31} = y_{13} = 0$$

$$I'_4 = 0 \Rightarrow y_{41} = y_{14} = 0$$



(figura 13 – exemplo - determinação da matriz $[Y]$)



(figura 14 – exemplo - determinação da matriz $[Y]$)

$$I''_2 = -j20.E_2 - j20.E_2 - j10.E_2 + j0,2.E_2$$

$$I''_2 = (-j20 - j20 - j10 + j0,2).E_2$$

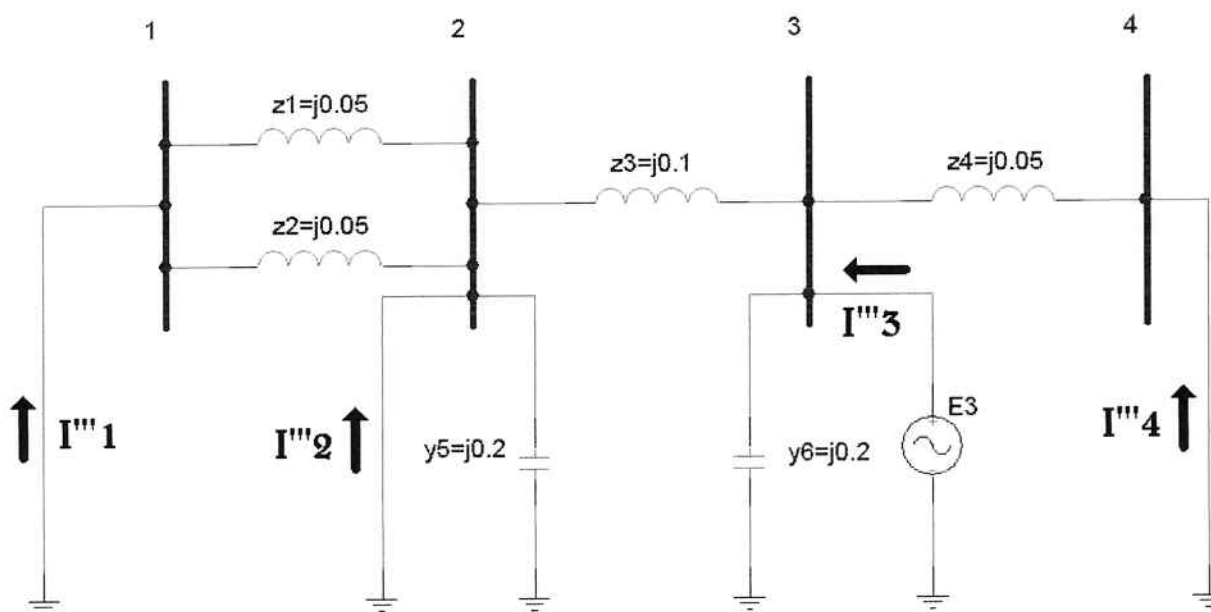
$$\frac{I''_2}{E_2} = -j49,8 = y_{22}$$

$$I''_4 = 0 \Rightarrow y_{42} = y_{24} = 0$$

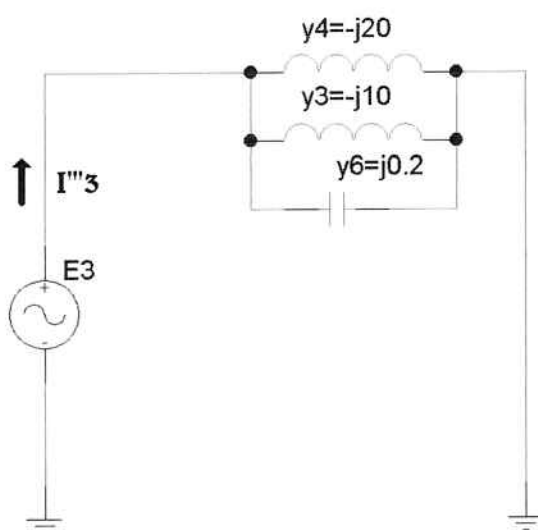


$$y_{12} = \frac{I''_1}{E_2} = \frac{-(-j20 - j20).E_2}{E_2} = j40$$

$$y_{32} = y_{23} = \frac{I''_3}{E_2} = \frac{-(-j10).E_2}{E_2} = j10$$



(figura 15 – exemplo - determinação da matriz [Y])



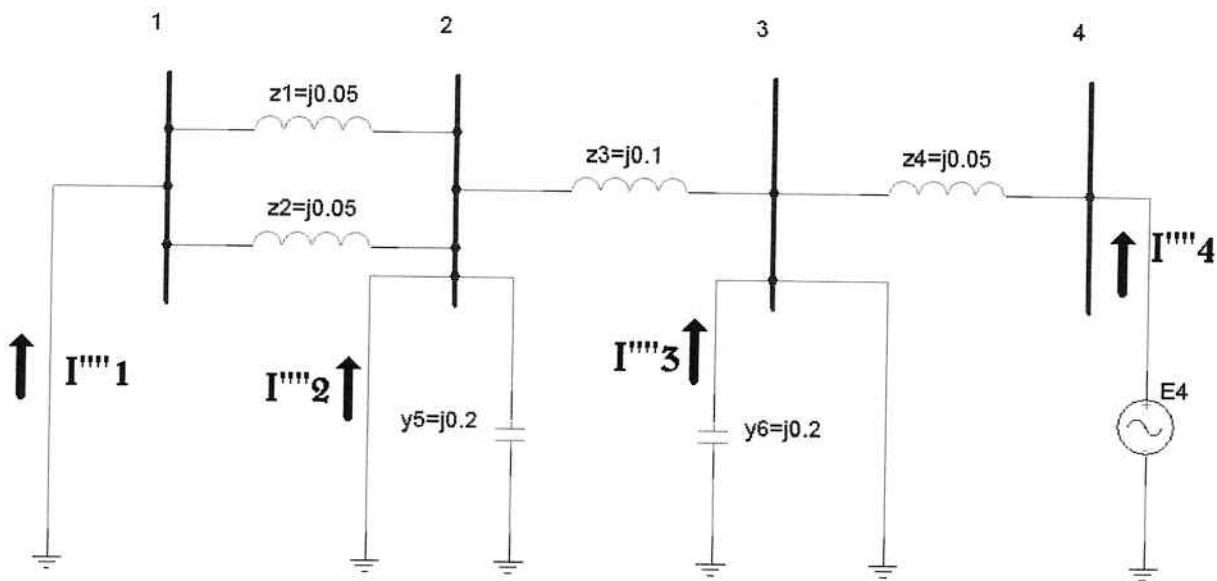
(figura 16 – exemplo - determinação da matriz [Y])

$$I'''_3 = -j10.E_3 - j20.E_3 + j0,2.E_3$$

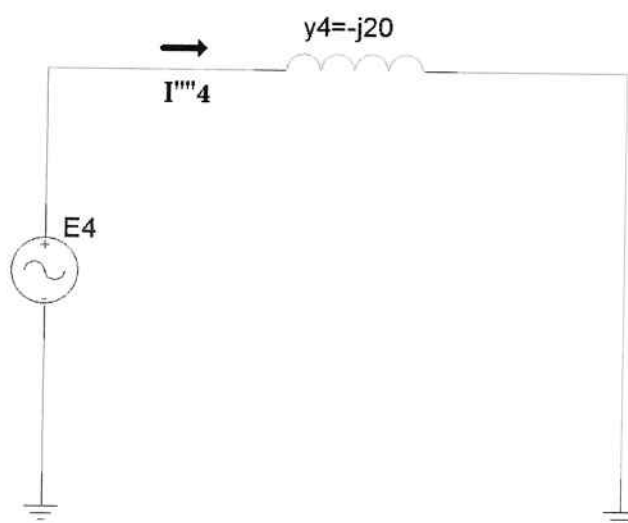


$$\frac{I'''_3}{E_3} = -j29,8 = y_{33}$$

$$\frac{I'''_4}{E_3} = \frac{-(-j20) \cdot E_3}{E_3} = j20 = y_{34} = y_{43}$$



(figura 17 – exemplo - determinação da matriz [Y])



(figura 18 – exemplo - determinação da matriz [Y])



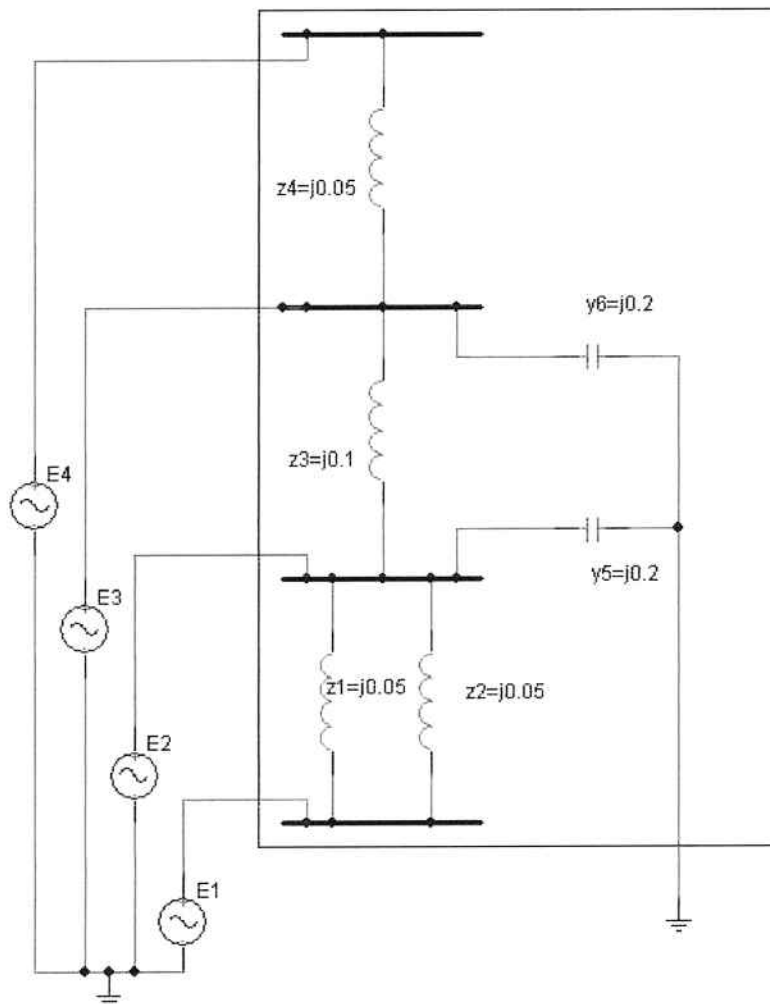
$$I'''_4 = -j20.E_4$$

$$\frac{I'''_4}{E_4} = -j20$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} -j40 & j40 & 0 & 0 \\ j40 & -j49,8 & j10 & 0 \\ 0 & j10 & -j29,8 & j20 \\ 0 & 0 & j20 & -j20 \end{bmatrix}$$

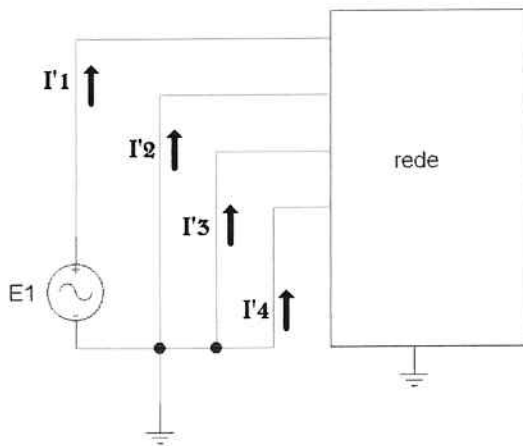


Montagem da matriz [Y]

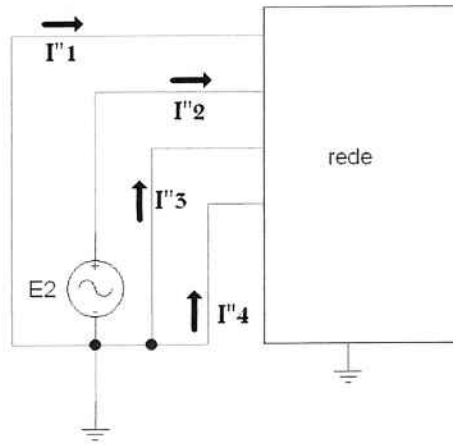


(figura 19 – Montagem da matriz [Y])

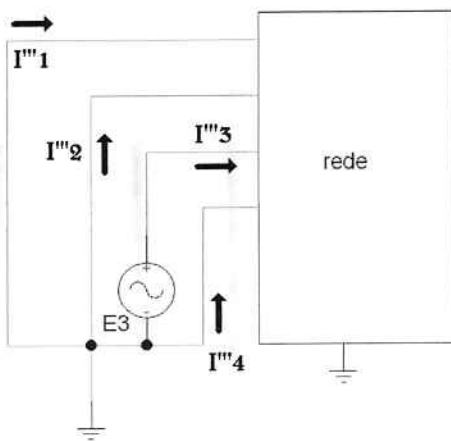
A figura acima é equivalente a soma das seguintes pelo princípio da superposição.



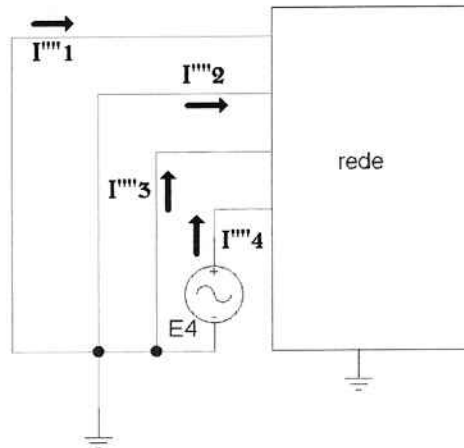
(figura 20 – superposição)



(figura 21 – superposição)



(figura 22 – superposição)



(figura 23 – superposição)

$$\begin{aligned}
 y_{11} &= \frac{I'_1}{E_1} & y_{21} &= \frac{I''_1}{E_2} & y_{31} &= \frac{I'''_1}{E_3} & y_{41} &= \frac{I''''_1}{E_4} \\
 I'_1 &= y_{11}.E_1 & I''_1 &= y_{12}.E_2 & I'''_1 &= y_{13}.E_3 & I''''_1 &= y_{14}.E_4 \\
 I'_2 &= y_{21}.E_1 & I''_2 &= y_{22}.E_2 & I'''_2 &= y_{23}.E_3 & I''''_2 &= y_{24}.E_4 \\
 I'_3 &= y_{31}.E_1 & I''_3 &= y_{32}.E_2 & I'''_3 &= y_{33}.E_3 & I''''_3 &= y_{34}.E_4 \\
 I'_4 &= y_{41}.E_1 & I''_4 &= y_{42}.E_2 & I'''_4 &= y_{43}.E_3 & I''''_4 &= y_{44}.E_4
 \end{aligned}$$

$$I_1 = I'_1 + I''_1 + I'''_1 + I''''_1 = y_{11}.E_1 + y_{12}.E_2 + y_{13}.E_3 + y_{14}.E_4$$

$$I_2 = y_{21}.E_1 + y_{22}.E_2 + y_{23}.E_3 + y_{24}.E_4$$

$$I_3 = y_{31}.E_1 + y_{32}.E_2 + y_{33}.E_3 + y_{34}.E_4$$

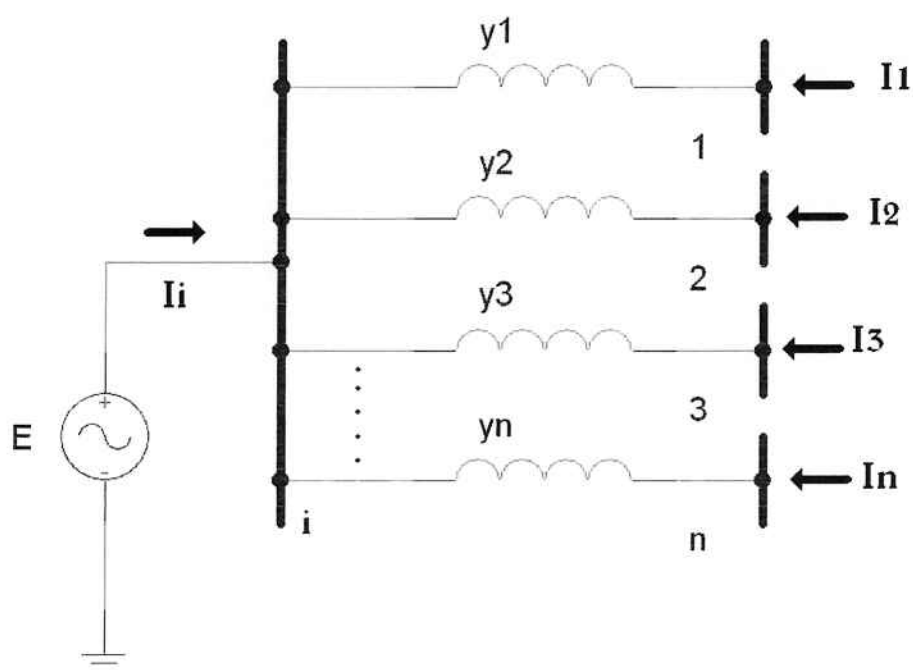
$$I_4 = y_{41}.E_1 + y_{42}.E_2 + y_{43}.E_3 + y_{44}.E_4$$



$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix}$$

Montagem da matriz [Y] por inspeção

Considere uma barra i qualquer de uma rede



(figura 24 – Montagem da matriz [Y] por inspeção)

Aplicando a primeira lei de kirchoff vem:

$$I_i = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$$

$$I_i = y_1 \cdot (E_1 - V_1) + y_2 \cdot (E - V_2) + y_3 \cdot (E - V_3) + \dots + y_n \cdot (E - V_n)$$

$$I_i = y_1 \cdot E - y_1 \cdot V_1 + y_2 \cdot E - y_2 \cdot V_2 + y_3 \cdot E - y_3 \cdot V_3 + \dots + y_n \cdot E - y_n \cdot V_n$$

$$I_i = E \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n) - y_1 \cdot V_1 - y_2 \cdot V_2 - y_3 \cdot V_3 - \dots - y_n \cdot V_n$$

Comparando estas equações com as encontradas no final do exemplo anterior temos que :

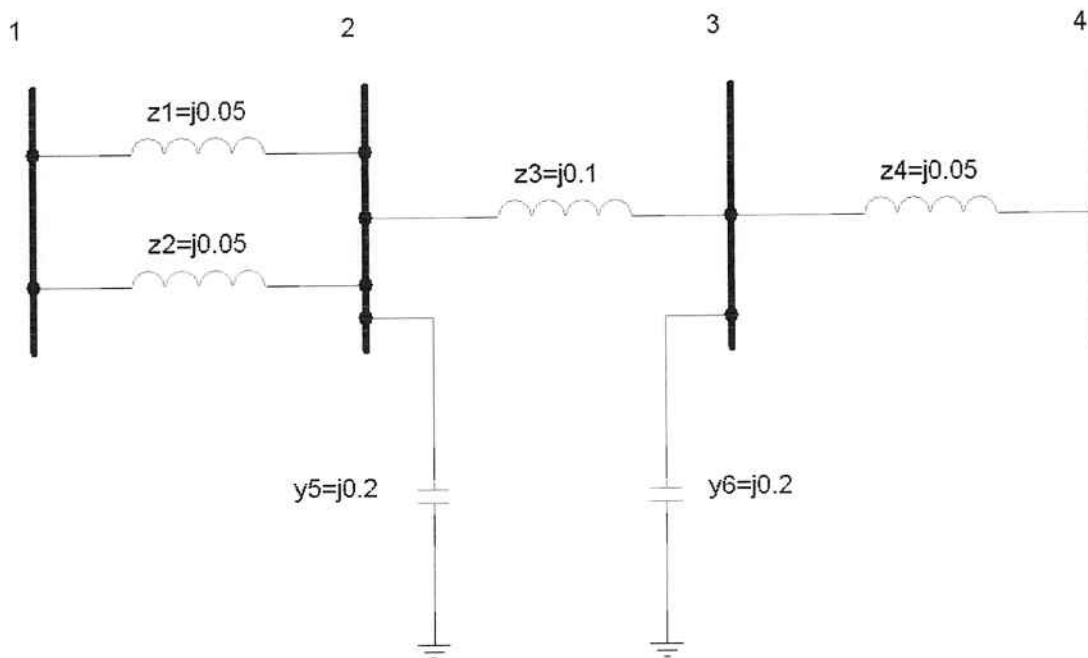


$$Y_{ii} = \sum_{j=1}^n Y_{ij}$$

$$Y_{ij} = -Y_{ji}$$

Em outras palavras a admitância de entrada é a soma das admitâncias conectadas diretamente a barra i e a admitância de transferência é o oposto da admitância que conecta a barra i a j .

Exemplo:



(figura 25 – exemplo)

$$[Y] = \begin{bmatrix} (-j20 - j20) & -(-j20 - j20) & 0 & 0 \\ -(-j20 - j20) & (-j20 - j20 - j10 + j0,2) & -(-j10) & 0 \\ 0 & -(-j10) & (-j10 - j20 + j0,2) & -(-j20) \\ 0 & 0 & -(-j20) & -j20 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} -j40 & j40 & 0 & 0 \\ j40 & -j49,8 & j10 & 0 \\ 0 & j10 & -j29,8 & j20 \\ 0 & 0 & j20 & -j20 \end{bmatrix}$$

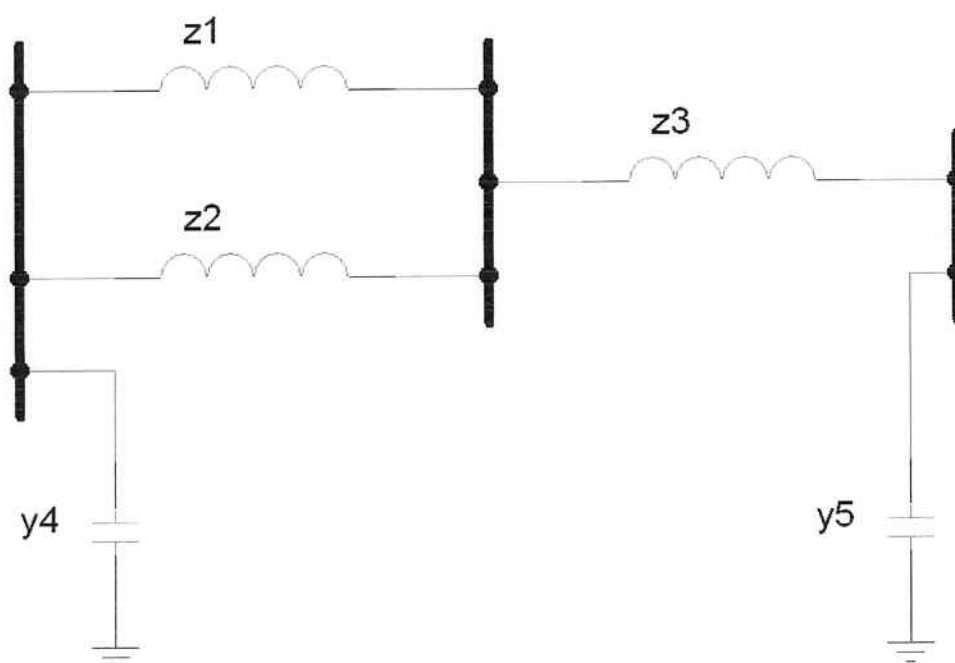


Propriedades da [Y]

1ª propriedade: caso uma barra i qualquer for curto-circuitada para a referência, basta eliminar a i -ésima linha e coluna da matriz [Y].

2ª propriedade : caso seja feito um curto-circuito entre qualquer barras i e j , basta somar as respectivas linhas e colunas da matriz [Y].

Exemplo:



(figura 26 – exemplo)

$$y_1 = \frac{1}{z_1} = -j10 = y_2$$

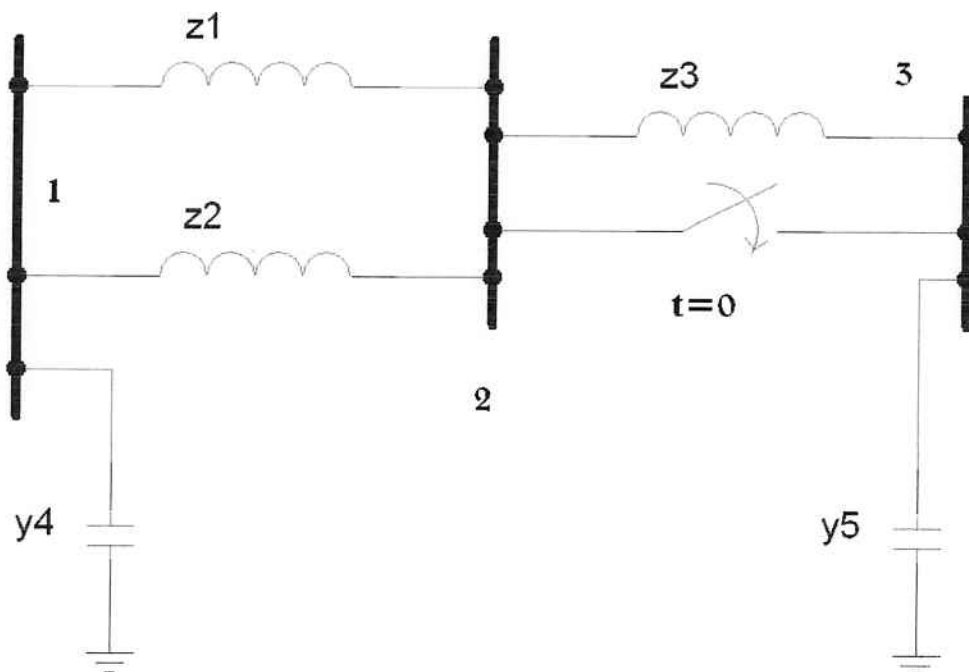
$$y_3 = \frac{1}{z_3} = -j2$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} -j10 - j10 + j0,1 & -(-j10 - j10) & 0 \\ -(-j10 - j10) & -j10 - j10 - j2 & -(-j2) \\ 0 & -(-j2) & -j2 + j0,1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} -j19,9 & j20 & 0 \\ j20 & -j22 & j2 \\ 0 & j2 & -j1,9 \end{bmatrix}$$



Agora imaginemos um curto entre a barra 2 e 3



(figura 27 – exemplo)

Por inspeção temos:

$$[Y] = \begin{bmatrix} -j10 - j10 + j0,1 & -(-j10 - j10) \\ -(-j10 - j10) & -j10 - j10 + j0,1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} -j19,9 & j20 \\ j20 & -j19,9 \end{bmatrix}$$

Pela propriedade fica:

$$[Y'] = \begin{bmatrix} -j19,9 & j20 & 0 \\ j20 & -j22 & j2 \\ 0 & j2 & -j1,9 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[Y'] = \begin{bmatrix} -j19,9 & j20 + 0 \\ j20 & -j22 + j2 \\ 0 & j2 - j1,9 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[Y'] = \begin{bmatrix} -j19,9 & j20 \\ j20 & -j20 \\ 0 & j0,1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

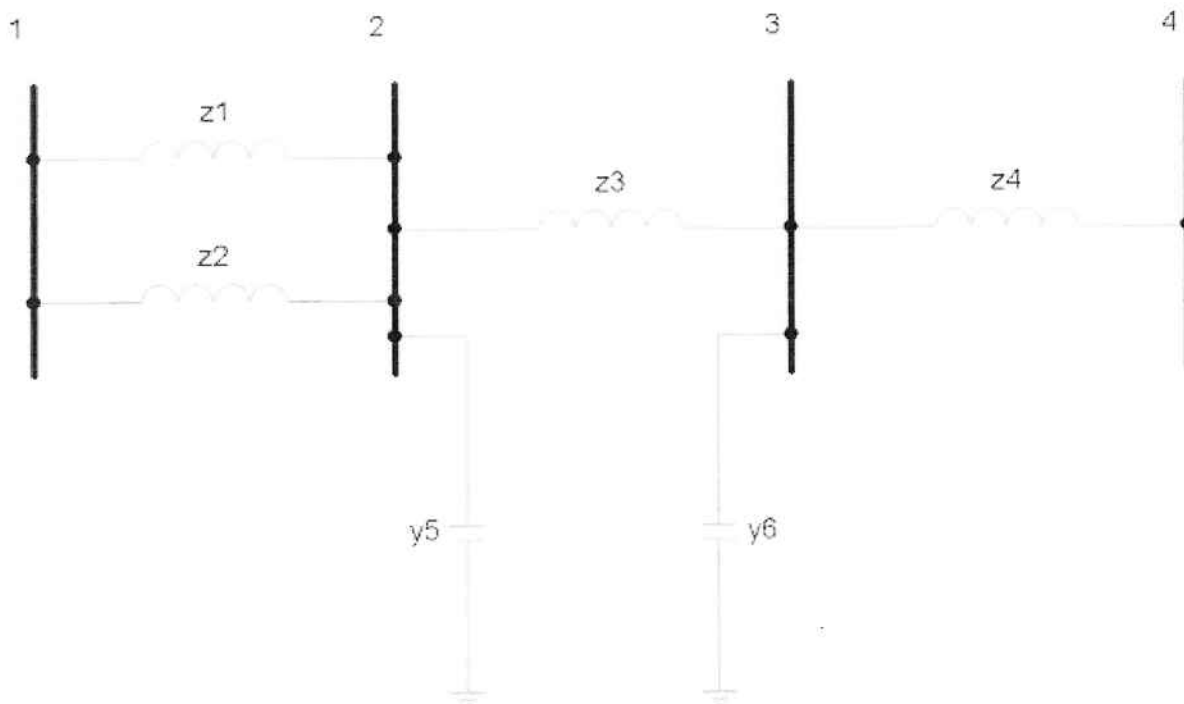
$$[Y'] = \begin{bmatrix} -j19,9 & j20 \\ j20 + 0 & -j20 + j0,1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[Y'] = \begin{bmatrix} -j19,9 & j20 \\ j20 & -j19,9 \end{bmatrix}$$



Exercício interativo

... Exercício ...



Z1: j 0.05

Z2: j 0.05

Z3: j 0.1

Z4: j 0.05

Y5: j 0.2

Y6: j 0.2

> Resposta



Conclusões

O material que desenvolvemos é um material de apoio didático ao aprendizado das principais disciplinas de Sistemas de Potência ("Introdução a Sistemas de Potência", "Sistemas de Potência I" e "Sistemas de Potência II"). Apesar de bem desenvolvido, ele não substitui a matéria dada em sala de aula. Ele é complementar ao material indicado para o estudo e aprendizado das respectivas disciplinas.

A escolha dos tópicos que desenvolvemos foi baseada em nossa própria experiência no curso e focamos naqueles que julgamos como sendo pontos-chave para o aprendizado de sistemas de potência na graduação. Com o escopo de trabalho definido, fomos auxiliado pelo nosso prof. Orientador Nelson Kagan para dividir o escopo de forma pedagógica, o que resultou em um reagrupamento dos temas selecionados para facilitar o entendimento e desenvolvimento do conteúdo do projeto.

É necessário notar também, que sua formatação para leitura e distribuição via Internet é somente para facilitar o acesso ao material e não possui a ambição de se tornar um "curso a distância" das disciplinas, dado que para isso precisaríamos desenvolver ferramentas para prover um *feedback* às dúvidas e perguntas que surgissem quanto à compreensão do material e motivar a discussão entre os interessados.

Dado as premissas acima, justificamos então porque em alguns casos pecamos na falta dos rigores matemáticos para desenvolvermos algumas equações ou simplificamos alguma fórmula apresentada.

A forma modular como foi desenvolvido o material, sendo identificados como conteúdo teórico, exercícios resolvidos e exercícios interativos foi uma solução adotada por nós por se assemelhar à forma de como foram lecionadas as matérias na EPUSP ao longo de todos os anos em que cursamos a faculdade. Desta forma, acreditamos que apesar de nossa falta de experiência, a metodologia de ensino é válida.

Desenvolvemos também, como um projeto secundário, uma coleção de funções para manipularmos números complexos, matrizes e matrizes de números complexos na linguagem PHP. A linguagem adotada por nós teve como prioridade a sua disponibilidade nos servidores do PEA para garantirmos a possibilidade imediata de distribuição do material.

Vale mencionar também que a estrutura utilizada para organizar o material pode ser copiada ou usada como base para se expandir e/ou complementar o conteúdo já disponibilizado, ou seja: Pode-se tanto incluir novos tópicos no material atual como desenvolver um novo material para outras disciplinas.

Dessa forma, concluímos que atingimos nossos objetivos iniciais que podem ser verificados pelo conteúdo disponibilizado tanto neste material como em sua versão on-line.



Referências Bibliográficas

- ❖ **Elements Of Power System Analysis -**
William D. Stevenson, Jr. – Fourth Edition – Ed. Mcgraw Hill
- ❖ **Introdução A Sistemas Elétricos De Potência**
Carlos César Barioni De Oliveira , Hérnan Prieto Schmidt , Nelson Kagan
, Ernesto João Robba – Ed. Edgard Blucher Ltda
- ❖ **Power System Analysis**
Charles A. Gross – Ed. John Wiley & Sons
- ❖ **Power System Analysis**
John J. Grainger , William D. Stevenson - Ed Mcgraw Hill
- ❖ **Power System Analysis & Design**
J. Duncan Glover – Ed. PWS Publishing Company
- ❖ **Sistemas Elétricos De Potência , Regime Permanente volume I**
Dorel Soares Ramos , Eduardo Mário Dias – Ed. Guanaibara Dois
- ❖ **Sistemas Elétricos De Potência , Regime Permanente volume II**
Dorel Soares Ramos , Eduardo Mário Dias – Ed. Guanaibara Dois
- **PHP4 – A Bíblia**
Tim Converse e Joyce Park – Ed. Campus
- **Desenvolvendo aplicações na Web com PHP4**
Tobias Ratschiller, Till Gerken – Ed. Ciência Moderna
- **JavaScript para a World Wide Web**
Tom Negrino, Dori Smith – Ed. Campus
- **HTML para a World Wide Web**
Elizabeth Castro – Ed. Makron Books



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

Anexos:

- ✦ Listagem do código-fonte dos exercícios interativos
- ✦ Listagem do código das bibliotecas de funções criadas
- ✦ Listagem da estrutura de diretórios e arquivos criados



Listagem do código-fonte dos exercícios interativos: (somente as partes diretamente relacionadas ao cálculo do exercício)

Circuitos Trifásicos Simétricos Equilibrados e Desequilibrados:

```
...
<?php
if(isset($_POST["resolver1"])&&$_POST["resolver1"]){
    $checka_inf[]=0;
    $VabC=new Num_Complexo($_POST["ex1_vab"],0);
    $ZC=new Num_Complexo($_POST["ex1_zr"],$_POST["ex1_zi"]);

    $IabC=new Num_Complexo(0,0);
    $IaC=new Num_Complexo(0,0);
    $IbC=new Num_Complexo(0,0);
    $IcC=new Num_Complexo(0,0);

    $checka_inf[]=$IabC->divide_compl($VabC,$ZC);
    $IaC->multiplica_compl($IabC,$R3n30Gr);
    $IaCp=$IaC; $IaCp->conv_rec2polar();
    $IbC->multiplica_compl($IaC,$ALPHAR);
    $IcC->multiplica_compl($IaC,$ALPHA2r);
    $ZCfase=$IabC;

    $ZCfase->conv_rec2polar();
    $PHI=(0-$ZCfase->pimag);
    if(isset($_POST["ex1_decimais"])&&is_numeric($_POST["ex1_decimais"])) $sarredonda=$_POST["ex1_decimais"];
    else $sarredonda=$ARREDONDAMENTO;
    $PotP=round($KM_SQRT3 * $VabC->preal * $IaCp->preal * cos(deg2rad($PHI)),$sarredonda);
    $PotQ=round($KM_SQRT3 * $VabC->preal * $IaCp->preal * sin(deg2rad($PHI)),$sarredonda);
    $PotS=new Num_Complexo($PotP,$PotQ);
}

?>

...
<?php
if(isset($_POST["resolver2"])&&$_POST["resolver2"]){
    if(isset($_POST["ex2_decimais"])&&is_numeric($_POST["ex2_decimais"])) $sarredonda=$_POST["ex2_decimais"];
    else $sarredonda=$ARREDONDAMENTO;
    $checka_inf[]=0;
    $Z1C=new Num_Complexo($_POST["ex2_z1r"],$_POST["ex2_z1i"]);
    $Z2C=new Num_Complexo($_POST["ex2_z2r"],$_POST["ex2_z2i"]);
    $VIC=new Num_Complexo($_POST["ex2_vl"],0);

    $VabC=new Num_Complexo(0,0);
    $VbcC=new Num_Complexo(0,0);
    $VacC=new Num_Complexo(0,0); /** Atencao Vac e nao Vca
    $VanC=new Num_Complexo(0,0);
    $IaC=new Num_Complexo(0,0);
    $Ia1C=new Num_Complexo(0,0);
    $Ia2C=new Num_Complexo(0,0);
    $IbC=new Num_Complexo(0,0);
    $Ib1C=new Num_Complexo(0,0);
    $Ib2C=new Num_Complexo(0,0);
    $PotS1C=new Num_Complexo(0,0);
    $PotW1C=new Num_Complexo(0,0);
    $PotW2C=new Num_Complexo(0,0);

    $VabC->multiplica_compl($VIC,$A30Gr); /*** Checar isso quando chegar a figura ***
    $VbcC->multiplica_compl($VabC,$ALPHAR);
    $VacC->multiplica_compl($VabC,$An60Gr);
    $checka_inf[]=$VanC->divide_compl($VabC,$R330Gr);
    $checka_inf[]=$Ia1C->divide_compl($VanC,$Z1C);
    $checka_inf[]=$Ia2C->divide_compl($VabC,$Z2C);
```



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

```
$Ia2C->multiplica_compl($Ia2C,$R3n30Gr);
$IaC->soma_compl($Ia1C,$Ia2C);
$Ia1Cp=$Ia1C; $Ia1Cp->conv_rec2polar();
$Ia2Cp=$Ia2C; $Ia2Cp->conv_rec2polar();
$IaCp=$IaC; $IaCp->conv_rec2polar();

$PotS1C->multiplica_escalar_compl($VanC,3);
$Ia1Cconj=$Ia1C; $Ia1Cconj->conjugado_compl();
$PotS1C->multiplica_compl($PotS1C,$Ia1Cconj);
$PotP1=round($PotS1C->preal,$arredonda);
$PotP2=round($KM_SQRT3*$VIC->preal*$Ia2Cp->preal*cos(deg2rad($Ia2Cp->pimag)), $arredonda);
$PotPt=$PotP1+$PotP2;

$Ib1C->multiplica_compl($Ia1C,$ALPHAr);
$checka_inf[]=$Ib2C->divide_compl($VabC,$Z2C);
$Ib2C->multiplica_escalar_compl($Ib2C,-1);
$IbC->soma_compl($Ib1C,$Ib2C);
$IaCconj=$IaC; $IaCconj->conjugado_compl();
$IbCconj=$IbC; $IbCconj->conjugado_compl();

$PotW1C->multiplica_compl($VacC,$IaCconj);
$PotW2C->multiplica_compl($VbcC,$IbCconj);
$PotW1=round($PotW1C->preal,$arredonda);
$PotW2=round($PotW2C->preal,$arredonda);
$PotWt=$PotW1+$PotW2;
```

?>

...



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

Valores por Unidade:

...

<?php

```
if(isset($_POST["resolver1"])&&$_POST["resolver1"]){
```

```
    $checka_inf]=0;
```

```
    $T1zC=new Num_Complexo($_POST["ex1_t1r"]/100,$_POST["ex1_t1x"]/100);
```

```
    $T1vi=$_POST["ex1_t1vi"];
```

```
    $T1vo=$_POST["ex1_t1vo"];
```

```
    $T1s=1000*$_POST["ex1_t1s"];
```

```
    $T2zC=new Num_Complexo($_POST["ex1_t2r"]/100,$_POST["ex1_t2x"]/100);
```

```
    $T2vi=$_POST["ex1_t2vi"];
```

```
    $T2vo=$_POST["ex1_t2vo"];
```

```
    $T2s=1000*$_POST["ex1_t2s"];
```

```
    $E=$_POST["ex1_e"];
```

```
    $Z1C=new Num_Complexo($_POST["ex1_z1r"],$_POST["ex1_z1i"]);
```

```
    $Z2C=new Num_Complexo($_POST["ex1_z2r"],$_POST["ex1_z2i"]);
```

```
    $Z3C=new Num_Complexo($_POST["ex1_z3r"],$_POST["ex1_z3i"]);
```

```
    $desc_ex1="<p>Trafo 1: ".($T1vi."/".$T1vo." [V], " . ($T1s/1000). " [KVA], r=
```

```
    " . ((($T1zC->preal)*100)."% e x=" . ((($T1zC->pimag)*100)."% </p>";
```

```
    $desc_ex1="<p>Trafo 2: ".($T2vi."/".$T2vo." [V], " . ($T2s/1000). " [KVA], r=
```

```
    " . ((($T2zC->preal)*100)."% e x=" . ((($T2zC->pimag)*100)."% </p>";
```

```
    $desc_ex1="<p>E = ".($E." [V]</p>";
```

```
    $desc_ex1="<p>Z<sub>1</sub> = ".($Z1C->preal."+j".($Z1C->pimag." [ohm]</p>";
```

```
    $desc_ex1="<p>Z<sub>2</sub> = ".($Z2C->preal."+j".($Z2C->pimag." [ohm]</p>";
```

```
    $desc_ex1="<p>Z<sub>3</sub> = ".($Z3C->preal."+j".($Z3C->pimag." [ohm]</p>";
```

```
    if($T1s>$T2s) $Sbase=array($T1s,1);
```

```
    else $Sbase=array($T2s,2);
```

```
    if(($T1s==0)||($T2s==0)) $checka_inf]=1;
```

```
    if($Sbase[0]==0) $checka_inf]=1;
```

```
    $Vb1=$T1vi;
```

```
    $Zb1=pow($Vb1,2)/$Sbase[0];
```

```
    $Epu=new Num_Complexo(1,0);
```

```
    $Z1puC=$Z1C; $checka_inf]=$Z1puC->divide_escalar_compl($Z1puC,$Zb1);
```

```
    $Vb2=$T2vi;
```

```
    $Zb2=pow($Vb2,2)/$Sbase[0];
```

```
    $Z2puC=$Z2C; $checka_inf]=$Z2puC->divide_escalar_compl($Z2puC,$Zb2);
```

```
    if($Sbase[1]==1) $T2zC->multiplica_escalar_compl($T2zC,($Sbase[0]/$T2s));
```

```
    else $T1zC->multiplica_escalar_compl($T1zC,($Sbase[0]/$T1s));
```

```
    $Vb3=$T2vo;
```

```
    $Zb3=pow($Vb3,2)/$Sbase[0];
```

```
    $Z3puC=$Z3C; $checka_inf]=$Z3puC->divide_escalar_compl($Z3puC,$Zb3);
```

```
    $I3C=new Num_Complexo(0,0);
```

```
    $V3C=new Num_Complexo(0,0);
```

```
    $I3puC=new Num_Complexo(0,0);
```

```
    $V3puC=new Num_Complexo(0,0);
```

```
    $ZtotC=new Num_Complexo(0,0);
```

```
    $ZtotC->soma_compl($T1zC,$T2zC);
```

```
    $ZtotC->soma_compl($ZtotC,$Z1puC);
```

```
    $ZtotC->soma_compl($ZtotC,$Z2puC);
```

```
    $ZtotC->soma_compl($ZtotC,$Z3puC);
```

```
    $checka_inf]=$I3puC->divide_compl($Epu,$ZtotC);
```

```
    $V3puC->multiplica_compl($I3puC,$Z3puC);
```

```
    $Ib3=$Sbase[0]/$Vb3;
```

```
    $I3C->multiplica_escalar_compl($I3puC,$Ib3);
```

```
    $V3C->multiplica_escalar_compl($V3puC,$Vb3);
```

```
    $I3C->conv_rec2polar();
```

```
    $V3C->conv_rec2polar();
```

```
    if(isset($_POST["ex1_decimais"])&&is_numeric($_POST["ex1_decimais"])) $arredonda=$_POST["ex1_decimais"];
```

```
    else $arredonda=$ARREDONDAMENTO;
```

```
    $I3C->arredonda_cmpl($arredonda);
```

```
    $V3C->arredonda_cmpl($arredonda);
```

?>



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

```
...
<?php
if(isset($_POST['resolver2']))&&$_POST['resolver2']){
    if(isset($_POST['ex2_decimais'])&&is_numeric($_POST['ex2_decimais'])) $arredonda=$_POST['ex2_decimais'];
    else $arredonda=$ARREDONDAMENTO;
    $checka_infj=0;

    $T1v=array('i'=>($_POST['ex2_t1vi']*1000),'o'=>($_POST['ex2_t1vo']*1000));
    $T1s=($_POST['ex2_t1s']*1000000);
    $T1ZC=new Num_Complexo(0,($_POST['ex2_t1x']/100),'r');
    $T2v=array('i'=>($_POST['ex2_t2vi']*1000),'o'=>($_POST['ex2_t2vo']*1000));
    $T2s=($_POST['ex2_t2s']*1000000);
    $T2ZC=new Num_Complexo(0,($_POST['ex2_t2x']/100),'r');
    $T3v=array('i'=>($_POST['ex2_t3vi']*1000),'o'=>($_POST['ex2_t3vo']*1000));
    $T3s=($_POST['ex2_t3s']*1000000);
    $T3ZC=new Num_Complexo(0,($_POST['ex2_t3x']/100),'r');
    $ZlinhaC=new Num_Complexo($_POST['ex2_zlr'],$_POST['ex2_zli'],'r');
    $Cargas=($_POST['ex2_cars']*1000000);
    $Cargacosfi=$_POST['ex2_carfi'];
    $Cargatipo=$_POST['ex2_car_indcap'];
    $CargaVnom=($_POST['ex2_car_vnom']*1000);

    if ($T1v['o']==0 || $T2v['i']==0 || $T3v['i']==0 || $T1v['i']==0 || $T2v['o']==0 || $T3v['o']==0 || $T1s==0 || $T2s==0 ||
        $T3s==0){
        $desc_ex2="<h2>** Entre com valores convenientes ! **</h2>";
        $I1C=new Num_Complexo(0,0,'r');
        $I2C=new Num_Complexo(0,0,'r');
        $EC=new Num_Complexo(0,0,'r');
    }
    else{
        $Ralpha=($T1v['o'] * $T2v['i'] * $T3v['i']) / ($T1v['i'] * $T2v['o'] * $T3v['o']);
        if ( $T1s >= $T2s ) $Sbase = ($T1s >= $T3s)?$T1s:$T3s;
        else $Sbase = ($T2s >= $T3s)?$T2s:$T3s;

        $Zl1=new Num_Complexo(0,0,'r');
        $Zl2=new Num_Complexo(0,0,'r');
        $Zl1->multiplica_escalar_compl($ZlinhaC,($Sbase/($T1v['o']*$T1v['o'])));
        $Zl2->multiplica_escalar_compl($ZlinhaC,($Sbase/($T2v['o']*$T2v['o'])));

        $zt1=new Num_Complexo(0,0,'r');
        $zt2=new Num_Complexo(0,0,'r');
        $zt3=new Num_Complexo(0,0,'r');
        $zt1->multiplica_escalar_compl($T1ZC,($Sbase/$T1s));
        $zt2->multiplica_escalar_compl($T2ZC,($Sbase/$T2s));
        $zt3->multiplica_escalar_compl($T3ZC,($Sbase/$T3s));

        $vcarga_pn=$CargaVnom/$T1v['o'];
        $icarga_pn=($Cargas/$Sbase)/$vcarga_pn;
        $carga_fase=rad2deg(acos($Cargacosfi));
        if ($Cargatipo == "indutivo") $carga_fase *= (-1);
        $icargaC=new Num_Complexo($icarga_pn,$carga_fase,'p');
        $icargaC->conv_polar2rec();

        $I1C=new Num_Complexo(0,0,'r');
        $I2C=new Num_Complexo(0,0,'r');
        $EC=new Num_Complexo(0,0,'r');
        $tmp1C=new Num_Complexo(0,0,'r');
        $tmp2C=new Num_Complexo(0,0,'r');
        $tmp3C=new Num_Complexo(0,0,'r');
        $tmp1C->soma_compl($Zl1,$zt1);
        $tmp1C->multiplica_compl($tmp1C,$icargaC);
        $tmp2C->preal=$vcarga_pn*(1/$Ralpha)-1;
        $tmp1C->subtrai_compl($tmp1C,$tmp2C);
        $tmp2C->soma_compl($Zl2,$zt2);
        $tmp2C->soma_compl($tmp2C,$zt3);
        $checka_infj=$tmp3C->divide_escalar_compl($Zl1,$Ralpha);
        $tmp2C->soma_compl($tmp2C,$tmp3C);
        $checka_infj=$tmp3C->divide_escalar_compl($zt1,$Ralpha);
        $tmp2C->soma_compl($tmp2C,$tmp3C);
    }
}
```




ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

```
$checka_inff]=$I2C->divide_compl($tmp1C,$tmp2C);

$checka_inff]=$tmp1C->divide_escalar_compl($I2C,$Ralpha);
$I1C->subtrai_compl($IcargaC,$tmp1C);
$tmp1C->soma_compl($ZI1,$zt1);
$tmp1C->multiplica_compl($tmp1C,$I1C);
$tmp2C->preal=$vcarga_pn;
$tmp2C->pimag=0;
$EC->soma_compl($tmp1C,$tmp2C);

$I1C->conv_rec2polar();
$I2C->conv_rec2polar();
$EC->conv_rec2polar();

$desc_ex2="<p>Trafo 1: " . ($T1v['i']/1000)." / " . ($T1v['o']/1000)." [KV],
            " . ($T1s/1000000)." [MVA], x=" . (($T1ZC->pimag)*100)." % </p>";
$desc_ex2="<p>Trafo 2: " . ($T2v['i']/1000)." / " . ($T2v['o']/1000)." [KV],
            " . ($T2s/1000000)." [MVA], x=" . (($T2ZC->pimag)*100)." % </p>";
$desc_ex2="<p>Trafo 3: " . ($T3v['i']/1000)." / " . ($T3v['o']/1000)." [KV],
            " . ($T3s/1000000)." [MVA], x=" . (($T3ZC->pimag)*100)." % </p>";
```

?>
}

...



Componentes Simétricas:

```
...
<?php
if(isset($_POST["resolver1"])&&$_POST["resolver1"]){
    $checka_inf[]=0;

    $ZIC=new Num_Complexo($_POST["ex1_zlr"],$_POST["ex1_zli"],'r');
    $ZcC=new Num_Complexo($_POST["ex1_zcr"],$_POST["ex1_zci"],'r');
    $ZtotalC=new Num_Complexo(0,0,'r');
    $ZtotalC->soma_cmpl($ZIC,$ZcC);
    $ZMC=new Matrices_cmpl(array(array($ZtotalC,new Num_Complexo(0,0,'r'),new Num_Complexo(0,0,'r')),
        array(new Num_Complexo(0,0,'r'),$ZtotalC,new Num_Complexo(0,0,'r')),
        array(new Num_Complexo(0,0,'r'),new Num_Complexo(0,0,'r'),$ZtotalC)));

    $VaC=new Num_Complexo($_POST["ex1_v"],0,'r');
    $VbC=new Num_Complexo(0,0,'r');
    $VbC->multiplica_cmpl($VaC,$ALPHA2r);
    $VcC=new Num_Complexo(0,0,'r');
    $VcC->multiplica_cmpl($VaC,$ALPHAar);
    $VMC=new Matrices_cmpl(array(array($VaC),array($VbC),array($VcC)));

    $VcsMC=$VMC->multiplica_matrizes_cmpl($MATRIZnTr,$VMC);

    // No caso particular da matriz ZMC - So tem a diagonal principal e com o mesmo valor
    // podemos ignorar o processo e copiar a matriz ZMC para ZcsMC
    // $tmpMC=$ZMC->multiplica_matrizes_cmpl($MATRIZnTr,$ZMC);
    // $ZcsMC=$tmpMC->multiplica_matrizes_cmpl($tmpMC,$MATRIZnTr);
    $ZcsMC=new Matrices_cmpl(array(array($ZtotalC,new Num_Complexo(0,0,'r'),new Num_Complexo(0,0,'r')),
        array(new Num_Complexo(0,0,'r'),$ZtotalC,new Num_Complexo(0,0,'r')),
        array(new Num_Complexo(0,0,'r'),new Num_Complexo(0,0,'r'),$ZtotalC)));
    $ZcsMCinv=new Matrices_cmpl(array(array($ZtotalC,new Num_Complexo(0,0,'r'),new Num_Complexo(0,0,'r')),
        array(new Num_Complexo(0,0,'r'),$ZtotalC,new Num_Complexo(0,0,'r')),
        array(new Num_Complexo(0,0,'r'),new Num_Complexo(0,0,'r'),$ZtotalC)));
    $ZcsMCinv->inv_classica_matrizes_cmpl();
    $lcsMC=$ZcsMCinv->multiplica_matrizes_cmpl($ZcsMCinv,$VcsMC);

    if(isset($_POST["ex1_decimais"])&&is_numeric($_POST["ex1_decimais"])) $arredonda=$_POST["ex1_decimais"];
    else $arredonda=$ARREDONDAMENTO;
    $VcsMC->conv_elementos_rec2polar(); $VcsMC->arredonda_elementos_cmpl($arredonda);
    $lcsMC->conv_elementos_rec2polar(); $lcsMC->arredonda_elementos_cmpl($arredonda);
    $ZcsMC->conv_elementos_rec2polar(); $ZcsMC->arredonda_elementos_cmpl($arredonda);

    $VaCp=$VaC; $VaCp->conv_rec2polar(); $VaCp->arredonda_cmpl($arredonda);
    $VbCp=$VbC; $VbCp->conv_rec2polar(); $VbCp->arredonda_cmpl($arredonda);
    $VcCp=$VcC; $VcCp->conv_rec2polar(); $VcCp->arredonda_cmpl($arredonda);

    $desc_ex1="<p>Z<sub>L</sub> = ".$ZIC->preal."<j>".$ZIC->pimag."</p>";
    $desc_ex1="<p>Z<sub>A</sub> = Z<sub>B</sub> = Z<sub>C</sub> = ".$ZcC->preal."<j>".$ZcC->pimag."</p>";
    $desc_ex1="<table width='100%' border='1' cellspacing='1' cellpadding='1'><tr><td width='40%'>[V] = </td>";
    $desc_ex1="<td align='left' width='120%'><table border='1' cellspacing='1' cellpadding='1'>";
    $desc_ex1="<tr><td>".$VaCp->preal."<deg>".$VaCp->pimag."</td><tr><td>".$VbCp->preal."<deg>";
    $desc_ex1="<td>".$VbCp->pimag."<deg></td><tr><td>".$VcCp->preal."<deg>".$VcCp->pimag."<deg></td></tr>";
    $desc_ex1="</table></td><td align='left'>[V]</td></tr></table>";

?>

...
<?php
if(isset($_POST["resolver2"])&&$_POST["resolver2"]){
    if(isset($_POST["ex2_decimais"])&&is_numeric($_POST["ex2_decimais"])) $arredonda=$_POST["ex2_decimais"];
    else $arredonda=$ARREDONDAMENTO;
    $checka_inf[]=0;

    $ZdC=new Num_Complexo($_POST["ex2_zdr"],$_POST["ex2_zdi"],'r');
    $ZIC=new Num_Complexo($_POST["ex2_zlr"],$_POST["ex2_zli"],'r');
    $VaCp=new Num_Complexo($_POST["ex2_varp"],$_POST["ex2_vaip"],'p');
    $VbCp=new Num_Complexo($_POST["ex2_vbrp"],$_POST["ex2_vbip"],'p');
    $VcCp=new Num_Complexo($_POST["ex2_vcrp"],$_POST["ex2_vcip"],'p');
```



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

```
$desc_ex2="<p>Z<sub>delta</sub> = ".$ZdC->preal."+j".$ZdC->pimag." [ohms]</p>";
$desc_ex2="<p>Z<sub>linha</sub> = ".$ZIC->preal."+j".$ZIC->pimag." [ohms]</p>";
$desc_ex2="<table width='100%' border='0' cellspacing='0' cellpadding='0'><tr><td width='40%'>[V] = </td>";
$desc_ex2="<td align='left' width='120%'><table border='1' cellspacing='0' cellpadding='2'>";
$desc_ex2="<tr><td>".$VaCp->preal."<".$VaCp->pimag."&deg;</td><tr><td>".$VbCp->preal."<";
$VbCp->pimag."&deg;</td><tr><td>".$VcCp->preal."<".$VcCp->pimag."&deg;</td><tr>";
$desc_ex2="</table></td><td align='left'> [V]</td></tr></table>";

$VaC=$VaCp; $VaC->conv_polar2rec();
$VbC=$VbCp; $VbC->conv_polar2rec();
$VcC=$VcCp; $VcC->conv_polar2rec();
$VMC=new Matrices_cmpl(array(array($VaC),array($VbC),array($VcC)));
$V012MC=$VMC->multiplica_matrizes_cmpl($MATRIZnTr,$VMC);
$Zd012C=new Num_Complexo(0,0,'r'); $Zd012C->divide_escalar_cmpl($ZdC,3);
$ZtotC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $ZtotC->soma_cmpl($ZIC,$Zd012C);
/*
echo "<h2>### Debug: ";
$ZtotC->echocmpl(4);
echo "###</h2>";
*/
$I0C=new Num_Complexo(0,0,'r');
$I1C=new Num_Complexo(0,0,'r');
$I2C=new Num_Complexo(0,0,'r');
$I1C->divide_cmpl($V012MC->retorna_elemento(1,0),$ZtotC);
$I2C->divide_cmpl($V012MC->retorna_elemento(2,0),$ZtotC);
$I012MC=new Matrices_cmpl(array(array($I0C),array($I1C),array($I2C)));
$IMC=$I012MC->multiplica_matrizes_cmpl($MATRIZTr,$I012MC);

$IMC->conv_elementos_rec2polar(); $IMC->arredonda_elementos_cmpl($arredonda);
```

?>

...



Estudo de Curto-Circuito na Rede:

```
...
<?php
if(isset($_POST["resolver1"])&&$_POST["resolver1"]){
    if(isset($_POST["ex1_decimais"])&&is_numeric($_POST["ex1_decimais"])) $arredonda=$_POST["ex1_decimais"];
    else $arredonda=$ARREDONDAMENTO;
    $checka_inf=0;

    $Sbase=100; // [MVA]
    $Zbase=pow(13.8,2)/$Sbase;
    /* $_POST["tipocurto"] : c3f (trifásico) ou cft (fase-terra) */
    $tipocurto=(($_POST["tipocurto"]=="c3f")?array(1,"trif&aacute;ute;sico"):array(0,"fase-terra"));
    $S3fC=new Num_Complexo(0,$_POST["ex1_s3f"],'r'); $checka_inf=$S3fC->divide_escalar_compl($S3fC,$Sbase);
    $S3fCc=$S3fC; $S3fCc->conjugado_compl();
    $S1fC=new Num_Complexo(0,$_POST["ex1_s1f"],'r'); $checka_inf=$S1fC->divide_escalar_compl($S1fC,$Sbase);
    $S1fCc=$S1fC; $S1fCc->conjugado_compl();
    $ZlpC=new Num_Complexo(0,$_POST["ex1_zlp"],'r');
    $ZlzC=new Num_Complexo(0,$_POST["ex1_zlz"],'r');
    $L12=$_POST["ex1_l12"];
    $L13=$_POST["ex1_l13"];
    $Zl12pC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $Zl12pC->multiplica_escalar_compl($ZlpC,$L12);
    $Zl12zC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $Zl12zC->multiplica_escalar_compl($ZlzC,$L12);
    $Zl13pC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $Zl13pC->multiplica_escalar_compl($ZlpC,$L13);
    $Zl13zC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $Zl13zC->multiplica_escalar_compl($ZlzC,$L13);

    $ZgpC=new Num_Complexo(0,0,'r');
    $ZgzC=new Num_Complexo(0,0,'r');
    $Z12pC=new Num_Complexo(0,0,'r');
    $Z12zC=new Num_Complexo(0,0,'r');
    $Z13pC=new Num_Complexo(0,0,'r');
    $Z13zC=new Num_Complexo(0,0,'r');
    $tmp1C=new Num_Complexo(0,0,'r');
    $tmp2C=new Num_Complexo(0,0,'r');

    $checka_inf=$ZgpC->divide_compl($UMC,$S3fCc);
    $checka_inf=$tmp1C->divide_compl($TRESCE,$S1fCc);
    $checka_inf=$tmp2C->divide_compl($DOISC,$S3fCc);
    $ZgzC->subtrai_compl($tmp1C,$tmp2C);
    $checka_inf=$Z12pC->divide_escalar_compl($Zl12pC,$Zbase);
    $checka_inf=$Z12zC->divide_escalar_compl($Zl12zC,$Zbase);
    $checka_inf=$Z13pC->divide_escalar_compl($Zl13pC,$Zbase);
    $checka_inf=$Z13zC->divide_escalar_compl($Zl13zC,$Zbase);

    $YgpC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $checka_inf=$YgpC->inverte_cmpl($ZgpC);
    $Y12pC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $checka_inf=$Y12pC->inverte_cmpl($Z12pC);
    $Y13pC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $checka_inf=$Y13pC->inverte_cmpl($Z13pC);
    $YgzC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $checka_inf=$YgzC->inverte_cmpl($ZgzC);
    $Y12zC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $checka_inf=$Y12zC->inverte_cmpl($Z12zC);
    $Y13zC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $checka_inf=$Y13zC->inverte_cmpl($Z13zC);

    $y11pC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $y11pC->soma_compl($Y12pC,$Y13pC);
    $y11pC->soma_compl($y11pC,$YgpC);
    $y12pC=$Y12pC; $y12pC->conjugado_compl();
    $y13pC=$Y13pC; $y13pC->conjugado_compl();
    $YpMC=new Matrices_cmpl(array(array($y11pC,$y12pC,$y13pC),
                                     array($y12pC,$y12pC,new Num_Complexo(0,0,'r')),
                                     array($y13pC,new Num_Complexo(0,0,'r'),$Y13pC)));
    $y11zC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $y11zC->soma_compl($Y12zC,$Y13zC);
    $y11zC->soma_compl($y11zC,$YgzC);
    $y12zC=$Y12zC; $y12zC->conjugado_compl();
    $y13zC=$Y13zC; $y13zC->conjugado_compl();
    $YzMC=new Matrices_cmpl(array(array($y11zC,$y12zC,$y13zC),
                                     array($y12zC,$y12zC,new Num_Complexo(0,0,'r')),
                                     array($y13zC,new Num_Complexo(0,0,'r'),$Y13zC)));

    $ZpMC=$YpMC; $checka_inf=$ZpMC->inv_classica_matrizes_cmpl();
    $ZzMC=$YzMC; $checka_inf=$ZzMC->inv_classica_matrizes_cmpl();
}
```



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

```
$Icurto=new Num_Complexo(0,0,'r');
$V3p=new Num_Complexo(0,0,'r');
$V3n=new Num_Complexo(0,0,'r');
$V3z=new Num_Complexo(0,0,'r');

if ($tipocurto[0]) { /* No caso de curto trifásico */
    $checka_inf[]=$Icurto->inverte_cmpl($ZpMC->retorna_elemento(1,1));
    $tmp1C->multiplica_cmpl($ZpMC->retorna_elemento(2,1),$Icurto);
    $V3p->subtrai_cmpl($UMC,$tmp1C);
}
else { /* No caso de curto fase-terra */
    $I2cs=new Num_Complexo(0,0,'r');
    $tmp1C->multiplica_escalar_cmpl($ZpMC->retorna_elemento(1,1),2);
    $tmp2C->soma_cmpl($tmp1C,$ZzMC->retorna_elemento(1,1));
    $checka_inf[]=$I2cs->inverte_cmpl($tmp2C);
    $Icurto->multiplica_escalar_cmpl($I2cs,3);
    $tmp1C->multiplica_cmpl($ZpMC->retorna_elemento(2,1),$I2cs);
    $tmp2C->multiplica_cmpl($ZzMC->retorna_elemento(2,1),$I2cs);

    $V3p->subtrai_cmpl($UMC,$tmp1C);
    $V3n->subtrai_cmpl($ZEROC,$tmp1C);
    $V3z->subtrai_cmpl($ZEROC,$tmp2C);
}

$V3cs=new Matrices_cmpl(array(array($V3z),array($V3p),array($V3n)));
$V3=new Matrices_cmpl(array(array(new Num_Complexo(0,0,'r'),
    array(new Num_Complexo(0,0,'r')),
    array(new Num_Complexo(0,0,'r'))));
$V3=$V3cs->multiplica_matrizes_cmpl($MATRIZTr,$V3cs);
$V3->conv_elementos_rec2polar();
$Icurto->conv_rec2polar();
/*
echo "<h2>### Debug: ###<br />";
echo "Curto ". $tipocurto[1].":<br />";
$Icurto->echocmpl(4); echo " pu<br />";
$V3->desc_matriz_cmpl();
echo " #####</h2>";
*/
$S3fC->multiplica_escalar_cmpl($S3fC,$Sbase);
$S1fC->multiplica_escalar_cmpl($S1fC,$Sbase);
$desc_ex1="<p>Para um curto <strong>". $tipocurto[1]. "</strong> na barra 2, sendo:</p>";
$desc_ex1="<p>S<sub>3</sub>&Oslash;=</sub>=".$S3fC->pimag." [MVA]</p>";
$desc_ex1="<p>S<sub>1</sub>&Oslash;=</sub>=".$S1fC->pimag." [MVA]</p>";
$desc_ex1="<p>X<sub>1</sub>=</sub>=".$ZlpC->pimag." [ohms/Km]</p>";
$desc_ex1="<p>X<sub>0</sub>=</sub>=".$ZlzC->pimag." [ohms/Km]</p>";
$desc_ex1="<p>L<sub>12</sub>=</sub>=".$L12." [Km]</p>";
$desc_ex1="<p>L<sub>13</sub>=</sub>=".$L13." [Km]</p>";
?>

...
<?php
if(isset($_POST["resolver2"])&&$_POST["resolver2"]){
    if(isset($_POST["ex2_decimais"])&&is_numeric($_POST["ex2_decimais"])) $arredonda=$_POST["ex2_decimais"];
    else $arredonda=$ARREDONDAMENTO;
    $checka_inf[]=0;

    $Sbase=100; // [MVA]
    $S3fC=new Num_Complexo(0,$_POST["ex2_s3f"],'r'); $checka_inf[]=$S3fC->divide_escalar_cmpl($S3fC,$Sbase);
    $S3fCc=$S3fC; $S3fCc->conjugado_cmpl();
    $S1fC=new Num_Complexo(0,$_POST["ex2_s1f"],'r'); $checka_inf[]=$S1fC->divide_escalar_cmpl($S1fC,$Sbase);
    $S1fCc=$S1fC; $S1fCc->conjugado_cmpl();
    $Tvi=$_POST["ex2_tvi"];
    $Tvo=$_POST["ex2_tvo"];
    $TsC=new Num_Complexo(0,$_POST["ex2_ts"],'r');
    $TxCpc=$_POST["ex2_tx"];
    $TxC=new Num_Complexo(0,($TxCpc/100),'r');
    $Zbt=$Sbase/($TsC->pimag);
    $TxC->multiplica_escalar_cmpl($TxC,$Zbt);
    $Lzp=new Num_Complexo(0,$_POST["ex2_lz1"],'r');
    $Lzz=new Num_Complexo(0,$_POST["ex2_lz0"],'r');
```



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

```
$ZgpC=new Num_Complexo(0,0,'r');
$ZgzC=new Num_Complexo(0,0,'r');
$checka_inf[]=$ZgpC->divide_cmpl($UMC,$S3fCc);
$checka_inf[]=$tmp1C->divide_cmpl($TRESC,$S1fCc);
$checka_inf[]=$tmp2C->divide_cmpl($DOISC,$S3fCc);
$ZgzC->subtrai_cmpl($tmp1C,$tmp2C);

$YgpC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $checka_inf[]=$YgpC->inverte_cmpl($ZgpC);
$YlpC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $checka_inf[]=$YlpC->inverte_cmpl($Lzp);
$YtpC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $checka_inf[]=$YtpC->inverte_cmpl($TxC);
$YgzC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $checka_inf[]=$YgzC->inverte_cmpl($ZgzC);
$YlzC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $checka_inf[]=$YlzC->inverte_cmpl($Lzz);
$YtzC=$YtpC;

$y11pC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $y11pC->soma_cmpl($YgpC,$YtpC);
$y12pC=$YtpC; $y12pC->conjugado_cmpl();
$y22pC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $y22pC->soma_cmpl($YlpC,$YtpC);
$y23pC=$YlpC; $y23pC->conjugado_cmpl();
$YpMC=new Matrices_cmpl(array(array($y11pC,$y12pC,new Num_Complexo(0,0,'r')),
                                array($y12pC,$y22pC,$y23pC),
                                array(new Num_Complexo(0,0,'r'),$y23pC,$YlpC)));
$y22zC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $y22zC->soma_cmpl($YlzC,$YtzC);
$y23zC=$YlzC; $y23zC->conjugado_cmpl();
$YzMC=new Matrices_cmpl(array(array($YgzC,new Num_Complexo(0,0,'r'),new Num_Complexo(0,0,'r')),
                                array(new Num_Complexo(0,0,'r'),$y22zC,$y23zC),
                                array(new Num_Complexo(0,0,'r'),$y23zC,$YlzC)));

$ZpMC=$YpMC; $checka_inf[]=$ZpMC->inv_classica_matrizes_cmpl();
$ZzMC=$YzMC; $checka_inf[]=$ZzMC->inv_classica_matrizes_cmpl();

$I0C=new Num_Complexo(0,0,'r');
$tmp1C->multiplica_escalar_cmpl($ZpMC->retorna_elemento(2,2),2);
$I1C=new Num_Complexo(0,0,'r'); $checka_inf[]=$I1C->inverte_cmpl($tmp1C);
$I2C=new Num_Complexo(0,0,'r'); $I2C->subtrai_cmpl($ZEROC,$I1C);
$IcsMC=new Matrices_cmpl(array(array($I0C),array($I1C),array($I2C)));
$IMC=$IcsMC->multiplica_matrizes_cmpl($MATRIZTr,$IcsMC);
$Icurto=$IMC->retorna_elemento(1,0);

$V0C=new Num_Complexo(0,0,'r');
$V1C=new Num_Complexo(0,0,'r');
$V2C=new Num_Complexo(0,0,'r');
$tmp1C->multiplica_cmpl($ZpMC->retorna_elemento(0,2),$IcsMC->retorna_elemento(1,0));
$tmp2C->subtrai_cmpl($UMC,$tmp1C);
$V1C->multiplica_cmpl($tmp2C,$A30Gr);
$tmp1C->multiplica_cmpl($ZpMC->retorna_elemento(0,2),$IcsMC->retorna_elemento(2,0));
$tmp2C->subtrai_cmpl($ZEROC,$tmp1C);
$V2C->multiplica_cmpl($tmp2C,$A30Gr);
$VcsMC=new Matrices_cmpl(array(array($V0C),array($V1C),array($V2C)));
$VMC=$VcsMC->multiplica_matrizes_cmpl($MATRIZTr,$VcsMC);

/* Verificar esse cálculo de Ig (Ig+ e Ig-) */
$IgzC=new Num_Complexo(0,0,'r');
$IgpC=new Num_Complexo(0,0,'r');
$IgnC=new Num_Complexo(0,0,'r');
$tmp1C->subtrai_cmpl($A30Gr,$VcsMC->retorna_elemento(1,0));
$checka_inf[]=$IgpC->divide_cmpl($tmp1C,$ZgpC);
$tmp1C->subtrai_cmpl($ZEROC,$VcsMC->retorna_elemento(2,0));
$checka_inf[]=$IgnC->divide_cmpl($tmp1C,$ZgpC);
$IgcsMC=new Matrices_cmpl(array(array($Igzc),array($IgpC),array($IgnC)));
$IgMC=$IgcsMC->multiplica_matrizes_cmpl($MATRIZTr,$IgcsMC);

$Icurto->conv_rec2polar();
$VMC->conv_elementos_rec2polar();
$IgMC->conv_elementos_rec2polar();
/*
echo "<h2>### Debug: ###<br />";
// $Icurto->echocmpl(4); echo " pu<br />";
// $IMC->desc_matriz_cmpl();
// $IgcsMC->desc_matriz_cmpl(); echo "<hr>";
// $IgMC->desc_matriz_cmpl();
```



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

```
//$YpMC->desc_matriz_cmpl();
//$YzMC->desc_matriz_cmpl();
//$YtzC->echocmpl(4); echo " pu<br />";
//$YlzC->echocmpl(4);
echo "#####</h2>";
*/
$desc_ex2="<p>Pot&ecirc;ncia de curto na barra 1: ";
$desc_ex2="S<sub>3</sub>&Oslash;</sub> = j".($S3fC->pimag)*$Sbase." [MVA], ";
$desc_ex2="S<sub>1</sub>&Oslash;</sub> = j".($S1fC->pimag)*$Sbase." [MVA]</p>";
$desc_ex2="<p>Trafo: S<sub>nom</sub> = ".$TsC->pimag." [MVA], ";
$desc_ex2="$Tvi."/". $Tvo." [KV], ";
$desc_ex2="x<sub>0</sub> = x<sub>1</sub> = x<sub>2</sub> = ".$TxCpc."%, ";
$desc_ex2="delta-estrela aterrada</p>";
$desc_ex2="<p>Linha: z<sub>1</sub> = z<sub>2</sub> = j". $Lzp->pimag." [pu], ";
$desc_ex2="z<sub>0</sub> = j". $Lzz->pimag." [pu] na base 100 [MVA]</p>";
```

?>

...



Fluxo de Potência em Sistemas de Potência:

```
...
<?php
if(isset($_POST["resolver1"]))&&$_POST["resolver1"]{
    if(isset($_POST["ex1_decimais"]))&&is_numeric($_POST["ex1_decimais"]){ $arredonda=$_POST["ex1_decimais"];
    else $arredonda=$ARREDONDAMENTO;
    $checka_inf]=0;

    $V1C=new Num_Complexo($_POST["ex1_v1r"],$_POST["ex1_v1i"],'r');
    $Tv=array("vi"=>$_POST["ex1_tvi"],"vo"=>$_POST["ex1_tvo"]);
    $Ts=$_POST["ex1_ts"];
    $TzC=new Num_Complexo(0,($_POST["ex1_tx"]/100),'r');
    $Ll=$_POST["ex1_ll"];
    $LzC=new Num_Complexo(0,$_POST["ex1_lx"],'r');
    $Carga2Cmva=new Num_Complexo($_POST["ex1_c2p"],$_POST["ex1_c2q"],'r');
    $Carga3Cmva=new Num_Complexo($_POST["ex1_c3p"],$_POST["ex1_c3q"],'r');
    $Sbase=$_POST["ex1_sbase"];
    $Vbase=array("vb1"=>$_POST["ex1_vbase1"],"vb2"=>$_POST["ex1_vbase2"]);
    $totit=(($_POST["ex1_iteracoes"]=="n")?$_POST["ex1_niteracoes"]:.20;
    $erroit=(($_POST["ex1_iteracoes"]=="e")?$_POST["ex1_erro"]:.00001;

    $Carga2C=new Num_Complexo(0,0,'r');$checka_inf]=$Carga2C->divide_escalar_compl($Carga2Cmva,$Sbase);
    $Carga3C=new Num_Complexo(0,0,'r');$checka_inf]=$Carga3C->divide_escalar_compl($Carga3Cmva,$Sbase);

    $XtC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $XtC->multiplica_escalar_compl($TzC,($Sbase/$Ts));
    $YtC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $checka_inf]=$YtC->inverte_compl($XtC);
    $XIC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $XIC->multiplica_escalar_compl($LzC,($Ll*($Sbase/pow($Vbase["vb2"],2))));
    $YIC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $checka_inf]=$YIC->inverte_compl($XIC);
    $Y12C=new Num_Complexo(0,0,'r'); $Y12C->subtrai_compl($ZEROC,$YtC);
    $Y22C=new Num_Complexo(0,0,'r'); $Y22C->soma_compl($YtC,$YIC);
    $Y32C=new Num_Complexo(0,0,'r'); $Y32C->subtrai_compl($ZEROC,$YIC);
    $YMC=new Matrices_compl(array(array($YtC,$Y12C,new Num_Complexo(0,0,'r')),
    array($Y12C,$Y22C,$Y32C),
    array(new Num_Complexo(0,0,'r'),$Y32C,$YIC)));

    $V2[]=$UMC;
    $tmp1C->subtrai_compl($ZEROC,$YMC->retorna_elemento(1,0));
    $tmp2C->multiplica_compl($tmp1C,$V1C);
    $V2cte=new Num_Complexo(0,0,'r'); $checka_inf]=$V2cte->divide_compl($tmp2C,$YMC->retorna_elemento(1,1));
    $tmp1C=$Carga2C; $tmp1C->preal *= (-1);
    $V2fv2=new Num_Complexo(0,0,'r'); $checka_inf]=$V2fv2->divide_compl($tmp1C,$YMC->retorna_elemento(1,1));
    $tmp1C->subtrai_compl($ZEROC,$YMC->retorna_elemento(1,2));
    $V2fv3=new Num_Complexo(0,0,'r'); $checka_inf]=$V2fv3->divide_compl($tmp1C,$YMC->retorna_elemento(1,1));
    $V3[]=$UMC;
    /* $V3cte=new Num_Complexo(0,0,'r'); */
    $tmp1C->subtrai_compl($ZEROC,$YMC->retorna_elemento(2,1));
    $V3fv2=new Num_Complexo(0,0,'r'); $checka_inf]=$V3fv2->divide_compl($tmp1C,$YMC->retorna_elemento(2,2));
    $tmp1C=$Carga3C; $tmp1C->preal *= (-1);
    $V3fv3=new Num_Complexo(0,0,'r'); $checka_inf]=$V3fv3->divide_compl($tmp1C,$YMC->retorna_elemento(2,2));

    $V2hh=new Num_Complexo(0,0,'r');
    $V3hh=new Num_Complexo(0,0,'r');
    $errod=1.000001;
    for($h=0; ($h != $totit) && ($errod[$h] > $erroit); $h++){
    {
        $tmp1C=$V2[$h]; $tmp1C->conjugado_compl();
        $checka_inf]=$tmp2C->divide_compl($V2fv2,$tmp1C);
        $tmp1C->multiplica_compl($V2fv3,$V3[$h]);
        $V2hh->soma_compl($tmp1C,$tmp2C);
        $V2hh->soma_compl($V2hh,$V2cte);

        $tmp1C=$V3[$h]; $tmp1C->conjugado_compl();
        $checka_inf]=$tmp2C->divide_compl($V3fv3,$tmp1C);
        $tmp1C->multiplica_compl($V3fv2,$V2[$h]);
        $V3hh->soma_compl($tmp1C,$tmp2C);

        $V2[]=$V2hh;
        $V3[]=$V3hh;
        $errod1=abs($V2[$h]->preal)-($V2[$h+1]->preal);
    }
    }
}
```




```
$errod2=abs($V3[$h]->preal)-($V3[$h+1]->preal);
$errod[]=$errod1>$errod2?$errod1:$errod2;
}

$desc_ex1="<p>Tens&atilde;o na barra 1: V<sub>1</sub>=<math>V_1</math>=<math>V_1</math>->preal."</p>";
$desc_ex1="<p>Trafo: "<math>V</math>["vi"]</math>." "<math>V</math>["vo"]</math>." [KV], ";
$desc_ex1="<math>S</math><sub>n</sub>=<math>S</math>." [MVA], x="<math>T</math>C->pimag * 100)." %</p>";
$desc_ex1="<p>Linha: L="<math>L</math>." [Km], x="<math>L</math>C->pimag." [ohms/Km]</p>";
$desc_ex1="<p>Carga na barra 2: "<math>C</math>Carga2Cmva->preal."</p>";
$desc_ex1="<p>Carga na barra 3: "<math>C</math>Carga3Cmva->preal."</p>";
$desc_ex1="<p>Itera&ccedil;&otilde;es: "<math>S</math>totit." itera&ccedil;&otilde;es ou erro de "<math>S</math>errodit.</p>";
$desc_ex1="<p>Dados auxiliares: S<sub>b</sub>=<math>S</math>base." [MVA], ";
$desc_ex1="V<sub>b</sub>=<math>V</math>base["vb1"]</math>." [KV], V<sub>b</sub>=<math>V</math>base["vb2"]</math>." [KV]</p>";

/*
echo "<h2>### Debug: ###</h2>";
//<math>V</math>2fv3->echocmpl(4); echo " pu<br />";
$YtC->echocmpl(4); echo " pu<br />";
$YIC->echocmpl(4); echo " pu<br />";
$YMC->desc_matriz_cmpl(); echo "<hr>";
for ($a=0; $a != count($errod); $a++){
    echo "h="<math>S</math>." (erro: "<math>S</math>errod["a"]</math>); echo "<br>";
    $V2[$a]->conv_rec2polar(); $V2[$a]->echocmpl(9); echo " pu<br />";
    $V3[$a]->conv_rec2polar(); $V3[$a]->echocmpl(9); echo " pu<br />";
}
echo "#####</h2>";
*/

?>

...
<?php
if(isset($_POST["resolver2"])&&$_POST["resolver2"]){
    if(isset($_POST["ex2_decimais"])&&is_numeric($_POST["ex2_decimais"])) $arredonda=$_POST["ex2_decimais"];
    else $arredonda=ARREDONDAMENTO;
    $checka_inf=0;

    $Carga1C=new Num_Complexo($_POST["ex2_b1p"],$_POST["ex2_b1q"],'r');
    $V2C=new Num_Complexo($_POST["ex2_b2v"],$_POST["ex2_b2f"],'r');
    $LzC=new Num_Complexo($_POST["ex2_lzr"],$_POST["ex2_lzi"],'r');
    $Ic=($_POST["ex2_ic"] * 0.000000001);
    $LI=$_POST["ex2_LI"];
    $Sbase=$_POST["ex2_sb"];
    $totit=($_POST["ex2_iteracoes"]=="n")?$POST["ex2_niteracoes"]:10;
    $errodit=($_POST["ex2_iteracoes"]=="e")?$POST["ex2_erro"]:0.00000001;

    $Zbase=(pow($V2C->preal,2)/$Sbase);
    $carga1p=((($Carga1C->preal)/$Sbase);
    $carga1q=((($Carga1C->pimag)/$Sbase);

    $ZIC=new Num_Complexo(0,0,'r');
    $tmp1C->multiplica_escalar_cmpl($LzC,$LI);
    $checka_inf=$ZIC->divide_escalar_cmpl($tmp1C,$Zbase);
    $YIC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $checka_inf=$YIC->inverte_cmpl($ZIC);
    $tmp1C=new Num_Complexo(0,$OMEGA,'r');
    $tmp2C->multiplica_escalar_cmpl($tmp1C,((($LI*$Ic)/2));
    $YcC=new Num_Complexo(0,0,'r'); $YcC->multiplica_escalar_cmpl($tmp2C,$Zbase);

    $tmp1C->soma_cmpl($YIC,$YcC);
    $tmp2C->subtrai_cmpl($ZEROC,$YIC);
    $YMC=new Matrices_cmpl(array(array($tmp1C,$tmp2C),array($tmp2C,$tmp1C)));
    //echo "<h3>[Y] = "; $YMC->desc_matriz_cmpl(); echo "</h3>";

    $gb11=$YMC->retorna_elemento(0,0); $g11=$gb11->preal; $b11=$gb11->pimag;
    $gb12=$YMC->retorna_elemento(0,1); $g12=$gb12->preal; $b12=$gb12->pimag;
    $GB11=array("G"=>$g11,"B"=>$b11);
    $GB12=array("G"=>$g12,"B"=>$b12);
    //echo "<h3>G11=("<math>G</math>["G"]</math>), B11=("<math>B</math>["B"]</math>), G12=("<math>G</math>["G"]</math>), B12=("<math>B</math>["B"]</math>)</h3>";

    function Ft1v1t2v2 ($v1,$t1,$GB11,$GB12,$carga1p,$carga1q){
        $F1 = (pow($v1,2) * $GB11["G"]) + ($v1 * (($GB12["G"] * cos($t1)) + ($GB12["B"] * sin($t1)))) + ($carga1p);
        $F2 = (pow($v1,2) * (-1) * $GB11["B"]) + ($v1 * (($GB12["G"] * sin($t1)) - ($GB12["B"] * cos($t1)))) + ($carga1q);
    }
}
```



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

```
return (new Matrices(array(array($F1),array($F2))));
}

function Jacobiano ($v1,$t1,$GB11,$GB12){
    $df1dt1 = ($v1 * (((-1) * $GB12["G"] * sin($t1)) + ($GB12["B"] * cos($t1))));
    $df1dv1 = ((2 * $GB11["G"] * $v1) + ($GB12["G"] * cos($t1)) + ($GB12["B"] * sin($t1)));
    $df2dt1 = ($v1 * (($GB12["G"] * cos($t1)) + ($GB12["B"] * sin($t1)));
    $df2dv1 = ((2 * ((-1) * $GB11["B"] * $v1) + ($GB12["G"] * sin($t1)) - ($GB12["B"] * cos($t1)));
    return (new Matrices(array(array($df1dt1,$df1dv1),array($df2dt1,$df2dv1))));
}

function ProximoX ($x,$jacobiano,$ft1v1t2v2){
    $check=$jacobiano->inv_classica_matrizes();
    $tmpM=$jacobiano->multiplica_matrizes($jacobiano,$ft1v1t2v2);
    $x->soma_matrizes($tmpM,0);
    // echo "Teta1 | V1 :: "; $x->desc_matriz(); echo "<br />";
    $dt=abs($tmpM->retorna_elemento(0,0));
    $dv=abs($tmpM->retorna_elemento(1,0));
    $erro=($dt > $dv)?$dt:$dv;
    // echo "Erro :: ".$erro; echo "<br />";
    return (array($x,$check,$erro));
}

function CalcpX ($v1,$t1,$GB11,$GB12,$carga1p,$carga1q){
    $ft1v1t2v2=ft1v1t2v2($v1,$t1,$GB11,$GB12,$carga1p,$carga1q);
    // echo "F1 | F2 :: "; $ft1v1t2v2->desc_matriz(); echo "<br />";
    $jacobiano=Jacobiano($v1,$t1,$GB11,$GB12);
    // echo "Jacobiano :: "; $jacobiano->desc_matriz(); echo "<br />";
    $x=new Matrices(array(array($t1),array($v1)));
    return (ProximoX($x,$jacobiano,$ft1v1t2v2));
}

$V1[]=1;
$T1[]=0;
$erro=1.000001;
$h=0;
for(;$h!=$totit) && ($erro[$h] > $erroit); $h++){
    //echo "<hr>Iteração (".$h+1).":<br />";
    $resultado=CalcpX($V1[$h],$T1[$h],$GB11,$GB12,$carga1p,$carga1q);
    $v1t1=$resultado[0];
    $V1[]=$v1t1->retorna_elemento(1,0);
    $T1[]=$v1t1->retorna_elemento(0,0);
    $checka_inf=$resultado[1];
    // $erro=$resultado[2];
    $erro[]=$resultado[2];
}

$desc_ex2="<p>Carga na barra 1: P = ".$Carga1C->preal." [MW], Q = ".$Carga1C->pimag." [MVA]</p>";
$desc_ex2="<p>Tensão na barra 2: V<sub>2</sub> = ".$V2C->preal."&lt;". $V2C->pimag."&deg; [KV]</p>";
$desc_ex2="<p>Linha: Z = ".$LzC->preal."&lt;". $LzC->pimag." [ohms/Km], Comprimento = ".$Ll." [Km], C = " .
    $lc." [nF/Km]</p>";
$desc_ex2="<p>Iterações: ".$totit." iterações ou erro de ".$erroit."</p>";
$desc_ex2="<p>S<sub>b</sub> = ".$Sbase." [MVA]</p>";

/*
echo "<h2>### Debug: ###<br />";
// $YIC->echocmpl(6); echo " pu<br />";
// $YcC->echocmpl(6); echo " pu<br />";
// $YMC->desc_matriz_cmpl();
echo "[Teta1] [V1]"; echo "<br />";
echo "[&nbsp;] [T1]"; echo "<br />";
echo "[&nbsp;] [V1]"; echo "<br />";
echo "#####</h2>";
*/
```

?>



Representação dos Sistemas de Potência: Matriz de Admitâncias Nodais:

```
...
<?php
if(isset($_POST["resolver"])){
    $matriz_y = array(array(0.0,0.0,0.0,0.0,0.0),
        array(0.0,0.0,0.0,0.0,0.0),
        array(0.0,0.0,0.0,0.0,0.0),
        array(0.0,0.0,0.0,0.0,0.0),);
    $var_float = array(0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0);
    $var_str = array($_POST["ex1_z1"],$_POST["ex1_z2"],$_POST["ex1_z3"],$_POST["ex1_z4"],$_POST["ex1_y5"],
        $_POST["ex1_y6"],);
    for($i=0;$i<6;$i++) $var_float[$i] = ( double ) $var_str[$i];
    for($i=0;$i<4;$i++){
        if(abs($var_float[$i])>0) $var_float[$i] = -(1/$var_float[$i]);
        else $var_float[$i] = 9e499;
    }
    $matriz_y[0][0] = $var_float[0] + $var_float[1];
    $matriz_y[0][1] = -($matriz_y[0][0]);
    $matriz_y[0][2] = 0.0;
    $matriz_y[0][3] = 0.0;
    $matriz_y[1][0] = $matriz_y[0][1];
    $matriz_y[1][1] = $var_float[0] + $var_float[1] + $var_float[2] + $var_float[4];
    $matriz_y[1][2] = -($var_float[2]);
    $matriz_y[1][3] = 0.0;
    $matriz_y[2][0] = 0.0;
    $matriz_y[2][1] = $matriz_y[1][2];
    $matriz_y[2][2] = $var_float[2] + $var_float[3] + $var_float[5];
    $matriz_y[2][3] = -($var_float[3]);
    $matriz_y[3][0] = 0.0;
    $matriz_y[3][1] = 0.0;
    $matriz_y[3][2] = $matriz_y[2][3];
    $matriz_y[3][3] = $var_float[3];
    $matriz_y_resp = array(array(0.0,0.0,0.0,0.0,0.0),
        array(0.0,0.0,0.0,0.0,0.0),
        array(0.0,0.0,0.0,0.0,0.0),
        array(0.0,0.0,0.0,0.0,0.0),);
    foreach( $matriz_y as $indice1 => $matriz){
        foreach($matriz as $indice2 => $valor){
            if(abs($valor) > 0){
                if($valor < 0) $matriz_y_resp[$indice1][$indice2] = "-j".abs($valor);
                else $matriz_y_resp[$indice1][$indice2] = "j".abs($valor);
            }else $matriz_y_resp[$indice1][$indice2] = "0";
        }
    }
    switch($_POST["resolver"]){
        case "1": //### Modo resposta
    }
?>
...
```



Bibliotecas de funções desenvolvidas:

comum.php:

Localização: '/libphpscript/comum.php'

Função: Coleção de funções comuns a todas as páginas.

```
<?php
/*
$menu1 : Menu superior
$menu2 : Menu inferior
$subnivel : Deslocamento da pagina em relacao ao '/'
$tipo :
    0 = menu topo
    1 = menu lateral ::
    2 = rodape :: $menu2 indica a contagem de corte

- Para os links assumir que se esta um nivel acima do raiz
- O (*) antes do titulo indica que a pagina deve ser indicada como 'em construccao'
*/
function monta_menu ($menu1, $menu2, $subnivel, $tipo)
{
    ##### Parâmetros para construir o menu
    $menu_omo_bg = "#9999FF";
    //onmouseover="this.style.backgroundColor='".$menu_omo_bg.'" onmouseout="this.style.backgroundColor="

    ##### Menu inicial, rodape permanente
    $mn00 = array(
        array("Circuitos trifásicos", "../modulos/circ3f/index.php"),
        array("Valores por unidade", "../modulos/valpu/index.php"),
        array("Componentes simétricas", "../modulos/compsim/index.php"),
        array("Estudo de curto circuito na rede", "../modulos/ccrede/index.php"),
        array("Fluxo de potência em sistemas de potência", "../modulos/fluxopot/index.php"),
        array("Representação dos sistemas de potência", "../modulos/repispot/index.php")
    );

    ##### Menu descritivos
    $mn01 = array(
        array("Introdução", "../descritivos/intro.php"),
        array("Objetivos", "../descritivos/objetivos.php"),
        array("Escopo", "../descritivos/escopo.php"),
        array("Mapa do site", "../descritivos/mapa_site.php"),
        array("Bibliografia", "../descritivos/bibliografia.php")
    );

    ##### Circuitos trifásicos
    $mn10 = array(
        array("Definição", "../modulos/circ3f/teoria/mat_circ_3f.php#man010"),
        array("Sequência de Fases", "../modulos/circ3f/teoria/mat_circ_3f.php#man020"),
        array("Ligações Trifásicas", "../modulos/circ3f/teoria/mat_circ_3f.php#man030"),
        array("Circuitos trifásicos com cargas desequilibradas", "../modulos/circ3f/teoria/mat_circ_3f.php#man040"),
        array("Potências", "../modulos/circ3f/teoria/mat_circ_3f.php#man050"),
        array("Exercícios Interativos", "../modulos/circ3f/interativo/exercicio_circ3f.php")
    );

    ##### Valores por unidade
    $mn20 = array(
        array("Definições e grandezas de base", "../modulos/valpu/teoria/mat_val_pu.php#man010"),
        array("Representação de traços em pu", "../modulos/valpu/teoria/mat_val_pu.php#man020"),
        array("Choque de bases", "../modulos/valpu/teoria/mat_val_pu.php#man030"),
        array("Diagrama Unifilar", "../modulos/valpu/teoria/mat_val_pu.php#man040"),
        array("Exercícios Interativos", "../modulos/valpu/interativo/exercicio_valpu.php")
    );
}
```



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

Componentes simétricas

```
$mn30 = array(
    array("Definição e Matrizes de transformação", "../modulos/compsim/teoria/mat_compsim.php#man010"),
    array("Matriz de Impedância em Componentes Simétricas", "../modulos/compsim/teoria/mat_compsim.php#man020"),
    array("Carga com Impedância de Aterramento", "../modulos/compsim/teoria/mat_compsim.php#man030"),
    array("Circuitos Trifásicos desequilibrados", "../modulos/compsim/teoria/mat_compsim.php#man040"),
    array("Transformadores Trifásicos em Componentes Simétricas",
        "../modulos/compsim/teoria/mat_compsim.php#man050"),
    array("Exercícios Interativos", "../modulos/compsim/interativo/exercicio_compsim.php")
);
```

Estudo de curto circuito na rede

```
$mn40 = array(
    array("Introdução", "../modulos/ccrede/teoria/mat_curto.php#man010"),
    array("Curto trifásico", "../modulos/ccrede/teoria/mat_curto.php#man020"),
    array("Curto fase-terra", "../modulos/ccrede/teoria/mat_curto.php#man030"),
    array("Curto dupla-fase", "../modulos/ccrede/teoria/mat_curto.php#man040"),
    array("Curto dupla-fase-terra", "../modulos/ccrede/teoria/mat_curto.php#man050"),
    array("Exercícios Interativos", "../modulos/ccrede/interativo/exercicio_ccrede.php")
);
```

Fluxo de potência em sistemas de potência

```
$mn50 = array(
    array("Formulação do problema de fluxo de potência", "../modulos/fluxopot/teoria/mat_fluxopot.php#man010"),
    array("Solução pelo método de Gauss-Seidel", "../modulos/fluxopot/teoria/mat_fluxopot.php#man020"),
    array("Solução pelo método de Newton-Raphson", "../modulos/fluxopot/teoria/mat_fluxopot.php#man030"),
    array("Exercícios Interativos", "../modulos/fluxopot/interativo/exercicio_fluxopot.php")
);
```

Representação dos sistemas de potência

```
$mn60 = array(
    array("Álgebra matricial", "../modulos/repisipot/teoria_algmat/mat_alg_mat.php"),
    array("Matriz de admitâncias nodais", "../modulos/repisipot/teoria/mat_adm_nod.php"),
);
```

Álgebra matricial (Representação dos sistemas de potência)

```
$mn61 = array(
    array("Multiplicação de matrizes", "../modulos/repisipot/teoria_algmat/mat_alg_mat.php#man020"),
    array("Partição de matrizes", "../modulos/repisipot/teoria_algmat/mat_alg_mat.php#man030"),
    array("Matriz Nula", "../modulos/repisipot/teoria_algmat/mat_alg_mat.php#man040"),
    array("Matriz Identidade", "../modulos/repisipot/teoria_algmat/mat_alg_mat.php#man050"),
    array("Matriz transposta", "../modulos/repisipot/teoria_algmat/mat_alg_mat.php#man060"),
    array("Inversão de matriz", "../modulos/repisipot/teoria_algmat/mat_alg_mat.php#man070"),
    array("Regra de Cramer", "../modulos/repisipot/teoria_algmat/mat_alg_mat.php#man080")
);
```

Matriz de admitâncias nodais (Representação dos sistemas de potência)

```
$mn62 = array(
    array("Definição da matriz de admitância nodal", "../modulos/repisipot/teoria/mat_adm_nod.php#man020"),
    array("Definição de elementos: barra, barra swing e corrente injetada",
        "../modulos/repisipot/teoria/mat_adm_nod.php#man030"),
    array("Admitância de entrada (em curto circuito)", "../modulos/repisipot/teoria/mat_adm_nod.php#man040"),
    array("Admitância de transferência (em curto circuito)", "../modulos/repisipot/teoria/mat_adm_nod.php#man050"),
    array("Montagem da matriz Ybus", "../modulos/repisipot/teoria/mat_adm_nod.php#man060"),
    array("Exercício Interativo", "../modulos/repisipot/interativo/exercicio_adm_nod.php")
);
```

/*

```
#####
### Para quem tiver interesse em incluir, segue sugestões de tópicos dados pelo orientador: ###
#####
*/
```

Matriz de impedâncias nodais (Representação dos sistemas de potência)

```
$mn63 = array(
    array("Definição e relação com a Ybus", "../principal/em_construcao.htm"),
    array("Impedância de entrada", "../principal/em_construcao.htm"),
    array("Impedância de transferência", "../principal/em_construcao.htm"),
    array("Montagem e modificação da Zbus", "../principal/em_construcao.htm"),
    array("Exercícios Interativos", "../principal/em_construcao.htm")
);
```



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

);

Aplicação, eliminação de nós e equivalentes de redes (Representação dos sistemas de potência)

\$mn64 = array(

```
array("Redes Equivalentes", "../principal/em_construcao.htm"),
array("Triangularização", "../principal/em_construcao.htm"),
array("Redução de kron", "../principal/em_construcao.htm"),
array("Eliminação de Gauss", "../principal/em_construcao.htm"),
array("Exercícios Interativos", "../principal/em_construcao.htm")
);
```

for(\$i=0,\$correcao="";\$i<\$subnivel;\$i++) \$correcao.="./";

switch (\$tipo) {

case 0:

```
##### exemplo de chamada :: echo monta_menu("", "", 1, 0);
$menu="<table width='775' border='0' cellpadding='0' cellspacing='0'><tr>";
$menu.="<td width='30' height='30' valign='top' bgcolor='#003399'><img";
$menu.="<td align='center' bgcolor='#003399'><font color='#FFFFFF'>&nbsp;</font> <font";
$menu.="<td width='30' valign='top' bgcolor='#003399'><img";
$menu.="<td bgcolor='#003399'>&nbsp;</td>";
$menu.="<td bgcolor='#003399'><div align='center'>";
$menu.="<table width='100%' border='0' cellspacing='0' cellpadding='0'><tr>";
$menu.="<td width='120'>&nbsp;</td>";
$menu.="<td><div align='center'><a href='".$correcao."../principal/index.php'>";
$menu.="<img src='".$correcao."../imagens/top_banner_009.jpg' width='585' height='49' border='0'";
$menu.="<td width='10'>&nbsp;</td></tr></div></td>";
$menu.="<td width='30' height='30' bgcolor='#003399'>&nbsp;</td></tr>";
$menu.="<tr><td width='30' height='30' bgcolor='#003399'>&nbsp;</td>";
$menu.="<td height='30' align='center' bgcolor='#003399'>&nbsp;</td>";
$menu.="<td width='30' height='30' bgcolor='#003399'><img";
$menu.="<td width='30' height='30' bgcolor='#003399'><img src='".$correcao."../imagens/cantos/id.gif' width='30' height='30'></td></tr></table>";
break;
```

case 1:

```
##### exemplo de chamada :: echo monta_menu("mn10", "mn00", 1, 1);
$menu="<table width='1450' border='0' cellpadding='5' cellspacing='0' bgcolor='#003399'>";
$menu.="<tr><td width='5'>&nbsp;</td><td class='Menu2texto'>&nbsp;</td><td width='5'>";
$menu.="&nbsp;</td></tr>";
if($menu2=="") $estilo="Menu2texto";
else $estilo="Menu1texto";
foreach($menu1 as $selemento){
    if(substr($selemento[0],0,1)!="") $menu.="<tr><td>&nbsp;</td><td class='".$estilo."'";
    $menu.="onmouseover='this.style.backgroundColor='".$menu_omo_bg."'";
    $menu.="onmouseout='this.style.backgroundColor='".$estilo."' align='left'";
    $menu.="valign='middle'><a href='".$correcao.$selemento[1]."'><span";
    $menu.="class='".$estilo."'>".htmlentities($selemento[0])."</span></a></td><td>";
    $menu.="&nbsp;</td></tr>";
    else $menu.="<tr><td>&nbsp;</td><td class='".$estilo."'";
    $menu.="onmouseover='this.style.backgroundColor='".$menu_omo_bg."'";
    $menu.="onmouseout='this.style.backgroundColor='".$estilo."' align='left' valign='middle'><a";
    $menu.="href='".$correcao.$selemento[1]."'><span class='".$estilo."'><font";
    $menu.="color='#00FFFF'>".htmlentities(substr($selemento[0],1))."</font></span></a></td><td>";
    $menu.="&nbsp;</td></tr>";
}
##### formato :: $menu.="<tr><td>&nbsp;</td><td class='Menu1texto'><a href='XXXXXX'><span";
$menu.="class='Menu1texto'>XXXXXXX</span></a></td><td>&nbsp;</td></tr>";
if($menu2!=""){
    $menu.="<tr><td>&nbsp;</td><td class='Menu1texto'><hr></td></tr>";
    foreach($menu2 as $selemento){
        if(substr($selemento[0],0,1)!="") $menu.="<tr><td>&nbsp;</td><td class='Menu2texto'";
        $menu.="onmouseover='this.style.backgroundColor='".$menu_om";
        $menu.="o_bg."' onmouseout='this.style.backgroundColor='".$estilo."'";
        $menu.="align='left' valign='middle'><a";
        $menu.="href='".$correcao.$selemento[1]."'><span";
        $menu.="class='Menu2texto'>".htmlentities($selemento[0])."</spa";
        $menu.="n></a></td><td>&nbsp;</td></tr>";
    }
}
```


ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

```

else $menu.="<tr><td>&nbsp;</td><td class='\"Menu2texto\""
onmouseover='\"this.style.backgroundColor=\".\".$menu_omo_bg.\"\""
onmouseout='\"this.style.backgroundColor=\"\" align='\"left\""
valign='\"middle\"'><a href='\".\".$correcao.$elemento[1].\"\"><span
class='\"Menu2texto\"'><font
color='\"#00FFFF\"'>\"htmlentities(substr($elemento[0],1)).\"</font></span></a>
</td><td>&nbsp;</td></tr>";

```

```

    }
}
$menu = "<tr><td>&nbsp;</td><td class='\"Menu2text0\"'>&nbsp;</td></tr>";
$menu = "</table>";
break;

```

case 2:

```
//### exemplo de chamada :: echo monta_menu("mn00",4,1,2);
$menu="<table width='775' border='0' cellpadding='0' cellspacing='0'><tr>;
$menu.="<td width='30' bgcolor=''#003399'>&nbsp;</td><td rowspan='2' valign='middle'
      bgcolor=''#003399'>;
$menu.="<div align='center'><table width='100%' border='0' cellspacing='0'
      cellpadding='0'><tr><td width='120'>&nbsp;</td><td class='RodapeTexto'><div
      align='left'>;
$contacorte=0;
foreach($menu1 as $selemento){
    if($contacorte==$menu2) $menu.=" <br>";
    if(substr($selemento[0],0,1)!="") $menu.=" | <a href='\". $correcao.$selemento[1].\"'><span
      class='RodapeTexto'>\". htmlentities($selemento[0]).\"</span></a>;
    else $menu.=" | <a href='\". $correcao.$selemento[1].\"'><span class='RodapeTexto'><font
      color='\"#FFFF00'>\". htmlentities(substr($selemento[0],1)).\"</font></span></a>;
    $contacorte++;
}
//### formato :: $menu.="| <a href='\"XXXXXX'><span class='RodapeTexto'>XXXXXXXXXX</span></a>";
$menu.="</div></td><td width='10'>&nbsp;</td></tr></table></div></td>;
$menu.="<td align='right' valign='top' bgcolor=''#003399'> <img
      src='\". $correcao.\"../imagens/cantos/sd.gif\" width='30' height='30'></td></tr><tr>;
$menu.="<td width='30' height='30' valign='bottom' bgcolor=''#003399'><img
      src='\". $correcao.\"../imagens/cantos/ie.png\" width='30' height='30'></td>;
$menu.="<td width='30' height='30' align='right' valign='bottom' bgcolor=''#003399'><img
      src='\". $correcao.\"../imagens/cantos/id.gif\" width='30' height='30'></td></tr></table>;
break;
```

default:

```
$menu="<h3><font color='\#FF0000\'>Opcao invalida para menu</font></h3>";
```

}

```
return($menu);
```

}

^{1*}

Stopico : Obrigatorio

\$subtopico : Opcional -> implica altura dupla

\$nivel : Deslocamento da pagina em relacao ao /

1

```
function monta_topico ($topico, $subtopico, $nivel)
```

3

```
for($i=0;$correcao="";$i<$nivel;$i++) $correcao.="./";
```

```
if(trim($subtopico)){
    $tamanho=20;
    $swidth=20;
    $sheight=40;
    $tipo=2;
```

}

```
else{
    $tamanho=10;
    $swidth=10;
    $sheight=20;
    $stipo=1;
}
```

}

\$tonico ins="<table width='100%' border='0' cellpadding='0' cellspacing='0'>;

```
$topico_ins=<table width=\100\% border=\1\0 cellpadding=\1\0 cellspacing=\1\0>
$topico_ins="<tr><td width=\1\%\>$tamanho.\1\%>&nbsp;</td><td width=\1\%\>&nbsp;</td><td width=\1\%\>$tamanho.\1\%>&nbsp;</td></tr><tr><td colspan=\3\></td></tr></table>";
```

\$topico_ins."<td align="left" valign="top" bgcolor="#3366FF"><img
src="" \$correcao."/imagens/cantos/topico_".\$tipo."e.gif" width="" \$cwidth." height="" \$height." /></td>";



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

```
$topico_ins.="<td bgcolor=\"\#3366FF\" align=\"center\" class=\"\TextoTitulo001\">...: ".htmlentities($topico)." ...";
if(trim($subtopico)) $topico_ins.="<br /><span class=\"\TextoTitulo003\">- ".htmlentities($subtopico)." -</span>";

$topico_ins.="</td><td align=\"right\" valign=\"top\" bgcolor=\"\#3366FF\"><img
src=\"\".$correcao."../imagens/cantos/topico_".$tipo."d.gif" width=\"\".$cwidth."\" height=\"\".$sheight."\" /></td>";
$topico_ins.="</tr></table>";

return($topico_ins);
}

function regua_navegacao ()
{
    //A informação contida na âncora é descartada
    $pagina=$_SERVER['PHP_SELF'];
    $divregua="<div align=\"center\">";
    $divregua.="<form action=\"\".$pagina."\" method=\"post\" name=\"\fincregua\" target=\"\self\" id=\"\fincregua\">";
    if(((isset($_POST['incregua']))&&($_POST['incregua']==1)) || ((isset($_GET['incregua']))&&($_GET['incregua']==1)))
        $parametro=array(0,"Desativar Regua",1);
    else $parametro=array(1,"Ativar Regua",0);
    $divregua.="<input name=\"\bot_regua\" type=\"\submit\" class=\"\BotRegua\" id=\"\bot_regua\"
        onClick=\"\window.document.fincregua.incregua.value=\".$parametro[0].\"\" value=\"\".$parametro[1].\"\" />";
    $divregua.="<input name=\"\incregua\" type=\"\hidden\" id=\"\incregua\" value=\"\".$parametro[2].\"\" />";
    $divregua.="</form></div>";
    echo $divregua;
}
?>
```




ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

exercícios_lib.php:

Localização: '/libphpscript/exercícios_lib.php'

Função: Coleção de constantes e funções de apoio, comuns às páginas de exercício interativo.

```
<?php
/*
M_PI          3.14159265358979323846  Pi
M_E          2.7182818284590452354  e
M_LOG2E      1.4426950408889634074  log_2 e
M_LOG10E     0.43429448190325182765  log_10 e
M_LN2        0.69314718055994530942  log_e 2
M_LN10       2.30258509299404568402  log_e 10
M_PI_2       1.57079632679489661923  pi/2
M_PI_4       0.78539816339744830962  pi/4
M_1_PI       0.31830988618379067154  1/pi
M_2_PI       0.63661977236758134308  2/pi
M_SQRTPI     1.77245385090551602729  sqrt(pi) [4.0.2]
M_2_SQRTPI   1.12837916709551257390  2/sqrt(pi)
M_SQRT2      1.41421356237309504880  sqrt(2)
M_SQRT3      1.73205080756887729352  sqrt(3) [4.0.2]
M_SQRT1_2    20.70710678118654752440  1/sqrt(2)
M_LNPI       1.14472988584940017414  log_e(pi) [4.0.2]
M_EULER      0.57721566490153286061  Euler constant [4.0.2]
*/
```

/* Diversos */

```
$tmp1C=new Num_Complexo(0,0,'r');
$tmp2C=new Num_Complexo(0,0,'r');
```

/* Constantes */

```
$ARREDONDAMENTO=6;
$OMEGA=376.991118431;
$KM_SQRT3=1.73205080756887729352; //sqrt(3)
$KM_PI=3.14159265358979323846; //Pi
$ZEROC=new Num_Complexo(0,0,'r');
$UMC=new Num_Complexo(1,0,'r');
$DOISC=new Num_Complexo(2,0,'r');
$TRESCE=new Num_Complexo(3,0,'r');
$UMC3=new Num_Complexo((1/3),0,'r');
```

/* Raiz de 3 com 30 graus */

```
$R330Gp=new Num_Complexo(1.73205080756887729352,30,'p');
$R3n30Gp=new Num_Complexo(1.73205080756887729352,-30,'p');
$R330Gr=new Num_Complexo(1.5,0.866025403784);
$R3n30Gr=new Num_Complexo(1.5,-0.866025403784);
```

/* 30 graus */

```
$A30Gr=new Num_Complexo(0.866025403784,0.5);
$An30Gr=new Num_Complexo(0.866025403784,-0.5);
```

/* 60 graus */

```
$A60Gr=new Num_Complexo(0.5,0.866025403784);
$An60Gr=new Num_Complexo(0.5,-0.866025403784);
```

/* Alpha */

```
$ALPHAr=new Num_Complexo(-0.5,0.866025403784);
$ALPHA2r=new Num_Complexo(-0.5,-0.866025403784);
$ALPHA3r=new Num_Complexo(-0.166666666666,0.288675134594);
$ALPHA2r3=new Num_Complexo(-0.166666666666,-0.288675134594);
```



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

```
/* Matriz [T] */
$MATRIZTr=new Matrices_cmpl(array(array($UMC,$UMC,$UMC),
                                     array($UMC,$ALPHA2r,$ALPHAr),
                                     array($UMC,$ALPHAr,$ALPHA2r)));
$MATRIZnTr=new Matrices_cmpl(array(array($UMC3,$UMC3,$UMC3),
                                     array($UMC3,$ALPHAr3,$ALPHA2r3),
                                     array($UMC3,$ALPHA2r3,$ALPHAr3)));

/* Funcoes */
function verifica_erro ($matriz_erro)
{
    foreach($matriz_erro as $possivel_erro)
        if($possivel_erro) echo "<h2><strong>** Resposta Comprometida **<strong></h2>";
}
?>
```



matrizes.php:

Localização: '/libphpscript/matrizes.php'

Função: Coleção de funções para a manipulação de matrizes de números reais.

```
<?php
/*****
 * Recebe uma array ou array de arrays e guarda em 'elementos'. *
 * 'linhas' e 'colunas' são setadas pelo construtor. *
 *****/
class Matrizes
{
    var $linhas;
    var $colunas;
    var $elementos;

    /* Construtor */
    function Matrizes ($matriz)
    {
        $this->linhas=count($matriz);
        $this->colunas=(is_array($matriz[0]))?count($matriz[0]):1;
        $this->elementos=$matriz;
    }

    /*****
     * Soma os elementos da matriz com o da 'matriz' dada e retorna 0. *
     * No caso de uma subtração, o segundo parâmetro deve ser passado como 0. *
     * Caso as matrizes não sejam compatíveis, retorna 1. *
     *****/
    function soma_matrizes ($matriz, $op=1)
    {
        if(($this->linhas==$matriz->linhas)&&($this->colunas==$matriz->colunas)){
            for($i=0;$i<$this->linhas;$i++)
                for($j=0;$j<$this->colunas;$j++)
                    if($op) $this->elementos[$i][$j]+=$matriz->elementos[$i][$j];
                    else $this->elementos[$i][$j]-=$matriz->elementos[$i][$j];
            return(0);
        }
        return(1);
    }

    /*****
     * Multiplica os valores da matriz por 'escalar'. *
     *****/
    function multescalar_matrizes ($escalar)
    {
        for($i=0;$i<$this->linhas;$i++)
            for($j=0;$j<$this->colunas;$j++)
                $this->elementos[$i][$j]*=$escalar;
        return(0);
    }

    /*****
     * Realiza a multiplicação entre as matrizes 'matriz1' e 'matriz2' e devolve a resposta em uma nova matriz. *
     * Caso as matrizes não sejam compatíveis, retorna o valor 1. *
     *****/
    function multiplica_matrizes ($matriz1, $matriz2)
    {
        if($matriz1->colunas==$matriz2->linhas){
            for($i=0;$i<$matriz1->linhas;$i++){
                for($j=0;$j<$matriz2->colunas;$j++){
                    $elemento=0;
```



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

```
        for($k=0;$k<$matriz1->colunas;$k++)
            $elemento+=$matriz1->elementos[$i][$k]*$matriz2->elementos[$k][$j];

        $resposta[$i][$j]=$elemento;
    }
    return(new Matrices($resposta));
}
else return(1);
}

/*****
 * Calcula e substitui os elementos da matriz atual pela sua transposta. *
 *****/
function transposta_matrizes ()
{
    for($i=0;$i<$this->linhas;$i++)
        for($j=0;$j<$this->colunas;$j++)
            $transposta[$j][$i]=$this->elementos[$i][$j];
    $this->elementos=$transposta;
}

/*****
 * Retorna o menor complementar associado ao elemento x(ei,ej). *
 *****/
function menor_matrizes ($ei, $ej)
{
    for($mi=0;$mi<$this->linhas;$mi++){
        if($mi!=$ei){
            for($mj=0;$mj<$this->colunas;$mj++){
                if($mj!=$ej){
                    $matriz_menor[$mi][$mj]=$this->elementos[$i][$j];
                    $mj++;
                }
            }
            $mi++;
        }
    }
    $mmenor=new Matrices($matriz_menor);
    $menor=$mmenor->determinante_matrizes();
    return($menor);
}

/*****
 * Retorna o cofator relacionado ao elemento x(ci,cj). *
 *****/
function cofator_matrizes ($ci, $cj)
{
    $cofator=pow(-1,($ci+$cj+2))*$this->menor_matrizes($ci,$cj);
    return($cofator);
}

/*****
 * Retorna o determinante da matriz. *
 * Caso a matriz não seja compatível com essa operação, retorna 1. *
 * Caso a matriz seja menor que 4x4, utiliza-se uma solução por força bruta. *
 *****/
function determinante_matrizes ()
{
    if($this->linhas!=$this->colunas) return(1);
    $determinante=0;
    switch($this->linhas){
        case 1:
            $determinante=$this->elementos[0][0];
            break;
        case 2:
            $determinante=($this->elementos[0][0]*$this->elementos[1][1]) -
```



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

```
        ($this->elementos[0][1]*$this->elementos[1][0]);
    case 3:
        break;
        $determinante=($this->elementos[0][0]*$this->elementos[1][1]*$this->elementos[2][2])
        +($this->elementos[0][1]*$this->elementos[1][2]*$this->elementos[2][0])
        +($this->elementos[0][2]*$this->elementos[1][0]*$this->elementos[2][1])
        -($this->elementos[2][0]*$this->elementos[1][1]*$this->elementos[0][2])
        -($this->elementos[2][1]*$this->elementos[1][2]*$this->elementos[0][0])
        -($this->elementos[2][2]*$this->elementos[1][0]*$this->elementos[0][1]);
    default:
        break;
        for($i=0,$j=0;$j<$this->colunas;$j++)
            $determinante+=($this->elementos[$i][$j]*$this->cofator_matrizes($i,$j));
    }
    return($determinante);
}

/*****
 * Realiza a inversão clássica da matriz e retorna 0.
 * Caso a matriz não seja compatível com a operação, retorna 1.
 *****/
function inv_classica_matrizes ()
{
    if($this->linhas!=$this->colunas) return(1);
    if($this->determinante_matrizes()==0) return(1);
    for($i=0;$i<$this->linhas;$i++)
        for($j=0;$j<$this->colunas;$j++)
            $matriz_cofatores[$i][$j]=$this->cofator_matrizes($i,$j);
    $determinante=$this->determinante_matrizes();
    $this->elementos=$matriz_cofatores;
    $this->transposta_matrizes();
    $this->multescalar_matrizes(1/$determinante);
    return(0);
}

/*****
 * Realiza a inversão de shingley-coleman na matriz e retorna 0.
 * Caso a matriz não seja compatível com a operação, retorna 1.
 * Esse método não possui todas as condições de contorno necessárias.
 *****/
function inv_shingley_matrizes ()
{
    if($this->linhas!=$this->colunas) return(1);
    if($this->determinante_matrizes()==0) return(1);
    for($p=0;$p<$this->linhas;$p++){
        if($this->elementos[$p][$p]==0) return(1);
        $this->elementos[$p][$p]=1/$this->elementos[$p][$p];
        for($i=0;$i<$this->linhas;$i++)
            if($i!=$p) $this->elementos[$i][$p]*=$this->elementos[$p][$p];
        for($i=0;$i<$this->linhas;$i++)
            if($i!=$p)
                for($j=0;$j<$this->linhas;$j++)
                    if($j!=$p)
                        $this->elementos[$i][$j]+=$this->elementos[$i][$p]*$this->elementos[$p][$j];
        for($i=0;$i<$this->linhas;$i++)
            if($i!=$p)
                $this->elementos[$p][$i]*=$this->elementos[$p][$p];
    }
    for($i=0;$i<$this->linhas;$i++)
        for($j=0;$j<$this->linhas;$j++)
            $this->elementos[$i][$j]=- $this->elementos[$i][$j];
    return(0);
}
```



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

```
/******  
* Para fins de depuração, esse método descarrega os elementos da matriz na tela. *  
*****/  
function desc_matriz ()  
{  
    for($i=0;$i<$this->linhas;$i++){  
        for($j=0;$j<$this->colunas;$j++){  
            echo $this->elementos[$i][$j]. " , ";  
            echo " | ";  
        }  
    }  
}  
  
/******  
* Retorna o elemento x(i,j). *  
*****/  
function retorna_elemento ($i, $j)  
{  
    return($this->elementos[$i][$j]);  
}
```

```
}  
?>
```



matrizes_cmpl.php:

Localização: '/libphpscript/matrizes_cmpl.php'

Função: Coleção de funções para a manipulação de matrizes de números complexos.

```
<?php
/*****
 * Recebe uma array de números complexos ou array de arrays de números complexos e guarda em 'elementos'. *
 * 'linhas' e 'colunas' são setadas pelo construtor *
 *****/
class Matrizes_cmpl
{
    var $linhas;
    var $colunas;
    var $elementos;

    /* Construtor */
    function Matrizes_cmpl ($matriz)
    {
        $this->linhas=count($matriz);
        $this->colunas=(is_array($matriz[0]))?count($matriz[0]):1;
        $this->elementos=$matriz;
    }

    /*****
     * Soma os elementos da matriz com o da 'matriz' dada e retorna 0. *
     * No caso de uma subtração, o segundo parâmetro deve ser passado como 0. *
     * Caso as matrizes não sejam compatíveis, retorna 1. *
     *****/
    function soma_matrizes_cmpl ($matriz, $op=1)
    {
        if(($this->linhas==$matriz->linhas)&&($this->colunas==$matriz->colunas)){
            for($i=0;$i<$this->linhas;$i++)
                for($j=0;$j<$this->colunas;$j++)
                    if($op) $this->elementos[$i][$j]->soma_cmpl($this->elementos[$i][$j],
                                                                $matriz->elementos[$i][$j]);
                    else $this->elementos[$i][$j]->subtrai_cmpl($this->elementos[$i][$j],
                                                                $matriz->elementos[$i][$j]);
            return(0);
        }
        else return(1);
    }

    /*****
     * Multiplica os valores da matriz por 'escalar_cmpl', um número não complexo. *
     *****/
    function multescalar_matrizes_cmpl ($escalar_cmpl)
    {
        for($i=0;$i<$this->linhas;$i++)
            for($j=0;$j<$this->colunas;$j++)
                $this->elementos[$i][$j]->multiplica_cmpl($this->elementos[$i][$j],$escalar_cmpl);
        return(0);
    }

    /*****
     * Realiza a multiplicação entre as matrizes 'matriz1' e 'matriz2' e devolve a resposta em uma nova matriz. *
     * Caso as matrizes não sejam compatíveis, retorna o valor 1. *
     *****/
    function multiplica_matrizes_cmpl ($matriz1, $matriz2)
    {
        if($matriz1->colunas==$matriz2->linhas){
            $elemento_cmpl=new Num_Complexo(0,0);
```



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

```
$ele_tmp_cmpl=new Num_Complexo(0,0);
for($i=0;$i<$matriz1->linhas;$i++){
    for($j=0;$j<$matriz2->colunas;$j++){
        $elemento_cmpl->preal=0;
        $elemento_cmpl->pimag=0;
        for($k=0;$k<$matriz1->colunas;$k++){
            $ele_tmp_cmpl->multiplica_cmpl($matriz1->elementos[$i][$k],
                                           $matriz2->elementos[$k][$j]);
            $elemento_cmpl->soma_cmpl($elemento_cmpl,$ele_tmp_cmpl);
        }
        $resposta[$i][$j]=$elemento_cmpl;
    }
}
return(new Matrices_cmpl($resposta));
}
else return(1);
}

/*****
 * Calcula e substitui os elementos da matriz atual pela sua transposta. *
 *****/
function transposta_matrizes_cmpl ()
{
    for($i=0;$i<$this->linhas;$i++){
        for($j=0;$j<$this->colunas;$j++){
            $transposta[$i][$j]=$this->elementos[$j][$i];
        }
        $this->elementos=$transposta;
    }
    return(0);
}

/*****
 * Retorna o menor complementar associado ao elemento x(ei,ej). *
 *****/
function menor_matrizes_cmpl ($ei, $ej)
{
    for($mi=0;$mi<$this->linhas;$mi++){
        if($mi!=$ei){
            for($mj=0;$mj<$this->colunas;$mj++){
                if($mj!=$ej){
                    $matriz_menor[$mi][$mj]=$this->elementos[$i][$j];
                    $mj++;
                }
            }
            $mi++;
        }
    }
    $mmenor=new Matrices_cmpl($matriz_menor);
    $menor=$mmenor->determinante_matrizes_cmpl();
    return($menor);
}

/*****
 * Retorna o cofator relacionado ao elemento x(ci,cj). *
 *****/
function cofator_matrizes_cmpl ($ci, $cj)
{
    $cofator=new Num_Complexo(0,0);
    $cofator->multiplica_escalar_cmpl($this->menor_matrizes_cmpl($ci,$cj),pow(-1,($ci+$cj+2)));
    return($cofator);
}

/*****
 * Retorna o determinante da matriz. *
 * Caso a matriz não seja compatível com essa operação, retorna 1. *
 * Caso a matriz seja menor que 4x4, utiliza-se uma solução por força bruta. *
 *****/
function determinante_matrizes_cmpl ()
{

```




ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

```
if($this->linhas!=$this->colunas) return(1);
$determinante=new Num_Complexo(0,0);
$num_cmpl_tmp=new Num_Complexo(0,0);
switch($this->linhas){
    case 1:
        $determinante=$this->elementos[0][0];
        break;
    case 2:
        $diagp=new Num_Complexo(0,0);
        $diags=new Num_Complexo(0,0);
        $diagp->multiplica_cmpl($this->elementos[0][0],$this->elementos[1][1]);
        $diags->multiplica_cmpl($this->elementos[0][1],$this->elementos[1][0]);
        $determinante->subtrai_cmpl($diagp,$diags);
        break;
    case 3:
        $diagp1=new Num_Complexo(0,0);
        $diagp2=new Num_Complexo(0,0);
        $diagp3=new Num_Complexo(0,0);
        $diags1=new Num_Complexo(0,0);
        $diags2=new Num_Complexo(0,0);
        $diags3=new Num_Complexo(0,0);
        $diagp1->multiplica_cmpl($this->elementos[0][0],$this->elementos[1][1]);
        $diagp1->multiplica_cmpl($diagp1,$this->elementos[2][2]);
        $diagp2->multiplica_cmpl($this->elementos[0][1],$this->elementos[1][2]);
        $diagp2->multiplica_cmpl($diagp2,$this->elementos[2][0]);
        $diagp3->multiplica_cmpl($this->elementos[0][2],$this->elementos[1][0]);
        $diagp3->multiplica_cmpl($diagp3,$this->elementos[2][1]);

        $diags1->multiplica_cmpl($this->elementos[2][0],$this->elementos[1][1]);
        $diags1->multiplica_cmpl($diags1,$this->elementos[0][2]);
        $diags2->multiplica_cmpl($this->elementos[2][1],$this->elementos[1][2]);
        $diags2->multiplica_cmpl($diags2,$this->elementos[0][0]);
        $diags3->multiplica_cmpl($this->elementos[2][2],$this->elementos[1][0]);
        $diags3->multiplica_cmpl($diags3,$this->elementos[0][1]);
        $determinante->soma_cmpl($diagp1,$diagp2);
        $num_cmpl_tmp->soma_cmpl($diags1,$diags2);
        $determinante->soma_cmpl($determinante,$diagp3);
        $num_cmpl_tmp->soma_cmpl($num_cmpl_tmp,$diags3);
        $determinante->subtrai_cmpl($determinante,$num_cmpl_tmp);
        break;
    default:
        for($i=0,$j=0;$j<$this->colunas;$j++){
            $num_cmpl_tmp->multiplica_cmpl($this->elementos[$i][$j],
                $this->cofator_matrizes_cmpl($i,$j));
            $determinante->soma_cmpl($determinante,$num_cmpl_tmp);
        }
}
return($determinante);
}
```

* Realiza a inversão clássica da matriz e retorna 0. *

* Caso a matriz não seja compatível com a operação, retorna 1. *

```
function inv_classica_matrizes_cmpl ()
{
    if($this->linhas!=$this->colunas) return(1);
    if($this->determinante_matrizes_cmpl()==0) return(1);
    for($i=0;$i<$this->linhas;$i++)
        for($j=0;$j<$this->colunas;$j++)
            $matriz_cofatores[$i][$j]=$this->cofator_matrizes_cmpl($i,$j);
    $determinante=$this->determinante_matrizes_cmpl();
    $this->elementos=$matriz_cofatores;
    $this->transposta_matrizes_cmpl();
    $determinante->inverte_cmpl($determinante);
    $this->multescalar_matrizes_cmpl($determinante);
    return(0);
}
```



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

```

/*****
* Realiza a inversão de shipley-coleman na matriz e retorna 0.
* Caso a matriz não seja compatível com a operação, retorna 1.
* Esse método não possui todas as condições de contorno necessárias.
*****/
function inv_shipley_matrizes_cmpl ()
{
    if($this->linhas!=$this->colunas) return(1);
    if($this->determinante_matrizes_cmpl()==0) return(1);
    $num_cmpl_tmp=new Num_Complexo(0,0);
    for($p=0;$p<$this->linhas;$p++){
        if($this->elementos[$p][$p]==0) return(1);
        $this->elementos[$p][$p]->inverte_cmpl($this->elementos[$p][$p]);
        $this->elementos[$p][$p]->multiplica_escalar_cmpl($this->elementos[$p][$p],-1);
        for ($i=0;$i<$this->linhas;$i++)
            if($i!=$p)
                $this->elementos[$i][$p]->multiplica_cmpl($this->elementos[$i][$p],$this->elementos[$p][$p]);
        for($i=0;$i<$this->linhas;$i++)
            if($i!=$p)
                for($j=0;$j<$this->linhas;$j++)
                    if($j!=$p){
                        $num_cmpl_tmp->multiplica_cmpl($this->elementos[$i][$p],$this->elementos[$p][$j]);
                        $this->elementos[$i][$j]->soma_cmpl($this->elementos[$i][$j],$num_cmpl_tmp);
                    }
        for($i=0;$i<$this->linhas;$i++)
            if($i!=$p)
                $this->elementos[$p][$i]->multiplica_cmpl($this->elementos[$p][$i],$this->elementos[$p][$p]);
    }
    for($i=0;$i<$this->linhas;$i++)
        for($j=0;$j<$this->linhas;$j++)
            $this->elementos[$i][$j]->multiplica_escalar_cmpl($this->elementos[$i][$j],-1);
    return(0);
}

/*****
* Para fins de depuração, esse método descarrega os elementos da matriz na tela.
*****/
function desc_matriz_cmpl ()
{
    for($i=0;$i<$this->linhas;$i++){
        for($j=0;$j<$this->colunas;$j++){
            echo "(".$this->elementos[$i][$j]->preal." , ".$this->elementos[$i][$j]->pimag." ) , ";
            echo " |<br> ";
        }
        echo " \n";
        return(0);
    }
}

/*****
* Arredonda o número de casas decimais de todos os elementos para 'decimais' casas.
*****/
function arredonda_elementos_cmpl ($decimais)
{
    for($i=0;$i<$this->linhas;$i++){
        for($j=0;$j<$this->colunas;$j++){
            $this->elementos[$i][$j]->arredonda_cmpl($decimais);
        }
    }
    return(0);
}

```



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

```

/*****
* Converte todos os elementos da base retangular para a base polar. *
*****/
function conv_elementos_rec2polar ()
{
    for($i=0;$i<$this->linhas;$i++){
        for($j=0;$j<$this->colunas;$j++){
            $this->elementos[$i][$j]->conv_rec2polar();
        }
    }
    return(0);
}

/*****
* Retorna o elemento x(i,j). *
*****/
function retorna_elemento ($i, $j)
{
    return($this->elementos[$i][$j]);
}

/*****
* Esse método descarrega na tela o valor do elemento x(i,j) com 'arredonda' casas decimais. *
*****/
function echo_elemento ($i, $j, $arredonda=0)
{
    $this->elementos[$i][$j]->echocmpl($arredonda);
    return(0);
}

}
?>
```



ncomplexos.php:

Localização: '/libphpscript/ncomplexos.php'

Função: Coleção de funções para a manipulação de números complexos.

```
<?php
/*****
 * Recebe dois números, um representando a parte real e outro a parte imaginária. *
 * O número complexo é na base retangular 'preal'+i'pimag'.
 *****/

class Num_Complexo
{
    var $preal;
    var $pimag;
    var $sist_coord='r';

    /* Construtor */
    function Num_Complexo ($preal, $pimag)
    {
        $this->preal = $preal;
        $this->pimag = $pimag;
    }

    /*****
     * Soma dois números complexos na base retangular e guarda o resultado no objeto atual. *
     *****/
    function soma_compl($num1, $num2)
    {
        $this->preal = $num1->preal + $num2->preal;
        $this->pimag = $num1->pimag + $num2->pimag;
        return(0);
    }

    /*****
     * Subtrai dois números complexos na base retangular e guarda o resultado no objeto atual. *
     *****/
    function subtrai_compl($num1, $num2)
    {
        $this->preal = ($num1->preal) - ($num2->preal);
        $this->pimag = ($num1->pimag) - ($num2->pimag);
        return(0);
    }

    /*****
     * Multiplica um número complexo na base retangular por um escalar e guarda o resultado no objeto atual. *
     *****/
    function multiplica_escalar_compl ($num, $escalar)
    {
        $this->preal = ($num->preal * $escalar);
        $this->pimag = ($num->pimag * $escalar);
        return(0);
    }

    /*****
     * Multiplica dois números complexos na base retangular e guarda o resultado no objeto atual. *
     *****/
    function multiplica_compl ($num1, $num2)
    {
        $this->preal = ($num1->preal * $num2->preal) - ($num1->pimag * $num2->pimag);
        $this->pimag = ($num1->preal * $num2->pimag) + ($num2->preal * $num1->pimag);
        return(0);
    }
}
```



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

```

/*****
* Divide dois números complexos na base retangular e guarda o resultado no objeto atual. *
* Caso o divisor seja '0+i0', retorna valor 1
*****/
function divide_compl ($num1, $num2)
{
    if(($num2->preal==0)&&($num2->pimag==0)){
        $this->preal="INF";
        $this->pimag="INF";
        return(1);
    }
    else{
        $this->preal = (($num1->preal * $num2->preal) + ($num1->pimag * $num2->pimag)) /
            (pow($num2->preal,2) + pow($num2->pimag,2));
        $this->pimag = (($num2->preal * $num1->pimag) - ($num1->preal * $num2->pimag)) /
            (pow($num2->preal,2) + pow($num2->pimag,2));
        return(0);
    }
}

/*****
* Divide um número complexo na base retangular por um escalar e guarda o resultado no objeto atual. *
* Caso o divisor seja '0', retorna valor 1
*****/
function divide_escalar_compl ($num, $escalar)
{
    if($escalar==0){
        $this->preal="INF";
        $this->pimag="INF";
        return(1);
    }
    else{
        $this->preal = ($num->preal / $escalar);
        $this->pimag = ($num->pimag / $escalar);
        return(0);
    }
}

/*****
* Inverte um número complexo na base retangular e guarda o resultado no objeto atual. *
* Caso o número seja '0+i0', retorna valor 1
*****/
function inverte_compl ($num)
{
    if(($num->preal==0)&&($num->pimag==0)){
        $this->preal="INF";
        $this->pimag="INF";
        return(1);
    }
    else{
        $um_compl=new Num_Complexo(1,0);
        $this->divide_compl($um_compl,$num);
        return(0);
    }
}

/*****
* Transforma o número complexo em seu conjugado. *
*****/
function conjugado_compl ()
{
    $this->pimag = (-1) * $this->pimag;
    return(0);
}

```



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

```

/*****
 * Descarrega na tela os valores contidos no objeto, com 'arredonda' casas decimais. *
 *****/
function echocmpl ($arredonda=0)
{
    if($this->sist_coord=='p'){
        if($arredonda)
            echo round($this->preal,$arredonda)."&lt;" . round($this->pimag,$arredonda)."&deg;";
        else echo $this->preal."&lt;" . $this->pimag."&deg;";
    }
    else{
        if($arredonda)
            if($this->pimag < 0)
                echo round($this->preal,$arredonda)."-j".round(abs($this->pimag),$arredonda);
            else echo round($this->preal,$arredonda)." +j".round($this->pimag,$arredonda);
        else
            if($this->pimag < 0) echo $this->preal."&lt;" .abs($this->pimag);
            else echo $this->preal."&lt;" . $this->pimag;
    }
    return(0);
}

/*****
 * Arredonda os valores real e imaginário em 'decimais' casas decimais. *
 *****/
function arredonda_cmpl ($decimais)
{
    $this->preal = round($this->preal,$decimais);
    $this->pimag = round($this->pimag,$decimais);
    return(0);
}

/*****
 * Muda a base do número complexo de retangular para polar. *
 *****/
function conv_rec2polar ()
{
    $bkp_preal = $this->preal;
    $this->preal = sqrt(pow($this->preal,2) + pow($this->pimag,2));
    /* Cuidado no detalhe do arcotangente atan->atan2 */
    //if($bkp_preal) $this->pimag = rad2deg(atan($this->pimag / $bkp_preal));
    if($bkp_preal) $this->pimag = rad2deg(atan2($this->pimag,$bkp_preal));
    else $this->pimag=(($this->pimag>0)?(90):(-90);
    //Correcao estetica arbitraria
    if($this->preal<1E-10){ $this->preal=0; $this->pimag = 0;}
    $this->sist_coord='p';
    return(0);
}

/*****
 * Muda a base do número complexo de polar para retangular. *
 *****/
function conv_polar2rec ()
{
    $bkp_preal = $this->preal;
    $this->preal = $this->preal * cos(deg2rad($this->pimag));
    $this->pimag = $bkp_preal * sin(deg2rad($this->pimag));
    $this->sist_coord='r';
    return(0);
}

```

}
?>



Estrutura de diretórios e arquivos principais:

pea2507/

```
|-- descritivos/
|   |-- bibliografia.php
|   |-- escopo.php
|   |-- intro.php
|   |-- mapa_site.php
|   |-- objetivos.php
|-- downloads/
|   |-- mat_adm_nod.pdf
|   |-- mat_alg_mat.pdf
|   |-- mat_circ_3f.pdf
|   |-- mat_compsim.pdf
|   |-- mat_curto.pdf
|   |-- mat_fluxopot.pdf
|   |-- mat_val_pu.pdf
|-- estilos/
|   |-- padrao.css
|-- imagens/
|   |-- ...
-- index.htm
-- libjavascript/
|   |-- arvore/
|       |-- ...
|   |-- demoFramelessNodes.js
|   |-- ftiens4.js
|   |-- menu_array.js
|   |-- mmenu.js
|   |-- regua_navegacao.inc
|   |-- ua.js
-- libphpscript/
|   |-- comum.php
|   |-- exercicios_inc.php
|   |-- exercicios_lib.php
|   |-- matrizes.php
|   |-- matrizes_cmpl.php
|   |-- ncomplexos.php
|   |-- regua.php
-- módulos/
|   |-- ccrede/
|       |-- index.php
|       |-- interativo/
|           |-- exercicio_ccrede.php
|           |-- ...
|       |-- teoria/
|           |-- equações/
```



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP

```
|      |-- ...
|      |-- figuras/
|      |-- ...
|      |-- mat_curto.php
|-- circ3f/
|  |-- index.php
|  |-- interativo/
|  |  |-- exercicio_circ3f.php
|  |  |-- ...
|  |-- teoria/
|  |  |-- equações/
|  |  |  |-- ...
|  |  |-- figuras/
|  |  |  |-- ...
|  |  |-- mat_circ_3f.php
|  |  |-- símbolos/
|  |  |  |-- ...
|-- compsim/
|  |-- index.php
|  |-- interativo/
|  |  |-- exercicio_compsim.php
|  |  |-- ...
|  |-- teoria/
|  |  |-- equações/
|  |  |  |-- ...
|  |  |-- figuras/
|  |  |  |-- ...
|  |  |-- mat_compsim.php
|  |  |-- símbolos/
|  |  |  |-- ...
|-- fluxopot/
|  |-- index.php
|  |-- interativo/
|  |  |-- exercicio_fluxopot.php
|  |  |-- ...
|  |-- teoria/
|  |  |-- equações/
|  |  |  |-- ...
|  |  |-- figuras/
|  |  |  |-- ...
|  |  |-- mat_fluxopot.php
|  |  |-- símbolos/
|  |  |  |-- ...
|-- repsispot/
|  |-- index.php
|  |-- interativo/
|  |  |-- exercicio_adm_nod.php
```




```
-- ...
-- teoria/
|-- equações/
|   |-- ...
|   |-- figuras/
|   |-- ...
|   |-- mat_adm_nod.php
-- teoria_algmat/
|-- equações/
|   |-- ...
|   |-- mat_alg_mat.php
|   |-- símbolos/
|   |-- ...
-- valpu/
|-- index.php
|-- interativo/
|   |-- exercicio_valpu.php
|   |-- ...
|-- teoria/
|   |-- equações/
|   |-- ...
|   |-- figuras/
|   |-- ...
|   |-- mat_val_pu.php
|   |-- símbolos/
|   |-- ...
-- principal/
|-- em_construcao.htm
|-- index.php
|-- lembretes_dev.htm
```

47 diretórios, 989 arquivos



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

PEA/EPUSP