

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

Diogo Macedo de Mello

**Dinâmica de tempo real de sistemas quânticos fechados
e fortemente correlacionados**

São Carlos
2025

Diogo Macedo de Mello

**Dinâmica de tempo real de sistemas quânticos fechados
e fortemente correlacionados**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. José Abel Hoyos Neto

Versão original

**São Carlos
2025**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Resumo

Esse trabalho apresenta um estudo da evolução de tempo real de sistemas quânticos interagentes quando um parâmetro externo é alterado subitamente. Em particular, focamos no caso em que esse parâmetro leva o sistema a uma transição de fase quântica dinâmica do diagrama de fases a temperatura nula. Para investigar a transição de fase quântica dinâmica, analisamos a distribuição dos zeros de Yang-Lee-Fisher do eco de Loschmidt (um análogo dinâmico da função de partição). Finalmente, concluímos nosso estudo com a investigação da corrente de energia após o quench e dos cones de luz associados.

Palavras-chave: Transição de fase quântica dinâmica. Zeros de Yang-Lee. Sistemas fortemente correlacionados. Eco de Loschmidt

1. Introdução

Os pontos de transição de fase de equilíbrio são os pontos nos quais surgem não-analiticidades em observáveis do sistema. No caso de uma transição causada pela variação da temperatura, o inverso da temperatura crítica β^* , para a qual observa-se a não-analiticidade, está relacionado aos pontos no plano complexo de temperaturas onde a função partição $Z(\beta)$ é zero, ou seja, às soluções da equação

$$Z(\beta) \equiv \text{Tr}(e^{-\beta H}) = 0, \quad (1)$$

onde H é o hamiltoniano do sistema. Esses pontos são chamados de zeros de Yang-Lee-Fisher [1, 2]. Essa relação se deve ao fato da energia livre por partícula $f(\beta)$ se tornar não-analítica quando a função partição é zero:

$$f(\beta) = -\frac{1}{V} \ln(Z(\beta)), \quad (2)$$

sendo V o volume do sistema. Os zeros da função partição estão localizadas no plano complexo, e tocam o eixo real apenas no limite termodinâmico $V \rightarrow \infty$.

De forma análoga, as transições de fase dinâmicas ocorrem em instantes de tempo críticos t^* nos quais a evolução do sistema apresenta alguma não-analiticidade [3, 4]. Para essa análise, adotamos o eco de Loschmidt

$$\mathcal{L} \equiv |\langle \psi_0 | e^{-i\tilde{H}t} | \psi_0 \rangle|^2 \quad (3)$$

como um análogo dinâmico à função partição, com o tempo complexo it cumprindo a função do inverso da temperatura β . O valor do eco representa a probabilidade de retorno do sistema ao seu estado inicial. Mantendo a analogia com as transições de fase de equilíbrio, os pontos críticos estão relacionados aos zeros do eco de Loschmidt, que causarão não-analiticidades na função taxa:

$$r(t) = -\frac{1}{L} \ln(\mathcal{L}(t)), \quad (4)$$

com L sendo o tamanho do sistema, equação análoga à energia livre.

Para evolução do sistema, consideramos uma têmpera (*quench*): ele inicialmente se encontra no estado fundamental $|\psi_0\rangle$ de um hamiltoniano H ; e subitamente passa a ser regido pelo hamiltoniano \tilde{H} .

Nosso hamiltoniano de estudo é o do modelo de Ising quântico unidimensional com um campo transverso:

$$H \equiv H(J, h) = -J \sum_{j=1}^{L-1} \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + h \sum_{j=1}^L \sigma_j^z, \quad (5)$$

onde σ_j^x, σ_j^z representam as matrizes de Pauli de spin 1/2 que atuam no j -ésimo sítio. Esse modelo tem uma transição de fase quântica de equilíbrio a zero absoluto, de modo que o estado fundamental é ferromagnético se $J > h$ e é paramagnético se $J < h$. Verificaremos isso na diagonalização do hamiltoniano.

Consideramos ambas condições de contorno abertas, equação (5), e periódicas, adicionando o termo $-J\sigma_1^x \sigma_L^x$. Por fim, dizemos que o quench altera apenas os parâmetros J e h do sistema, isto é, o hamiltoniano pós quench é $\tilde{H} \equiv H(\tilde{J}, \tilde{h})$.

Note que o estado de cada sítio é representado por um vetor de estado bidimensional, o que leva o estado total do sistema ter dimensão 2^L . Portanto, calcular o eco numericamente de forma direta se torna inviável a medida que aumentamos o tamanho da rede, logo, torna-se necessária a diagonalização do hamiltoniano.

2. Transformação de Jordan-Wigner — Mapeamento em férmions livres

Primeiramente, mapeamos os operadores do nosso hamiltoniano em operadores fermiônicos [5]. Esse mapeamento nos permite reduzir a dimensão do problema de 2^L para $2L$. Podemos reinterpretar a base $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$, de autoestados de σ^z , como estados ocupados ou desocupados, i.e., $|\downarrow\rangle = |0\rangle$ e $|\uparrow\rangle = |1\rangle$. Assim, podemos definir os operadores de criação e aniquilação a^\dagger e a , respectivamente, de modo que

$$a^\dagger |0\rangle = |1\rangle; \quad a |1\rangle = |0\rangle; \quad a^\dagger |1\rangle = a |0\rangle = 0. \quad (6)$$

Podemos, então, reescrever nossos operadores de spin 1/2 usando a e a^\dagger :

$$\sigma^x = a + a^\dagger; \quad \sigma^z = aa^\dagger - a^\dagger a. \quad (7)$$

Porém, eles não respeitam uma estatística única (comutação ou anticomutação):

$$\begin{aligned} [a_i, a_j] &= [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0, & \text{para } i \neq j \\ \{a_i^\dagger, a_i\} &= 1; & (a_i^\dagger)^2 = a_i^2 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Para garantir a anticomutatividade entre partículas em diferentes sítios, e assim completar a transformação em operadores fermiônicos, introduzimos o operador

$$c_j^\dagger = \left(\prod_{k<j} e^{-i\pi a_k^\dagger a_k} \right) a_j^\dagger; \quad c_j = \left(\prod_{k<j} e^{i\pi a_k^\dagger a_k} \right) a_j, \quad (9)$$

de forma que os operadores c^\dagger e c respeitam a álgebra fermiônica:

$$\{c_i, c_j\} = \{c_i^\dagger, c_j^\dagger\} = 0; \quad \{c_i^\dagger, c_j\} = \delta_{i,j}. \quad (10)$$

Assim, obtemos nosso hamiltoniano escrito na linguagem fermiônica:

$$H = -J \sum_{j=1}^{L-1} (c_j^\dagger c_{j+1}^\dagger + c_j^\dagger c_{j+1} + \text{h.c.}) + h \sum_{j=1}^L (c_j^\dagger c_j - \text{h.c.}) + (-1)^N p J (c_L^\dagger c_1^\dagger + c_L^\dagger c_1 + \text{h.c.}), \quad (11)$$

onde $N = \sum_j c_j^\dagger c_j$ é o operador número de partículas no sistema, e $p = 1$ para condições periódicas e $p = 0$ para condições abertas. Apesar de N flutuar, a paridade de N , e por consequência $(-1)^N$, é constante ao longo da evolução temporal devido ao hamiltoniano ser quadrático em operadores de criação e aniquilação. Para tratar a evolução de um estado geral, é preciso decompô-lo em dois estados, um com número par e outro com ímpar de partículas, e fazer a evolução de cada um com seu respectivo hamiltoniano. Por conveniência, escolhemos estados iniciais com paridade bem definida.

3. Diagonalização do sistema

Agora que nossos operadores respeitam a estatística fermiônica, podemos fazer transformações canônicas, isto é, de forma a manter a álgebra de anticomutatividade. Para o caso com condições de contorno abertas, nós aplicamos a transformação de Bogoliubov imediatamente, enquanto, para o caso periódico, fazemos uma transformada de Fourier e depois uma de Bogoliubov.

3.1 Condições periódicas de contorno

Para a cadeia com condições periódicas, devido à simetria translacional do sistema, é conveniente fazer uma transformada de Fourier:

$$c_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k e^{-ijk} \gamma_k^\dagger; \quad c_j = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k e^{ijk} \gamma_k, \quad (12)$$

$$\text{com } k = \begin{cases} \frac{2\pi}{L}(n - \frac{1}{2}), & \text{se } N \text{ for par} \\ \frac{2\pi}{L}n, & \text{se } N \text{ for ímpar} \end{cases}$$

para $n = 1, 2, \dots, L$, obtidos pela imposição da condição de contorno. Os operadores γ_k^\dagger e γ são operadores fermiônicos de partículas com momento k bem definido, porém com probabilidade de ser encontrada distribuída homogeneamente em todo o espaço.

Ao aplicar a transformação, obtemos o hamiltoniano:

$$H = -J \sum_{k \neq 0, \pi} \left(e^{ik} \gamma_k^\dagger \gamma_{-k}^\dagger - e^{-ik} \gamma_k \gamma_{-k} + (e^{ik} - g) \gamma_k^\dagger \gamma_k - (e^{-ik} - g) \gamma_k \gamma_k^\dagger \right) + \delta_{(N+1) \bmod 2} (\gamma_0^\dagger \gamma_0 - \gamma_0 \gamma_0^\dagger) + \delta_{(L+N+1) \bmod 2} (-1 - g) (\gamma_\pi^\dagger \gamma_\pi - \gamma_\pi \gamma_\pi^\dagger), \quad (13)$$

$$\text{onde os modos permitidos são } k = \begin{cases} \frac{2\pi}{L}(n - \frac{1}{2}) - \pi, & \text{se } N + L \text{ é par} \\ \frac{2\pi}{L}n - \pi, & \text{se } N + L \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

$g = h/J$ e $n = 1, 2, \dots, L$. Note a remoção dos termos referentes a $k = 0$ e $k = \pi$ da somatória devido à ausência de contrapartida simétrica para esses modos. Em seguida, podemos agrupar os termos referentes a k e $-k$ para reescrever o hamiltoniano na forma matricial:

$$H = 2J \sum_{0 < k < \pi} \begin{pmatrix} \gamma_k^\dagger & \gamma_{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(k) - g & -i \sin(k) \\ i \sin(k) & g - \cos(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_k \\ \gamma_{-k}^\dagger \end{pmatrix} + \delta_0 (1 - g) (\gamma_0^\dagger \gamma_0 - \gamma_0 \gamma_0^\dagger) + \delta_\pi (-1 - g) (\gamma_\pi^\dagger \gamma_\pi - \gamma_\pi \gamma_\pi^\dagger). \quad (14)$$

A matriz diagonalizante do bloco acima é:

$$\mathbb{V}_k = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & i \sin(\theta_k) \\ i \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

com θ_k e λ_k definidos por

$$\cos(2\theta_k) = \frac{J(\cos(k) - g)}{\lambda_k}; \quad \sin(2\theta_k) = \frac{J \sin(k)}{\lambda_k}; \quad (16)$$

$$\lambda_k = \sqrt{J^2 - 2hJ \cos(k) + h^2}, \quad (17)$$

onde assumimos $J, h > 0$, por simplicidade. Note, também, que \mathbb{V} é unitário, $\mathbb{V}^\dagger \mathbb{V} = \mathbb{V} \mathbb{V}^\dagger = 1$, o que garante a canonicidade da transformação. O termo k -ésimo do hamiltoniano se torna:

$$H_k = \begin{pmatrix} \gamma_k^\dagger & \gamma_{-k} \end{pmatrix} \mathbb{V}_k \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & -\lambda_k \end{pmatrix} \mathbb{V}_k^\dagger \begin{pmatrix} \gamma_k \\ \gamma_{-k}^\dagger \end{pmatrix}, \quad (18)$$

equação da qual obtemos nossa excitação fundamental:

$$\begin{pmatrix} \eta_k \\ \eta_{-k}^\dagger \end{pmatrix} \equiv \mathbb{V}_k^\dagger \begin{pmatrix} \gamma_k \\ \gamma_{-k}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) \gamma_k - i \sin(\theta_k) \gamma_{-k}^\dagger \\ -i \sin(\theta_k) \gamma_k + \cos(\theta_k) \gamma_{-k}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Finalmente, temos o hamiltoniano diagonalizado:

$$H = 2 \sum_{0 < k < \pi} \lambda_k (\eta_k^\dagger \eta_k + \eta_{-k} \eta_{-k}^\dagger) + \delta_0 (1 - g) (\gamma_0^\dagger \gamma_0 - \gamma_0 \gamma_0^\dagger) + \delta_\pi (-1 - g) (\gamma_\pi^\dagger \gamma_\pi - \gamma_\pi \gamma_\pi^\dagger) \quad (20)$$

$$H = \sum_k \lambda_k (2\eta_k^\dagger \eta_k - 1), \quad (21)$$

com a última somatória incluindo todos os modos permitidos e $\lambda_{-k} = \lambda_k$. Note que os modos 0 e π são os mesmos para qualquer hamiltoniano, isto é, $\eta_0 = \gamma_0$ e $\eta_\pi = \gamma_\pi$, e foram incluídos sem necessidade de tratamento especial, visto que seus coeficientes estão de acordo com a fórmula para um modo genérico. O estado fundamental é, portanto, o vácuo, com energia dada por

$$E_0 = - \sum_k \lambda_k. \quad (22)$$

3.2 Condições abertas de contorno

Para a cadeia aberta, a transformada de Fourier perde sua conveniência devido a quebra de simetria translacional da rede. Ao invés disso, reescrevemos nosso hamiltoniano (11) como:

$$H = (\mathbf{C}^\dagger)^T \mathbf{M} \mathbf{C}; \quad \text{com } \mathbf{M} \equiv \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ -\mathbb{B} & -\mathbb{A} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} \equiv \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ c_1^\dagger \\ \vdots \\ c_L^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\dagger \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$(\mathbf{C}^\dagger)^T \equiv (c_1^\dagger \quad \dots \quad c_L^\dagger \quad c_1 \quad \dots \quad c_n) = ((\mathbf{c}^\dagger)^T \quad \mathbf{c}^T),$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} h & -J/2 & 0 & \dots & 0 \\ -J/2 & h & -J/2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -J/2 & h & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -J/2 \\ 0 & \dots & 0 & -J/2 & h \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & -J/2 & 0 & \dots & 0 \\ J/2 & 0 & -J/2 & \ddots & \vdots \\ 0 & J/2 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -J/2 \\ 0 & \dots & 0 & J/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

sendo \mathbb{A} e \mathbb{B} matrizes tridiagonais $L \times L$.

Portanto, novamente buscamos diagonalizar a matriz \mathbf{M} e encontrar as excitações fundamentais do sistema descritas por $\mathbf{\Gamma} = \mathbb{V}^T \mathbf{C}$:

$$H = (\mathbf{C}^\dagger)^T \mathbf{M} \mathbf{C} = ((\mathbf{C}^\dagger)^T \mathbb{V}) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} (\mathbb{V}^T \mathbf{C}) = (\mathbf{\Gamma}^\dagger)^T \mathbb{D} \mathbf{\Gamma}. \quad (25)$$

Essa forma é análoga a (18) para o caso anterior. Para ser uma transformação canônica, \mathbb{V} precisa ser da forma:

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{L} \\ \mathbb{L} & \mathbb{R} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

com $\mathbb{R}\mathbb{R}^T + \mathbb{L}\mathbb{L}^T = \mathbf{1}$ e $\mathbb{R}\mathbb{L}^T + \mathbb{L}\mathbb{R}^T = 0$. Substituindo (26) em (25) e introduzindo a combinação linear $\mathbb{P} = \mathbb{R} + \mathbb{L}$ e $\mathbb{Q} = \mathbb{R} - \mathbb{L}$, encontramos a relação:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^T(\mathbb{A} - \mathbb{B})(\mathbb{A} + \mathbb{B})\mathbb{P} &= \boldsymbol{\lambda}^2, \\ \mathbb{Q}^T(\mathbb{A} + \mathbb{B})(\mathbb{A} - \mathbb{B})\mathbb{Q} &= \boldsymbol{\lambda}^2, \end{aligned} \quad (27)$$

ou seja, as colunas de \mathbb{P} e \mathbb{Q} são os autovetores de $(\mathbb{A} - \mathbb{B})(\mathbb{A} + \mathbb{B})$ e $(\mathbb{A} - \mathbb{B})(\mathbb{A} + \mathbb{B})$, respectivamente. Por inspeção, verificamos que eles são:

$$P_k = A_k \begin{pmatrix} \sin(Lk) \\ \vdots \\ \sin(2k) \\ \sin(k) \end{pmatrix}; \quad Q_k = A_k \begin{pmatrix} \sin(k) \\ \sin(2k) \\ \vdots \\ \sin(Lk) \end{pmatrix}, \quad (28)$$

onde $A_k = (\sum_{j=1}^L \sin^2 jk)^{-1/2}$ é a constante de normalização. Aplicando esses em (27) obtemos duas equações:

$$\lambda_k^2 = h^2 + J^2 - 2Jh \cos k, \quad (29)$$

$$\frac{\sin((L+1)k)}{\sin(Lk)} = \frac{J}{h}. \quad (30)$$

A primeira (29) nos dá autoenergia para um dado k , análoga a (17). Os modos k permitidos são dados pela solução da equação (30). Esta é uma equação transcendental cuja solução podemos encontrar numericamente, como por exemplo, através do método de Newton-Raphson.

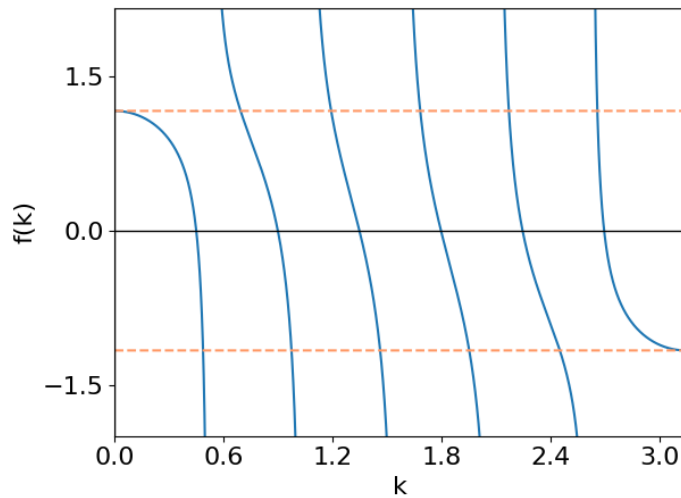


Figura 1 – Em azul, o gráfico de $f(k) = \sin((L+1)k)/\sin(Lk)$ no intervalo de 0 a π para $L=6$. As linhas tracejadas em laranja são $\pm(1 + L^{-1})$. Se $|J/h| < 1 + L^{-1}$ a equação (30) terá $L - 1$ soluções reais, caso contrário, terá L .

Note que se $|J/h| < 1 + L^{-1}$ a equação (30) terá apenas $L - 1$ soluções reais (Figura 1). Nesse caso, teremos uma solução imaginária $k = iv$, que representa um modo de borda e respeita as seguintes equações:

$$\lambda_k^2 = h^2 + J^2 - 2Jh \cosh v; \quad \frac{\sinh((L+1)k)}{\sinh(Lk)} = \frac{J}{h}; \quad (31)$$

$$P_v = A_v \begin{pmatrix} \sinh(Lv) \\ \vdots \\ \sinh(2v) \\ \sinh(v) \end{pmatrix}; \quad Q_v = A_v \begin{pmatrix} \sinh(v) \\ \sinh(2v) \\ \vdots \\ \sinh(Lv) \end{pmatrix}; \quad \text{com } A_v = \left(\sum_{j=1}^L \sinh^2 jk \right)^{-1/2}. \quad (32)$$

Podemos entender que esse modo surge pela necessidade do sistema se degenerar quando $g \rightarrow 0$ no limite termodinâmico. Quando $h = 0$, o estado fundamental é duplamente degenerado: $|\rightarrow\rightarrow\cdots\rangle, |\leftarrow\leftarrow\cdots\rangle$. Ao ligar o campo transversal $h \ll J$, essa degenerescência é levantada. Em teoria de perturbação, nota-se que o *splitting* entre esses dois níveis é

$$\Delta E \sim J \left(\frac{h}{J} \right)^L. \quad (33)$$

Essa energia que vai a zero no limite termodinâmico é a energia do modo de borda. O caráter exponencialmente pequeno desse autovalor gera dificuldades ao tratar o problema numericamente.

Para encontrar os autoestados de H basta fazer a combinação linear de \mathbb{P} e \mathbb{Q} . Porém, como nossa construção de \mathbb{P} e \mathbb{Q} só nos diz respeito a λ^2 , ao diagonalizar a matriz \mathbb{M} podemos obter o bloco $\boldsymbol{\lambda}$ com autovalores positivos e negativos. Para evitar isso, tomamos a liberdade de escolha do sinal de cada vetor para fazer a combinação linear entre as colunas:

$$2\mathbb{R}_j = \mathbb{P}_{k_j} + (-1)^{L+j} \mathbb{Q}_{k_j}; \quad 2\mathbb{L}_j = \mathbb{P}_{k_j} - (-1)^{L+j} \mathbb{Q}_{k_j}; \quad (34)$$

de forma que \mathbb{P}_{k_j} e \mathbb{Q}_{k_j} são as colunas para a j -ésima maior raiz, exceto o modo de borda que, se existente, é inserido na coluna L .

Assim, podemos construir a matriz \mathbb{V} usando (26), e encontrar a forma diagonal de H (25):

$$H = \sum_k \lambda_k (\eta_k^\dagger \eta_k - \eta_k \eta_k^\dagger) = \sum_k \lambda_k (2\eta_k^\dagger \eta_k - 1). \quad (35)$$

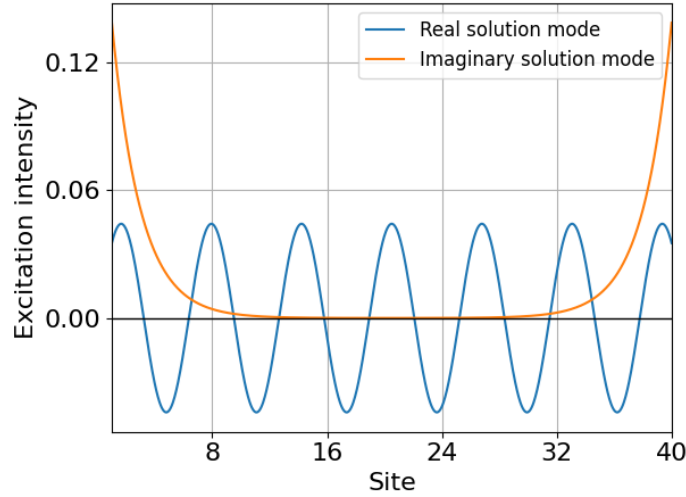


Figura 2 – A forma dos modos $\mathbb{P}_k + \mathbb{Q}_k$ para $k = 0.5$ e $L = 40$. Em azul, o modo respectivo a uma solução real e, em laranja, o modo correspondente a uma solução imaginária.

e as excitações fundamentais são dadas por

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_L^\dagger \\ \eta_1^\dagger \\ \vdots \\ \eta_L^\dagger \end{pmatrix} = \mathbb{V}_k^\dagger \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{R}^T \mathbf{c} + \mathbb{L}^T \mathbf{c}^\dagger \\ \mathbb{R}^T \mathbf{c}^\dagger + \mathbb{L}^T \mathbf{c} \end{pmatrix}. \quad (36)$$

3.3 Fechamento do gap e surgimento das fases ferromagnética e paramagnética

Podemos ver nos hamiltonianos diagonais (35), (21) que a ausência de uma autopartícula de modo k contribui com energia $-\lambda_k$ e a presença dela contribui com energia λ_k . Portanto, o gap de energia entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado é duas vezes o menor autovalor de energia λ_{\min} . Para ambas as condições de contorno, temos a mesma forma para autoenergias (17), (29). Ele ocorre para $k \rightarrow 0$

$$2\lambda_{\min} = 2\sqrt{h^2 + J^2 - 2Jh} = 2|J - h|. \quad (37)$$

Portanto, verificamos que o gap se fecha em $g = 1$, indicando que esse é o ponto crítico das transições de fase quântica de equilíbrio.

4. Eco de Loschmidt

Finalmente, podemos partir para o cálculo do eco de Loschmidt. Ainda assumindo que $J, h > 0$, o estado fundamental é o vácuo dos operadores η_k , componentes do vetor

$\Gamma = \mathbb{V}^T \mathbf{C}$:

$$|0\rangle = \bigotimes_k |0_k\rangle; \quad \eta_k |0_k\rangle = 0 \quad (38)$$

Portanto, para calcular o eco de Loschmidt, basta reescrever o hamiltoniano pós-quench na base do hamiltoniano pré-quench:

$$\mathcal{L} = |\langle 0| e^{-i\tilde{H}t} |0\rangle|^2 = |\langle 0| \exp(-i(\sum_k \lambda_k (2\tilde{\eta}_k^\dagger \tilde{\eta}_k - 1))t) |0\rangle|^2 \quad (39)$$

Para o caso periódico, podemos separar os blocos de matrizes 2×2 e encontrar os zeros analiticamente, enquanto, para o caso aberto, encontramos a expressão analítica do eco e encontramos as raízes numericamente.

4.1 Condições periódicas de contorno

Primeiramente, usamos a forma (20) do hamiltoniano para calcular o eco. Não precisamos incluir os modos 0 e π , que contribuirão apenas com uma fase. Logo:

$$\mathcal{L} = \left| \prod_{0 < k < \pi} \langle 0_k, 0_{-k} | e^{-2i\tilde{\lambda}_k t (\tilde{\eta}_k^\dagger \tilde{\eta}_k - \tilde{\eta}_{-k}^\dagger \tilde{\eta}_{-k})} |0_k, 0_{-k}\rangle \right|^2. \quad (40)$$

Basta escrever isto usando operadores pré-quench, pois sabemos como eles atuam no vácuo. A transformação é simplesmente a rotação pela diferença entre ângulos $\Delta\theta_k = \tilde{\theta}_k - \theta_k$ dados por (16):

$$\begin{pmatrix} \tilde{\eta}_k \\ \tilde{\eta}_{-k}^\dagger \end{pmatrix} = \tilde{\mathbb{V}}_k^\dagger \mathbb{V}_k \begin{pmatrix} \eta_k \\ \eta_{-k}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Delta\theta_k) \eta_k - i \sin(\Delta\theta_k) \eta_{-k}^\dagger \\ -i \sin(\Delta\theta_k) \eta_k + \cos(\Delta\theta_k) \eta_{-k}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Fazendo estas substituições e expandindo a exponencial, chegamos a:

$$\langle 0_k, 0_{-k} | e^{-2i\tilde{\lambda}_k t (\tilde{\eta}_k^\dagger \tilde{\eta}_k - \tilde{\eta}_{-k}^\dagger \tilde{\eta}_{-k})} |0_k, 0_{-k}\rangle = e^{-2i\tilde{\lambda}_k t \sin^2 \Delta\theta_k} + e^{2i\tilde{\lambda}_k t \cos^2 \Delta\theta_k}. \quad (42)$$

Substituindo esta em (53) e multiplicando cada termo pela fase $e^{-2i\tilde{\lambda}_k t}$, obtemos:

$$\mathcal{L} = \left| \prod_{0 < k < \pi} (e^{-4i\tilde{\lambda}_k t \sin^2 \Delta\theta_k} + \cos^2 \Delta\theta_k) \right|^2. \quad (43)$$

Esta forma é suficiente para calcular o eco numericamente. Os zeros ocorrem, portanto, em:

$$e^{4i\tilde{\lambda}_k t} = -\tan^2 \Delta\theta_k \quad (44)$$

$$t = (2n + 1) \frac{\pi}{4\tilde{\lambda}_k} - \frac{i}{4\tilde{\lambda}_k} \ln(\tan^2 \Delta\theta_k). \quad (45)$$

Essa equação tem uma solução para cada $0 < k < \pi$, de modo que, no limite termodinâmico, os zeros se acumulam em curvas contínuas, assim como em transições de fase de equilíbrio.

Uma transição de fase dinâmica acontecerá toda vez que a curva (45) tocar o eixo real. Para que isso aconteça, precisamos que $\tan^2 \Delta\theta_k$ cruze o valor 1. Para isso, $\cos 2\Delta\theta_k$ precisa cruzar o zero, que nos leva a condição:

$$\cos 2\Delta\theta_k = \cos 2\theta_k \cos 2\tilde{\theta}_k + \sin 2\theta_k \sin 2\tilde{\theta}_k = 0 \quad (46)$$

$$((g - \cos k)(\tilde{g} - \cos k) + \sin^2 k) \frac{J\tilde{J}}{\lambda_k \tilde{\lambda}_k} = 0 \quad (47)$$

$$(g - 1)(\tilde{g} - 1) + (g + \tilde{g})(1 - \cos k) = 0. \quad (48)$$

O termo $(g + \tilde{g})(1 - \cos k)$ nunca é negativo, mas é zero quando $k \rightarrow 0$, portanto para que a equação acima tenha solução precisamos que

$$(g - 1)(\tilde{g} - 1) < 0. \quad (49)$$

Portanto, o sistema passará por uma transição de fase dinâmica apenas se o quench atravessar o ponto de transição de fase de equilíbrio $g^* = 1$.

Por fim, podemos ver em (45) que a parte imaginária de um zero não depende do n da curva em que se encontra, portanto toda curva toca o eixo real para o mesmo k^* , solução da equação (48):

$$k^* = \cos^{-1} \left(\frac{(g - 1)(\tilde{g} - 1)}{(g + \tilde{g})} + 1 \right). \quad (50)$$

As transições de fase, e consequentemente as não-analiticidades da função taxa, aparecem periodicamente em todo

$$t^* = (2n + 1) \frac{\pi}{4\tilde{\lambda}_{k^*}}. \quad (51)$$

4.2 Condições abertas de contorno

Como para condições de contorno abertas todos os $2L$ modos estão relacionados, e não apenas os referentes a k e $-k$, não conseguimos encontrar os zeros analiticamente e achar uma condição analítica para que ocorra a transição de fase. Portanto, buscamos uma expressão para calcular o eco de Loschmidt numericamente. Partimos de:

$$\mathcal{L} = \left| \langle 0 | \left(\prod_k e^{-i\tilde{\lambda}_k t (\tilde{\eta}_k^\dagger \tilde{\eta}_k - \tilde{\eta}_k \tilde{\eta}_k^\dagger)} \right) | 0 \rangle \right|^2. \quad (52)$$

Expandindo as exponenciais e simplificando a fase no produtório, obtemos:

$$\mathcal{L} = \left| e^{-i\tilde{E}_0 t} \langle 0 | \prod_k \left((e^{-2i\tilde{\lambda}_k t} \tilde{\eta}_k^\dagger + \tilde{\eta}_k) (\tilde{\eta}_k^\dagger + \tilde{\eta}_k) \right) | 0 \rangle \right|^2 = \left| e^{-i\tilde{E}_0 t} \langle 0 | \prod_k A_k B_k | 0 \rangle \right|^2, \quad (53)$$

onde

$$A_k = e^{-2i\tilde{\lambda}_k t} \tilde{\eta}_k^\dagger + \tilde{\eta}_k; \quad B_k = \tilde{\eta}_k^\dagger + \tilde{\eta}_k. \quad (54)$$

Para avaliar o produtório em (53), usamos o teorema de Wick, tomando o produto entre todas as contrações. Para isso, precisamos de A_k e B_k na linguagem dos férmions pré-quench, que obtemos usando a transformação (36):

$$\mathbf{A} = e^{-2i\tilde{\lambda}t}\tilde{\gamma}^\dagger + \tilde{\gamma} = (e^{-2i\tilde{\lambda}t}\tilde{\mathbb{R}}^T + \tilde{\mathbb{L}}^T)(\mathbb{R}\gamma^\dagger + \mathbb{L}\gamma) + (e^{-2i\tilde{\lambda}t}\tilde{\mathbb{L}}^T + \tilde{\mathbb{R}}^T)(\mathbb{L}\gamma^\dagger + \mathbb{R}\gamma); \quad (55)$$

$$\mathbf{B} = \tilde{\gamma}^\dagger + \tilde{\gamma} = (\tilde{\mathbb{R}}^T + \tilde{\mathbb{L}}^T)(\mathbb{R} + \mathbb{L})(\gamma^\dagger + \gamma). \quad (56)$$

Aqui, notamos que todas as contrações relevantes são do tipo $\langle A_m B_n \rangle$, pois as do tipo $\langle A_m A_n \rangle$ estão sempre multiplicando uma do tipo $\langle B_m B_n \rangle$, que são nulas para $m \neq n$:

$$\langle 0_m, 0_n | B_m B_n | 0_m, 0_n \rangle \propto \langle 0_m, 0_n | (\gamma_m^\dagger + \gamma_m)(\gamma_n^\dagger + \gamma_n) | 0_m, 0_n \rangle = 0. \quad (57)$$

Por fim, temos:

$$\mathcal{L} = \left| e^{-i\tilde{E}_0 t} \langle 0 | \prod_k A_k B_k | 0 \rangle \right|^2 = \left| e^{-i\tilde{E}_0 t} \det \langle \mathbf{A} \mathbf{B}^T \rangle \right|^2. \quad (58)$$

Substituindo \mathbf{A} e \mathbf{B} e usando que, no vácuo,

$$\langle \gamma \gamma^T \rangle = \langle \gamma^\dagger \gamma^T \rangle = \langle \gamma^\dagger (\gamma^\dagger)^T \rangle = 0; \quad \langle \gamma (\gamma^\dagger)^T \rangle = 1, \quad (59)$$

chegamos, finalmente, a equação que utilizamos para calcular o eco de Loschmidt numericamente:

$$\mathcal{L} = \left| e^{-i\tilde{E}_0 t} \det \left[(e^{-2i\tilde{\lambda}t} - 1)(\tilde{\mathbb{R}}^T \mathbb{L} + \tilde{\mathbb{L}}^T \mathbb{R})(\mathbb{R}^T + \mathbb{L}^T)(\tilde{\mathbb{R}} + \tilde{\mathbb{L}}) + \mathbf{1} \right] \right|^2. \quad (60)$$

5. Densidade de energia

Por fim, foi feita a análise da energia por sítio ao longo da evolução temporal do sistema. Escolhemos aprofundar o estudo apenas para o caso de condição de contorno aberta. Os operadores de energia local é

$$H_j = \frac{J}{2} \sigma_{j-1}^x \sigma_j^x + \frac{J}{2} \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + h \sigma_j^z; \quad (61)$$

$$H_1 = \frac{J}{2} \sigma_1^x \sigma_2^x + h \sigma_1^z; \quad H_L = \frac{J}{2} \sigma_{L-1}^x \sigma_L^x + h \sigma_L^z. \quad (62)$$

Verificamos, usando as transformações para férmions (36) e que o estado inicial é o vácuo do hamiltoniano pré-quench (38), que $\langle H_j \rangle \equiv \langle \psi(t) | H_j | \psi(t) \rangle$, o valor esperado

para a energia local em um instante t , é dado por

$$\begin{aligned}
\langle H_j \rangle &= h \sum_{k,l} \tilde{Q}_{j,k} \left(\sin(2\tilde{\lambda}_k t) \sin(2\tilde{\lambda}_l t) (\tilde{\mathbb{P}}^T \mathbb{P} \mathbb{Q}^T \tilde{\mathbb{Q}})_{k,l} + \cos(2\tilde{\lambda}_k t) \cos(2\tilde{\lambda}_l t) (\tilde{\mathbb{P}}^T \mathbb{P} \mathbb{Q}^T \tilde{\mathbb{Q}})_{l,k} \right) \tilde{\mathbb{P}}_{l,j}^T \\
&+ \frac{J}{2} \sum_{k,l} \tilde{Q}_{j-1,k} \left(\sin(2\tilde{\lambda}_k t) \sin(2\tilde{\lambda}_l t) (\tilde{\mathbb{P}}^T \mathbb{P} \mathbb{Q}^T \tilde{\mathbb{Q}})_{k,l} + \cos(2\tilde{\lambda}_k t) \cos(2\tilde{\lambda}_l t) (\tilde{\mathbb{P}}^T \mathbb{P} \mathbb{Q}^T \tilde{\mathbb{Q}})_{l,k} \right) \tilde{\mathbb{P}}_{l,j}^T \\
&+ \frac{J}{2} \sum_{k,l} \tilde{Q}_{j,k} \left(\sin(2\tilde{\lambda}_k t) \sin(2\tilde{\lambda}_l t) (\tilde{\mathbb{P}}^T \mathbb{P} \mathbb{Q}^T \tilde{\mathbb{Q}})_{k,l} + \cos(2\tilde{\lambda}_k t) \cos(2\tilde{\lambda}_l t) (\tilde{\mathbb{P}}^T \mathbb{P} \mathbb{Q}^T \tilde{\mathbb{Q}})_{l,k} \right) \tilde{\mathbb{P}}_{l,j+1}^T
\end{aligned} \tag{63}$$

onde estendemos as matrizes \mathbb{P} e \mathbb{Q} de forma que $\mathbb{P}_{0,j} = \mathbb{P}_{j,0} = \mathbb{P}_{L+1,j} = \mathbb{P}_{j,L+1} = \mathbb{Q}_{0,j} = \mathbb{Q}_{j,0} = \mathbb{Q}_{L+1,j} = \mathbb{Q}_{j,L+1} = 0$ por praticidade. A dedução destas é apenas uma longa sequência de manipulações algébricas com métodos já utilizados anteriormente e, por falta de espaço, optamos por não incluí-la.

É conveniente subtrair a energia do estado fundamental do sítio e dividir por uma energia característica do sítio:

$$\varepsilon_j = \frac{\langle H_j \rangle - \langle \tilde{0} | H_j | \tilde{0} \rangle}{\sqrt{J^2 + h^2}}, \tag{64}$$

e para as bordas

$$\varepsilon_1 = \frac{\langle H_1 \rangle - \langle \tilde{0} | H_1 | \tilde{0} \rangle}{\sqrt{J^2/4 + h^2}}; \quad \varepsilon_L = \frac{\langle H_L \rangle - \langle \tilde{0} | H_L | \tilde{0} \rangle}{\sqrt{J^2/4 + h^2}}. \tag{65}$$

Essa quantidade é uma medida adimensional da intensidade de excitações acima do estado fundamental. A energia do estado fundamental local pode ser obtida usando $\mathbb{P} = \tilde{\mathbb{P}}$ e $\mathbb{Q} = \tilde{\mathbb{Q}}$ nas equações gerais da energia local:

$$\langle \tilde{0} | H_j | \tilde{0} \rangle = h (\tilde{\mathbb{Q}} \tilde{\mathbb{P}}^T)_{j,j} + \frac{J}{2} (\tilde{\mathbb{Q}} \tilde{\mathbb{P}}^T)_{j-1,j} + \frac{J}{2} (\tilde{\mathbb{Q}} \tilde{\mathbb{P}}^T)_{j,j+1} \tag{66}$$

6. Resultados numéricos e discussões

Durante a diagonalização do nosso hamiltoniano, concluímos que o parâmetro relevante para determinação da fase do estado fundamental do hamiltoniano é a razão $g = h/J$, sendo $g^* = 1$ o ponto crítico. Entretanto, se aumentarmos J e h proporcionalmente, de forma a manter g constante, aumentamos a escala de energia do sistema, tornando sua evolução mais rápida. Com o objetivo de analisar a evolução independentemente da escala de energia, tomamos a evolução em respeito a um tempo adimensional:

$$\tau = \sqrt{J^2 + h^2} t. \tag{67}$$

Note que a adimensionalidade dessa expressão se deve a adoção de unidades naturais nas quais $\hbar = 1$ e, portanto, energia e frequência compartilham da mesma unidade de medida.

Primeiramente, para verificar o comportamento discutido para o caso periódico, tomamos como exemplo o quench $g = \infty \rightarrow \tilde{g} = 0.5$ (Figura 3). Podemos ver os picos da função taxa se aproximando de cúspides a medida que aumentamos o tamanho do sistema, de forma que no limite termodinâmico esse pico se torna não analítico. Além disso, vemos que esses picos surgem nos instantes de tempo em que uma curva de acumulação atravessa o eixo real, evento esse que ocorre com uma frequência bem definida, como discutido anteriormente.

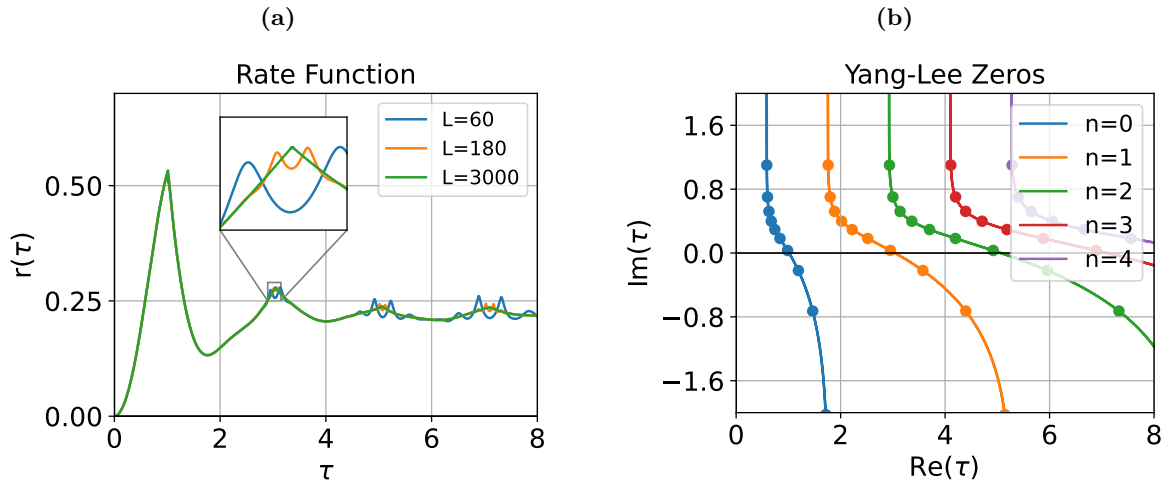


Figura 3 – Para o quench $g = \infty \rightarrow \tilde{g} = 0.5$ do sistema periódico: (a) função taxa para diferentes L ; (b) zeros de Yang-Lee para $L = 20$ (pontos) e curvas de acumulação de zeros que obtemos ao levar o sistema para o limite termodinâmico (curva contínua).

Para o caso aberto, não temos o privilégio de conseguir uma solução analítica para os zeros. Além disso, devido a grande proximidade dos zeros no plano complexo, algoritmos numéricos tradicionais para encontrar raízes de uma função, como o método de Newton, são ineficientes. Por esse motivo, preferimos fazer a visualização da função taxa no plano complexo.

Espera-se que as condições de contorno sejam irrelevantes no limite termodinâmico, e nossos resultados não contradizem tais expectativas. Para o quench $g = \infty \rightarrow \tilde{g} = 0.05$ e tamanhos $L = 200$ e $L = 80$, obtivemos as Figuras 4 e 5, respectivamente. As funções taxa para ambas as condições começam sobrepostas, porém passam a diferir significativamente a partir do primeiro pico. Enquanto isso, os zeros no plano complexo aparentam estar de acordo.

Reduzindo o tamanho do sistema podemos entender esse comportamento e como esperamos que os resultados convirjam no limite $L \rightarrow \infty$. Na Figura 6 vemos uma curva fechada de zeros no plano de tempo complexo. Essa curva equivale a duas curvas de acumulação do caso periódico. À medida que aumentamos o tamanho do sistema, os zeros dessa curva fechada se aproximam das curvas de zeros do caso periódico. A expectativa é que ao continuar aumentando o tamanho do sistema, a parte superior e inferior dessa

curva caminham para $\text{Im}(\tau) = \pm\infty$, se dividindo perfeitamente nas duas curvas do caso periódico no limite termodinâmico. Assim, as funções taxa também convergiriam para o mesmo resultado.

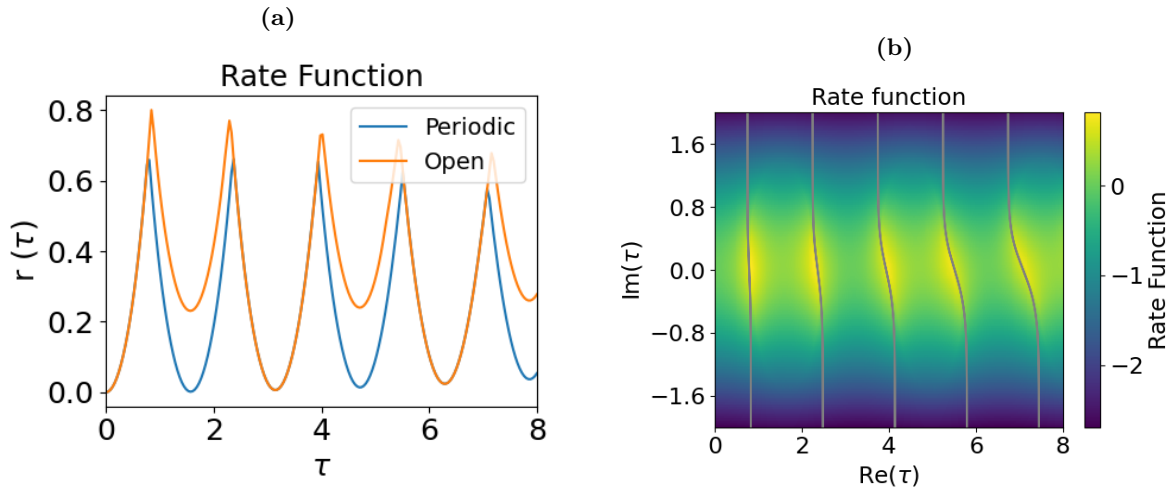


Figura 4 – Para o quench $g = \infty \rightarrow \tilde{g} = 0.05$ e $L=200$:(a) função taxa para condições periódica (azul) e aberta (laranja), ambos para $L = 200$; (b) função taxa no plano de tempo complexo para condição aberta de contorno e $L = 200$ (mapa de calor) e curvas de acumulação de zeros para o caso periódico (cinza).

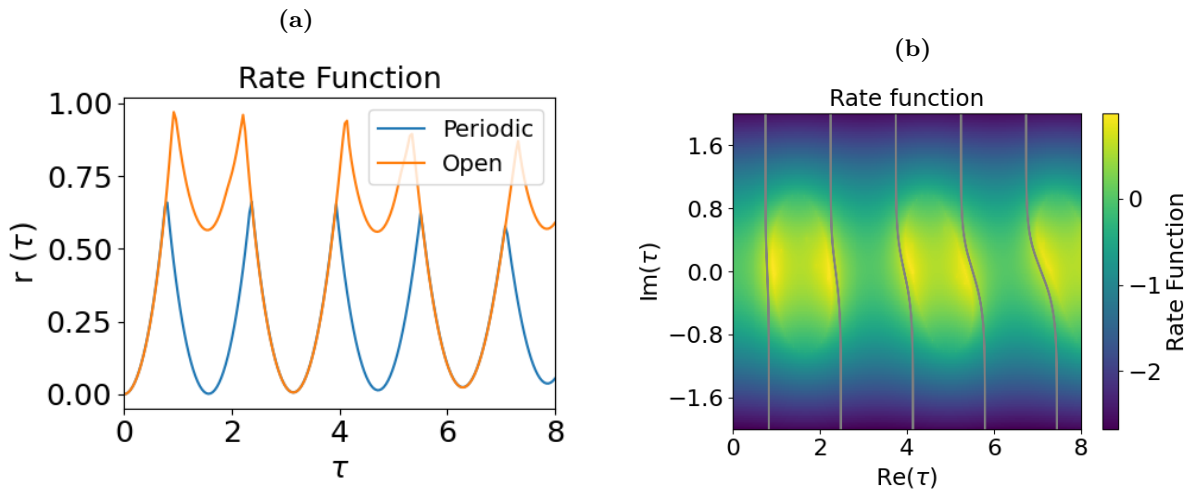


Figura 5 – Para o quench $g = \infty \rightarrow \tilde{g} = 0.05$:(a) Função taxa para condições periódica com $L = 200$ (azul) e aberta com $L = 80$ (laranja); (b) função taxa no plano de tempo complexo para condição aberta de contorno com $L = 80$ (mapa de calor) e curvas de acumulação de zeros para o caso periódico (cinza).

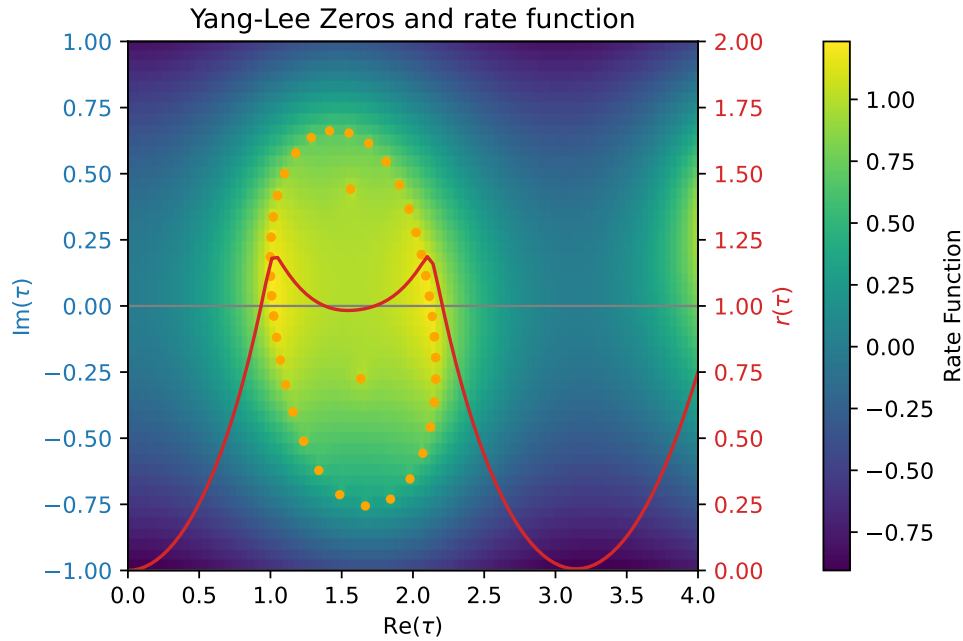


Figura 6 – Para o quench $g = \infty \rightarrow \tilde{g} = 0.05$ e $L = 40$. O mapa de calor representa a função taxa no plano de tempo complexo e os pontos em laranja os zeros encontrados usando o método de Newton (eixo à esquerda). A curva vermelha é a função taxa ao longo da evolução do tempo real (eixo à direita).

Podemos, ainda, visualizar o que acontece quando o quench não atravessa o ponto crítico do diagrama de fases de equilíbrio. Como esperado, obtemos uma função taxa analítica e curvas de acumulação que não atravessam o eixo do tempo real. Esse é o caso para as Figuras 7 e 8, nas quais são considerados quenches dentro da fase paramagnética. Note que diferença entre as funções taxa para ambas as condições (Figura 8b) se atenua consideravelmente, devido à distância da curva de acumulação dos zeros ao eixo real.

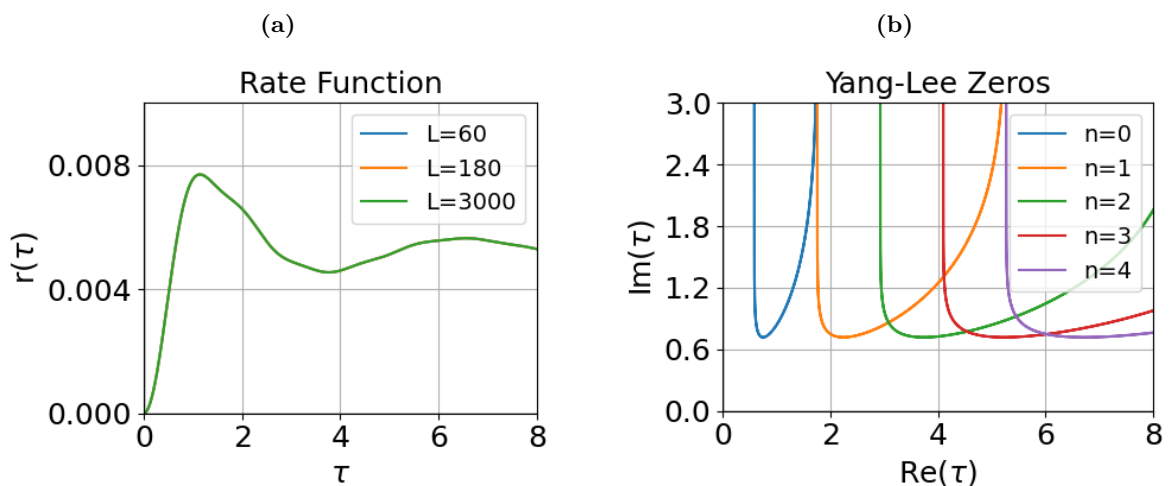


Figura 7 – Para o quench $g = 2 \rightarrow \tilde{g} = 1.5$ no sistema periódico: (a) função taxa para diferentes L ; (b) curvas de acumulação de zeros que obtemos ao levar o sistema para o limite termodinâmico.

Finalmente, podemos concluir nossa análise com o estudo evolução da densidade de energia por sítio. Podemos ver os cones de luz se formando nas bordas da cadeia, o

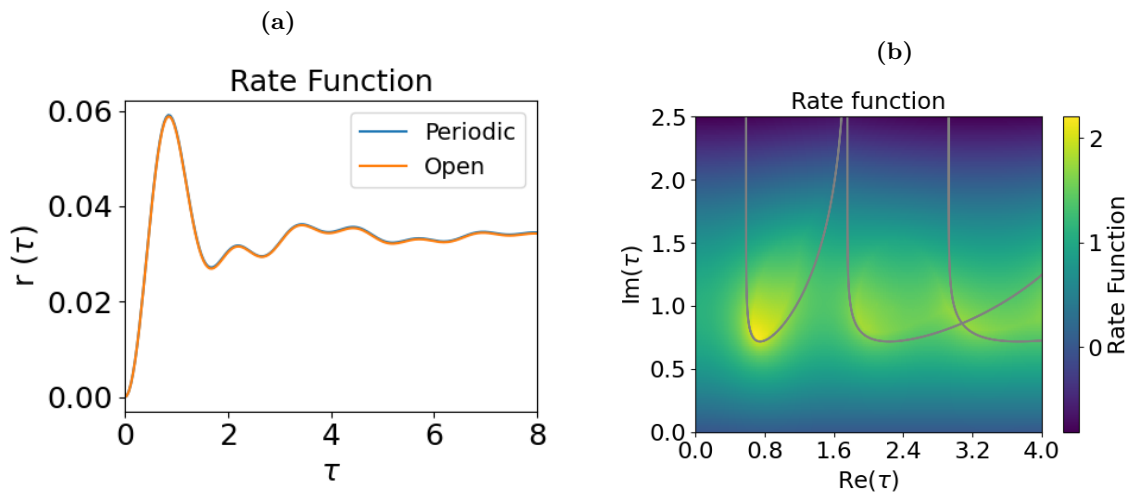


Figura 8 – Para o quench $g = \infty \rightarrow \tilde{g} = 2$: (a) Função taxa para condições periódica com $L = 200$ (azul) e aberta com $L = 200$ (laranja); (b) função taxa no plano de tempo complexo para condição aberta de contorno com $L = 200$ (mapa de calor) e curvas de acumulação de zeros para o caso periódico (cinza).

que entendemos como uma consequência da quebra da simetria translacional. Antes do quench o sistema estava no estado fundamental, não possuindo excitações, mas o quench injeta energia no sistema, criando pares de partículas e antipartículas se movendo em direções opostas. No interior do sistema, as partículas interferem homoganeamente com antipartículas caminhando na direção contrária. Nas bordas, a ausência de um sítio vizinho quebra essa homogeneidade e permite que essas excitações se propaguem pelo sistema. É possível notar, também, que as bordas causam a reflexão das excitações.

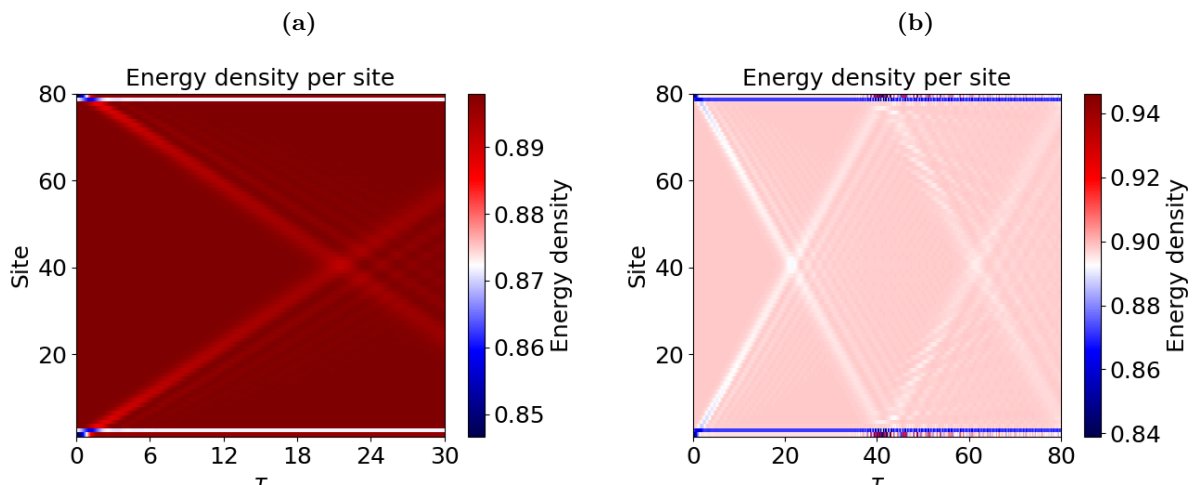


Figura 9 – Densidade de energia por sítio para o quench $g = \infty \rightarrow \tilde{g} = 0.1$ e $L = 80$ e diferentes intervalos de tempo.

Agora, para entender a estrutura do cone, interpretamos as excitações como partículas semi-clássicas, que se propagam com uma velocidade bem definida [6]. Assim, o cone de luz é a região do espaço-tempo na qual um sítio pode estabelecer conexão causal com

a origem da perturbação, pois é delimitado pela trajetória da partícula com a maior velocidade permitida. Isso implica a existência de correlação entre pontos dentro do cone de luz, pois sofrem influências de pares de partículas emaranhadas geradas pela perturbação inicial.

7. Conclusão

Para o caso periódico, conseguimos solucionar o problema analiticamente, o que facilita a compreensão do comportamento do sistema, independentemente de seus parâmetros e tamanho de cadeia.

O caso aberto gera diversas complicações numéricas. A primeira é que o modo de borda tem k exponencialmente grande, autoenergia exponencialmente pequena e componentes de ordem de magnitude extremas, gerando problemas de precisão. Além disso, o eco de Loschmidt é calculado usando a determinante e multiplicação de matrizes $L \times L$. Ambos os processos tem complexidade de tempo $\mathcal{O}(L^3)$, o que limita o tamanho do sistema baseado no poder de processamento numérico. Por fim, a alta proximidade dos zeros no plano complexo torna ineficiente algoritmos simples de busca de raízes, também dificultando a análise.

Apesar das complicações de instabilidade numérica, conseguimos determinar com alta precisão os zeros da função partição dinâmica (eco de Loschmidt) com condições abertas de contorno para cadeias de tamanho até $L \approx 100$.

Notamos que para tamanhos pequenos, os zeros de Yang-Lee-Fisher das cadeias aberta e periódica são bastante distintos. Quando o quench cruza a transição de fase de equilíbrio, os zeros da primeira se distribuem aproximadamente em uma elipse que cruza o eixo do tempo real. Os zeros do caso periódico, entretanto, se distribuem em curvas abertas que cruzam o eixo do tempo real. Aumentando L , as curvas abertas do caso periódico não se movem. Entretanto, a elipse aumenta gradativamente de tamanho e se degenera nas curvas do caso periódico.

Com esses resultados, é possível estabelecer que, no modelo de Ising unidimensional com campo transversal, existe uma relação entre a transição de fase de equilíbrio e a dinâmica: as transições de fase quânticas dinâmicas só ocorrem se o quench atravessar o ponto crítico do diagrama de fases de equilíbrio. Isso é algo notável desse sistema, já que a literatura indica que esse não é necessariamente o caso para outros modelos [4], como modelos de Ising com interações de longo alcance.

Por fim, observamos como a quebra da simetria translacional quebra a homogeneidade da distribuição da energia nas bordas, criando uma excitação que se propaga com uma velocidade bem definida, formando a estrutura de cone de luz.

Referências

- 1 LEE, T. D.; YANG, C. N. Statistical theory of equations of state and phase transitions. i. theory of condensation. *Physical Review*, v. 87, n. 3, p. 404–409, 1952.
- 2 FISHER, M. E. The nature of critical points. In: BRITTIN, W. E. (ed.). *Lectures in Theoretical Physics*. Boulder: University of Colorado Press, 1965. VII C, p. 1–159.
- 3 HEYL, M.; POLKOVNIKOV, A.; KEHREIN, S. Dynamical quantum phase transitions in the transverse-field ising model. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 110, n. 13, 2013.
- 4 HEYL, M. Dynamical quantum phase transitions: a review. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 81, n. 5, p. 054001, 2018.
- 5 LIEB, E. H.; SCHULTZ, T.; MATTIS, D. Two soluble models of an antiferromagnetic chain. *Annals of Physics*, v. 16, n. 3, p. 407–466, 1961.
- 6 CALABRESE, P.; CARDY, J. Time dependence of correlation functions following a quantum quench. *Phys. Rev. Lett.*, v. 96, p. 136801, 2006.
- 7 SACHDEV, S. *Quantum Phase Transitions*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.