

**OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS SUJEITAS A RESTRIÇÕES DE  
ALAVANCAGEM E DE VOLATILIDADE DO  
TRACKING-ERROR UTILIZANDO O CRITÉRIO DE MÉDIA-  
VARIÂNCIA.**

**Rafael Augusto Sperendio**

Trabalho apresentado ao Programa de Educação  
Continuada em Engenharia – PECE como parte dos  
requisitos para conclusão do MBA com  
Especialização em Engenharia Financeira.

Orientador: Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa.

**São Paulo**

**2009**

MBA/EF  
a2011  
S36e

4

M 2011 N

1. Ingeniería financiera  
a.

PECE

SYSNO · 2183636

**DEDALUS - Acervo - EPEL**



31500020134

## AGRADECIMENTOS

A Deus por todas as oportunidades.

Ao meu pai Flavio Celso Sperendio e à minha mãe Dalva Ribeiro Sperendio por todo suporte pessoal e educacional que me deram.

À minha namorada Thaís Machado de Carvalho pelo seu apoio e compreensão durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Professor Doutor Oswaldo Luiz do Valle Costa por todos os ensinamentos, paciência e disponibilidade na orientação deste trabalho.

A todos os professores do Programa de Educação Continuada em Engenharia, por tudo o que aprendi ao longo do curso.

Em especial às amigas Angélica Perboni, com quem aprendi a dar os primeiros passos no estudo de ativos de renda variável, e Soraya Monaco Salles de Freitas que colaborou muito com meu desenvolvimento profissional.

Aos colegas de curso MBA em Engenharia Financeira em especial André Luís Costa, Tiago Vasconcelos dos Santos, Cassiano Souza, Danilo Okazaki, Lucas Tirlone, Luciano Tavares e Walter Archanjo pelo companheirismo, amizade e pelas proveitosas discussões.

E a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para meu desenvolvimento acadêmico e pessoal, meus sinceros agradecimentos..



## RESUMO

Este trabalho é dedicado ao estudo de modelos de otimização de carteiras de investimento com gestão ativa, sujeitas a restrições de alavancagem e de volatilidade do *tracking-error*, utilizando como base o critério de média-variância desenvolvido inicialmente por Harry Markowitz (1952). O trabalho de Harry Markowitz (1952), *Portfolio Selection*, teve como principal contribuição a distinção entre a variabilidade do retorno de um ativo financeiro e seu impacto no risco de uma carteira de investimento possibilitando que, desde que se disponha de um conjunto de dados históricos referentes aos ativos financeiros que fazem parte do portfólio, a construção através de um modelo de programação quadrática de uma carteira que maximize a taxa de retorno para um determinado nível de risco aceitável ou que se minimize o nível de risco para uma determinada taxa de retorno esperada.

Um administrador de carteiras com gestão ativa tem como um de seus principais objetivos superar o índice de mercado, de modo a criar valor para o investidor comparativamente a fundos indexados, ou com gestão passiva. Dessa forma, este trabalho pretende, através da análise de média-variância proposta por Markowitz combinada com modelos de otimização, encontrar estratégias ótimas de investimento para, ao invés de buscar a carteira com menor risco total para um dado retorno exigido, buscar a carteira com menor *tracking-error* para um dado retorno esperado em relação ao *benchmark* adotado, sendo no caso deste trabalho o índice Ibovespa.



## ABSTRACT

This research is dedicated on the study of optimization models for investment portfolios with active management, subject to constraints on leverage and volatility of the tracking-error, based on the criteria of mean-variance first developed by Harry Markowitz (1952).

The article published by Harry Markowitz (1952), Portfolio Selection, has made as its main contribution the difference between the variability of the return of a financial asset and its impact on the risk of an investment portfolio, enabling, through a set of historical data of the financial assets that are part of the portfolio, the construction, through a quadratic programming model, of a portfolio that maximizes the return rate for a given level of risk or that minimize the risk level for a given expected rate of return.

The manager of an active managed portfolio has as one of its main goals to overcome the market index in order to add value for investors compared to index funds, or passive management. Thus, this paper intends, through the analysis of mean-variance proposed by Markowitz combined with optimization models, to find optimal strategies for investment, instead of seeking the portfolio with lower overall risk for a given required return, to seek the portfolio with lower tracking-error for a given expected return over the benchmark adopted, being the Ibovespa index the benchmark adopted on this paper.



## SUMÁRIO

<b>RESUMO</b> .....	<b>7</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>13</b>
1.1 Situação Problema .....	13
1.2 Justificativa da escolha do tema .....	14
1.3 Objetivo .....	15
1.4 Metodologia .....	15
1.5 Descrição dos capítulos .....	16
<b>2 TEORIA DE CARTEIRAS</b> .....	<b>19</b>
2.1 Fundamentos do modelo média-variância .....	19
2.2 O conceito e as medidas de retorno .....	21
2.2.1 Medidas de retorno .....	21
2.3 O conceito e as medidas de risco .....	26
2.3.1 Fontes de risco .....	27
2.3.1.1 Risco sistemático ou conjuntural .....	27
2.3.1.2 Risco não-sistemático ou próprio .....	28
2.3.2 Medidas de Risco .....	28
2.4 Retorno Esperado de uma Carteira .....	30
2.5 Variância do Retorno de uma Carteira .....	31
2.5.1 Diversificação .....	35
2.6 Fronteira Eficiente .....	50
2.7 Formulação do problema de seleção de ativos .....	53
2.8 Covariância entre Carteiras de mínima variância .....	61
2.9 Aprimoramentos no modelo original de média-variância .....	67
<b>3 MODELOS DE RASTREAMENTO</b> .....	<b>71</b>
3.1 Fundos Passivos e Ativos .....	71
3.2 Modelo de mínima variância do erro de rastreamento .....	72
3.2.1 Modelo de mínima variância com quantidade específica de ativos .....	82
<b>4 APLICAÇÃO DO MODELO E TESTES</b> .....	<b>89</b>
4.1 Seleção do <i>benchmark</i> .....	89
4.2 Seleção da amostra e coleta de dados .....	91
4.3 Aplicação dos modelos .....	91
4.3.1 Seleção dos ativos .....	92
4.3.2 Ganho esperado de rentabilidade .....	94
4.4 Resultados do modelo e <i>backtest</i> .....	95
4.5 Testes .....	97
<b>5 CONCLUSÃO</b> .....	<b>101</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>103</b>



## 1 INTRODUÇÃO

### 1.1 Situação Problema

A motivação para a realização deste trabalho surgiu do desafio enfrentado no dia a dia de um administrador de fundos de investimento com gestão ativa. Neste tipo de gestão, o administrador tem como principal objetivo ultrapassar a rentabilidade de uma determinada taxa ou de uma carteira teórica adotada como *benchmark* do fundo administrado, diferentemente das carteiras com gestão passiva em que o objetivo maior é o de replicar o retorno gerado pela taxa ou carteira teórica adotada como *benchmark*.

Os administradores de fundos ativos buscam atingir este objetivo assumindo riscos maiores, dado que o desempenho adicional de suas carteiras em relação ao *benchmark* é que define a remuneração extra, denominada taxa de performance, oferecida por grande parte dos fundos ativos aos seus administradores. Dessa forma, observando um dos princípios fundamentais de finanças, quanto maior o risco, maior o potencial de retorno da estratégia ativa.

Neste contexto fica evidente o conflito de interesses entre investidores e administradores de fundos de investimento no qual os administradores, na tentativa de maximizar o volume a receber como taxa de performance, podem investir o capital aportado pelos investidores em ativos de alto risco, levando o portfólio a um nível de risco muitas vezes além do patamar aceitável pelos investidores, podendo gerar grandes perdas aos cotistas.

Diante deste problema, surge a necessidade de um fator atenuante no risco incorrido pelos administradores, como o conceito de linha d'água, que determina que a taxa de performance só poderá se cobrada se o fundo apresentar desempenho superior ao *benchmark* em um período pré-determinado, como 12 meses por exemplo. Outra abordagem para a minimização deste conflito seria a inclusão de uma restrição quanto ao risco incorrido em relação ao *benchmark*, ou seja, uma restrição de volatilidade do *tracking-error*, a qual será apresentada neste trabalho.

## 1.2 Justificativa da escolha do tema

O estudo de algoritmos de otimização aplicados na gestão de carteiras de investimento, tem se tornado cada vez mais importante em razão da crescente preocupação com os riscos dos ativos financeiros em um mercado globalizado e sob influência de inúmeras variáveis de difícil controle.

A publicação do modelo de média-variância, proposto por Harry Markowitz em seu artigo *Portfolio Selection* no *Journal of Finance* em 1952, foi um marco fundamental na história do mercado financeiro, tendo introduzido a variância como medida de risco de um ativo e a prática de diversificação de carteira de investimentos, através de um procedimento analítico que envolve a combinação de ativos correlacionados com o objetivo de formar portfólios eficientes, criando um embasamento teórico matemático para um conceito já empiricamente aceito de que a diversificação dos ativos diminui o risco total do investimento.

O modelo de Markowitz se tornou o alicerce para a atual Moderna Teoria de Carteiras e, desde então, este processo vem apresentando constante evolução ao longo do tempo com o suporte do avanço na capacidade de processamento dos computadores, uma vez que o problema de otimização na alocação de ativos muitas vezes requer algoritmos numéricos para gerar resultados de maneira viável, fazendo com que atualmente o grande desafio de estudo em otimização de carteiras seja o de adaptar os modelos de otimização já existentes de forma a se aproximarem cada vez mais da realidade enfrentada pelos administradores de recursos.

Uma abordagem interessante é a de analisar o desempenho do modelo média-variância proposto por Markowitz em 1952, adaptado com a inclusão de restrições de alavancagem e de volatilidade em relação a um determinado parâmetro de referência, conforme proposto por Roll (1992), na tentativa de minimizar o conflito de interesses existente entre os profissionais de investimento e os investidores com relação ao risco total da carteira de investimentos.

### 1.3 Objetivo

Neste trabalho o objetivo é analisar o desempenho de um modelo de otimização, baseado no modelo média-variância proposto inicialmente por Harry Markowitz em 1952, incluindo restrições de alavancagem e de volatilidade do *tracking-error*, conforme proposto por Roll (1992), utilizando como *benchmark* o índice Ibovespa, visando criar carteiras com gestão ativa mas com restrições que minimizem o risco para o investidor.

### 1.4 Metodologia

Para solucionar o problema proposto neste estudo adotamos como modelo de rastreamento o modelo de mínima variância do erro de rastreamento proposto por Roll (1992), assumindo como *benchmark* o índice Ibovespa. Como restrições impostas ao modelo ficou estabelecido que este deverá apresentar uma rentabilidade diária esperada superior em 0,03 ponto percentual à rentabilidade diária esperada do índice Ibovespa. Além disto, foi também imposto que o modelo não deverá permitir posições a descoberto na carteira.

A seleção da amostra para subsidiar a elaboração do modelo compreendeu o histórico de fechamentos diários ajustados por proventos, splits e agrupamentos dos 65 ativos que faziam parte da carteira teórica do índice Ibovespa, válida para o quadrimestre Setembro-Dezembro 2009, para o período de 30 de novembro de 2007 a 31 de agosto de 2009 resultando em uma amostra de 28.145 dados, extraídos do *software* Economática.

Com base nesta amostra de dados calculamos o retorno esperado, a volatilidade, ambos diários, e a matriz de covariâncias para todos os ativos. Feito isso, selecionamos os cinco ativos, resultando em uma representatividade de aproximadamente 21,4% do índice, para compor o portfólio. Dado que a restrição de posições a descoberto na carteira implica na inclusão de uma restrição de desigualdade ao modelo, e conseqüentemente impossibilidade de se encontrar uma solução analítica, utilizamos a função *fmincon.m* do software MATLAB para encontrar, utilizando métodos numéricos, a alocação ótima dos ativos selecionados para compor o portfólio

com o objetivo de minimizar o erro de rastreamento do índice Ibovespa com ganho de rentabilidade diária esperada de 0,03 ponto percentual.

A partir deste ponto, realizamos o *backtest* da carteira para o período de 30 de novembro de 2007 a 31 de agosto de 2009, com o objetivo de avaliar como teria sido o desempenho passado do portfólio.

Como janela de testes para avaliar o desempenho das carteiras ótimas geradas, selecionamos o período de setembro a outubro de 2009, com 42 dias úteis, calculando a rentabilidade obtida, a volatilidade, o erro quadrático médio de rastreamento e a variância do erro de rastreamento.

## 1.5 Descrição dos capítulos

Este trabalho foi organizado em cinco capítulos descritos conforme segue:

No capítulo 1 é apresentada uma introdução ao trabalho, explicando a situação problema, a justificativa que levou ao desenvolvimento do tema escolhido, o objetivo e a metodologia aplicada no processo, buscando fornecer uma visão geral da pesquisa realizada.

O capítulo 2 é dedicado à apresentação de toda a fundamentação teórica a respeito da diversificação de carteiras proposta por Markowitz, além dos conceitos básicos de média, variância, correlação, da caracterização do risco de uma carteira de investimento e da fronteira eficiente. Também neste capítulo, é apresentada uma revisão bibliográfica das principais linhas de pesquisa desenvolvidas a partir do trabalho de Markowitz.

No capítulo 3 é apresentado o modelo de rastreamento, desenvolvido por Roll (1992, p.15), em uma extensão da teoria apresentada no capítulo 2 no estudo de um problema enfrentado diariamente pela maioria dos administradores de recursos, otimizar a alocação de ativos em uma carteira em relação a um determinado *benchmark*.

No capítulo 4, é demonstrada a aplicação do modelo de mínima variância do erro de rastreamento com o objetivo de otimizar a alocação de ativos em uma carteira de modo a superar o desempenho do índice Ibovespa.

Finalmente no capítulo 5 são apresentadas as conclusões finais sobre a viabilidade e a eficiência do modelo estudado.



## 2 TEORIA DE CARTEIRAS

Neste capítulo apresentaremos os fundamentos que levaram Markowitz à criação do modelo de média-variância além de definir os conceitos de risco, retorno e estudar a relação entre eles e suas características na composição de carteiras de investimentos.

### 2.1 Fundamentos do modelo média-variância

A Teoria de Carteiras teve como início a publicação do artigo *Portfolio Selection* de Harry Markowitz em 1952. Neste artigo, o autor propõe um modelo de programação quadrática para resolver o problema de alocação ótima de ativos numa carteira de investimentos, considerando apenas um único período de análise, no qual enfatizava a prática da diversificação. O trabalho de Markowitz foi, sem dúvida, um marco na história da Moderna Teoria de Finanças, tendo como contribuição fundamental a distinção entre a variabilidade do retorno de um ativo financeiro e seu impacto no risco de uma carteira de investimento.

Segundo Markowitz (1990, p.280, tradução nossa),

Os princípios básicos da Teoria de Carteiras vieram a mim um dia em que eu estava lendo o livro *The Theory of Investment Value* de John Burr Williams. Williams propôs que o valor de uma ação deveria conter o valor presente do fluxo de seus dividendos futuros. Mas claramente os dividendos são incertos, então eu usei as recomendações de Williams para avaliar uma ação como o valor esperado do fluxo descontado de seus dividendos futuros. Mas se o investidor está preocupado somente com o valor esperado dos títulos, o investidor deve também estar interessado somente no valor esperado do portfólio. Para maximizar o valor esperado de um portfólio, ele precisa investir somente em um título – o título com maior retorno esperado (ou qualquer um, se vários empatarem em maior retorno). Assim, a ação baseada somente no retorno esperado (como a ação baseada na certeza do futuro) deve ser rejeitada como comportamento de um investidor racional.

Fica óbvio que os investidores se preocupam com risco e retorno, e estes devem ser medidos para o portfólio como um todo. Variância (ou, equivalentemente, desvio-padrão), veio a mente como medida de risco para o portfólio. [...] Desde que existiam dois critérios – retorno esperado e risco – o pensamento natural de um estudante de economia era imaginar o investidor selecionando um ponto da série de Pareto de retorno esperado ótimo, variância da combinação de retornos, agora conhecida como fronteira

eficiente. Estes são os elementos básicos da Teoria de Carteiras os quais apareceram em um dia enquanto lia Williams.

Com a publicação de seu artigo *Portfolio Selection* em 1952, Markowitz contrariou a teoria aceita até então de que o investidor se preocupava apenas com o retorno esperado dos títulos. Markowitz (1952, p.77, tradução nossa) afirma que:

Nós primeiramente consideramos a regra de que o investidor deve (ou deveria) maximizar o retorno descontado, ou retornos antecipados. Esta regra é rejeitada tanto como hipótese para explicar, como máxima para guiar o comportamento de um investidor. Depois, nós consideramos a regra de que o investidor deve (ou deveria) considerar o retorno esperado como algo desejado e a variância do retorno como algo indesejável.  
[...]Diversificação é tanto observável quanto sensato; uma regra que não implique na superioridade da diversificação deve ser rejeitada tanto como hipótese quanto como máxima.

Assim, Markowitz partiu da constatação de que, ao contrário do que poderia sugerir a teoria de investimentos até então utilizada, a maioria dos investidores não colocava toda sua riqueza nos ativos que possibilitavam maior retorno, mas sim em uma carteira de títulos, onde alguns eram mais rentáveis que os outros.

Com o intuito de explicar o porquê de os investidores abrirem mão de maiores rentabilidades, Markowitz construiu um modelo teórico no qual o investidor racional toma suas decisões considerando não somente o retorno do investimento, mas também seu risco, aplicando em uma carteira diversificada devido ao fato de sua satisfação máxima não ser, necessariamente, atingida com o investimento de maior retorno possível, mas sim com aquele que maximize sua relação aceitável entre risco e retorno.

As principais hipóteses assumidas para a construção do modelo original foram:

- Os investidores avaliariam carteiras apenas com base no valor esperado e na variância das taxas de retorno sobre o horizonte de análise;
- Os investidores nunca estariam satisfeitos. Quando postos a escolher entre duas carteiras de mesmo risco, sempre escolheriam a de maior retorno;

- Os investidores seriam avessos ao risco. Quando postos a escolher entre duas carteiras de mesmo retorno, sempre escolheriam a de menor risco.

Partindo, principalmente, dessas três hipóteses, Harry Markowitz deu início à teoria que hoje é conhecida como Teoria Moderna de Carteiras, revolucionando o mundo das finanças.

## **2.2 O conceito e as medidas de retorno**

Uma medida importante para análise e seleção de investimentos é a taxa de retorno, que representa o ganho monetário por unidade de capital investido em determinado período de tempo.

Ross (2002, p.190) menciona que: “O retorno total de um investimento é a soma do rendimento em dinheiro com o ganho ou a perda de capital no investimento.” Partindo desta definição, temos que no caso de investimento em ações:

$$\text{Retorno total} = \text{Dividendos} + \text{Ganho (ou perda) de capital} \quad (2.1)$$

### **2.2.1 Medidas de retorno**

As variações de preço de um ativo podem ser medidas pela variação absoluta ou pela variação relativa, conhecida como taxa de retorno, que é a maneira mais usual no mercado. De acordo com o *RiskMetrics* (1996, p.46, tradução nossa) a principal razão para se usar as taxas de retorno ao invés das variações absolutas de preços é que os retornos possuem propriedades estatísticas mais interessantes do que os preços, além disto as variações absolutas de preço não medem as variações em termos de um determinado nível de preço.

Conforme as definições de retorno apresentadas e considerando que a série de preços de um determinado ativo  $i$  já esteja incorporando os dividendos pagos no período, temos a taxa de retorno deste ativo, que é uma variável aleatória, para um único período dada pela variação de seu preço entre dois instantes de tempo:

$$R_{i,t} = \frac{S_{i,t} - S_{i,t-1}}{S_{i,t-1}} = \frac{S_{i,t}}{S_{i,t-1}} - 1 \quad (2.2)$$

onde  $R_{i,t}$  é o retorno do ativo  $i$  no período  $t$ ,

e  $S_{i,t}$  é o preço à vista do ativo  $i$  no período  $t$ .

Para múltiplos períodos, tem-se que:

$$R_{i,t;n} = \frac{S_{i,t}}{S_{i,t-n}} - 1 \quad (2.3)$$

$$R_{i,t;n} + 1 = \frac{S_{i,t}}{S_{i,t-n}} = \frac{S_{i,t}}{S_{i,t-1}} \times \frac{S_{i,t-1}}{S_{i,t-2}} \times \frac{S_{i,t-2}}{S_{i,t-3}} \times \dots \times \frac{S_{i,t-(n-1)}}{S_{i,t-n}}$$

$$R_{i,t;n} + 1 = \frac{S_{i,t}}{S_{i,t-n}} = (1 + R_{i,t}) \times (1 + R_{i,t-1}) \times \dots \times (1 + R_{i,t-(n-1)})$$

$$R_{i,t;n} = \left[ \prod_{k=0}^{n-1} (1 + R_{i,t-k}) \right] - 1 \quad (2.4)$$

Uma prática muito utilizada no mercado e que será também adotada neste trabalho é o cálculo do retorno geométrico, ou retorno logarítmico, calculado conforme segue:

$$r_{i,t} = \ln(1 + R_{i,t}) = \ln\left(\frac{S_{i,t}}{S_{i,t-1}}\right) = \ln S_{i,t} - \ln S_{i,t-1} \quad (2.5)$$

O uso dos retornos logarítmicos pode ser empregado sem grandes implicações para pequenas variações de preço, como podemos observar pela expansão de Taylor da fórmula do retorno logarítmico demonstrada a seguir:

Fórmula da expansão de Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

(2.6)

Para o caso do retorno logarítmico, temos que:

$$r_{i,t} = f(R_{i,t}) = \ln(1 + R_{i,t})$$

Expandindo a equação do retorno logarítmico pela fórmula da expansão de Taylor até a 3ª ordem, segue que:

$$f(R_{i,t}) = \frac{f(R_{i,0})}{0!} + \frac{f'(R_{i,0})}{1!} (R_{i,t} - R_{i,0}) + \frac{f''(R_{i,0})}{2!} (R_{i,t} - R_{i,0})^2 + \frac{f'''(R_{i,0})}{3!} (R_{i,t} - R_{i,0})^3$$

Assumindo  $R_{i,0} = 0$ , tem-se que:

$$f(R_{i,t}) = \frac{\ln(1+0)}{0!} + \frac{1}{1!} (R_{i,t} - 0) + \frac{-1}{2!} (R_{i,t} - 0)^2 + \frac{2!}{3!} (R_{i,t} - 0)^3$$

$$f(R_{i,t}) = R_{i,t} - \frac{1}{2} R_{i,t}^2 + \frac{1}{3} R_{i,t}^3$$

Como:

$$f(R_{i,t}) = \ln(1 + R_{i,t})$$

Segue que:

$$\ln(1 + R_{i,t}) = R_{i,t} - \frac{1}{2}R_{i,t}^2 + \frac{1}{3}R_{i,t}^3 + \dots$$

Para variações pequenas no preço do ativo, os termos a partir da 2ª ordem tenderão a zero podendo ser desprezados, o que implica em:

$$\begin{aligned} \ln(1 + R_{i,t}) &\approx R_{i,t} \\ \ln\left(\frac{S_{i,t}}{S_{i,t-1}}\right) &\approx \frac{S_{i,t} - S_{i,t-1}}{S_{i,t-1}} \end{aligned}$$

O motivo para o uso do retorno logarítmico decorre da facilidade de se compor os retornos dadas as propriedades matemáticas dos logaritmos, principalmente a seguinte:

$$\ln(A \cdot B) = \ln A + \ln B$$

Através desta propriedade, para o cálculo do retorno para múltiplos períodos de tempo, o retorno é composto pela soma dos retornos logarítmicos em cada período de tempo ao invés de se calcular o produtório dos retornos em cada período de tempo conforme a equação (2.4).

Uma abordagem alternativa para a medida de retorno se dá pelo fato de que o retorno pode ser definido como o valor esperado dos rendimentos, considerando-se capitalização contínua, do ativo. Dessa maneira, seja  $r_{i,t}$  o retorno de um ativo  $i$  durante um determinado período de tempo dividido em  $k$  intervalos indexado por  $t$ . Temos a relação entre o preço final do intervalo  $S_t$  e o preço inicial  $S_{t-1}$  dada pela seguinte equação:

$$S_t = S_{t-1} \left(1 + \frac{r_{i,t}}{k}\right)^{k \cdot t}$$

No caso de capitalização contínua,  $k$  tende a infinito, dessa forma segue que:

$$\frac{S_t}{S_{t-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r_{i,t}}{k}\right)^{k \cdot t} = e^{r_{i,t} \cdot t}$$

Assumindo uma unidade de tempo e considerando o logaritmo neperiano de ambos os lados, temos novamente que:

$$r_{i,t} = \ln \left( \frac{S_{i,t}}{S_{i,t-1}} \right)$$

Dado que a taxa de retorno de um ativo de risco é uma variável aleatória, uma vez que no caso deste tipo de ativo o investimento ocorre sob condições de incerteza, de modo que o resultado só pode ser conhecido ao fim do período de análise, a decisão de investimento envolve analisar e comparar valores esperados. De acordo com Ross (2002, p.206), o retorno esperado é:

[...] o retorno que um investidor espera de uma ação no próximo período. Evidentemente, como se trata apenas de uma expectativa, o retorno efetivo poderá ser mais alto ou mais baixo que o esperado. A expectativa de um indivíduo pode simplesmente ser o retorno médio por período que um título tenha obtido no passado. Alternativamente, pode basear-se numa análise detalhada das perspectivas de uma empresa, em algum modelo desenvolvido em computador, ou em informação especial (privilegiada).

Existem diversas maneiras para se quantificar a rentabilidade esperada de um determinado ativo como, por exemplo, projeção de cenários econômicos ou por análise de séries históricas de preços. No contexto deste trabalho, será adotado o critério de análise de séries históricas de preços, uma vez que o modelo de média-variância proposto por Markowitz (1952), como o próprio nome diz, utiliza como parâmetros a média e variância das séries de retornos dos ativos analisados.

Esta taxa de retorno pode ser estimada utilizando a equação (2.5) a partir de retornos observados sobre uma série histórica de preços, ajustada pelos dividendos pagos no período, para diferentes períodos de tempo sendo o diário o mais utilizado. O retorno médio  $\mu_i$  de um determinado ativo  $i$

é o valor esperado da taxa de retorno considerando uma amostra com uma certa quantidade de observações conforme segue:

$$\mu_i = E(r_i) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{i,t}$$

(2.7)

sendo:  $\mu_i$  = retorno esperado do ativo  $i$ ,

$t$  = período de tempo,

$T$  = total de períodos de tempo,

e  $r_{i,t}$  = retorno no período de tempo  $t$ .

No contexto deste trabalho, o retorno esperado será calculado pela média das taxas de retornos logarítmicos diários que o ativo apresentou no passado, considerando a série de preços ajustadas.

### 2.3 O conceito e as medidas de risco

De acordo com Jorion (1997, p. 3), “risco pode ser definido como a volatilidade de resultados inesperados, normalmente relacionados ao valor de ativos ou passivos de interesse.”

O comportamento dos valores mobiliários no mercado financeiro depende de inúmeros fatores de incerteza, o que torna a previsibilidade do comportamento futuro destes ativos uma árdua tarefa de ser realizada. Conforme Markowitz (1959, p.4, tradução nossa),

Incerteza é uma saliente característica do investimento em valores mobiliários. As forças econômicas não são suficientemente bem entendidas para que as previsões fiquem além da dúvida ou erro. Mesmo se as conseqüências das condições econômicas fossem entendidas perfeitamente, influências não econômicas podem mudar a rota da prosperidade como um todo, o nível do mercado, ou o sucesso de um valor mobiliário em particular.

### 2.3.1 Fontes de risco

Por depender de uma série de fatores, o conceito de risco pode ser subdividido em diversos tipos de acordo com sua origem. Segundo Securato (2005, p. 362),

Os riscos financeiros decorrem exclusivamente de eventos que afetam diretamente as posições das carteiras dos bancos e são consequência de decisões de natureza financeira. Os riscos desse tipo são classificados como risco de crédito (eventualidade de as contrapartes de contratos dos quais a empresa é credora não honrarem suas obrigações conforme as cláusulas originais), risco de liquidez (dificuldade de obtenção de fundos para o financiamento dos ativos ilíquidos da instituição, acarretando assim o não cumprimento de suas obrigações) e risco de mercado (variação no resultado da empresa devido ao efeito de mudanças de preços dos ativos financeiros sobre as posições da empresa).

Para entender e medir possíveis perdas devido às flutuações do mercado é importante identificar e quantificar o mais corretamente possível as volatilidades e correlações dos fatores que impactam a dinâmica do preço do ativo.

Segundo Securato (2007, p. 48), o risco total a que está sujeito um ativo pode, basicamente, ser subdividido em duas partes: risco sistemático ou conjuntural e risco não-sistemático ou próprio.

#### 2.3.1.1 Risco sistemático ou conjuntural

O risco sistemático, de acordo com Neto (2003, p.287) “[...] é inerente a todos os ativos negociados no mercado, sendo determinado por eventos de natureza política, econômica e social”. Ross (1995, p.242) descreve o risco sistemático como: “[...] qualquer risco que afeta um grande número de ativos, cada um com maior ou menor intensidade”. Dessa forma, o risco conjuntural está relacionado às flutuações do sistema econômico como um todo, não podendo ser eliminado pelo processo de diversificação de ativos, ou seja, mesmo que sejam introduzidos inúmeros ativos ao portfólio, o risco conjuntural irá sempre existir, uma vez que todos os ativos estão expostos à este risco, também conhecido como risco de mercado.

Securato (2007, p.49) ressalta que:

É importante frisar que o risco conjuntural é tanto maior quanto maiores são as possibilidades de variação da conjuntura, em geral facilitadas pelas regras mal definidas ou mal aplicadas, pelos desmandos, pelos escândalos, enfim, por todo um processo que passa pela credibilidade do sistema como um todo. Assim, o Estado é sempre um dos maiores responsáveis pelo risco sistemático ou conjuntural a que um ativo está sujeito.

### **2.3.1.2 Risco não-sistemático ou próprio**

O risco próprio, também conhecido por risco não-sistemático ou risco diversificável, segundo Gitman (1997, p.221), “é atribuído a eventos específicos da empresa”. Securato (2007, p.49) caracteriza este tipo de risco como “[...] o risco intrínseco ao ativo e ao subsistema ao qual pertence; é gerado por fatos que atingem diretamente o ativo em estudo ou o subsistema a que está ligado e não atinge os demais ativos e subsistemas.” Dessa maneira, o risco não-sistemático é aquela parcela do risco que não pode ser associada ao comportamento da economia, isto é, depende exclusivamente das características de cada ativo e é função de uma série de itens que podem afetar o desempenho da companhia. Dessa forma, como o risco próprio é intrínseco ao ativo, o processo de diversificação entre ativos é o mais indicado para diluir este tipo de risco, sendo que até mesmo uma diversificação simples, com alocação aleatória de ativos ao portfólio, pode ser capaz de reduzir o risco total da carteira de forma significante.

### **2.3.2 Medidas de Risco**

Markowitz revolucionou o mercado financeiro ao quantificar o conceito de risco de investimento como a variância em relação ao retorno esperado de um ativo. Este indicador mostra o grau de concentração dos retornos considerados para o cálculo da média em torno dela própria. Dessa forma, quanto menor a variância, maior será a concentração de probabilidade em torno da média e conseqüentemente menor risco para o investidor. Já por outro lado, quanto maior a variância, maior a dispersão de probabilidade em torno da média, gerando um maior risco para o investidor. Entretanto, vale destacar que como a variância envolve o quadrado da variável analisada, a dimensão da variância é o quadrado da variável em análise, gerando uma certa dificuldade na interpretação de seu resultado. Portanto, é comum medir a dispersão pelo desvio-

padrão, que é a raiz quadrada da variância, tendo então a mesma dimensão da variável em análise.

Para o cálculo da variância de um ativo, consideramos a soma dos quadrados das diferenças entre os retornos da série e o retorno esperado, dividido pelo número de elementos da série de retornos, quando se considera toda a população na análise, ou dividido pelo número de elementos da série de retornos menos 1, quando analisamos uma amostra da população, em decorrência da perda de 1 grau de liberdade. Dessa maneira, a variância dos retornos de um ativo  $i$  é dada por:

$$\sigma_i^2 = \text{Var}(r_i) = E\left((r_i - E(r_i))^2\right)$$

(2.8)

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_{i,t} - \mu_i)^2$$

(2.9)

E seu desvio-padrão:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_{i,t} - \mu_i)^2}$$

(2.10)

sendo:  $t$  = período de tempo,

$T$  = total de períodos de tempo,

$r_{i,t}$  = retorno do ativo  $i$  no período de tempo  $t$ ,

e  $\mu_i$  = retorno esperado do ativo  $i$ .

## 2.4 Retorno Esperado de uma Carteira

De acordo com Markowitz (1952, p.81) o retorno de uma carteira como um todo é uma soma ponderada de variáveis aleatórias (onde o investidor pode escolher os pesos). Conforme a propriedade estatística da esperança matemática, onde o valor esperado de uma combinação linear de variáveis aleatórias é igual a combinação linear dos seus valores esperados, segue que:

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Dessa maneira, temos que a partir dos retornos esperados para cada um dos ativos e da composição percentual da carteira, o retorno esperado do portfólio será igual a média ponderada dos retornos esperados de cada ativo em relação a sua participação no portfólio:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(r_i)$$

$$\mu_p = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i$$

(2.11)

onde:  $\mu_p$  = retorno esperado do portfólio  $p$ ,

$n$  = número de ativos no portfólio  $p$ ,

$w_i$  = participação em (%) do ativo  $i$  no portfólio,

e  $\mu_i$  = retorno esperado do ativo  $i$ .

Sendo que:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

Deste ponto em diante, para facilitar o entendimento e a implementação de algoritmos, trabalharemos no espaço vetorial. Dessa forma, escrevendo a equação (2.11) na forma vetorial temos que:

$$\mu_p = \omega' \mu \quad (2.12)$$

Em que:  $\mu_p$  = valor esperado do retorno do portfólio,

$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix}$  vetor de pesos dos ativos no portfólio sendo  $\omega'$  o vetor transposto de  $\omega$ ,

$\omega \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,

e  $\mu = \begin{bmatrix} E(r_1) \\ \vdots \\ E(r_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$  vetor de retornos esperados de cada um dos ativos no portfólio,

$\mu \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ .

## 2.5 Variância do Retorno de uma Carteira

Segundo Markowitz (1959, p.19) a variância (ou desvio-padrão) de uma carteira é determinada:

- pela variância (ou desvio-padrão) de cada ativo do portfólio,
- pela correlação entre cada par de ativos, e
- pelo montante investido em cada ativo.

De acordo com a fórmula da variância dada pela equação (2.8) a variância do portfólio é dada por:

$$\sigma_p^2 = Var(r_p) = E\left(\left(r_p - E(r_p)\right)^2\right)$$

Dessa forma, exemplificando para um caso em que temos 2 ativos, segue que:

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= E((\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 - (\omega_1 E(r_1) + \omega_2 E(r_2))))^2) \\ \sigma_p^2 &= E\left(\left(\omega_1(r_1 - E(r_1)) + \omega_2(r_2 - E(r_2))\right)^2\right) \\ \sigma_p^2 &= \omega_1^2 E\left((r_1 - E(r_1))^2\right) + \omega_2^2 E\left((r_2 - E(r_2))^2\right) + 2\omega_1\omega_2 E\left((r_1 - E(r_1))(r_2 - E(r_2))\right)\end{aligned}$$

Sabendo que  $E\left((r_1 - E(r_1))(r_2 - E(r_2))\right)$  é a covariância entre os retornos dos ativos 1 e 2, denotada por  $\sigma_{1,2}$ , segue que:

$$\sigma_p^2 = \omega_1^2 \sigma_1^2 + 2\omega_1\omega_2 \sigma_{1,2} + \omega_2^2 \sigma_2^2 \quad (2.13)$$

A covariância visa identificar como determinados valores se inter-relacionam. É basicamente uma medida que avalia como duas variáveis se movimentam ao mesmo tempo em relação aos seus valores médios. A covariância é negativa quando dois ativos apresentam relações inversas, ou seja, o retorno de um título tende a assumir o comportamento inverso do outro. Se a covariância calculada for positiva, a expectativa é de apresentar tendências de retorno no mesmo sentido, ou seja, valorizações ou desvalorizações conjuntas. Evidentemente, não se verificando associação alguma entre os dois ativos, a covariância é nula ( $\sigma_{i,j} = 0$ ).

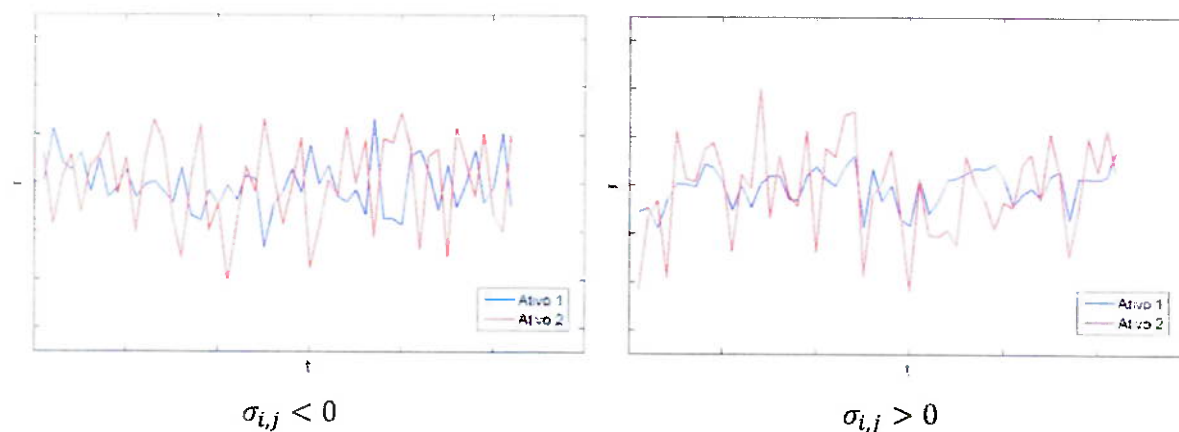


Figura 2.1: Simulação do comportamento de dois ativos hipotéticos com covariância negativa e com covariância positiva.

A fórmula da covariância é dada por:

$$\sigma_{i,j} = E\left((r_i - E(r_i))(r_j - E(r_j))\right)$$

$$\sigma_{i,j} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_{i,t} - \mu_i)(r_{j,t} - \mu_j)$$

onde:  $r_{i,t}$  = retorno do ativo  $i$  no período  $t$ ,

$\mu_i$  = retorno esperado do ativo  $i$ ,

$r_{j,t}$  = retorno do ativo  $j$  no período  $t$ ,

$\mu_j$  = retorno esperado do ativo  $j$ ,

e  $T$  = quantidade de períodos de tempo na análise.

Ressalta-se que a divisão por  $T - 1$  e não por  $T$  é devida à perda de um grau de liberdade ao se trabalhar com uma amostra e não com a população total dos dados.

Retomando a equação (2.13) e analisando-a na forma vetorial segue que:

$$\sigma_p^2 = [\omega_1 \quad \omega_2] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{2,1} \\ \sigma_{1,2} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

Definindo a matriz de covariância 2 X 2 como sendo:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{2,1} \\ \sigma_{1,2} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Assumindo que todos os ativos são realmente de risco, temos que  $\sigma_1 > 0$  e  $\sigma_2 > 0$ , e a inexistência de correlações perfeitas  $|\sigma_{1,2} / \sigma_1 \cdot \sigma_2| < 1$ , segue que  $\Sigma > 0$ ,  $\det[\Sigma] > 0$  e portanto a matriz  $\Sigma$  tem inversa.

Dessa forma, podemos generalizar a equação da variância do portfólio para o caso em que temos  $n$  ativos:

Dado  $r = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$  o vetor de retornos de cada um dos ativos do portfólio e  $E(r) = \begin{bmatrix} E(r_1) \\ \vdots \\ E(r_n) \end{bmatrix}$  o vetor de retornos esperados de cada um dos ativos, temos que a matriz de covariâncias entre os ativos é dada por:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} E[(r_1 - E(r_1))(r_1 - E(r_1))] & E[(r_1 - E(r_1))(r_2 - E(r_2))] & \dots & E[(r_1 - E(r_1))(r_n - E(r_n))] \\ E[(r_2 - E(r_2))(r_1 - E(r_1))] & E[(r_2 - E(r_2))(r_2 - E(r_2))] & \dots & E[(r_2 - E(r_2))(r_n - E(r_n))] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(r_n - E(r_n))(r_1 - E(r_1))] & E[(r_n - E(r_n))(r_2 - E(r_2))] & \dots & E[(r_n - E(r_n))(r_n - E(r_n))] \end{bmatrix}$$

Generalizando temos que:

$$\Sigma = E\left((r - E(r))(r - E(r))'\right)$$

Sabendo que a variância de um portfólio é dada por:

$$\sigma_p^2 = E\left(\left(r_p - E(r_p)\right)^2\right)$$

Segue que:

$$\sigma_p^2 = E\left(\left(\omega' r_p - \omega' E(r_p)\right)\left(\omega' r_p - \omega' E(r_p)\right)\right)$$

$$\sigma_p^2 = E\left(\omega' \left(r_p - E(r_p)\right)\left(r_p - E(r_p)\right)' \omega\right)$$

$$\sigma_p^2 = \omega' E\left(\left(r_p - E(r_p)\right)\left(r_p - E(r_p)\right)'\right) \omega$$

$$\sigma_p^2 = \omega' \Sigma \omega$$

Em que:  $\sigma_p^2$  = variância dos retornos do portfólio,

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} \text{ vetor de pesos dos ativos no portfólio, sendo } \omega' \text{ o vetor transposto de } \omega,$$

$$\omega \in \mathbb{R}^{n \times 1},$$

$$\text{e } \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{2,1} & \dots & \sigma_{n,1} \\ \sigma_{1,2} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1,n} & \sigma_{2,n} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \text{ matriz de covariâncias entre os ativos do portfólio,}$$

$$\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Deve ser ressaltado no estudo da covariância a dificuldade de interpretação de seu resultado numérico, ficando sua avaliação mais centrada nas tendências de seus resultados. Como a covariância é o produto de  $x$  por  $y$ , expressos em termos de desvios com relação a suas médias, sua dimensão é inconvenientemente a dimensão de  $x$  multiplicada pela dimensão de  $y$ . Esse problema de dimensão pode fazer com que valores numéricos da covariância sejam de difícil interpretação. Nesse caso a medida estatística mais adequada para análise de associação entre duas variáveis é a correlação, uma medida padronizada que soluciona o problema de dimensão da covariância. Especificamente, a correlação entre  $x$  e  $y$  é a covariância entre  $x$  e  $y$  dividida por seus desvios-padrão:

$$\rho_{i,j} = \frac{\sigma_{i,j}}{\sigma_i \sigma_j}$$

Como as dimensões do numerador da equação são iguais às do denominador, as dimensões se cancelam e a correlação é um número puro situando-se entre  $-1$  e  $+1$ .

### 2.5.1 Diversificação

Segundo Securato (2007, p.50): “Entende-se como diversificação do risco qualquer processo que possibilite minimizar os efeitos do risco sobre um ativo ou uma carteira de ativos.”

Markowitz ficou conhecido com frases do tipo “não coloque todos os seus ovos em uma única cesta”, princípio relacionado à regra geral de redução da variabilidade dos retornos à medida que se aumenta o número de ativos em uma carteira. Por meio do conceito de diversificação, é possível esperar que ativos com risco possam ser combinados no contexto de uma carteira de forma que se apure um risco menor que aquele calculado para cada um de seus componentes individualmente.

A diversificação fica evidente quando os ativos oscilam de forma independente. Dessa forma, há a possibilidade de que as perdas de um sejam compensadas pelos ganhos de outros. Com isso, o valor da carteira como um todo evolui de forma mais suave, ou seja, com menor volatilidade. A figura a seguir ilustra este efeito a partir da análise de uma carteira composta por dois ativos hipotéticos fracamente correlacionados, onde cada um tem uma participação de 50% no valor total do portfólio:

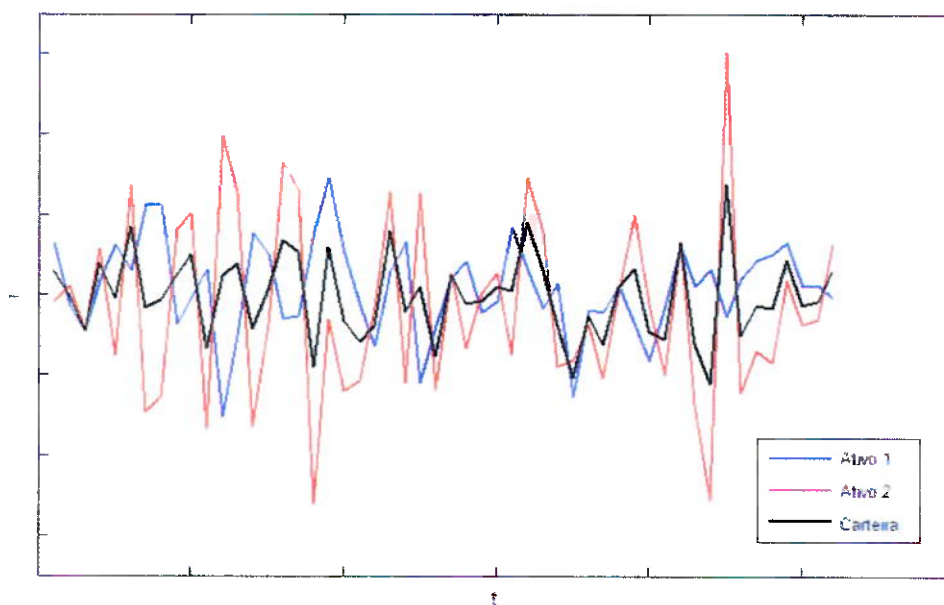


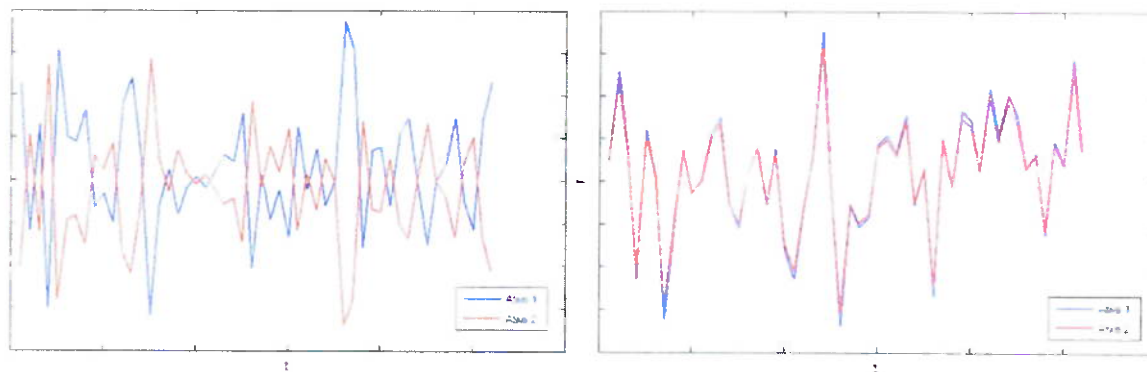
Figura 2.2: Movimentação de preços para uma carteira composta por 2 ativos fracamente correlacionados.

Como pode ser observado, embora o retorno total da carteira fique na média dos dois retornos, a variabilidade do preço da carteira é muito menor que a de cada um dos ativos individualmente. É importante ressaltar que, o risco de uma carteira depende não somente do risco de cada elemento

que a compõe e de sua participação no investimento total, mas também da forma como seus componentes se relacionam (covariam), assim, relacionando-se ativos com baixa correlação (ou covariância inversa) é possível reduzir consideravelmente o risco total da carteira. De forma simples, se o aumento do preço do petróleo pode prejudicar os resultados de uma companhia de viagens aéreas, um investidor poderia minimizar esse risco refletido no valor das ações, através da compra de ações de uma empresa petrolífera - que teria seus resultados melhorados em função do aumento no preço do petróleo e que, teoricamente, teria uma correlação fraca com a companhia de viagens aéreas.

No caso específico do exemplo mostrado anteriormente na figura 2.2, a redução do risco obtida pela carteira é elevada em função da correlação negativa entre os movimentos dos ativos. Note que, se um dos ativos se movesse exatamente no sentido oposto do outro (correlação negativa perfeita), seria possível construir uma carteira que produzisse retornos inversamente proporcionais, isto é, quando o retorno de um deles decrescer, o retorno do outro ativo se elevará na mesma intensidade, anulando os reflexos negativos produzidos. Nesse comportamento, supondo uma situação em que ambos os ativos têm os mesmos valores esperados de retorno e que possuem participações iguais no portfólio, a combinação resultaria em uma eliminação total do risco da carteira, sendo os resultados desfavoráveis verificados em um ativo perfeitamente compensados pelo desempenho do outro.

Por outro lado, no caso de ativos com correlação positiva perfeita a redução do risco é mínima. Nesse comportamento, assumindo que ambos os ativos têm os mesmos valores esperados de retorno e que possuem participações iguais no portfólio, o desvio-padrão do portfólio resultante ficaria limitado entre o desvio-padrão do ativo de menor risco e o do ativo mais arriscado.



$\rho_{i,j}$  negativa perfeita

$\rho_{i,j}$  positiva perfeita

Figura 2.3: Comportamento de dois ativos hipotéticos com correlações perfeitas negativa e positiva.

Supondo uma carteira composta por dois ativos nas proporções  $\omega_1$  e  $(1 - \omega_1)$ , segue que:

$$\mu_p = [\omega_1 \quad 1 - \omega_1] \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \omega_1 \mu_1 + (1 - \omega_1) \mu_2 = \omega_1 (\mu_1 - \mu_2) + \mu_2$$

$$\sigma_p^2 = [\omega_1 \quad 1 - \omega_1] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ 1 - \omega_1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_p^2 = \omega_1^2 \sigma_1^2 + 2\omega_1(1 - \omega_1)\rho\sigma_1\sigma_2 + (1 - \omega_1)^2 \sigma_2^2$$

No caso de os ativos serem correlacionados de maneira positiva e perfeita ( $\rho=1$ ), segue que:

$$\sigma_p^2 = (\omega_1 \sigma_1 + (1 - \omega_1) \sigma_2)^2$$

$$\sigma_p = |\omega_1 \sigma_1 + (1 - \omega_1) \sigma_2| = |\sigma_2 + \omega_1 (\sigma_1 - \sigma_2)|$$

Considerando que  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ :

$$\omega_1 = \frac{\sigma_p - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

Dessa forma segue que:

$$\mu_p = \omega_1 (\mu_1 - \mu_2) + \mu_2$$

$$\mu_p = \frac{(\sigma_p - \sigma_2)(\mu_1 - \mu_2)}{(\sigma_1 - \sigma_2)} + \mu_2$$

Após algumas manipulações algébricas chega-se a:

$$\mu_p = \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{(\sigma_1 - \sigma_2)} \sigma_p + \frac{\mu_2 \sigma_1 - \mu_1 \sigma_2}{(\sigma_1 - \sigma_2)}$$

Logo, apresenta-se uma relação linear entre o risco  $\sigma_p$  e o retorno esperado  $\mu_p$ . Assim, em uma carteira com ativos com correlação positiva perfeita, não se consegue melhorar a relação risco-retorno, ou seja, risco e retorno sempre serão linearmente proporcionais.

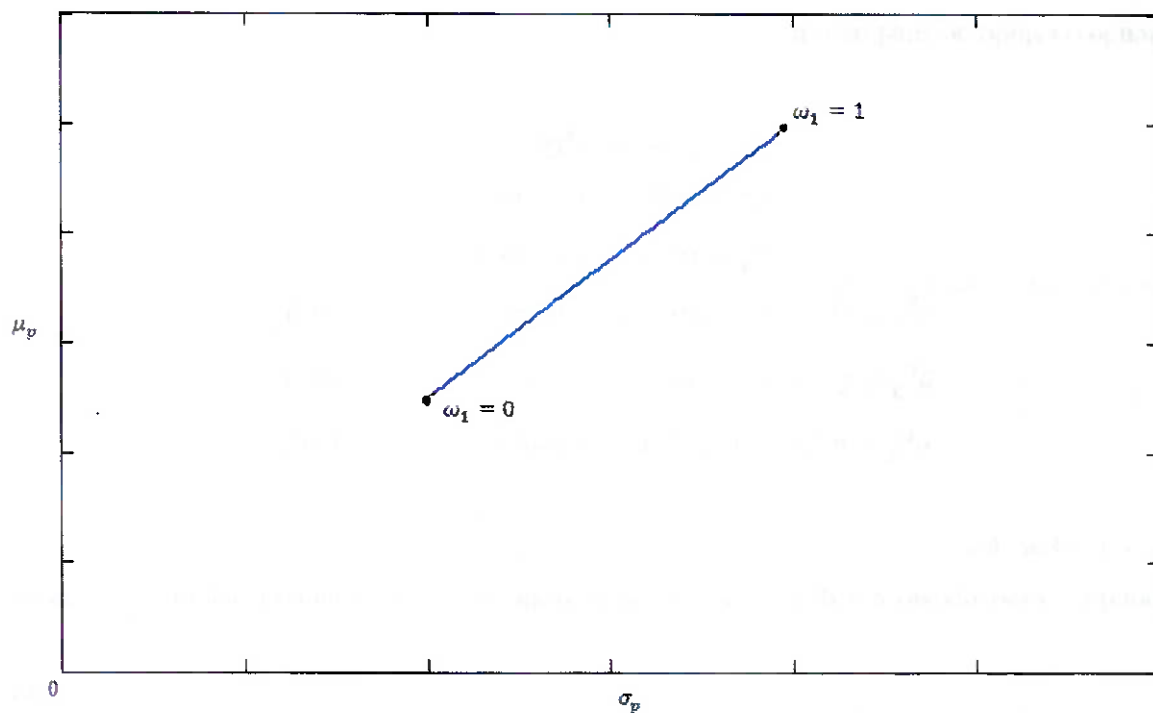


Figura 2.4: Combinações possíveis de uma carteira com dois ativos hipotéticos correlacionados de forma positiva e perfeita.

Supondo o caso oposto em que os ativos são correlacionados de maneira negativa e perfeita ( $\rho = -1$ ), segue que:

$$\sigma_p^2 = \omega_1^2 \sigma_1^2 + 2\omega_1(1 - \omega_1)\rho\sigma_1\sigma_2 + (1 - \omega_1)^2 \sigma_2^2$$

$$\sigma_p^2 = (\omega_1\sigma_1)^2 - 2\omega_1(1 - \omega_1)\sigma_1\sigma_2 + ((1 - \omega_1)\sigma_2)^2$$

$$\sigma_p^2 = (\omega_1\sigma_1)^2 - 2\omega_1\sigma_1(1 - \omega_1)\sigma_2 + ((1 - \omega_1)\sigma_2)^2$$

$$\sigma_p^2 = (\omega_1\sigma_1 - (1 - \omega_1)\sigma_2)^2$$

$$\sigma_p = |\omega_1\sigma_1 - (1 - \omega_1)\sigma_2|$$

$$\sigma_p = |-\sigma_2 + \omega_1(\sigma_1 + \sigma_2)|$$

Fazendo o estudo do sinal da função:

$$-\sigma_2 + \omega_1(\sigma_1 + \sigma_2) = 0$$

$$\omega_1 = \frac{\sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)}$$

Que é a situação de risco nulo.

Se  $\omega_1 \leq \frac{\sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)}$ , temos que:

$$\sigma_p = \sigma_2 - \omega_1(\sigma_1 + \sigma_2)$$

$$\omega_1 = \frac{-\sigma_p + \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

Se  $\omega_1 \geq \frac{\sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)}$ , segue que:

$$\sigma_p = -\sigma_2 + \omega_1(\sigma_1 + \sigma_2)$$

$$\omega_1 = \frac{\sigma_p + \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

Dado que:

$$\mu_p = \omega_1 \mu_1 + (1 - \omega_1) \mu_2$$

Se  $\omega_1 \leq \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$ , temos:

$$\omega_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_p}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

$$\mu_p = \frac{\sigma_2 - \sigma_p}{\sigma_1 + \sigma_2} \mu_1 + \left(1 - \frac{\sigma_2 - \sigma_p}{\sigma_1 + \sigma_2}\right) \mu_2$$

$$\mu_p = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \sigma_p + \frac{\sigma_2 \mu_1 + \sigma_1 \mu_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

Se  $\omega_1 \geq \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$  chegamos a:

$$\omega_1 = \frac{\sigma_p + \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

$$\mu_p = \frac{\sigma_p + \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \mu_1 + \left(1 - \frac{\sigma_p + \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\right) \mu_2$$

$$\mu_p = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \sigma_p + \frac{\sigma_2 \mu_1 + \sigma_1 \mu_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

A conclusão a que se chega é de que, ao contrário do caso anterior, uma carteira composta por 2 ativos com correlação perfeitamente negativa diminui o risco relativo ao retorno, permitindo até mesmo uma situação de risco nulo. Dessa forma, sob o ponto de vista de redução do risco, fica claro o benefício em se montar a carteira.

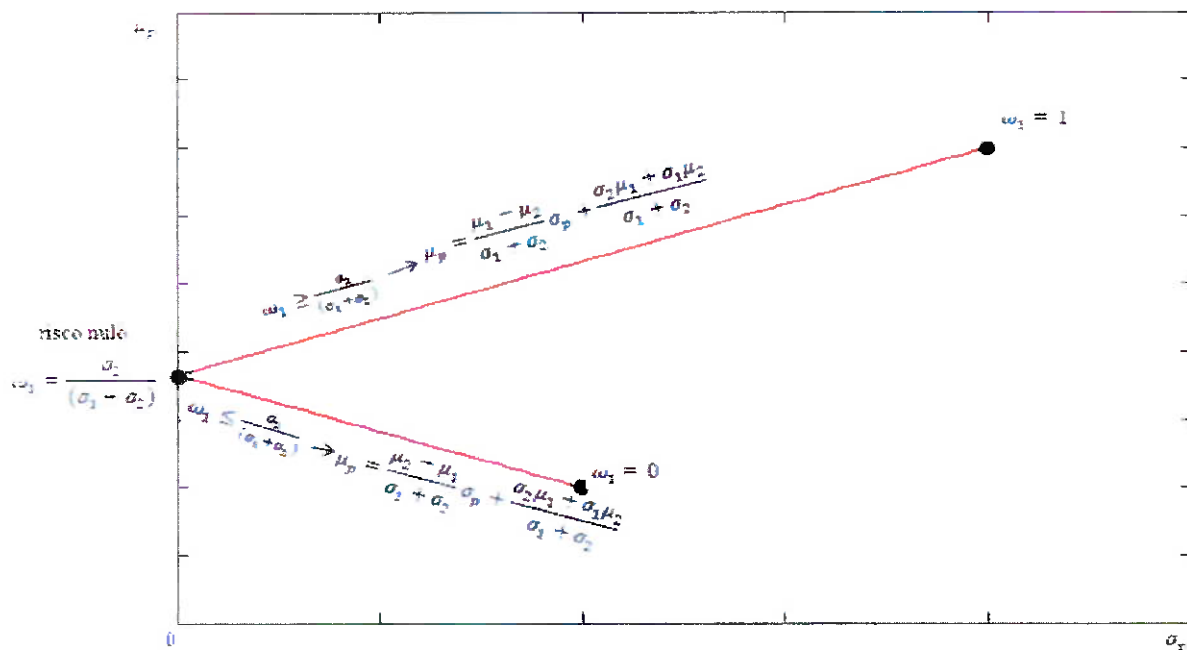


Figura 2.5: Combinações possíveis de uma carteira com dois ativos hipotéticos correlacionados de forma negativa e perfeita.

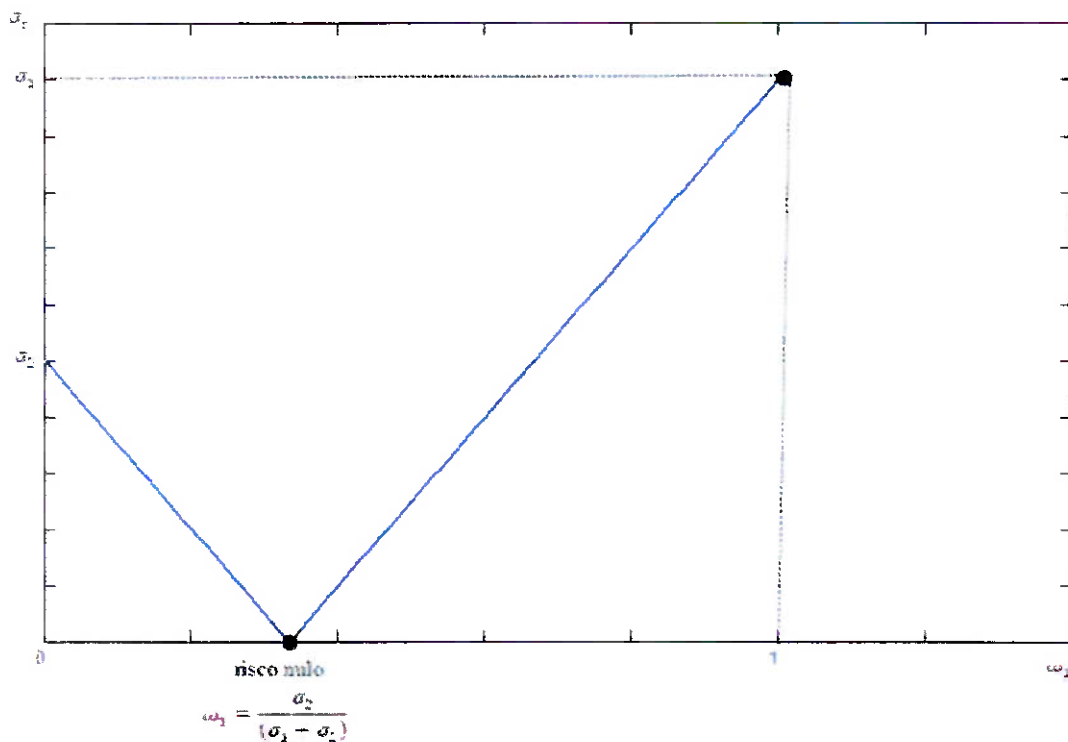


Figura 2.6: Combinações possíveis de uma carteira com dois ativos hipotéticos correlacionados de forma negativa e perfeita no plano risco da carteira X participação do Ativo 1.

No entanto, segundo Neto (2003) “é extremamente difícil a existência de investimentos com perfeitas correlações positivas ou negativas (...). O risco de uma carteira raramente é anulado pela presença de ativos perfeita e opostamente relacionados, devendo a unidade decisória preocupar-se, nessas condições efetivas, em minimizar seu valor, mediante a seleção de ativos cujos retornos apresentam correlações mais divergentes possíveis”.

Na prática, nenhuma das situações descritas  $|\rho|=1$  ocorre. A seguir apresenta-se o caso para uma carteira composta por dois ativos em que  $|\rho|<1$ :

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)\omega_1^2 - 2(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)\omega_1 + \sigma_2^2 \\ \mu_p &= \omega_1(\mu_1 - \mu_2) + \mu_2 \\ \omega_1 &= \frac{\mu_p - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\end{aligned}$$

Assume-se  $\mu_1 \neq \mu_2$ :

$$\sigma_p^2 - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)\left(\frac{\mu_p - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\right)^2 + 2(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)\left(\frac{\mu_p - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\right) - \sigma_2^2 = 0$$

Denotando:

$$\begin{aligned}c &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 \\ d &= \sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2 \\ e &= \mu_1 - \mu_2\end{aligned}$$

Segue que:

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 - c\left(\frac{\mu_p - \mu_2}{e}\right)^2 + 2d\left(\frac{\mu_p - \mu_2}{e}\right) - \sigma_2^2 &= 0 \\ \frac{1}{\sigma_2^2 - d^2/c}\sigma_p^2 - \frac{1}{(\sigma_2^2 - d^2/c)(e^2/c)}\left(\mu_p - (\mu_2 + d \cdot e/c)\right)^2 &= 1\end{aligned}$$

Note que  $c > 0$  pois:

$$0 \leq (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 < \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 = c$$

e  $\sigma_2^2 - d^2/c > 0$  tendo em vista que:

$$\sigma_2^2 c - d^2 = \sigma_2^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2) - (\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2(1 - \rho^2) > 0$$

Denotando:

$$a = \sqrt{\sigma_2^2 - d^2/c}$$

$$b = \sqrt{(\sigma_2^2 - d^2/c)(e^2/c)}$$

Segue que:

$$\frac{1}{a^2}\sigma_p^2 - \frac{1}{b^2}\left(\mu_p - (\mu_2 + d \cdot e/c)\right)^2 = 1$$

(2.15)

Observa-se que esta equação é semelhante à equação reduzida de uma hipérbole com centro  $(x_0, y_0)$  dada por:

$$\frac{1}{a^2}(x - x_0)^2 - \frac{1}{b^2}(y - y_0)^2 = 1$$

(2.16)

E as retas assíntotas dadas por:

Inclinação positiva

$$y = \frac{b}{a}(x - x_0) + y_0$$

Inclinação negativa

$$y = -\frac{b}{a}(x - x_0) + y_0$$

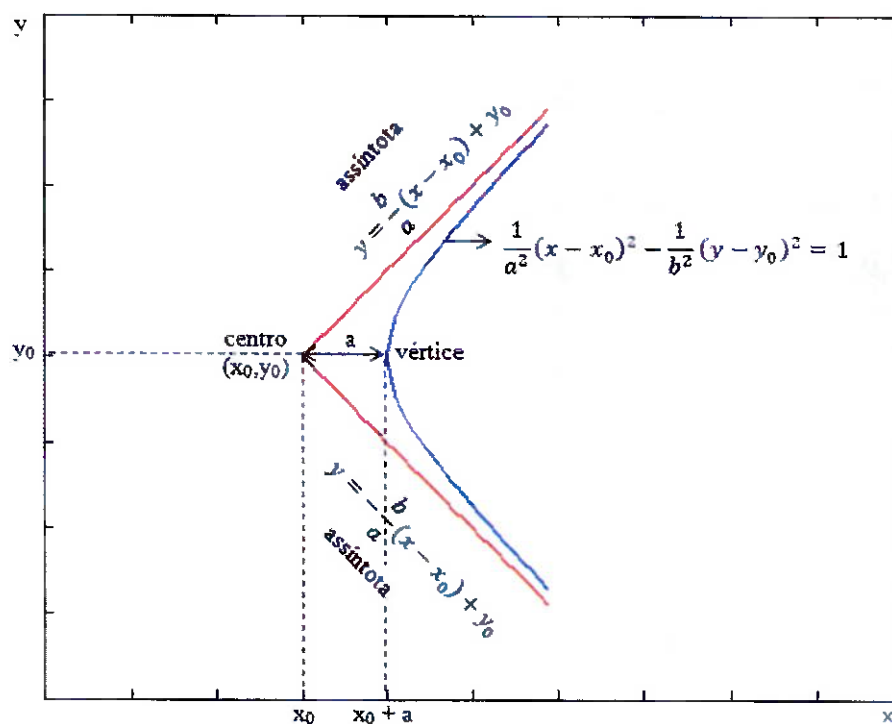


Figura 2.7: Forma reduzida de uma hipérbole.

Comparando-se (2.15) com (2.16), conclui-se que (2.15) representa uma hipérbole com centro

$$(\sigma_0, \mu_p) = \left(0, \mu_2 + \frac{d \cdot e}{c}\right)$$

ou

$$(\sigma_0, \mu_p) = \left( 0, \mu_2 + \frac{(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)(\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} \right)$$

E assíntotas:

$$\mu_p = \pm \frac{|e|}{\sqrt{c}} \sigma_p + \left( \mu_2 + \frac{d \cdot e}{c} \right)$$

ou

$$\mu_p = \pm \frac{|\mu_1 - \mu_2|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}} \sigma_p + \left( \mu_2 + \frac{(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)(\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} \right)$$

Analisando a figura (2.7) agora no plano risco x retorno segue que:

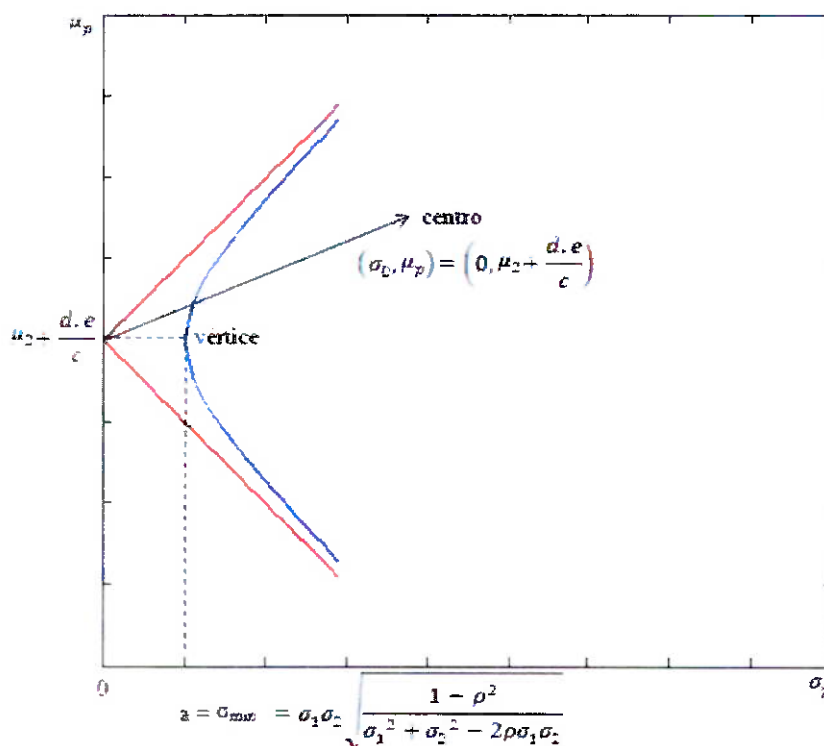


Figura 2.8: hipérbole reduzida no plano risco x retorno.

Podemos observar pela figura que a curva possui um ponto de mínimo risco,  $\sigma_{min}$ , com retorno dado pelo ponto do eixo das ordenadas do centro da hipérbole:

$$\mu_p = \mu_2 + \frac{d \cdot e}{c}$$

$$\mu_p = \mu_2 + \frac{(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)(\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

Dessa forma, sabendo que o ponto de risco mínimo  $\sigma_{min} = a$ , temos que:

$$a = \sqrt{\sigma_2^2 - d^2/c}$$

$$\sigma_{min} = a = \sqrt{\sigma_2^2 - (\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)^2 / (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)}$$

$$\sigma_{min} = \sigma_1\sigma_2 \sqrt{\frac{1 - \rho^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}}$$

De acordo com Markowitz (1959, p.5, tradução nossa),

Uma segunda característica importante do investimento em ativos financeiros é a correlação entre os retornos destes ativos. Como a maioria das variáveis econômicas, os retornos dos ativos financeiros tendem a se mover para cima ou para baixo juntos. [...] De uma maneira geral, entretanto, momentos econômicos bons e ruins tendem a se distanciar, causando períodos de alta ou baixa generalizada na atividade econômica. Se os retornos dos ativos não fossem correlacionados, a diversificação poderia eliminar o risco. [...] Se a correlação entre os retornos dos ativos fosse “perfeita” – se os retornos de todos os ativos se movessem para cima ou para baixo em perfeita sincronia – a diversificação nada poderia fazer para eliminar o risco. O fato de que os retornos dos ativos são altamente correlacionados, mas não perfeitamente correlacionados, implica que a diversificação pode reduzir o risco, mas não eliminá-lo.

À medida que aumentamos o número de ativos do portfólio, a tendência é haver uma redução ainda maior na variabilidade total. Costa e Assunção (2005, p. 59) apresenta o efeito da diversificação numa carteira, no qual o risco não-sistemático, ou risco específico de cada ação, é reduzido à medida que mais ações são adicionadas até o limite do risco sistemático ou risco de mercado:

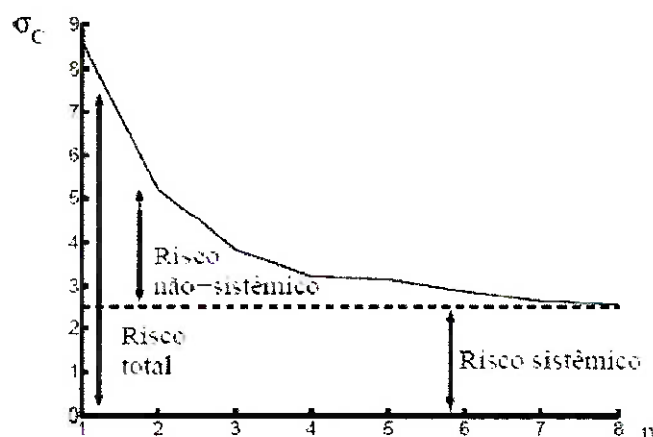


Figura 2.9: Redução do risco do portfólio com aumento do número de ativos

O risco de mercado não pode ser eliminado totalmente pois representa o risco a que todas as ações em negociação estão expostas. Supondo  $n$  ativos com retornos esperados  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$  sejam variáveis aleatórias descorrelacionadas, tem-se que a variância de um portfólio com  $n$  ações:

$$\sigma_p^2 = \omega' \Sigma \omega$$

$$\sigma_p^2 = [\omega_1 \quad \dots \quad \omega_n] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{2,1} & \dots & \sigma_{n,1} \\ \sigma_{1,2} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1,n} & \sigma_{2,n} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix}$$

Que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \omega_i \omega_j \sigma_{i,j}$$

Considerando que uma carteira diversificada pode ser obtida simplesmente escolhendo um  $n$  suficientemente grande e dividindo o capital igualmente entre os títulos:

$$\omega_i = \frac{1}{n}, \forall i$$

Segue que a variância desse portfólio é dada por:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_{i,j}$$

Considerando que para  $n$  ativos temos  $n(n-1)$  pares de covariâncias, a covariância média entre os ativos é dada por:

$$E(\sigma_{i,j}) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sigma_{i,j}}{n(n-1)}$$

$$E(\sigma_{i,j}) \cdot n(n-1) = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sigma_{i,j}$$

De maneira similar, a variância média pode ser escrita como:

$$E(\sigma_i^2) = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}{n}$$

Substituindo temos:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n^2} E(\sigma_i^2) + \frac{n(n-1)E(\sigma_{i,j})}{n^2}$$

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n^2} E(\sigma_i^2) + \frac{n-1}{n} E(\sigma_{i,j})$$

Calculando o limite de  $n$  tendendo ao infinito, temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_p^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n^2} E(\sigma_i^2) + \frac{n-1}{n} E(\sigma_{i,j}) \right\} = E(\sigma_{i,j})$$

Assim, é possível observar através do cálculo do limite de  $n$  tendendo ao infinito que, quando  $n$  aumenta, a primeira parcela da variância do portfólio, correspondente aos riscos próprios dos ativos, tende a zero, permanecendo apenas uma segunda parcela que não pode ser eliminada por diversificação (assumindo a inexistência de correlação negativa perfeita) e depende de toda a estrutura de covariâncias entre os ativos. A existência dessa variância residual está relacionada ao conceito de risco sistemático que foi apresentado no item 2.3.1 deste capítulo.

## 2.6 Fronteira Eficiente

A partir das definições de retorno e risco propostas por Markowitz, é possível representar todas as combinações possíveis de investimento em ativos de risco. Matematicamente, cada ponto deste conjunto deve obedecer as equações já apresentadas:

$$\begin{aligned}\mu_p &= \omega' \mu \\ \sigma_p^2 &= \omega' \Sigma \omega\end{aligned}$$

Sendo que:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

Considerando  $n$  ativos, as infinitas combinações de carteiras possíveis (não considerando posições alavancadas) resultariam em um compacto, delimitado por uma hipérbole, conforme apresentado na seção 2.5.1 deste capítulo. Dessa forma, tem-se um conjunto de pontos otimizados na relação risco e retorno, denominado fronteira eficiente e sujeito às seguintes restrições:

- dado um nível de risco, não existe carteira com maior retorno, e

- dado um nível de retorno, não existe carteira com menor risco.

A figura a seguir contempla todas as combinações possíveis (excluindo posições alavancadas) de risco e retorno esperados para uma carteira formada por dois ativos hipotéticos negativamente correlacionados ( $\rho_{1,2} = -0,5$ ).

Ativo	Retorno esperado $\mu$ (%)	Risco $\sigma$ (%)
Ativo 1	2,0	4,0
Ativo 2	10,0	10,0

Tabela 2.1: Ativos hipotéticos.

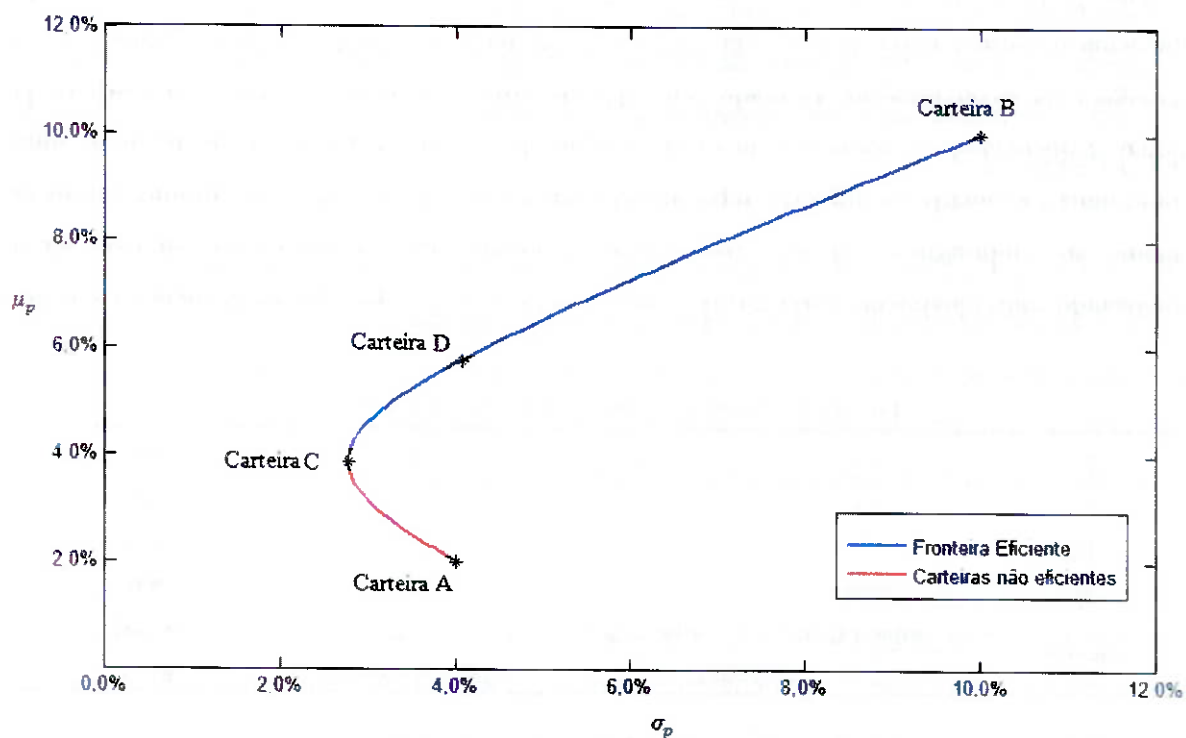


Figura 2.10: Fronteira eficiente.

Carteira	Composição		Retorno esperado	Risco
	Ativo 1 (%)	Ativo 2 (%)	$\mu_p$ (%)	$\sigma_p$ (%)
A	100	0	2,0	4,0
B	0	100	10,0	10,0
C	77	23	3,8	2,8
D	54	46	5,7	4,0

Tabela 2.2: Carteiras eficientes vs. Carteiras não eficientes.

Analisando individualmente cada um dos ativos, o Ativo 1 é o que apresenta menor risco, no entanto, ao combinarmos o Ativo 1 com o Ativo 2 podemos reduzir ainda mais este risco até o ponto mais à esquerda da fronteira, representado pela Carteira C, a carteira de mínima variância global, evidenciando o benefício da diversificação. Já o ponto Carteira D mostra mais uma vantagem da diversificação, formado por 54% de Ativo1 e 46% de Ativo2, a Carteira D apresenta o mesmo nível de risco da Carteira A, formada por 100% de Ativo1, entretanto a Carteira D apresenta um retorno esperado de 5,7%, mais do que o dobro do retorno esperado para a Carteira A.

Observamos que a Carteira A e qualquer outra carteira que esteja incluída na linha vermelha na figura 2.10 não são consideradas eficientes, uma vez que não cumprem a primeira restrição, onde para um determinado nível de risco não existe outra carteira com maior retorno. Já o conjunto das carteiras denominadas eficientes, está representado pela linha azul na figura 2.10, iniciando pela carteira de mínima variância global, representada pela Carteira C.

Caso fossem permitidas posições vendidas, ou equivalentemente posições alavancadas, tipo de operação que se dá alugando um ativo e depois vendendo-o, envolvendo a captação de recursos que, somados ao patrimônio, seriam investidos em outro ativo, o que implica em assumirmos um  $\omega$  qualquer (desde que a soma de todos os pesos sempre seja igual a 1) e não apenas no intervalo entre 0 e 1, a hipérbole que representa a curva risco-retorno não é mais limitada e pode assumir valores infinitos.

## 2.7 Formulação do problema de seleção de ativos

O conjunto de estratégias de investimento que ofereçam a máxima expectativa de retorno para diferentes valores de risco, e que apresentem o mínimo risco para diferentes expectativas de retorno é o que caracteriza uma fronteira eficiente. Tais combinações são aquelas que obedecem ao princípio da dominância, o qual por sua vez é formado a partir da aceitação de duas premissas sobre o comportamento dos investidores:

- *nonsatiation*: sendo iguais todas as demais variáveis, os investidores sempre preferem ter maior retorno. Isso implica que, para diferentes alternativas de mesmo risco, o investidor sempre irá optar por aquela de maior retorno esperado.

- aversão ao risco: para um mesmo retorno esperado, o investidor sempre irá preferir a alternativa de menor variância.

Partindo destes pressupostos, o modelo de média-variância consiste em selecionar uma carteira que apresente o menor risco para um determinado retorno desejado, ou encontrar uma carteira que apresente maior retorno esperado para um determinado nível de risco aceitável. Dessa forma, fica evidente que o problema de seleção de ativos recai sobre um modelo de otimização quadrática com restrições.

Para encontrar a carteira com mínima variância dado um determinado retorno desejado, podemos formalizar o problema de Markowitz da seguinte forma:

$$\min_{\omega} \omega' \Sigma \omega$$

Sujeito a:  $\omega' \mu = \mu_p$

$$\omega' e = 1$$

onde:  $e$  é um vetor unitário, ou seja, contém 1 em todos os seus elementos, e possui a mesma dimensão de  $\omega$ ,  $e \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ .

Dado que o problema acima só possui restrições de igualdade, podemos utilizar o método conhecido como Multiplicadores de Lagrange para a solução deste problema de otimização. Através deste método, associamos um multiplicador  $\lambda_i$  à  $i$ -ésima restrição e formamos a função chamada Lagrangeana da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{max (ou min) } z &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{Sujeito a: } g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_2 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_m \end{aligned}$$

A função Lagrangeana seria:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

Partindo da função Lagrangeana  $L$ , um procedimento prático para a determinação de máximos ou mínimos locais é calcular as derivadas parciais de  $L$  em relação a  $x_j$  e  $\lambda_i$ , e determinar, se possível, o ponto  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_m)$  que torna estas derivadas iguais a zero.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial L}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \dots = \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0$$

Note que se as derivadas em relação a  $\lambda_i$  são nulas no ponto  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_m)$ , então:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \\ g_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) &= b_i \end{aligned}$$

O que implica que as restrições estão satisfeitas neste ponto.

Dessa maneira, aplicando o método dos Multiplicadores de Lagrange para o problema de seleção de ativos, segue que:

$$\min_{\omega} \omega' \Sigma \omega$$

Sujeito a:  $\omega' \mu = \mu_p$

$$\omega' e = 1$$

E a função Lagrangeana:

$$L(\omega, \lambda) = \omega' \Sigma \omega + \lambda_1 (\mu_p - \omega' \mu) + \lambda_2 (1 - \omega' e)$$

$$L(\omega, \lambda) = \omega' \Sigma \omega + \lambda_1 \mu_p - \lambda_1 \omega' \mu + \lambda_2 - \lambda_2 \omega' e$$

Derivando o Lagrangeano, igualando-o a zero e mantendo as restrições, obtemos as condições necessárias de primeira ordem:

$$\frac{\partial L(\omega, \lambda)}{\partial \omega} = 2\Sigma\omega - \lambda_1\mu - \lambda_2e = 0$$

$$\frac{\partial L(\omega, \lambda)}{\partial \lambda_1} = \mu_p - \omega' \mu = 0$$

$$\frac{\partial L(\omega, \lambda)}{\partial \lambda_2} = 1 - \omega' e = 0$$

$$\begin{cases} 2\Sigma\omega - \lambda_1\mu - \lambda_2e = 0 \\ \omega' \mu = \mu_p \\ \omega' e = 1 \end{cases}$$

Segue que:

$$2\Sigma\omega - \lambda_1\mu - \lambda_2e = 0$$

$$2\Sigma\omega = \lambda_1\mu + \lambda_2e$$

$$(2.17) \quad \omega = \frac{1}{2} \Sigma^{-1} (\lambda_1 \mu + \lambda_2 e)$$

Portanto:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \mu' \Sigma^{-1} (\lambda_1 \mu + \lambda_2 e) = \mu_p \\ \frac{1}{2} e' \Sigma^{-1} (\lambda_1 \mu + \lambda_2 e) = 1 \end{cases}$$

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} \mu' \Sigma^{-1} \mu & \mu' \Sigma^{-1} e \\ e' \Sigma^{-1} \mu & e' \Sigma^{-1} e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu_p \\ 2 \end{bmatrix}$$

Denotando:

$$\begin{aligned} \mu' \Sigma^{-1} \mu &= \gamma \\ e' \Sigma^{-1} \mu &= \psi \\ e' \Sigma^{-1} e &= \alpha \end{aligned}$$

Segue que:

$$\begin{bmatrix} \gamma & \psi \\ \psi & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & \psi \\ \psi & \alpha \end{bmatrix}^{-1}$$

Sabendo que  $\begin{bmatrix} \gamma & \psi \\ \psi & \alpha \end{bmatrix} > 0$ , conforme será demonstrado mais adiante neste capítulo, e aplicando a seguinte regra para o cálculo de uma matriz inversa, válida para uma matriz 2x2 simétrica com determinante diferente de zero:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ac - b^2} \begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \frac{2}{\alpha\gamma - \psi^2} \begin{bmatrix} \alpha & -\psi \\ -\psi & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

Denotando:

$$\delta = \det \begin{bmatrix} \gamma & \psi \\ \psi & \alpha \end{bmatrix} = \alpha\gamma - \psi^2$$

Segue que:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \frac{2}{\delta} \begin{bmatrix} \alpha & -\psi \\ -\psi & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{2}{\delta}(\alpha\mu_p - \psi) \\ \lambda_2 = \frac{2}{\delta}(-\psi\mu_p + \gamma) \end{cases}$$

Substituindo, tem-se que:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{2}\Sigma^{-1}(\lambda_1\mu + \lambda_2e) \\ \omega &= \frac{1}{\delta}\Sigma^{-1}\left((\alpha\mu_p - \psi)\mu + (\gamma - \psi\mu_p)e\right) \\ \omega &= \left(\frac{\alpha}{\delta}\Sigma^{-1}\mu - \frac{\psi}{\delta}\Sigma^{-1}e\right)\mu_p + \left(\frac{\gamma}{\delta}\Sigma^{-1}e - \frac{\psi}{\delta}\Sigma^{-1}\mu\right)\end{aligned}$$

Denotando:

$$\begin{aligned}h &= \frac{\alpha}{\delta}\Sigma^{-1}\mu - \frac{\psi}{\delta}\Sigma^{-1}e \\ g &= \frac{\gamma}{\delta}\Sigma^{-1}e - \frac{\psi}{\delta}\Sigma^{-1}\mu\end{aligned}$$

A solução do problema de média-variância é dada por:

$$\omega = h\mu_p + g$$

(2.18)

Aplicando as condições de 2ª ordem, temos que:

$$L(\omega) = \Sigma > 0$$

Dessa forma, a solução encontrada realmente corresponde a um ponto de mínimo local. Como a função objetivo é convexa, e o conjunto de soluções factíveis também, o ponto de mínimo obtido é global.

Note que:

$$\mu'h = 1, \mu'g = 0, e'h = 0, e'g = 1$$

Portanto, conforme esperado:

$$\begin{aligned}\mu' \omega &= \mu' (h\mu_p + g) = \mu' h\mu_p + \mu' g = \mu_p \\ e' \omega &= e' (h\mu_p + g) = e' h\mu_p + e' g = 1\end{aligned}$$

Entretanto, vale ressaltar que para que este problema seja resolvido desta maneira, as seguintes condições devem ser respeitadas:

-  $\Sigma > 0$  e portanto é inversível

Esta hipótese apenas garante que todos os ativos são realmente de risco, conforme já foi demonstrado na seção 2.5 deste capítulo.

-  $\mu$  não é múltiplo de  $e$  ( $\mu \neq ae$ )

Esta hipótese, que necessariamente implica  $n \geq 2$  garante uma situação não-degenerada, pois, caso contrário, com  $\mu = ae$ , as restrições só seriam consistentes com  $\mu_p = a$ .

- as constantes  $\alpha$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  são positivas.

Mais precisamente temos que,

$$\begin{aligned}\alpha &\in \left[ \frac{n}{\lambda_{\max}(\Sigma)}, \frac{n}{\lambda_{\min}(\Sigma)} \right] \\ \gamma &\in \left[ \frac{\|\mu\|^2}{\lambda_{\max}(\Sigma)}, \frac{\|\mu\|^2}{\lambda_{\min}(\Sigma)} \right] \\ |\psi| &< \sqrt{n} \frac{\|n\|}{\lambda_{\min}(\Sigma)}\end{aligned}$$

Em que  $\lambda_{\min}(\Sigma)$  e  $\lambda_{\max}(\Sigma)$  representam os autovalores mínimo e máximo da matriz  $\Sigma$ . Podemos demonstrar da seguinte maneira:

Como  $\Sigma > 0$ ,  $\Sigma$  pode ser escrita como:

$$\Sigma = UDU'$$

Em que  $U$  é uma matriz ortonormal ( $UU' = U'U = I$ ) e  $D$  é uma matriz diagonal formada pelos autovalores (todos reais positivos) de  $\Sigma$ . Logo,

$$0 < \frac{1}{\lambda_{\max}(\Sigma)} I \leq \Sigma^{-1} = UD^{-1}U' \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(\Sigma)} I$$

de modo que:

$$\frac{1}{\lambda_{\max}(\Sigma)} n = \frac{1}{\lambda_{\max}(\Sigma)} \|e\|^2 \leq e'\Sigma^{-1}e \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(\Sigma)} \|e\|^2 = \frac{1}{\lambda_{\min}(\Sigma)} n$$

e

$$\frac{1}{\lambda_{\max}(\Sigma)} \|\mu\|^2 \leq \mu'\Sigma^{-1}\mu \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(\Sigma)} \|\mu\|^2$$

Note que a matriz 2X2:

$$\begin{bmatrix} e' \\ \mu' \end{bmatrix} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} e & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e'\Sigma^{-1}e & e'\Sigma^{-1}\mu \\ \mu'\Sigma^{-1}e & \mu'\Sigma^{-1}\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \psi \\ \psi & \gamma \end{bmatrix}$$

é positiva definida, pois  $\Sigma^{-1} > 0$  e  $e$  e  $\mu$  são vetores linearmente independentes pela segunda hipótese ( $\mu$  não é múltiplo de  $e$ ). Logo, o determinante dessa matriz, que representa o produto dos 2 autovalores positivos, é maior que zero, ou seja:

$$\delta = \alpha\gamma - \psi^2 = \det \begin{bmatrix} \alpha & \psi \\ \psi & \gamma \end{bmatrix} > 0$$

Conseqüentemente:

$$|\psi| < \sqrt{(e'\Sigma^{-1}e)(\mu'\Sigma^{-1}\mu)} \leq \sqrt{\frac{n}{\lambda_{\min}(\Sigma)} X \frac{\|\mu\|^2}{\lambda_{\min}(\Sigma)}} = \sqrt{n} \frac{\|\mu\|}{\lambda_{\min}(\Sigma)}$$

## 2.8 Covariância entre Carteiras de mínima variância

A partir da solução dada pela equação (2.18) encontramos a carteira de mínima variância para um determinado retorno esperado. Uma característica importante das carteiras de mínima variância é que qualquer carteira formada a partir de carteiras de mínima variância também será de mínima variância, resultado também conhecido como “Teorema dos Dois Fundos”.

Dessa maneira, sejam  $r_a$  e  $r_b$  os retornos de duas carteiras de mínima variância, com retornos esperados  $\mu_a$  e  $\mu_b$ :

$$r_a = \omega'_a r$$

$$r_b = \omega'_b r$$

Supondo uma carteira  $c$  composta por estas duas carteiras de mínima variância, sendo  $\xi$  a participação da carteira  $a$  e  $(1 - \xi)$  a participação da carteira  $b$  na carteira  $c$ , segue que o retorno da carteira  $c$  é dado por:

$$r_c = \xi r_a + (1 - \xi) r_b$$

$$r_c = \omega'_c r = \xi \omega'_a r + (1 - \xi) \omega'_b r = (\xi \omega_a + (1 - \xi) \omega_b)' r$$

Conseqüentemente o retorno esperado da carteira  $c$  é dado por:

$$\mu_c = \xi \mu_a + (1 - \xi) \mu_b$$

Dado que as carteiras  $a$  e  $b$  são de mínima variância, segue que a composição de cada uma delas:

$$\omega_a = h\mu_a + g$$

$$\omega_b = h\mu_b + g$$

Logo a composição da carteira  $c$  é dada por:

$$\omega_c = \xi\omega_a + (1 - \xi)\omega_b = \xi(h\mu_a + g) + (1 - \xi)(h\mu_b + g)$$

$$\omega_c = h(\xi\mu_a + (1 - \xi)\mu_b) + g$$

$$\omega_c = h\mu_c + g$$

Desse modo, a carteira  $c$  também é de mínima variância. Calculando a covariância entre duas carteiras de mínima variância segue que:

$$\text{cov}(r_a, r_b) = E((r_a - \mu_a)(r_b - \mu_b))$$

$$\text{cov}(r_a, r_b) = E((\omega_a' r_a - \omega_a' \mu_a)(\omega_b' r_b - \omega_b' \mu_b))$$

$$\text{cov}(r_a, r_b) = E(\omega_a'(r_a - \mu_a)(r_b - \mu_b)'\omega_b)$$

$$\text{cov}(r_a, r_b) = \omega_a'\Sigma\omega_b$$

$$\text{cov}(r_a, r_b) = (h\mu_a + g)'\Sigma(h\mu_b + g)$$

Após algumas manipulações obtemos:

$$h\mu_a + g = \frac{\alpha}{\delta}\Sigma^{-1}\left(\mu_a\left(\mu - \frac{\psi}{\alpha}e\right) + \left(\frac{\gamma}{\alpha}e - \frac{\psi}{\alpha}\mu\right)\right)$$

$$h\mu_b + g = \frac{\alpha}{\delta}\Sigma^{-1}\left(\mu_b\left(\mu - \frac{\psi}{\alpha}e\right) + \left(\frac{\gamma}{\alpha}e - \frac{\psi}{\alpha}\mu\right)\right)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
cov(r_a, r_b) &= \left( \frac{\alpha}{\delta} \Sigma^{-1} \left( \mu_a \left( \mu - \frac{\psi}{\alpha} e \right) + \left( \frac{\gamma}{\alpha} e - \frac{\psi}{\alpha} \mu \right) \right) \right)' \Sigma \left( \frac{\alpha}{\delta} \Sigma^{-1} \left( \mu_b \left( \mu - \frac{\psi}{\alpha} e \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( \frac{\gamma}{\alpha} e - \frac{\psi}{\alpha} \mu \right) \right) \right) \\
cov(r_a, r_b) &= \left( \frac{\alpha}{\delta} \Sigma^{-1} \left( \mu_a \left( \mu - \frac{\psi}{\alpha} e \right) + \left( \frac{\gamma}{\alpha} e - \frac{\psi}{\alpha} \mu \right) \right) \right)' \left( \frac{\alpha}{\delta} \left( \mu_b \left( \mu - \frac{\psi}{\alpha} e \right) + \left( \frac{\gamma}{\alpha} e - \frac{\psi}{\alpha} \mu \right) \right) \right) \\
cov(r_a, r_b) &= \frac{\alpha}{\delta} \Sigma^{-1} \left( \mu_a \left( \mu - \frac{\psi}{\alpha} e \right) + \left( \frac{\gamma}{\alpha} e - \frac{\psi}{\alpha} \mu \right) \right)' \frac{\alpha}{\delta} \left( \mu_b \left( \mu - \frac{\psi}{\alpha} e \right) + \left( \frac{\gamma}{\alpha} e - \frac{\psi}{\alpha} \mu \right) \right) \\
cov(r_a, r_b) &= \left( \frac{\alpha}{\delta} \right)^2 \left( \mu_a \left( \mu - \frac{\psi}{\alpha} e \right) + \left( \frac{\gamma}{\alpha} e - \frac{\psi}{\alpha} \mu \right) \right)' \Sigma^{-1} \left( \mu_b \left( \mu - \frac{\psi}{\alpha} e \right) + \left( \frac{\gamma}{\alpha} e - \frac{\psi}{\alpha} \mu \right) \right) \\
cov(r_a, r_b) &= \left( \frac{\alpha}{\delta} \right)^2 \left( \mu_a \mu_b \left( \mu - \frac{\psi}{\alpha} e \right)' \Sigma^{-1} \left( \mu - \frac{\psi}{\alpha} e \right) + (\mu_a + \mu_b) \left( \mu - \frac{\psi}{\alpha} e \right)' \Sigma^{-1} \left( \frac{\gamma}{\alpha} e - \frac{\psi}{\alpha} \mu \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\gamma}{\alpha} e - \frac{\psi}{\alpha} \mu \right)' \Sigma^{-1} \left( \frac{\gamma}{\alpha} e - \frac{\psi}{\alpha} \mu \right) \right)
\end{aligned}$$

(2.19)

Simplificando temos que:

$$\begin{aligned}
\left( \mu - \frac{\psi}{\alpha} e \right)' \Sigma^{-1} \left( \mu - \frac{\psi}{\alpha} e \right) &= \mu' \Sigma^{-1} \mu - \frac{\psi}{\alpha} \mu' \Sigma^{-1} e - \frac{\psi}{\alpha} e' \Sigma^{-1} \mu + \frac{\psi^2}{\alpha^2} e' \Sigma^{-1} e = \\
\gamma - \frac{\psi^2}{\alpha} - \frac{\psi^2}{\alpha} + \frac{\psi^2}{\alpha^2} \alpha &= \gamma - 2 \frac{\psi^2}{\alpha} + \frac{\psi^2}{\alpha} = \gamma - \frac{\psi^2}{\alpha} = \frac{\alpha \gamma - \psi^2}{\alpha} = \frac{\delta}{\alpha} \\
\left( \mu - \frac{\psi}{\alpha} e \right)' \Sigma^{-1} \left( \frac{\gamma}{\alpha} e - \frac{\psi}{\alpha} \mu \right) &= \mu' \Sigma^{-1} \frac{\gamma}{\alpha} e - \mu' \Sigma^{-1} \frac{\psi}{\alpha} \mu - \frac{\psi \gamma}{\alpha^2} e' \Sigma^{-1} e + \frac{\psi^2}{\alpha^2} e' \Sigma^{-1} \mu = \\
\frac{\gamma}{\alpha} \mu' \Sigma^{-1} e - \frac{\psi}{\alpha} \mu' \Sigma^{-1} \mu - \frac{\psi \gamma}{\alpha^2} e' \Sigma^{-1} e + \frac{\psi^2}{\alpha^2} e' \Sigma^{-1} \mu &= \frac{\gamma \psi}{\alpha} - \frac{\psi \gamma}{\alpha} - \frac{\psi \gamma \alpha}{\alpha^2} + \frac{\psi^3}{\alpha^2} = \frac{\psi^3 - \psi \gamma \alpha}{\alpha^2} = \\
\frac{-\psi(-\psi^2 + \gamma \alpha)}{\alpha^2} &= -\frac{\psi \delta}{\alpha^2} \\
\left( \frac{\gamma}{\alpha} e - \frac{\psi}{\alpha} \mu \right)' \Sigma^{-1} \left( \frac{\gamma}{\alpha} e - \frac{\psi}{\alpha} \mu \right) &= \frac{\gamma^2}{\alpha^2} e' \Sigma^{-1} e - \frac{\gamma \psi}{\alpha^2} e' \Sigma^{-1} \mu - \frac{\psi \gamma}{\alpha^2} \mu' \Sigma^{-1} e + \frac{\psi^2}{\alpha^2} \mu' \Sigma^{-1} \mu =
\end{aligned}$$

$$\frac{\gamma^2 \alpha}{\alpha^2} - \frac{\gamma \psi^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma \psi^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma \psi^2}{\alpha^2} = \frac{\gamma^2 \alpha}{\alpha^2} - \frac{\gamma \psi^2}{\alpha^2} = \frac{\gamma(\gamma \alpha - \psi^2)}{\alpha^2} = \frac{\gamma \delta}{\alpha^2}$$

Substituindo em (2.19) temos que:

$$\begin{aligned} \text{cov}(r_a, r_b) &= \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^2 \left( \mu_a \mu_b \frac{\delta}{\alpha} + (\mu_a + \mu_b) \left(-\frac{\psi \delta}{\alpha^2}\right) + \frac{\gamma \delta}{\alpha^2} \right) \\ \text{cov}(r_a, r_b) &= \frac{\alpha}{\delta} \left( \mu_a \mu_b \frac{\delta \alpha}{\alpha \delta} + (\mu_a + \mu_b) \left(-\frac{\psi \delta}{\alpha^2}\right) \frac{\alpha}{\delta} + \frac{\gamma \delta \alpha}{\alpha^2 \delta} \right) \\ \text{cov}(r_a, r_b) &= \frac{\alpha}{\delta} \left( \mu_a \mu_b - \frac{\psi}{\alpha} \mu_a - \frac{\psi}{\alpha} \mu_b + \frac{\gamma}{\alpha} \right) \\ \text{cov}(r_a, r_b) &= \frac{\alpha}{\delta} \left( \left( \mu_a - \frac{\psi}{\alpha} \right) \left( \mu_b - \frac{\psi}{\alpha} \right) + \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\psi^2}{\alpha^2} \right) \\ \text{cov}(r_a, r_b) &= \frac{\alpha}{\delta} \left( \left( \mu_a - \frac{\psi}{\alpha} \right) \left( \mu_b - \frac{\psi}{\alpha} \right) + \frac{\gamma \alpha - \psi^2}{\alpha^2} \right) \\ \text{cov}(r_a, r_b) &= \frac{\alpha}{\delta} \left( \left( \mu_a - \frac{\psi}{\alpha} \right) \left( \mu_b - \frac{\psi}{\alpha} \right) + \frac{\delta}{\alpha^2} \right) \\ \text{cov}(r_a, r_b) &= \frac{\alpha}{\delta} \left( \mu_a - \frac{\psi}{\alpha} \right) \left( \mu_b - \frac{\psi}{\alpha} \right) + \frac{\delta \alpha}{\alpha^2 \delta} \\ \text{cov}(r_a, r_b) &= \frac{\alpha}{\delta} \left( \mu_a - \frac{\psi}{\alpha} \right) \left( \mu_b - \frac{\psi}{\alpha} \right) + \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

De maneira similar, a variância da carteira  $c$  composta por carteiras de mínima variância é dada por:

$$\begin{aligned} \sigma_c^2 &= \omega_c' \Sigma \omega_c \\ \sigma_c^2 &= (h\mu_c + g)' \Sigma (h\mu_c + g) \\ \sigma_c^2 &= \frac{\alpha}{\delta} \left( \mu_c - \frac{\psi}{\alpha} \right)^2 + \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

A partir desta equação obtém-se a curva risco-retorno para um portfólio de maneira geral, dada por:

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= \frac{\alpha}{\delta} \left( \mu_p - \frac{\psi}{\alpha} \right)^2 + \frac{1}{\alpha} \\
\sigma_p^2 - \frac{\alpha}{\delta} \left( \mu_p - \frac{\psi}{\alpha} \right)^2 - \frac{1}{\alpha} &= 0 \quad (\div 1/\alpha) \\
\frac{\sigma_p^2}{1/\alpha} - \frac{\alpha/\delta}{1/\alpha} \left( \mu_p - \frac{\psi}{\alpha} \right)^2 - \frac{1/\alpha}{1/\alpha} &= 0 \\
\frac{1}{1/\alpha} \sigma_p^2 - \frac{\alpha^2}{\delta} \left( \mu_p - \frac{\psi}{\alpha} \right)^2 - 1 &= 0 \\
\frac{1}{1/\alpha} \sigma_p^2 - \frac{1}{\delta/\alpha^2} \left( \mu_p - \frac{\psi}{\alpha} \right)^2 &= 1
\end{aligned}$$

(2.20)

Conforme já mencionado anteriormente  $\alpha > 0$  e  $\delta > 0$ , dessa forma segue que a equação (2.20) representa uma equação reduzida de uma hipérbole (conforme equação (2.16)) com centro em  $(0, \psi/\alpha)$  e as retas assíntotas dadas por:

$$\mu_p = \frac{\psi}{\alpha} \pm \sqrt{\frac{\delta}{\alpha}} \sigma_p$$

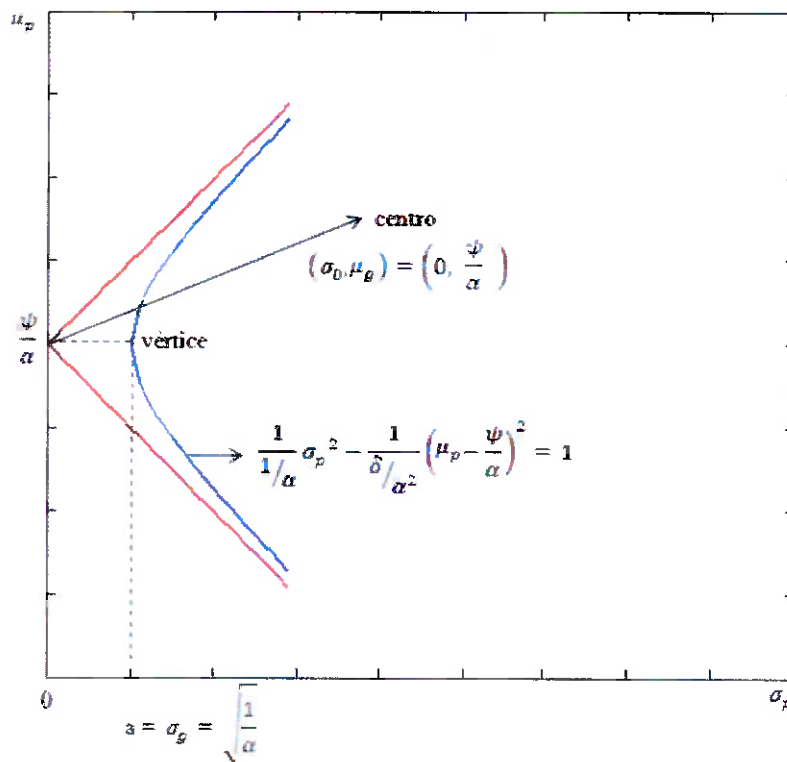


Figura 2.11: Fronteira eficiente – forma geral.

Seja  $\omega_g$  a composição da carteira de mínima variância global,  $\mu_g$  seu retorno e  $\sigma_g^2$  a sua variância.

Segue que:

$$\mu_g = \frac{\psi}{\alpha} \quad (2.21)$$

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{\alpha} \quad (2.22)$$

Assim, a composição da carteira de mínima variância global é dada por:

$$\omega_g = \left( \frac{\alpha}{\delta} \Sigma^{-1} \mu - \frac{\psi}{\delta} \Sigma^{-1} e \right) \frac{\psi}{\alpha} + \left( \frac{\gamma}{\delta} \Sigma^{-1} e - \frac{\psi}{\delta} \Sigma^{-1} \mu \right)$$

$$\begin{aligned}\omega_g &= \frac{\psi}{\delta} \Sigma^{-1} \mu - \frac{\psi^2}{\delta \alpha} \Sigma^{-1} e + \frac{\gamma}{\delta} \Sigma^{-1} e - \frac{\psi}{\delta} \Sigma^{-1} \mu \\ \omega_g &= \frac{\gamma \alpha - \psi^2}{\delta \alpha} \Sigma^{-1} e \\ \omega_g &= \frac{\delta}{\delta \alpha} \Sigma^{-1} e \\ \omega_g &= \frac{1}{\alpha} \Sigma^{-1} e\end{aligned}$$

(2.23)

## 2.9 Aprimoramentos no modelo original de média-variância

O modelo de Markowitz revolucionou a área das finanças ao formalizar matematicamente o problema de determinar a melhor alocação de recursos dado um conjunto de ativos financeiros, além de quantificar o risco financeiro de um investimento utilizando a variância. Entretanto, o problema de seleção de ativos é tão vasto que o trabalho original de Markowitz abriu caminho para o surgimento de inúmeros estudos sobre este tópico, normalmente com o objetivo de aprimorar o modelo original, dos quais podemos destacar:

- inclusão de um ativo livre de risco

Uma abordagem simples, mas não considerada no modelo original é a inclusão de um ativo livre de risco na carteira, fortalecendo até mesmo a prática da diversificação dos investimentos. Entende-se por ativo livre de risco aquele que não possui fontes de incerteza, ou seja, não possui volatilidade. O fato de a volatilidade ser nula e da rentabilidade ser determinística para o ativo livre de risco, além de a covariância entre o ativo livre de risco e os ativos de risco ser igual a zero, temos que tanto o retorno como o risco da carteira variam linearmente de acordo com a participação do ativo livre de risco no portfólio.

- alternativas na estimativa do risco

Uma das contribuições mais importantes do modelo de média-variância proposto por Markowitz foi a introdução da variância, ou o cálculo do desvio-padrão simples de uma série de retornos,

como medida de risco de uma carteira. Entretanto, diversas pesquisas observaram que o uso da variância não é adequado para carteiras que apresentam retornos assimétricos, ou seja, ela não considera de forma apropriada a característica de “caudas gordas” de algumas distribuições, além de penalizar de maneira uniforme os desvios positivos e negativos. Além disto, através do uso da variância estamos tentando, com base em dados históricos, determinar a variabilidade dos retornos no futuro. Assim, o desenvolvimento de modelos mais elaborados para obtenção desta estimativa de risco foi e tem sido objeto de inúmeros estudos, entre os quais podemos citar: o uso da semi-variância, o *down-side risk*, modelos com alisamento exponencial (EWMA), modelos autoregressivos com heterocedasticidade condicional (ARCH / GARCH) e modelos de volatilidade estocástica.

- modelo multi-período

O modelo inicialmente proposto por Markowitz (1952) considera apenas um único período de análise, conhecido como modelo uni-período. Entretanto, dada a dinâmica atual do mercado financeiro, a abordagem uni-período proposta por Markowitz apresenta algumas deficiências. Dessa forma, diversos estudos vem sendo realizados buscando estender o modelo uni-período estático para modelos dinâmicos multi-período discretos ou para modelos dinâmicos a tempo contínuo, considerando até mesmo eventuais realocações na carteira ao longo do tempo.

- restrição de perda máxima

Uma abordagem interessante é a de incluir uma restrição de perda máxima de modo a evitar a falência de portfólios. Nesta formulação com controle sobre perda máxima, a função objetivo é maximizar a soma ponderada do valor da riqueza ao longo do tempo, tendo como restrição a probabilidade máxima de o patrimônio cair abaixo de um determinado valor em cada instante.

- restrição de participações inteiras

No modelo original, Markowitz considera implicitamente que os ativos individuais seriam infinitamente divisíveis, significando que um investidor poderia comprar uma fração de ação. Esta hipótese não é verdadeira dado que no mercado financeiro os ativos são negociados em lotes padrão de negociação ou lotes fracionários em alguns casos, no entanto em ambos os lotes só é permitido adquirir múltiplos inteiros destes valores (o nome lote fracionário se refere a

fração do lote e não a fração do ativo), ou seja, não é possível comprar 1,7 ações de uma determinada empresa. No entanto, a inclusão de tal restrição ao modelo implica na solução de um problema de programação inteira, tornando-o muito mais difícil, tanto em termos teóricos, como no aspecto da implementação computacional dos algoritmos para este tipo de problema.

- inclusão de custos de transação e impostos

Embora a inclusão destas restrições não seja relevante em modelos uni-período, dado que os custos são proporcionais ao valor de investimento, na prática, o horizonte de investimentos é mais longo e, portanto, a carteira ótima deve ser recalculada periodicamente no intuito de acompanhar a dinâmica do mercado financeiro. Dessa forma a inclusão de custos de transação e impostos é de grande importância em modelos multi-período, uma vez que quando temos realocações constantes, o impacto dos custos na rentabilidade total da carteira pode ser significativo.

Uma abordagem alternativa que será apresentada nos capítulos seguintes deste trabalho, com o objetivo de aprimorar o modelo inicialmente proposto por Markowitz, é a de otimizar a alocação de ativos em uma carteira de investimentos com a finalidade de minimizar o erro de rastreamento dado um ganho esperado em relação a um *benchmark*, incluindo restrições de alavancagem.



### 3 MODELOS DE RASTREAMENTO

Neste capítulo faremos uma extensão da teoria apresentada no capítulo 2 no estudo de um problema enfrentado diariamente pela maioria dos administradores de recursos, otimizar a alocação de ativos em uma carteira de modo a superar o desempenho de um determinado *benchmark*, normalmente um índice diversificado de ativos.

#### 3.1 Fundos Passivos e Ativos

As estratégias de investimento, de uma maneira simplificada, podem ser classificadas em dois tipos:

- passiva: tem como objetivo principal obter retornos muito próximos aos retornos obtidos por pelo *benchmark*. Neste caso, o administrador será avaliado com relação a sua capacidade de montar uma carteira que reproduza fielmente o comportamento de um *benchmark* pré-estabelecido, o que implica em que os riscos envolvidos em uma gestão passiva são apenas sistêmicos e pertencentes ao índice de referência. Normalmente, este tipo de gestão tem um custo (taxa de administração) mais barato para o investidor.

- ativa: neste tipo de estratégia o aplicador de recursos atribui ao gestor a tarefa de obter uma rentabilidade superior à de um *benchmark* específico. Neste tipo de estratégia, o investidor também aceita incorrer riscos não-sistêmicos, com a finalidade de obter retornos superiores aos do *benchmark*. Neste caso, o valor do serviço de administração da carteira (taxa de administração), assim como a premiação (taxa de performance) serão baseados no valor adicional que o gestor da carteira consegue agregar acima do *benchmark* definido, assim como do risco incorrido para atingir este objetivo.

Entretanto, em ambas as estratégias, a dificuldade principal está relacionada ao fato de que os índices de mercado normalmente utilizados como *benchmark* são compostos de um número

muito grande de ativos, dos quais muitos sem liquidez aceitável. Dessa maneira, fica inviável para o administrador ter de comprar e vender, além de ter que rebalancear a carteira, toda vez que haja novas aplicações ou saques no fundo. Neste cenário, faz-se necessária a adoção de modelos de otimização para que, por meio da escolha de um número limitado de ativos, se obtenha um desempenho bastante próximo ao *benchmark*, no caso de uma gestão passiva, ou desempenho superior no caso da gestão ativa. Assim, diversos estudos no campo de minimização do erro de rastreamento foram e tem sido elaborados, dentre os quais podemos citar como referência (Roll, 1992), (Clarke et al., 1994), (Rudolf et al., 1999) e (Jorion, 2003).

Neste trabalho, utilizaremos o modelo de mínima variância do erro de rastreamento, proposto por Roll (1992, p.15), para gerar como solução uma composição de carteira com gestão ativa, que minimize a volatilidade das diferenças entre os retornos da carteira e os do índice de referência, impondo uma restrição de ganho de rentabilidade em relação ao índice, de modo a proporcionar ao gestor a cobrança de taxa de performance, mas ao mesmo tempo limitando o risco da carteira em relação ao *benchmark*.

### 3.2 Modelo de mínima variância do erro de rastreamento

O modelo de mínima variância do erro de rastreamento foi inicialmente proposto por Roll (1992, p.15) e tem como objetivo minimizar a variância do erro de rastreamento sujeito a uma restrição de ganho de desempenho da carteira em relação ao *benchmark* pré-estabelecido.

Assim, sendo  $N$  o total de ativos considerado na análise, englobando todos os ativos que fazem parte do *benchmark* além de outros ativos que o gestor desejar incluir, e  $R$  a matriz de retornos destes ativos para uma janela de  $m$  observações,  $R \in \mathbb{R}^{m \times N}$ , o erro de rastreamento é dado por:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \omega_p' R - \omega_b' R \\ \varepsilon &= (\omega_p - \omega_b)' R\end{aligned}$$

(3.1)

onde:  $\varepsilon$  = vetor de erros de rastreamento,  $\varepsilon \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ ,

$\omega_p$  = vetor de pesos dos ativos da carteira,  $\omega_p \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ ,

$\omega_b$  = vetor de pesos dos ativos do *benchmark*,  $\omega_b \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ ,

e  $R$  = matriz de retornos de todos os ativos considerados na análise,  $R \in \mathbb{R}^{m \times N}$ .

Observamos que tanto o vetor  $\omega_p$ , o vetor  $\omega_b$  como a matriz  $R$  possuem dimensão  $N$ , ou seja, todo o universo de ativos considerados na análise. Entretanto,  $\omega_p$  e  $\omega_b$  possuem valores não-nulos apenas para os ativos que fazem parte de suas respectivas composições.

O valor esperado do erro de rastreamento é dado por:

$$\mu_\varepsilon = \mu_p - \mu_b$$

$$\mu_\varepsilon = \omega_p' \mu - \omega_b' \mu$$

$$\mu_\varepsilon = (\omega_p - \omega_b)' \mu$$

(3.2)

onde:  $\mu_\varepsilon$  = valor esperado do erro de rastreamento,

$\omega_p$  = vetor de pesos dos ativos da carteira,  $\omega_p \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ ,

$\omega_b$  = vetor de pesos dos ativos do *benchmark*,  $\omega_b \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ ,

e  $\mu$  = vetor de retornos esperados de todos os ativos considerados na análise,  $\mu \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ .

Dessa forma, chegamos a fórmula da variância do erro de rastreamento:

$$\sigma_\varepsilon^2 = E((\varepsilon - \mu_\varepsilon)^2)$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = E\left(\left((\omega_p - \omega_b)' R - (\omega_p - \omega_b)' \mu\right)^2\right)$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = (\omega_p - \omega_b)' E((R - \mu)^2) (\omega_p - \omega_b)$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = (\omega_p - \omega_b)' E((R - \mu)(R - \mu)') (\omega_p - \omega_b)$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = (\omega_p - \omega_b)' \Sigma (\omega_p - \omega_b)$$

(3.3)

onde:  $\sigma_e^2$  = variância do erro de rastreamento,

$\omega_p$  = vetor de pesos dos ativos da carteira,  $\omega_p \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ ,

$\omega_b$  = vetor de pesos dos ativos do *benchmark*,  $\omega_b \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ ,

e  $\Sigma$  = matriz de covariância entre todos os ativos considerados na análise,  $\Sigma \in \mathbb{R}^{N \times N}$ .

O ganho de rentabilidade esperado em relação ao *benchmark* corresponde à diferença entre o valor esperado dos retornos da carteira e os do *benchmark*, dado por:

$$G = \mu_p - \mu_b$$

$$G = (\omega_p - \omega_b)' \mu$$

(3.4)

No caso de estratégias de gestão passiva  $G = 0$ .

Conforme enunciado por Roll (1992, p.15) o objetivo do gestor é o de minimizar a volatilidade do erro de rastreamento condicionado a um desempenho alvo esperado em relação a um *benchmark*. Assim, o problema de minimização da variância do erro de rastreamento pode ser estruturado da seguinte maneira:

$$\min_{\omega_p} (\omega_p - \omega_b)' \Sigma (\omega_p - \omega_b)$$

Sujeito a:  $(\omega_p - \omega_b)' \mu = G$

$$(\omega_p - \omega_b)' e = 0$$

Denotando  $(\omega_p - \omega_b) = x$ , segue que:

$$\min_x x' \Sigma x$$

Sujeito a:  $x' \mu = G$

$$x' e = 0$$

Utilizando os Multiplicadores de Lagrange, conforme descrito na seção 2.7 deste trabalho, a solução do problema de mínima variância do erro de rastreamento deverá satisfazer a seguinte equação Lagrangeana:

$$L(x, \lambda) = x' \Sigma x + \lambda_1 (G - x' \mu) + \lambda_2 (-x' e)$$

$$L(x, \lambda) = x' \Sigma x + \lambda_1 G - \lambda_1 x' \mu - \lambda_2 x' e$$

E as condições de otimalidade dadas por:

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x} = 2x' \Sigma - \lambda_1 \mu - \lambda_2 e = 0$$

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_1} = G - x' \mu = 0$$

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_2} = -x' e = 0$$

$$\begin{cases} 2x' \Sigma - \lambda_1 \mu - \lambda_2 e = 0 \\ G - x' \mu = 0 \\ -x' e = 0 \end{cases}$$

Onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os multiplicadores de Lagrange a serem determinados.

Resolvendo em  $x$ , segue que:

$$2x' \Sigma - \lambda_1 \mu - \lambda_2 e = 0$$

$$2x' \Sigma = \lambda_1 \mu + \lambda_2 e$$

$$x' = \frac{1}{2} \Sigma^{-1} (\lambda_1 \mu + \lambda_2 e)$$

(3.5)

Portanto:

$$\begin{cases} G - \frac{1}{2} \Sigma^{-1} (\lambda_1 \mu + \lambda_2 e) \mu = 0 \\ -\frac{1}{2} \Sigma^{-1} (\lambda_1 \mu + \lambda_2 e) e = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\mu'\Sigma^{-1}(\lambda_1\mu + \lambda_2e) = G \\ \frac{1}{2}e'\Sigma^{-1}(\lambda_1\mu + \lambda_2e) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu'\Sigma^{-1}(\lambda_1\mu + \lambda_2e) = 2G \\ e'\Sigma^{-1}(\lambda_1\mu + \lambda_2e) = 0 \end{cases}$$

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} \mu'\Sigma^{-1}\mu & \mu'\Sigma^{-1}e \\ e'\Sigma^{-1}\mu & e'\Sigma^{-1}e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2G \\ 0 \end{bmatrix}$$

Conforme demonstrado anteriormente na seção 2.7, segue que:

$$\begin{bmatrix} \gamma & \psi \\ \psi & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \gamma & \psi \\ \psi & \alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \frac{2}{\delta} \begin{bmatrix} \alpha & -\psi \\ -\psi & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{2}{\delta}\alpha G \\ \lambda_2 = \frac{2}{\delta} - \psi G \end{cases}$$

Substituindo em (3.5), temos que:

$$x' = \frac{1}{2}\Sigma^{-1}(\lambda_1\mu + \lambda_2e)$$

$$x' = \frac{1}{2}\Sigma^{-1}\left(\frac{2}{\delta}\alpha G\mu - \frac{2}{\delta}\psi Ge\right)$$

$$x' = \Sigma^{-1} \left( \frac{G}{\delta} \alpha \mu - \frac{G}{\delta} \psi e \right)$$

$$x' = \frac{G}{\delta} (\Sigma^{-1} \alpha \mu - \Sigma^{-1} \psi e)$$

De maneira equivalente, dividindo por  $\psi \alpha$  obtemos:

$$x' = \frac{G}{\gamma/\psi - \psi/\alpha} \left( 1/\psi \Sigma^{-1} \mu - 1/\alpha \Sigma^{-1} e \right)$$

(3.6)

Conforme demonstrado na seção 2.8, os seguintes parâmetros da equação (3.6) estão relacionados à carteira de mínima variância global:

$$\omega_g = 1/\alpha \Sigma^{-1} e ; \mu_g = \psi/\alpha ; \sigma_g^2 = 1/\alpha$$

Ainda, temos que para um retorno  $\mu_1 = \gamma/\psi$  a carteira de mínima variância correspondente é dada por:

$$\omega_1 = h\mu_1 + g = \frac{1}{\psi} \Sigma^{-1} \mu$$

E variância:

$$\sigma_1^2 = \gamma/\psi^2$$

No plano risco-retorno, esta carteira eficiente está localizada onde uma linha partindo da origem passando pela carteira de mínima variância global atravessa a fronteira eficiente.

Dessa maneira, denotando a carteira de mínima variância global por “0” e a carteira eficiente por “1”, segue que:

Carteira	Média	Variância	Proporções
0	$\mu_0 = \psi / \alpha$	$\sigma_0^2 = 1 / \alpha$	$\omega_0 = \Sigma^{-1} e / \alpha$
1	$\mu_1 = \gamma / \psi$	$\sigma_1^2 = \gamma / \psi^2$	$\omega_1 = \Sigma^{-1} \mu / \psi$

Tabela 3.1: Portfólio de mínima variância global e portfólio eficiente.

Utilizando as definições dos portfólios “0” e “1” e substituindo em (3.6), obtemos:

$$(3.7) \quad x = \frac{G}{\mu_1 - \mu_0} (\omega_1 - \omega_0)$$

Sendo que:

$$\mu_1 - \mu_0 = \frac{\gamma\alpha - \psi^2}{\psi\alpha} = \frac{\delta}{\psi\alpha} > 0$$

A equação (3.7) descreve a carteira de mínima variância do *tracking-error*. As alterações em  $x$ , requeridas para minimizar a volatilidade do *tracking-error* para um dado ganho de performance  $G$  são proporcionais à diferença entre as proporções de dois portfólios eficientes em particular, o de mínima variância global “0” e a carteira eficiente com retorno  $\gamma/\psi$  denotada por “1”, sendo  $x$  independente do *benchmark*, conforme podemos notar abaixo:

$$\omega_p - \omega_b = \frac{G}{\mu_1 - \mu_0} (\omega_1 - \omega_0)$$

Dessa maneira, podemos concluir que dois investidores com os mesmos parâmetros adotarão as mesmas estratégias de alterações em suas carteiras em relação à carteira de referência  $\omega_b$ , independentemente de qual seja ela.

A variância do erro, partindo da equação (3.3), é dada por:

$$\begin{aligned}\sigma_\varepsilon^2 &= (\omega_p - \omega_b)' \Sigma (\omega_p - \omega_b) \\ \sigma_\varepsilon^2 &= \left( \frac{G}{\mu_1 - \mu_0} (\omega_1 - \omega_0) \right)' \Sigma \left( \frac{G}{\mu_1 - \mu_0} (\omega_1 - \omega_0) \right) \\ \sigma_\varepsilon^2 &= \left( \frac{G}{\mu_1 - \mu_0} \right)^2 (\omega_1 - \omega_0)' \Sigma (\omega_1 - \omega_0) \\ \sigma_\varepsilon^2 &= \left( \frac{G}{\mu_1 - \mu_0} \right)^2 (\omega_1' \Sigma \omega_1 - \omega_1' \Sigma \omega_0 + \omega_0' \Sigma \omega_0 - \omega_1' \Sigma \omega_0) \\ \sigma_\varepsilon^2 &= \left( \frac{G}{\mu_1 - \mu_0} \right)^2 (\omega_1' \Sigma \omega_1 + \omega_0' \Sigma \omega_0 - 2\omega_1' \Sigma \omega_0)\end{aligned}$$

Tem-se entretanto que:

$$\omega_0 = \Sigma^{-1} \frac{e}{\alpha}$$

Então

$$\omega_1' \Sigma \omega_0 = \omega_1' \Sigma \Sigma^{-1} \frac{e}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} = \sigma_0^2$$

E dado que

$$\omega_1' \Sigma \omega_1 = \sigma_1^2 = \frac{\gamma}{\psi^2}$$

Segue que:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \left( \frac{G}{\mu_1 - \mu_0} \right)^2 (\sigma_1^2 - \sigma_0^2)$$

Verifica-se que a variância do erro não depende da carteira de referência  $\omega_b$ .

A variância da carteira  $p$  é:

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= (x + \omega_b)' \Sigma (x + \omega_b) = \sigma_b^2 + \sigma_\varepsilon^2 + 2x' \Sigma \omega_b \\ \sigma_p^2 &= x' \Sigma x + x' \Sigma \omega_b + \omega_b' \Sigma x + \omega_b' \Sigma \omega_b \\ \sigma_p^2 &= \sigma_\varepsilon^2 + 2x' \Sigma \omega_b + \sigma_b^2 = \sigma_b^2 + \sigma_\varepsilon^2 + 2x' \Sigma \omega_b\end{aligned}$$

(3.8)

Dado que:

$$\begin{aligned}x' \Sigma \omega_b &= \omega_b' \Sigma x = \omega_b' \Sigma \frac{G}{\mu_1 - \mu_0} (\omega_1 - \omega_0) = \frac{G}{\mu_1 - \mu_0} \omega_b' \Sigma (\omega_1 - \omega_0) \\ x' \Sigma \omega_b &= \frac{G}{\mu_1 - \mu_0} (\omega_b' \Sigma \omega_1 - \omega_b' \Sigma \omega_0) \\ x' \Sigma \omega_b &= \frac{G}{\mu_1 - \mu_0} \left( \omega_b' \Sigma \Sigma^{-1} \frac{\mu}{\psi} - \omega_b' \Sigma \Sigma^{-1} \frac{e}{\alpha} \right) \\ x' \Sigma \omega_b &= \frac{G}{\mu_1 - \mu_0} \left( \omega_b' \frac{\mu}{\psi} - \omega_b' \frac{e}{\alpha} \right) = \frac{G}{\mu_1 - \mu_0} \left( \frac{\mu_b}{\psi} - \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{G}{\mu_1 - \mu_0} \left( \frac{\mu_b}{\psi} - \sigma_0^2 \right)\end{aligned}$$

Dividindo  $\mu_b / \psi$  por  $\alpha$  para isolar  $\sigma_0^2$  segue que:

$$x' \Sigma \omega_b = \frac{G}{\mu_1 - \mu_0} \sigma_0^2 \left( \frac{\mu_b}{\psi / \alpha} - 1 \right) = \frac{G}{\mu_1 - \mu_0} \sigma_0^2 \left( \frac{\mu_b}{\mu_0} - 1 \right)$$

(3.9)

Substituindo (3.9) em (3.8) temos:

$$\sigma_p^2 = \sigma_b^2 + \sigma_\varepsilon^2 + 2x' \Sigma \omega_b$$

$$\sigma_p^2 = \sigma_b^2 + \sigma_\varepsilon^2 + 2 \frac{G\sigma_0^2}{\mu_1 - \mu_0} \left( \frac{\mu_b}{\mu_0} - 1 \right)$$

(3.10)

$$\sigma_p^2 = \sigma_b^2 + \left( \frac{G}{\mu_1 - \mu_0} \right)^2 (\sigma_1^2 - \sigma_0^2) + 2 \frac{G\sigma_0^2}{\mu_1 - \mu_0} \left( \frac{\mu_b}{\mu_0} - 1 \right)$$

(3.11)

Denotando  $p^*$  como um portfólio eficiente com o mesmo retorno esperado que a carteira administrada  $p$  (ou seja  $G + \mu_b$ ) e variância  $\sigma_{p^*}^2$ . Da mesma forma, considera-se  $b^*$  um portfólio com o mesmo retorno esperado que o *benchmark*  $b$  (isto é  $\mu_b$ ) e variância  $\sigma_{b^*}^2$ . Dessa maneira, considerando que a equação (3.10) se aplica a qualquer portfólio, incluindo  $b^*$  e  $p^*$ , segue que :

$$\sigma_{p^*}^2 = \sigma_{b^*}^2 + \sigma_\varepsilon^2 + 2 \frac{G\sigma_0^2}{\mu_1 - \mu_0} \left( \frac{\mu_b}{\mu_0} - 1 \right)$$

(3.12)

Observamos que os dois últimos termos das expressões (3.12) e (3.10) são iguais, independentemente se estamos considerando  $b$  e  $p$  ou  $b^*$  e  $p^*$ . Desta forma, subtraindo as expressões (3.10) e (3.12), obtém-se que:

$$\sigma_p^2 - \sigma_{p^*}^2 = \sigma_b^2 - \sigma_{b^*}^2$$

(3.13)

A equação (3.13) mostra que a diferença entre a variância  $\sigma_p^2$  da carteira administrada e a variância  $\sigma_{p^*}^2$  da carteira eficiente se mantém constante e igual à diferença inicial,  $\sigma_b^2 - \sigma_{b^*}^2$ . Deste modo, se a carteira de referência  $\omega_b$  for eficiente,  $\sigma_b^2 = \sigma_{b^*}^2$  e, portanto,  $\sigma_p^2 = \sigma_{p^*}^2$ , ou seja, como seria esperado, a solução do problema de minimização da variância do erro de rastreamento, dado um ganho esperado de desempenho, leva a uma carteira eficiente, com a curva no plano risco-retorno coincidindo com a fronteira eficiente. Mas, se a carteira de referência  $\omega_b$  não for eficiente, a solução do problema de minimização sempre levará a uma carteira não-eficiente, e a curva no plano risco-retorno estará sempre situada a uma distância

constante da fronteira eficiente, conforme podemos observar na equação 3.13, ou seja, a ineficiência se mantém constante, conforme podemos observar também na figura a seguir:

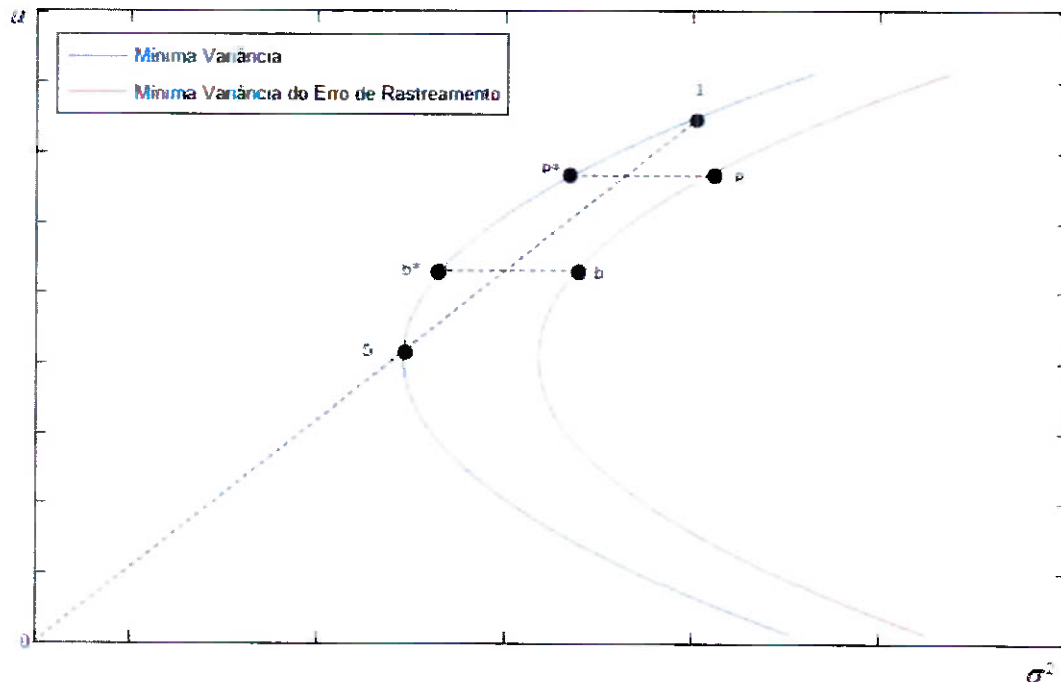


Figura 3.1: Fronteira Eficiente de Mínima Variância X Curva de Mínima Variância do Erro de Rastreamento.

### 3.2.1 Modelo de mínima variância com quantidade específica de ativos

Normalmente, quando se trata do processo de seleção de ativos para compor uma carteira de investimentos, o gestor seleciona um certo número de ativos específicos, escolhidos com base em análises fundamentalistas, baseadas nos fundamentos das empresas como projeção do fluxos de caixa futuros por exemplo, ou através de análises técnicas ou gráficas. Este tipo de escolha não é possível utilizando a solução apresentada na seção 3.2, dado que a escolha dos ativos que irão fazer parte da carteira é feita pelo modelo, assim como a quantidade de ativos que em número muito grande pode gerar problemas na gestão da carteira.

Dessa maneira, apresentamos a seguir uma abordagem alternativa em que o gestor especifica os ativos que irão compor o portfólio. Analisando a formulação original do modelo de mínima variância do *tracking-error* segue que:

$$\min_{\omega_p} (\omega_p - \omega_b)' \Sigma (\omega_p - \omega_b)$$

Sujeito a:  $(\omega_p - \omega_b)' \mu = G$

$$(\omega_p - \omega_b)' e = 0$$

Manipulando a função de minimização temos:

$$\min_{\omega_p} (\omega_p - \omega_b)' \Sigma (\omega_p - \omega_b)$$

$$\min_{\omega_p} (\omega_p' \Sigma - \omega_b' \Sigma) (\omega_p - \omega_b)$$

$$\min_{\omega_p} \omega_p' \Sigma \omega_p - \omega_p' \Sigma \omega_b - \omega_b' \Sigma \omega_p + \omega_b' \Sigma \omega_b$$

$$\min_{\omega_p} \omega_p' \Sigma \omega_p - 2\omega_p' \Sigma \omega_b + \sigma_b^2$$

Como queremos especificar os ativos que irão compor o portfólio, com o objetivo de facilitar a demonstração do cálculo da solução analítica, devemos organizar a matriz de covariâncias de forma que nas primeiras linhas da matriz estejam os ativos que irão compor o portfólio, assim manipularemos a função de minimização de maneira diferente da apresentada na seção 3.2. Dado que  $n$  seja a quantidade de ativos que irão compor a carteira e  $N$  a quantidade total de ativos considerados na análise, segue que:

$\omega_p$  = vetor de pesos dos ativos da carteira,  $\omega_p \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

$\phi$  = matriz de covariâncias entre os ativos que irão compor a carteira,  $\phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\theta$  = matriz composta pelas  $n$  linhas superiores da matriz geral de covariâncias  $\Sigma$ ,  $\theta \in \mathbb{R}^{n \times N}$

Assim, a função de minimização segue dada por:

$$\min_{\omega_p} \omega_p' \phi \omega_p - 2\omega_p' \theta \omega_b + \sigma_b^2$$

Sujeito a:  $(\omega_p - \omega_b)' \mu = G$   
 $(\omega_p - \omega_b)' e = 0$

Manipulando as restrições, temos que:

$$\begin{aligned} (\omega_p - \omega_b)' \mu &= G \\ \omega_p' \mu - \omega_b' \mu &= G \\ \omega_p' \mu - \mu_b &= G \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} (\omega_p - \omega_b)' e &= 0 \\ \omega_p' e - \omega_b' e &= 0 \end{aligned}$$

Dado que a soma dos pesos dos ativos no *benchmark* é igual a 1, segue que:

$$\begin{aligned} \omega_p' e - 1 &= 0 \\ \omega_p' e &= 1 \end{aligned}$$

Assim, o problema de mínima variância do erro de rastreamento restringindo os ativos que irão participar do portfólio pode ser estruturado da seguinte maneira:

$$\min_{\omega_p} \omega_p' \phi \omega_p - 2\omega_p' \theta \omega_b + \sigma_b^2$$

Sujeito a:  $\omega_p' \mu - \mu_b = G$   
 $\omega_p' e = 1$

Sendo:  $\mu$  = vetor de valores esperados dos ativos da carteira,  $\mu \in \mathbb{R}^{n \times 1}$   
 $e$  = vetor unitário,  $e \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

Aplicando os multiplicadores de Lagrange, segue que a função Lagrangeana é dada por:

$$L(\omega_p, \lambda) = \omega_p' \phi \omega_p - 2\omega_p' \theta \omega_b + \sigma_b^2 + \lambda_1 (G - \omega_p' \mu + \mu_b) + \lambda_2 (1 - \omega_p' e)$$

$$L(\omega_p, \lambda) = \omega_p' \phi \omega_p - 2\omega_p' \theta \omega_b + \sigma_b^2 + \lambda_1 G - \lambda_1 \omega_p' \mu + \lambda_1 \mu_b + \lambda_2 - \lambda_2 \omega_p' e$$

E as condições de otimalidade dadas por:

$$\frac{\partial L(\omega_p, \lambda)}{\partial \omega_p} = 2\omega_p' \phi - 2\theta \omega_b - \lambda_1 \mu - \lambda_2 e = 0$$

$$\frac{\partial L(\omega_p, \lambda)}{\partial \lambda_1} = G - \omega_p' \mu + \mu_b = 0$$

$$\frac{\partial L(\omega_p, \lambda)}{\partial \lambda_2} = 1 - \omega_p' e = 0$$

$$\begin{cases} 2\omega_p' \phi - 2\theta \omega_b - \lambda_1 \mu - \lambda_2 e = 0 \\ G - \omega_p' \mu + \mu_b = 0 \\ \omega_p' e = 1 \end{cases}$$

Onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os multiplicadores de Lagrange a serem determinados.

Resolvendo em  $\omega_p$ , segue que:

$$2\omega_p' \phi = 2\theta \omega_b + \lambda_1 \mu + \lambda_2 e$$

$$\omega_p' = \frac{1}{2} \phi^{-1} (2\theta \omega_b + \lambda_1 \mu + \lambda_2 e)$$

Substituindo de modo a encontrar os multiplicadores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , temos:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\phi^{-1}(2\theta\omega_b + \lambda_1\mu + \lambda_2e)\mu = \mu_b + G \\ \frac{1}{2}\phi^{-1}(2\theta\omega_b + \lambda_1\mu + \lambda_2e)e = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\mu'\phi^{-1}(2\theta\omega_b + \lambda_1\mu + \lambda_2e) = \mu_b + G \\ \frac{1}{2}e'\phi^{-1}(2\theta\omega_b + \lambda_1\mu + \lambda_2e) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\mu'\phi^{-1}2\theta\omega_b + \frac{1}{2}\mu'\phi^{-1}(\lambda_1\mu + \lambda_2e) = \mu_b + G \\ \frac{1}{2}e'\phi^{-1}2\theta\omega_b + \frac{1}{2}e'\phi^{-1}(\lambda_1\mu + \lambda_2e) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu'\phi^{-1}\theta\omega_b + \frac{1}{2}\mu'\phi^{-1}(\lambda_1\mu + \lambda_2e) = \mu_b + G \\ e'\phi^{-1}\theta\omega_b + \frac{1}{2}e'\phi^{-1}(\lambda_1\mu + \lambda_2e) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu'\phi^{-1}(\lambda_1\mu + \lambda_2e) = 2(\mu_b + G - \mu'\phi^{-1}\theta\omega_b) \\ e'\phi^{-1}(\lambda_1\mu + \lambda_2e) = 2(1 - e'\phi^{-1}\theta\omega_b) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \mu'\Sigma^{-1}\mu & \mu'\Sigma^{-1}e \\ e'\Sigma^{-1}\mu & e'\Sigma^{-1}e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(\mu_b + G - \mu'\phi^{-1}\theta\omega_b) \\ 2(1 - e'\phi^{-1}\theta\omega_b) \end{bmatrix}$$

Conforme demonstrado anteriormente na seção 2.7, segue que:

$$\begin{bmatrix} \gamma & \psi \\ \psi & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \mu_b + G - \mu'\phi^{-1}\theta\omega_b \\ 1 - e'\phi^{-1}\theta\omega_b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \mu_b + G - \mu'\phi^{-1}\theta\omega_b \\ 1 - e'\phi^{-1}\theta\omega_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & \psi \\ \psi & \alpha \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \frac{2}{\delta} \begin{bmatrix} \alpha & -\psi \\ -\psi & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_b + G - \mu'\phi^{-1}\theta\omega_b \\ 1 - e'\phi^{-1}\theta\omega_b \end{bmatrix}$$

Deste modo, segue que a composição ótima de uma carteira com o objetivo de minimizar a volatilidade do erro de rastreamento e estabelecendo os ativos que irão compor o portfólio é dada por:

$$\omega'_p = \frac{1}{2} \phi^{-1}(2\theta\omega_b + \lambda_1\mu + \lambda_2e)$$

(3.14)

Sendo que:

$$\lambda_1 = \frac{2}{\delta} (\alpha(\mu_b + G - \mu' \phi^{-1} \theta \omega_b) - \psi(1 - e' \phi^{-1} \theta \omega_b))$$

$$\lambda_2 = \frac{2}{\delta} (-\psi(\mu_b + G - \mu' \phi^{-1} \theta \omega_b) + \gamma(1 - e' \phi^{-1} \theta \omega_b))$$

Neste contexto, a solução dada pela equação (3.14) se demonstra mais adequada para o problema de minimização da variância do erro de rastreamento, sujeito a restrição de ganho de rentabilidade e a soma dos pesos da carteira igual a 1, quando o gestor deseja especificar os ativos que irão compor a carteira e a partir daí encontrar a solução ótima que determine os pesos destes ativos com o objetivo de minimizar a variância do erro de rastreamento de um determinado índice de referência.



## 4 APLICAÇÃO DO MODELO E TESTES

Neste capítulo, demonstraremos a aplicação do modelo de mínima variância do erro de rastreamento para a solução do problema objetivo deste trabalho apresentado na seção 1.3, a gestão ativa de uma carteira de investimentos. Neste tipo de gestão, o objetivo principal é buscar a composição ótima de uma carteira de modo que esta ofereça rentabilidade superior a um determinado índice de referência, normalmente um índice diversificado de ativos. Entretanto, com o objetivo de evitar que o gestor incorra em altos riscos na tentativa de maximizar o volume recebido como taxa de performance, buscamos uma composição ótima que minimize o erro de rastreamento em relação ao *benchmark* e, ainda, incluímos restrições de posições a descoberto na carteira, visando minimizar o risco total do portfólio.

### 4.1 Seleção do *benchmark*

Para a realização deste estudo, escolhemos como o *benchmark* da carteira o índice Ibovespa, o principal índice de referência da bolsa brasileira, a BM&FBOVESPA. Este índice é um indicador que tem como objetivo medir o desempenho de uma carteira teórica de ações, revista trimestralmente e composta proporcionalmente pelas ações que representam 80% do volume financeiro total negociado na BM&FBOVESPA no período de 12 meses anterior à formação da carteira, sendo os preços de cada uma das ações ponderados pelos respectivos volumes de negócios. Dessa maneira, utilizamos como base para este estudo a composição da carteira teórica divulgada para o quadrimestre Setembro-Dezembro 2009 dada pela tabela (4.1):

Código	Ação	Tipo	Participação (%)
PETR4	Petrobrás	PN	15,012
VALE5	Vale	PNA N1	12,076
ITUB4	ItauUnibanco	PN EX N1	5,555
BVMF3	BM&FBOVESPA	ON NM	4,448

continua

continuação			
Código	Ação	Tipo	Participação (%)
BBDC4	Bradesco	PN N1	3,864
GGBR4	Gerdau	PN N1	3,647
VALE3	Vale	ON N1	3,468
PETR3	Petrobrás	ON	3,336
USIM5	Usiminas	PNA N1	3,100
CSNA3	Companhia Siderúrgica Nacional	ON	3,023
ITSA4	ITAUSA	PN EDJ N1	2,455
BBAS3	Banco do Brasil	ON NM	2,124
CMIG4	CEMIG	PN N1	1,705
RDCD3	Redecard	ON NM	1,585
ALLL11	ALL América Latina Logística	UNT N2	1,420
ARCZ6	Aracruz	PNB N1	1,404
CYRE3	Cyrela Realty	ON NM	1,385
SDIA4	Sadia	PN N1	1,208
GFGA3	Gafisa	ON NM	1,163
BRAP4	Bradespar	PN N1	1,066
AMBV4	AMBEV	PN	1,027
PRGA3	BRF Foods	ON NM	0,998
TNLP4	Telemar	PN	0,991
ELET3	Eletróbrás	ON N1	0,972
LAME4	Lojas Americanas	PN	0,971
ELET6	Eletróbrás	PNB N1	0,946
GOAU4	Gerdau Met.	PN N1	0,921
LREN3	Lojas Renner	ON NM	0,884
TCSL4	TIM Participações	PN	0,828
CESP6	CESP	PNB N1	0,812
NETC4	NET	PN N2	0,800
NATU3	Natura	ON NM	0,757
VIVO4	Vivo	PN	0,757
MMXM3	MMX Mineração	ON NM	0,743
EMBR3	Embraer	ON NM	0,725
ELPL6	Eletropaulo	PNB N2	0,717
USIM3	Usiminas	ON N1	0,696
VCPA3	V C P	ON N1	0,691
BTOW3	B2W Varejo	ON NM	0,684
CPLE6	Copel	PNB N1	0,673
GOLL4	Gol	PN N2	0,673
TAMM4	TAM	PN N2	0,653
JBSS3	JBS	ON NM	0,637
RSID3	Rossi Residencial	ON NM	0,597
CCRO3	CCR Rodovias	ON NM	0,590
PCAR5	Pão de Açúcar-CBD	PNA N1	0,571
CRUZ3	Souza Cruz	ON ED	0,564
CSAN3	COSAN	ON NM	0,553
CPFE3	CPFL Energia	ON NM	0,541
UGPA4	Ultrapar	PN N1	0,506
BRKM5	Braskem	PNA N1	0,451
DURA4	Duratex	PN N1	0,430

Código	Ação	Tipo	conclusão
			Participação (%)
SBSP3	Sabesp	ON NM	0,409
TRPL4	Transmissão Paulista	PN N1	0,386
KLBN4	Klabin	PN ED N1	0,376
BRT04	Brasil Telecom	PN	0,360
BRTP4	Brasil T PAR	PN N1	0,318
LIGT3	Light	ON NM	0,312
TNLP3	Telemar	ON	0,301
BNCA3	Nossa Caixa	ON NM	0,288
TMAR5	Telemar N L	PNA	0,288
TLPP4	Telesp	PN	0,211
TCSL3	TIM Participações	ON	0,156
CLSC6	Celesc	PNB N2	0,100
CGAS5	Comgás	PNA	0,093

Fonte: BM&FBOVESPA

Tabela 4.1: Carteira Teórica Ibovespa – quadrimestre Set Dez 2009.

## 4.2 Seleção da amostra e coleta de dados

A amostra utilizada para avaliar a eficiência do modelo de rastreamento foi composta por 65 ativos. O período escolhido para análise foi de 30 de novembro de 2007 a 31 de agosto de 2009, compreendendo o histórico de fechamentos diários ajustado por proventos, *splits* e agrupamentos dos 65 ativos que faziam parte da carteira teórica do Ibovespa para o quadrimestre Setembro Dezembro 2009, totalizando 433 observações para cada um dos ativos, que multiplicada pela quantidade total de 65 ativos resultam em uma massa de 28.145 dados.

## 4.3 Aplicação dos modelos

O modelo escolhido para a solução do problema de alocação ótima de ativos em uma carteira de investimentos de modo a minimizar o erro de rastreamento, com restrições de ganho em relação à rentabilidade esperada do índice Ibovespa e de posições a descoberto foi o modelo de mínima variância do erro de rastreamento, descrito na seção 3.3 deste trabalho:

$$\min_{\omega_p} (\omega_p - \omega_b)' \Sigma (\omega_p - \omega_b)$$

$$\text{Sujeito a: } (\omega_p - \omega_b)' \mu = G$$

$$\omega_p' e = 1$$

$$\omega_p \geq 0$$

Tendo em vista que a restrição de posições a descoberto na carteira implica na inclusão de uma restrição de desigualdade ao modelo, o que conseqüentemente não permite a obtenção de uma solução analítica, utilizamos métodos numéricos com o apoio da ferramenta de *software* MATLAB, sendo as otimizações feitas por meio da função *fmincon.m* para encontrar a solução do modelo.

Com base na amostra de dados coletados, foram calculadas as rentabilidades diárias esperadas e volatilidades para todos os ativos inclusos na análise e para o índice Ibovespa, destacando que para o cálculo da rentabilidade esperada e volatilidade do Ibovespa fixamos o índice como se historicamente ele sempre tivesse sido composto conforme divulgado pela carteira teórica válida para o quadrimestre Setembro Dezembro 2009, o que não é uma afirmação verdadeira dado que o índice tem sua composição alterada todo quadrimestre, entretanto, este tipo de ajuste aumenta a precisão do modelo, uma vez que será esta carteira teórica do quadrimestre Setembro Dezembro 2009 que a carteira de investimentos proposta neste estudo irá rastrear.

#### 4.3.1 Seleção dos ativos

A seleção dos ativos para compor a carteira foi baseada em três critérios:

- Rentabilidade esperada;
- Participação no Ibovespa de acordo com a carteira teórica de Setembro Dezembro 2009; e
- Diversificação entre os setores.

De acordo com estes critérios, foram selecionados cinco ativos, que somados os pesos equivalem a uma representatividade de aproximadamente 21,4% do índice Ibovespa.

Código	Ação	Setor	Participação no Ibovespa (%)
PETR4	Petrobrás	Petróleo, Gás e Biocombustíveis	15,012
CSNA3	Companhia Siderúrgica Nacional	Siderurgia e Metalurgia	3,023
BBAS3	Banco do Brasil	Intermediários Financeiros	2,124
CPLE6	Copel	Energia Elétrica	0,673
PCAR5	Pão de Açúcar – CBD	Comércio e Distribuição	0,571

Tabela 4.2: Ativos selecionados para compor a carteira.

A rentabilidade esperada e a volatilidade, ambas diárias, calculadas para cada um dos cinco ativos do portfólio e para o índice Ibovespa ajustado conforme mencionado anteriormente, estão demonstradas a seguir:

Ativos	Rentabilidade diária esperada $\mu$ (%)	Volatilidade diária $\sigma$ (%)
PETR4	-0,022	3,499
CSNA3	0,048	4,240
BBAS3	0,004	3,816
CPLE6	0,038	2,900
PCAR5	0,107	2,745
Ibovespa*	-0,043	2,949

\* Índice ajustado

Tabela 4.3: Rentabilidade esperada e volatilidade dos ativos selecionados e do Ibovespa ajustado.

Observamos que tanto para a ação preferencial PETR4 da Petrobrás como para o índice Ibovespa ajustado a rentabilidade esperada apresentou valor negativo, resultado da crise econômica mundial iniciada no segundo semestre de 2008 que provocou uma queda generalizada no preço das ações. Entretanto, esta rentabilidade esperada foi acompanhada de um desvio-padrão elevado, o ativo PETR4 por exemplo apresentou uma rentabilidade diária esperada de -0,02% mas com uma volatilidade diária de  $\pm 3,5\%$ , demonstrando a possibilidade de ganhos.

### 4.3.2 Ganho esperado de rentabilidade

Para a definição do ganho esperado de performance da carteira,  $G$ , em relação ao índice Ibovespa, foi estipulado um valor de modo a permitir que, após deduzidas as despesas de taxa de administração e imposto de renda, a carteira apresente rentabilidade superior à do índice Ibovespa, possibilitando ao administrador o recebimento de premiação como taxa de performance.

Neste cenário, o ganho esperado diário de rentabilidade foi determinado com base na performance do índice Ibovespa nos últimos cinco anos e adotando os seguintes parâmetros:

- Média da performance anual do índice Ibovespa (2004 – 2008): + 16,2%
- Taxa de administração (média das taxas para fundos de ações – ANBIMA: set 09): 2,23%
- Imposto de renda: 15%

Dessa maneira estimamos o ganho de performance necessário para que, após deduzidas todas as despesas, a carteira tenha desempenho igual ao do índice Ibovespa:

$$\frac{P(1+i+G)(1-t) - (P(1+i+G)(1-t) - P)I}{P} - 1 > i$$

Sendo:  $P$  = patrimônio líquido do fundo;

$i$  = rentabilidade esperada do *benchmark*;

$G$  = ganho esperado de rentabilidade;

$t$  = taxa de administração; e

$I$  = alíquota de imposto de renda.

$$\frac{P(1+i+G)0,9777 - 0,15P(1+i+G)0,977 + 0,15P}{P} - 1 > i$$

$$(1+i+G).0,9777.0,85 - 0,85 > i$$

$$G > \frac{0,168955i + 0,018955}{0,831045}$$

(4.1)

Observamos pela inequação (4.1) que o valor definido como ganho esperado de performance depende da rentabilidade esperada do *benchmark*, ou seja, quanto maior a rentabilidade esperada do *benchmark*, maior deverá ser o valor definido como ganho esperado de performance. Vale ressaltar que a fórmula dada pela inequação (4.1) acima se trata apenas de uma estimativa, pois a taxa de administração, apesar de expressa em base anual, tem sua cobrança feita diariamente sobre o patrimônio líquido do fundo.

Com base nesta estimativa de ganho diário de performance e considerando como rentabilidade esperada do índice Ibovespa o valor de 16,2%, referente a rentabilidade média do índice nos últimos cinco anos, concluímos que para que a rentabilidade da carteira supere a rentabilidade do índice, o ganho esperado de performance deverá ser maior que 5,6 pontos percentuais em bases anuais, ou 0,02 ponto percentual em termos diários. Deste modo, acrescentamos 0,01 ponto percentual ao valor mínimo de  $G$  com o objetivo de superar o Ibovespa, e permitir ao gestor a cobrança de taxa de performance, fazendo com que  $G = 0,03$  ponto percentual.

#### 4.4 Resultados do modelo e *backtest*

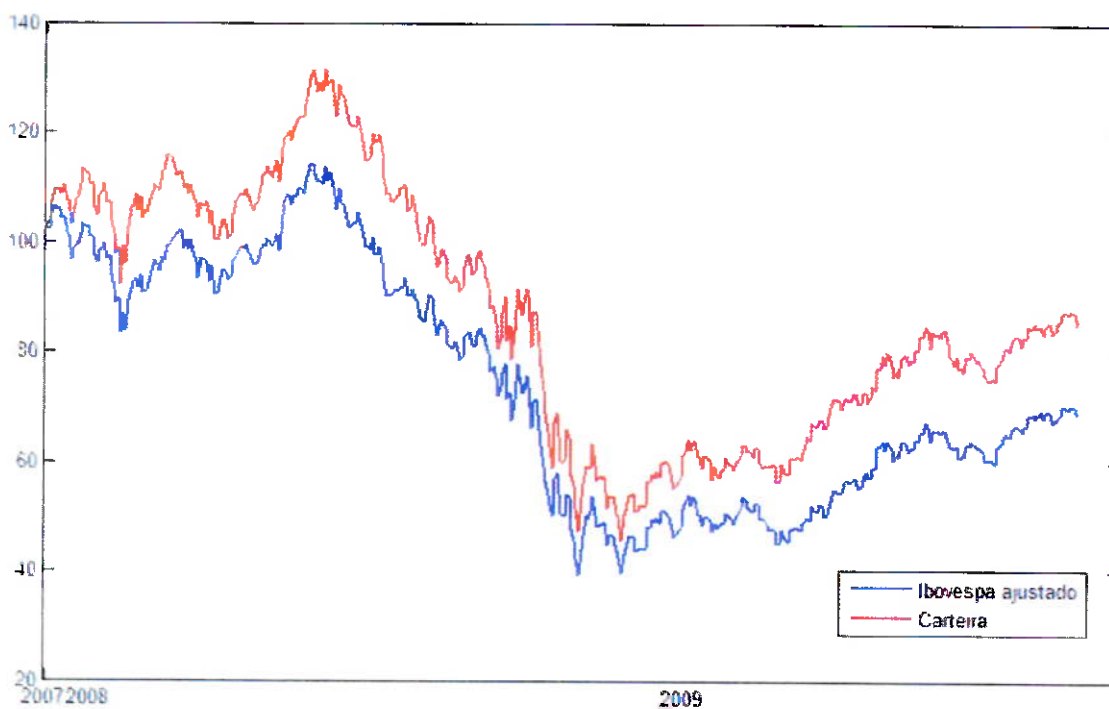
Aplicando o modelo de mínima variância do erro de rastreamento sujeito a um ganho de rentabilidade diário de 0,03 ponto percentual em relação ao Ibovespa e restringindo posições a descoberto na carteira, chegamos à seguinte composição ótima:

Composição da carteira	
Ativo	Participação (%)
PETR4	39,78
CSNA3	17,30
BBAS3	22,32
CPLE6	18,67
PCAR5	1,94

Tabela 4.4: Composição da carteira.

Realizando o *backtest* para o período de 30/11/2007 a 31/08/2009, com o objetivo de avaliar o desempenho passado da carteira em relação ao Ibovespa ajustado, os resultados obtidos foram:

	Retorno acumulado (%)	Volatilidade (%)	Erro Quadrático Médio Diário (%)	Variância do erro de rastreamento (%)
Carteira	4,190	3,037	0,6098934	0,6085231
Ibovespa ajustado	-18,623	2,949	-	-

Tabela 4.5: Resultado do *backtest*.Figura 4.1: Gráfico do período de *backtest*.

Analisando os dados obtidos no *backtest* e o gráfico comparativo de desempenho com o Ibovespa ajustado, observamos que o modelo de mínima variância do erro de rastreamento apresentou comportamento bastante aderente ao do índice ajustado, tendo em vista a variância do erro de rastreamento apresentada e considerando o ganho esperado de desempenho imposto ao modelo.

#### 4.5 Testes

O período de testes do modelo compreendeu os meses de setembro e outubro de 2009, com 42 dias úteis, sendo observados os seguintes resultados:

	Retorno acumulado (%)	Volatilidade (%)	Erro Quadrático Médio Diário (%)	Variância do erro de rastreamento (%)
Carteira	9,500	1,740	0,2124083	0,2168417
Ibovespa	8,218	1,806	-	-

Tabela 4.6: Resultado do período de testes.

No período de testes, não utilizamos o índice Ibovespa ajustado, ou seja, com a composição fixa baseada na carteira teórica de Setembro/Dezembro 2009, mas sim os índices de fechamento para cada período, com o objetivo de acompanhar o desempenho da carteira em uma situação real, diferentemente da situação anterior em que foi utilizado o índice ajustado, com composição fixa, de modo a atingir um nível maior de precisão dado que seria esta a carteira teórica que o portfólio deveria rastrear nos meses de setembro e outubro.

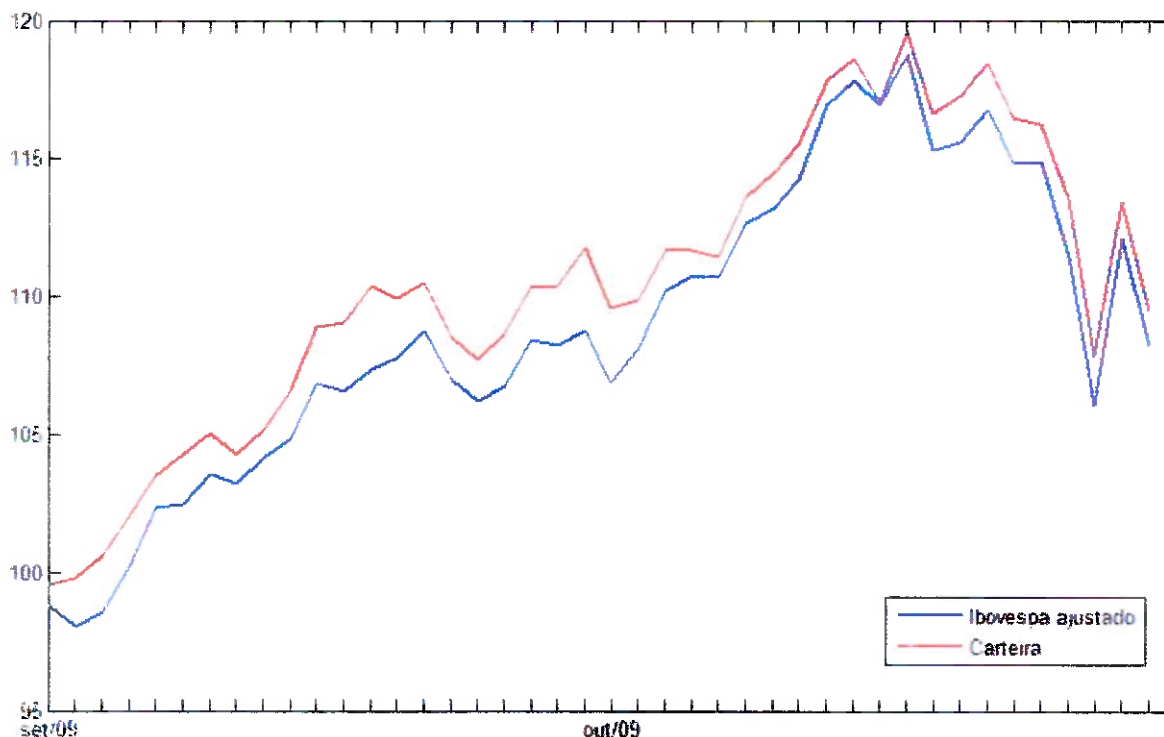


Figura 4.2: Gráfico do período de testes.

Analisando o desempenho da carteira em relação ao índice Ibovespa no período de testes observamos que o modelo de mínima variância do erro de rastreamento, conforme proposto, atingiu rentabilidade superior à do índice, e um erro de rastreamento consideravelmente baixo dado o ganho esperado de rentabilidade em relação ao índice. No entanto, vale destacar que embora a rentabilidade acumulada no período de testes tenha sido superior à do Ibovespa, com um ganho de rentabilidade conforme proposto inicialmente pelo modelo (1,282 em 42 dias úteis, equivalente a aproximadamente 0,03 ponto percentual ao dia), este resultado foi influenciado pelo desempenho da carteira no mês de setembro, uma vez que no mês de outubro a carteira apresentou desempenho inferior ao do Ibovespa, conforme podemos observar na tabela 4.7 a seguir:

Mês	Carteira (%)	Ibovespa (%)	Diferença de rentabilidade (%)
Setembro 09	11,788	8,755	3,013
Outubro 09	-2,047	-0,513	-1,534
Acumulado (set.09 até out.09)	9,500	8,218	1,282

Tabela 4.7: Comparativo de desempenho Carteira X Ibovespa.

Este tipo de situação acontece devido a mudanças na composição do índice, uma vez que ao final da primeira metade do período de vigência da carteira teórica de Setembro Dezembro 2009, além da mudança nas participações dos ativos, dois ativos haviam deixado de compor o índice. Além disto, devido à dinâmica do mercado de ações, as rentabilidades esperadas, volatilidades e covariâncias entre os ativos sofrem mudanças constantemente, implicando na perda de eficiência da solução proposta pelo modelo ao longo do tempo. Desse modo, a solução para este tipo de problema seria a realização de rebalanceamentos periódicos na carteira para horizontes longos de investimento, ou para períodos de alta volatilidade, além de revisar periodicamente o valor assumido como ganho esperado de rentabilidade, uma vez que conforme apresentado na seção 4.3.2 este parâmetro é altamente dependente da rentabilidade esperada do *benchmark*.



## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, apresentamos um modelo de otimização baseado em Roll (1992) com o objetivo de minimizar a variância do erro de rastreamento de uma carteira em relação a um *benchmark*, com o intuito de limitar a atuação do gestor no que se refere ao risco total da carteira, impondo restrições com relação ao ganho de desempenho relativamente ao *benchmark* e não permitindo posições a descoberto.

Este modelo de otimização foi testado para o mercado de ações na Bolsa de Valores de São Paulo, BM&FBOVESPA, adotando como *benchmark* o índice Ibovespa. Pela análise tanto do *backtest* como do teste do modelo, observamos que o modelo de mínima variância do erro de rastreamento acompanhou o índice Ibovespa de maneira bastante eficaz, apresentando comportamento bastante regular e erro de rastreamento pouco volátil.

Dado que o número de ativos considerado na otimização, cinco ativos, implicando em baixo custo de transação e minimizando o problema de liquidez enfrentado pelo administrador da carteira toda vez que haja aplicações ou resgates no fundo, ou mudanças na composição do índice adotado como *benchmark*, e dada a performance apresentada pelo modelo podemos considerá-lo como uma boa opção na gestão de carteiras ativas.

Como alternativas de aprofundamento no que se refere ao estudo de modelos de alocação ótima de ativos sujeitos a restrições de volatilidade do erro de rastreamento, podemos sugerir a inclusão de uma restrição em que a volatilidade da carteira seja menor ou igual à volatilidade do índice, ponto abordado por Jorion (2003), a inclusão de abordagens referentes a custos de transação e impostos, custos de liquidez, custos operacionais, restrições de perda máxima, modelos alternativos de modo a apresentar uma melhor estimativa para o parâmetro adotado como ganho de performance, rebalanceamentos periódicos da carteira, estudo do modelo em tempo contínuo entre outras de modo a aproximar os modelos cada vez mais da realidade.



## REFERÊNCIAS

- ANDREZZO, Andréa Fernandes; LIMA, Iran Siqueira. **Mercado Financeiro – Aspectos Históricos e Conceituais**. 2.ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.
- ARAUJO, Michael Viriato. **Seleção Dinâmica de Portfólios em Média-Variância com Saltos Markovianos**. São Paulo, 2007. Dissertação (Doutorado em Engenharia) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- ASSUNÇÃO, Hugo Gonçalves Vieira. **Modelos Probabilísticos para Rastreamento em Carteiras de Investimento**. São Paulo, 2000. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- BERNSTEIN, Peter L. **Against the gods: the remarkable story of risk**. New York: John Wiley & Sons, 1996.
- BERNSTEIN, Peter L. **Capital Ideas**. New York: Free Press, 1997.
- BRIGHAM, Eugene F.; WESTON, J. Fred. **Fundamentos da Administração Financeira**. Editora Makron, 10. ed., 2000.
- CLARKE, R.C.; Krase, S.; Statman, M.; **Tracking errors, regret, and tactical asset allocation**. The Journal of Portfolio Management, 20, 1994, Spring. p.16-24.
- COSTA, Oswaldo Luiz do Valle; ASSUNÇÃO, Hugo Gonçalves Vieira. **Análise de Risco e Retorno em Investimentos Financeiros**. 1.ed. São Paulo: Editora Manole, 2005.
- DAMODARAN, A. **Investment Valuation: tools and techniques for determining the value of any asset**. New York, Editora Wiley, 1996.
- ELTON, Edwin J.; GRUBER, Martin J. **Modern portfolio theory and investment analysis**. 5. ed. New York: John Wiley & Sons, 1995.
- FRANCIS, Jack Clark. **Investment: analysis and management**. 5. ed. New York: McGraw-Hill, 1991.
- GITMAN, Lawrence J. **Princípios de administração financeira**. 7. ed. São Paulo: Harbra, 1997.
- JORION, Philippe. **Portfolio Optimization with Constraints on Tracking Error**. Financial Analysts Journal, Setembro / Outubro de 2003. p. 70-82.
- JORION, Philippe. **Value at Risk**. Editora Irwin, 1997.

JÚNIOR, Antônio Marcos Duarte. **Risco: Definições, Tipos, Medição e Recomendações para seu Gerenciamento**. Disponível em: <http://www.risktech.com.br/PDFs/RISCO.pdf> acesso em 06 de setembro de 2007.

MAXIMIANO, Antonio Cesar Amaru. **Introdução à Administração**. 6. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2004.

MARKOWITZ, Harry. **Portfolio Selection**. *Journal of Finance*, 3 de março de 1952. 7, p.77-91.

MARKOWITZ, Harry. **Portfolio Selection: efficient diversification of investments**. New York: John Wiley & Sons, 1959.

MARKOWITZ, Harry. **Foundations of Portfolio Theory**. Nobel Lecture, Nova Iorque, Estados Unidos, 7 de dezembro de 1990. Disponível em: [http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/economics/laureates/1990/markowitz-lecture.html](http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1990/markowitz-lecture.html) acesso em 20 de julho de 2007.

NABHOLZ, Rodrigo de Barros. **Seleção Ótima de Ativos Multi-Período com Restrições Intermediárias Utilizando o Critério de Média-Variância**. São Paulo, 2006. Dissertação (Doutorado em Engenharia) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

NETO, Alexandre Assaf. **Mercado Financeiro**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

ODA, André Luiz. **Análise da persistência de performance dos fundos de ações brasileiros no período 1995-1998**. São Paulo, 2000. Dissertação (Mestrado em Administração) – Programa de Pós-Graduação em Administração em Administração, Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo.

ODA, André Luiz; SENGER, Maria Carlota Morandin; CHÁRA, Alexandre Noboru. **Um estudo sobre diversificação na Bolsa de Valores de São Paulo**. In: 22o Encontro da ANPAD, 1998, Foz do Iguaçu, PR, Anais do 22o Encontro da ANPAD. Rio de Janeiro: ANPAD.

PINDYCK, Robert S.; RUBINFELD, Daniel L.. **Microeconomia**. 6. e. São Paulo: Pearson, 2005.

ROLL, Richard. **A Mean / Variance Analysis of Tracking Error**. *The Journal of Portfolio Management*, 18, Summer, 1992. p. 13-22.

ROSS, Stephen A.; WESTERFIELD, Randolph W.; JAFFE, Jeffrey F. **Administração Financeira: corporate finance**. São Paulo: Atlas, 2002.

RUDOLF, Markus; WOLTER, Hans-Jürgen; ZIMMERMANN, Heinz. **A linear model for tracking error minimization**. *Journal of Banking & Finance*, 23, 1999. p. 85-103.

SECURATO, José Roberto. **Decisões Financeiras em Condições de Risco**. 2. ed. São Paulo: Saint Paul Editora, 2007.

SECURATO, José Roberto. **Cálculo Financeiro das Tesourarias**. 3. ed. São Paulo: Saint Paul Editora, 2005.

SHARPE, William F. . **Portfolio theory and capital markets**. New York: McGraw-Hill, 1970.

SOLOMON, Ezra; PRINGLE, John J. (1981). **Introdução à administração financeira**. São Paulo: Atlas.

STOCK, James H.; WATSON, Mark W.. **Econometria**. São Paulo: Pearson, 2004.

WESTON, J. Fred; BRIGHAM, Eugene F. **Managerial finance**. 5. ed. Illinois: Dryden Press, 2000.

