FREDERICO ARIETA DA COSTA FERREIRA

O VALOR EM RISCO CONDICIONAL NA OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS COM DERIVATIVOS

Trabalho de Formatura apresentado à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do Diploma de Engenheiro de Produção

SÃO PAULO
2006

FREDERICO ARIETA DA COSTA FERREIRA

O VALOR EM RISCO CONDICIONAL NA OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS COM DERIVATIVOS

Trabalho de Formatura apresentado à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do Diploma de Engenheiro de Produção

Orientadora:
Prof[a] Dr[a] Celma de Oliveira Ribeiro

SÃO PAULO
2006

FICHA CATALOGRÁFICA

Ferreira, Frederico Arieta da Costa
O valor em risco condicional na otimização de carteiras com derivativos / F.A. da C. Ferreira. -- São Paulo, 2006.
118p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Produção.

1.Pesquisa operacional 2.Modelagem matemática 3.Finanças I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Produção II.t.

DEDICATÓRIA

À minha família.

AGRADECIMENTOS

À minha meus pais, à Luiza e à Marcella pelo apoio, companhia, conselhos e motivação.

À professora Dra Celma O. Ribeiro, pela orientação, colaboração e conhecimentos compartilhados que foram fundamentais para a realização deste trabalho.

Aos amigos e colegas da faculdade, por esses cincos anos de estudo compartilhados e pelas amizades que levarei para toda a vida.

RESUMO

O objetivo do trabalho é tratar do problema de otimização de carteiras de investimento com opções, usando a abordagem da metodologia de avaliação de risco CVaR (Valor em Risco Condicional). Os preços das ações são projetados através de Simulação de Monte Carlo, e os prêmios das opções são calculados através do modelo de BLACK-SCHOLES (1973). O modelo linear proposto, baseado no modelo clássico de MARKOWITZ (1952), permite a construção de uma fronteira eficiente, onde se deseja minimizar o nível de risco, mensurado pelo CVaR, para um dado nível mínimo de retorno.

Também é analisada uma variação do modelo, usando a abordagem da variância como metodologia de risco. São realizados extensivos testes e análise de sensibilidade aos diversos parâmetros da simulação dos preços e do modelo de otimização. Os testes realizados mostram resultados positivos, onde são geradas carteiras que utilizam as opções como ferramentas para implementar estratégias que minimizam a perda do investidor nos cenários pessimistas e incrementam os ganhos obtidos nos cenários otimistas. O modelo proposto mostrou-se consistente e eficiente, podendo ser aplicado na prática da gestão de carteiras de investimentos com opções.

ABSTRACT

The goal of this work is to study the optimization of investments portfolios with options, using the CVaR (Conditional Value-at-Risk) risk measuring methodology approach. The stock prices are projected through Monte Carlo Simulation and the options premiums are calculated through the BLACK-SCHOLES (1973) pricing model. The proposed linear model, based on the traditional MARKOWITZ (1952) work, permits the construction of an efficient frontier, on which the minimization of the risk level, measured by CVaR, for a given minimum return level is represented.

Furthermore, it is also analyzed a variation of the model that adopts the variance risk methodology approach. Extensive tests and sensitivity analysis to the several prices simulation and optimization model parameters are realized. The tests show positive results, on which strategies that use the options as tools to minimize the investor loss on pessimistic scenarios and leverage the realized gains on the optimistic scenarios are generated. The proposed model was proven consistent and efficient, making possible its adoption on the management of investments portfolios with options.

Sumário

Anexos

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

INTRODUÇÃO

1 Introdução

Em linhas gerais, este trabalho se propõe a desenvolver um modelo de otimização de carteiras de investimento. Este é um problema típico nas empresas do setor financeiro, que devem gerenciar seus ativos de forma eficiente que maximize a função de utilidade, normalmente representada por um *trade-off* entre retorno e risco de seu *portfolio* de investimentos.

O estudo do problema de alocação ótima de ativos em uma carteira de investimentos é um tema muito freqüente de estudos nas áreas de finanças e pesquisa operacional, de tal forma que grandes avanços já foram alcançados desde o trabalho publicado por MARKOWITZ (1952). Este modelo, que tornou-se muito reconhecido e a base para a Teoria Moderna de Carteiras, buscava achar uma solução para o investidor que precisa decidir a forma de alocação de seu capital dentre um universo de ativos, considerando-se que o investidor deve decidir a composição da carteira em um dado instante e mantê-la até um certo horizonte de investimento. O objetivo é definir a composição da carteira que satisfaz uma rentabilidade mínima imposta pelo investidor e minimiza o nível de risco, mensurado pela variância do retorno esperado.

Uma evolução notável da abordagem de Markowitz é a inserção de derivativos nas carteiras de investimentos. Os derivativos são produtos financeiros que representam ferramentas para o investidor delinear estratégias para realizar a redução de seus riscos (*hedge*) e/ou maximizar seus ganhos. No entanto, a implementação de derivativos nos modelos de otimização de carteiras de investimento representa uma dificuldade adicional, uma vez que o apreçamento dos mesmos não é realizada de forma simples.

A forma como o risco do portfolio de investimentos é mensurado representa também uma parte importante do estudo do problema de alocação ótima. Trabalharemos com uma medida de risco baseada no VaR – *Value at Risk*. O sistema de aferição do Valor em Risco é largamente disseminado e aplicado no mercado, sendo a sua atratividade principalmente explicada pela simplicidade do conceito expressado. Ao contrário de outras medidas de compreensão mais difícil para usuários pouco familiarizados com conceitos estatísticos, o VaR representa a resposta para uma pergunta muito simples: qual é a máxima perda que a carteira pode sofrer, dado um nível de confiança e um horizonte de tempo. A medida de risco que utilizaremos seguirá a metodologia do CVaR – *Conditional Value at Risk*, que representa um indicador mais robusto que o VaR. Embora o conceito por trás das metodologias de aferição de risco VaR e CVaR seja facilmente compreendido, é relevante ressaltar que a otimização de carteiras através destas abordagens caracteriza um problema não trivial.

Este trabalho foi desenvolvido junto a uma equipe que faz parte de uma grande instituição financeira, e que colabora na gestão de alguns fundos de previdência com volumes significativos de capital. Assim como é usual no mercado, a alocação das carteiras é atualmente realizada com base na abordagem clássica de Markowitz. Busca-se, então, o desenvolvimento de um modelo aprimorado para gestão de carteiras, de tal forma a usufruir dos benefícios gerados pela inserção de derivativos e pela utilização de uma medida de risco mais adequada.

É importante ressaltar que o problema estudado tem aplicações mais extensas, de tal forma que a abordagem adotada e desenvolvida neste trabalho não se resume ao caso específico citado ou ao setor financeiro apenas, sendo aplicável a qualquer indústria, onde haja a gestão de ativos incluindo opções.

O trabalho aqui apresentado é o resultado do estudo e desenvolvimento de diversos temas, incluindo: métodos numéricos de simulação, Teoria Moderna de Carteira, mecanismos e produtos derivativos, estratégias com derivativos e o modelos de apreçamento de opções, metodologias para aferição de risco, otimização linear e quadrática. A abordagem descrita, que integra a simulação dos preços dos ativos e o apreçamento das opções com a otimização das carteiras e gerações de estratégias minimizando o CVaR, é nova no país, representando, portanto, uma contribuição significativa do trabalho.

1.1 Objetivo do trabalho

Em resumo, o objetivo do trabalho é tratar do problema de otimização de carteiras de investimento com derivativos, usando a abordagem da metodologia de risco do CVaR. Servirão como base os trabalhos desenvolvidos por RUSSI (2005) e TOPALOGLOU (2004).

1.2 Estrutura do trabalho

Neste primeiro Capítulo são apresentados o objetivo do trabalho e a abordagem que seja adotada para a resolução do problema proposto.

No Capítulo 2 os conceitos necessários para o entendimento sobre o tema de investimentos são descritos. São abordados conceitos básicos como os diferentes tipos de investimentos, os *portfolios* e os participantes do mercado. Além disso, são explicados os fundamentos da Teoria Moderna da Carteira, como o fenômeno da diversificação e a construção da fronteira eficiente. Por fim, descrevem-se os produtos do mercado financeiro brasileiro e aprofunda-se o tema de Opções, uma vez que são os derivativos que utilizaremos no modelo proposto.

No Capítulo 3 os conceitos de modelagem matemática utilizados são estudados. Os conceitos sobre as medidas de risco empregadas são aprofundados e a metodologia de apreçamento de opções é apresentada. Por fim, descreve-se o Método da Simulação de Monte Carlo, utilizado para simular a evolução dos preços dos ativos.

No Capítulo 4 é proposta, formalmente, a formulação matemática do modelo de otimização de carteiras com opções. As variáveis, os parâmetros e as restrições existentes são discutidos. Por fim, são propostas duas variações do modelo, que utilizam funções objetivo para calcular o risco da carteira de acordo com metodologias diferentes.

No Capítulo 5, são realizados diversos testes e análises para a validação do modelo. São detalhados os ativos e derivativos utilizados, a série histórica de dados e todos os parâmetros adotados. Os resultados das duas variações do modelo são apresentados e é realizada uma extensa análise de sensibilidade. Por fim são apresentados os resultados dos testes seqüenciais, que tentam simular o mais fielmente possível a aplicação prática do modelo por um investidor.

Por fim, o Capítulo 6 apresenta a conclusão do trabalho desenvolvido, assim como comentários finais acerca do problema e recomendações para trabalhos futuros.

Nos Anexos estão disponíveis com maior detalhe os resultados da análise de sensibilidade a diversos parâmetros e os conceitos da metodologia EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*) utilizados.

CONCEITOS GERAIS

2 Conceitos Gerais

Serão apresentados neste capítulo alguns conceitos de finanças que são fundamentais para o entendimento do trabalho desenvolvido. Além de conceitos gerais sobre o tema de investimentos, também serão abordados os produtos disponíveis no Mercado Brasileiro a serem utilizados nos estudos posteriores.

2.1 Visão Geral sobre Investimentos

Nesta seção o conceito de investimento será definido, os diferentes tipos de investimento existentes serão delineados, e a problemática da criação de um portfolio de investimentos será explicada em linhas gerais. Por fim, serão explicados quais são as categorias em que os participantes dos mercados são normalmente classificados.

2.1.1 Conceito de Investimento

De acordo com BODIE (2000), um investimento é o comprometimento atual de dinheiro ou de outros recursos na expectativa de colher benefícios futuros, ou, em outras palavras, é sacrificar algo de valor agora, na expectativa de se beneficiar deste sacrifício depois.

Neste trabalho são estudados os investimentos realizados em ativos financeiros, que diferem substancialmente de ativos reais como máquinas, equipamentos, fábricas, etc. De forma geral, pode-se afirmar que os ativos financeiros são geralmente papéis ou registros eletrônicos que garantem aos investidores direitos sobre ativos reais ou sobre a renda gerada pelos mesmos. O dinheiro captado através dos ativos financeiros pode ser utilizado pelas empresas emissoras dos títulos para financiar suas atividades, e, portanto, para produzir renda. Logo, o retorno pago ao investidor deriva, indiretamente, da renda que foi gerada por um ativo real.

2.1.2 Tipos de Investimento

Há diversos tipos de ativos financeiros, que normalmente podem ser classificados em três categorias:

Títulos de Renda Fixa: são ativos financeiros cujo fluxo de recebimentos é constante, ou cujo fluxo de recebimentos é determinado de uma forma fixa. Esses recebimentos podem estar relacionados a, por exemplo, índices de inflação ou taxas de juros do mercado. É feita também uma classificação dos títulos de renda fixa entre o mercado monetário, formado por títulos de alta liquidez e baixo risco, e o mercado de capitais, formado por títulos de prazo mais longo e diferentes níveis de riscos. Há uma enorme de variedade de títulos de renda fixa no mercado, entre eles:

-Notas e Títulos do Governo

-Certificado de Depósito Bancário (CDB)

-Letras de câmbio

-Letras hipotecárias

-Debêntures

Não é objetivo deste trabalho explicitar os detalhes que diferenciam os diferentes títulos de renda fixa e que determinam a forma como os mesmos são precificados. Essas informações podem ser obtidas em manuais de precificação e marcação à mercado, como o "Manual de Precificação de Títulos Públicos", disponibilizado pelo Ministério da Fazenda na Internet através do website: (http://www.tesouro.fazenda.gov.br/tesouro_direto/download/precificacao.pdf).

Mercado de Renda Variável – Ações: de acordo com a definição de BODIE (2000), as ações representam uma participação na propriedade em uma corporação. As ações podem apresentar direitos e deveres adicionais diferentes, de acordo com a sua classificação: ordinárias, preferenciais, nominativas, etc. O valor de uma ação está diretamente relacionado com o valor do patrimônio líquido da corporação que emitiu às ações, ou seja, depende diretamente do sucesso da empresa e de seus ativos reais. Portanto, as ações geralmente representam investimentos com maior risco do que os títulos de renda fixa.

Derivativos: segundo HULL (2005), derivativos são instrumentos cujo preço depende ou é derivado do preço do ativo subjacente. São acordos realizados entre duas partes onde os pagamentos a serem feitos são baseados no desempenho de alguma outra referência de nível preestabelecida. Embora os derivativos possam ser utilizados para especulação e arbitragem, geralmente as empresas remetem-se a eles quando necessitam proteger-se, seja de oscilações de taxas de juros, de taxas de câmbios ou de outros riscos. Os derivativos são normalmente negociados em bolsas específicas, como é o caso da BMF – Bolsa de Mercadorias e Futuros, em São Paulo. Os tipos mais comuns de ativos financeiros da classe de derivativos são:

- *Contratos futuros*: são acordos para comprar ou vender um ativo em determinada data no futuro a um preço previamente estabelecido.

- *Contratos a termo*: são contratos muito semelhantes aos contratos futuros, mas diferenciam-se na forma em que a liquidação financeira é realizada.

- *Opções*: as opções garantem ao seu comprador o direito, mas não a obrigação, de comprar ou vender um ativo em determinada data no futuro a um preço previamente estabelecido. Explicações adicionais na próxima seção (2.1.3).

- *Swaps*: são acordos entre duas partes para trocar fluxo de caixa no futuro, definindo-se as datas em que os fluxos de caixa serão pagos e de que forma serão calculados.

2.1.3 Opções

Opções são uma classe de instrumentos financeiros derivativos. As opções concedem ao seu detentor o direito de fazer algo, mas não a obrigação. Há dois tipos de opções: as opções de compra (*calls*) e as opções de venda (*puts*).

Segundo FIGUEIREDO (2005), uma opção de compra dá ao seu titular o direto de comprar um ativo (o ativo-objeto da opção), em uma determinada data, pelo preço de exercício da opção. O titular é agente econômico que comprou a opção, pagando um determinado valor, também conhecido como prêmio. A contraparte do titular é conhecida como *lançador*, que é o agente econômico que vendeu a opção, assumindo a obrigação de vender o ativo subjacente caso o titular da opção exerça seu direito.

Já uma opção de venda (*put*) dá ao seu titular o direito de vender um ativo (o ativo-objeto da opção), em uma determinada data, pelo preço de exercício da opção. O titular é o agente econômico que comprou a opção, pagando um determinado valor. Já o *lançado* é o agente econômico que vendeu a opção, assumindo a obrigação de comprar o ativo subjacente caso o titular da opção exerça seu direito.

Há dois tipos distintos de opções: as opções americanas e as opções européias. As opções americanas podem ser exercidas a qualquer momento até a sua data de vencimento, ou seja, o titular pode exercer seu direito a qualquer momento. Já as opções européias só podem ser exercidas na sua data de vencimento. Neste trabalho utilizamos apenas as opções européias.

O preço de uma opção varia com diversos fatores, entre eles: o preço da ação subjacente, o preço de exercício da opção, o tempo até o vencimento da opção, a volatilidade da ação subjacente, o tipo da opção, etc. O apreçamento de opções em geral não é simples, representando um problema à parte que será discutido posteriormente neste trabalho, seção "Apreçamento de Opções" (veja página 49).

Na sua data de vencimento, a valor da opção é determinado apenas por dois fatores: o seu preço de exercício (E) e a cotação à vista do ativo (S). Um titular de uma opção de compra (*call*) somente exercerá a opção caso a cotação à vista do ativo seja superior ao preço de exercício, pois, neste caso, ele pode comprar este ativo do *lançador* e, em seguida, vender este ativo no mercado, realizando como ganho a diferença entre o preço de exercício e o valor de mercado. Ou seja, o valor de uma *call* na sua data de vencimento é definido por:

$$\max\{(S - E);0\}$$

onde: $E =$ Preço de exercício da *call*

$S =$ Cotação do ativo objeto

Analogamente, um titular de uma opção de venda (*put*) somente exercerá a opção caso a cotação à vista do ativo seja inferior ao preço de exercício, pois, neste caso, o *lançador* terá que comprar o ativo à um preço superior ao de mercado, gerando como ganho para o titular a diferença entre o valor de exercício e o valor de mercado. Ou seja, o valor de uma *put* na sua data de vencimento é definido por:

$$\max\{(E - S);0\}$$

onde: $E =$ Preço de exercício da *put*

$S =$ Cotação do ativo objeto

O resultado financeiro para quem compra uma opção é simplesmente a diferença entre o valor na sua data de exercício (também conhecido por *payoff*) e o preço pago pela opção (prêmio). Já para o *lançador* é justamente o oposto, uma vez que ele recebe o prêmio da opção mas tem uma perda caso a opção seja exercida. Desta forma o resultado de uma opção em função da cotação do ativo objeto pode ser representado pelos seguintes gráficos:

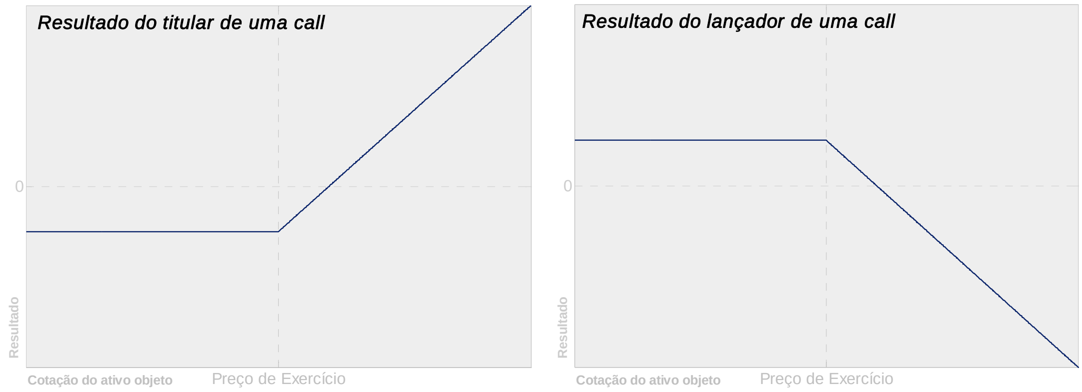


Figura 2-1: (a) Posição comprada em uma *call*, (b) Posição vendida em uma *call*.

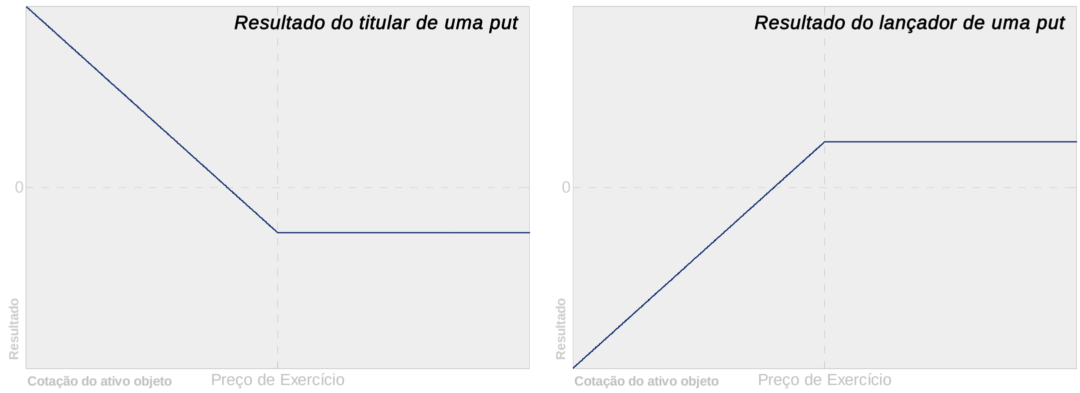


Figura 2-2: (a) Posição comprada em uma *put*, (b) Posição vendida em uma *put*.

É possível criar diferentes estratégias a partir da combinação de opções. Entre as estratégias mais conhecidas, pode-se citar: trava de alta, trava de baixa, *butterfly*, *condor*, *strips*, *straps*, *straddles* e *strangles*. Há muitos modos pelos quais opções podem ser combinadas a fim de produzir uma função de resultado que satisfaça as necessidades do investidor.

2.1.4 Carteiras de Investimentos / Portfolios

O *portfolio* ou carteira de investimentos é o termo utilizado para designar a coleção de ativos de investimento que uma entidade, seja uma pessoa física ou uma instituição, possui em um determinado momento. É importante ressaltar a relação entre a carteira de investimentos e o tempo, uma vez que os ativos que compõem a carteira e suas respectivas quantidades variam. Desta mesma forma, o valor total da carteira de investimentos varia ao longo do tempo, como conseqüência de diversas situações:

- Os preços dos ativos que compõem a carteira oscilam;
- O investidor aplica fundos adicionais, aumentando o capital investido;
- O investidor vende ativos para diminuir o tamanho da carteira.

O processo de composição de carteiras de investimentos envolve dois tipos de decisões: a alocação de ativos e a seleção de ativos. O primeiro refere-se a decisões sobre as escolhas entre as diferenças classes de ativos, enquanto que o segundo é composto pelas escolhas de quais ativos específicos serão comprados em cada classe. Desta forma, um investidor primeiro decidirá como alocar seu capital dentre diferentes mercados (por exemplo: 30% em renda fixa e 70% em renda variável), para depois definir quais ativos específicos serão comprados (por exemplo: 35% em ações preferenciais da Petrobrás e 35% em ações ordinárias da Vale do Rio Doce).

2.1.5 Os Participantes do mercado

No mercado há diferentes agentes econômicos, cada qual com seus objetivos e comportamento específicos. De acordo com FIGUEIREDO (2005), eles podem ser classificados em três categorias:

Hedgers: operam com os ativos de investimento com o objetivo de se protegerem contra riscos de preços, que podem oscilam devido a diversos fatores, como a variação no câmbio das moedas e oscilação de taxas de juros.

Especuladores: apostam na tendência. Este tipo de agente econômico busca realizar lucro comprando e vendendo determinados ativos, de acordo com a sua crença que determinado preço irá subir ou descer. Os especuladores são importantes ao mercado, pois sua participação contribui para aumentar a liquidez dos mercados.

Arbitradores: montam operações em que obtém ganho sem risco, a partir da constatação de ineficiências do mercado, representadas por distorções nos preços de determinados ativos.

2.2 Teoria Moderna de Carteiras

Nesta seção, serão apresentados os conceitos básicos que compõem a Teoria Moderna de Carteiras: o modelo clássico de Markowitz, o fenômeno da diversificação e o conceito de fronteira eficiente.

2.2.1 Introdução

A Teoria Moderna sobre a Carteira (TMC), ou *Modern Portfolio Theory*, foi introduzida em 1952, com a publicação de um *paper* de Harry Markowitz. Antes do trabalho de MARKOWITZ (1952), os investidores dedicavam-se principalmente à análise dos retornos e riscos individuais dos ativos que iriam compor suas carteiras. Dessa forma os investidores se preocupavam apenas em identificar aqueles ativos que apresentassem o melhor retorno possível com o menor risco, e então compor suas carteiras com eles. Através desse raciocínio, os investidores poderiam acabar compondo suas carteiras com, por exemplo, ações de empresas de só um determinado setor. Intuitivamente sabe-se que essa não é a melhor estratégia, porque se ocorresse algum problema que afetasse todo o setor, todas as ações sofreriam quedas conjuntamente, representando uma grande perda para o investidor.

Essa intuição foi formalizada por MARKOWITZ (1952), que, através da técnica da diversificação, mostrou que o foco do investidor deve ser a análise da carteira de investimentos como um todo, e não ativos individuais.

A diversificação, o modelo de Média-Variância e a fronteira eficiente são alguns dos conceitos básicos que compõem a Teoria Moderna sobre as Carteiras.

2.2.2 O Modelo Média-Variância (MV)

O modelo clássico de MARKOWITZ (1952), chamado de modelo Média-Variância, foi desenvolvido a partir das expressões para o cálculo do retorno esperado e da variância de uma carteira de ativos:

$$R_p = \sum_i w_i \cdot R_i \tag{2.1}$$

$$\sigma_p^2 = \sum_i \sum_j w_i \cdot w_j \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \rho_{ij} \tag{2.2}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} \tag{2.3}$$

$$\sum_i w_i = 1 \tag{2.4}$$

$$w_i \geq 0, \forall i \tag{2.5}$$

Onde:

R_p : Retorno do *Portfolio*

R_i : Retorno do Ativo *i*

w_i : Porcentagem do *Portfolio* alocada ao Ativo *i*

σ_p^2 : Variância do *Portfolio*

σ_i : Desvio-padrão do Ativo *i*

ρ_{ij} : Correlação entre o Ativo *i* e o Ativo *j*

Percebe-se, portanto, que a carteira de investimento é composta por *n* ativos, sendo que w_i representa a parcela do valor total da carteira alocada a um ativo específico. Neste modelo não são permitidas vendas à descoberto, de tal forma que essa parcela não pode assumir valores negativos (2.4) e a soma de todas as parcelas tem que ser a unidade (2.3), o que pode ser descrito pelas equações.

De acordo com estas equações, nota-se que o retorno esperado de uma carteira será a média dos retornos individuais dos ativos, ponderados pelos seus respectivos pesos na carteira, ou seja, pela porcentagem do valor da carteira alocada à cada ativo. Conclui-se, portanto, que o retorno da carteira varia linearmente com os pesos de cada ativo.

Já a variância do *portfolio* é calculada a partir do somatório da combinação linear de todos os pares de ativos que compõem a carteira. Esse somatório é ponderado pelos pesos e desvios-padrões dos ativos individuais, e pela correlação existente entre cada par de ativos. Percebe-se, portanto, que a relação entre variância da carteira e variância dos ativos não é linear como no caso do retorno.

Por fim, o desvio-padrão da carteira é calculado a partir da raiz quadrada de sua variância, analogamente a qualquer ativo individual.

2.2.3 A Fronteira Eficiente

Considere que se busca criar uma carteira de investimento a partir de dois ativos de interesse (A1 e A2), que apresentam os seguintes dados, obtidos a partir de seus retornos históricos:

Ativo	Retorno Médio	Desvio-Padrão
A1	35%	25%
A2	12%	11%

Tabela 2-1 : Exemplo com dois ativos

A partir desses dados, se poderiam propor nove carteiras arbitrárias com diferentes composições desses ativos, descritas na tabela abaixo. Os valores do retorno esperado e do desvio-padrão de cada carteira foram calculados através das equações da seção anterior, considerando-se uma correlação de 0,5 entre os ativos.

Carteira	Peso A1	Peso A2	Retorno	Desvio-Padrão
C1	10%	90%	14%	11%
C2	20%	80%	17%	12%
C3	30%	70%	19%	13%
C4	40%	60%	21%	14%
C5	50%	50%	24%	16%
C6	60%	40%	26%	18%
C7	70%	30%	28%	19%
C8	80%	20%	30%	21%
C9	90%	10%	33%	23%

Tabela 2-2 : Carteiras compostas de dois ativos

A forma mais usual e pratica de se visualizar o retorno e o risco de diferentes carteiras é um gráfico de dispersão, com o nível de risco no eixo horizontal e o nível de retorno no eixo vertical:

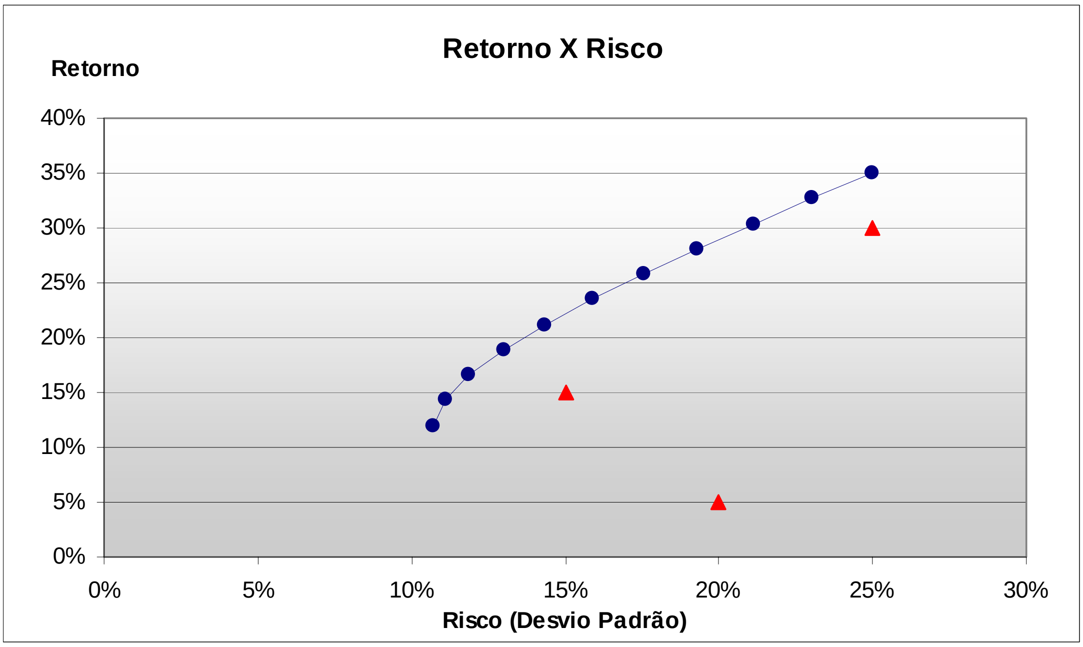


Figura 2-3 : Retorno X Risco das carteiras (correlação=0,5)

Cada ponto azul mostrado no gráfico representa uma carteira diferente, e os pontos inicial e final da linha representam os ativos individuais A2 e A1, respectivamente. Os pontos vermelhos representam carteiras adicionais disponíveis, formadas por outros ativos.

Assumindo-se que o investidor é racional, percebe-se que, para um dado nível de risco, o investidor escolherá aquela carteira com maior retorno. E, analogamente, para um dado nível de retorno, o investidor escolherá aquela com menor nível de risco. Dessa forma, só faz sentido o investidor escolher carteiras que estejam na fronteira superior demarcada pela linha azul. Essa fronteira é denominada fronteira eficiente, e é composta por todas as "carteiras ótimas".

2.2.4 O Fenômeno da Diversificação

De acordo com a correlação entre os ativos, o desvio-padrão de uma carteira pode aumentar ou diminuir:

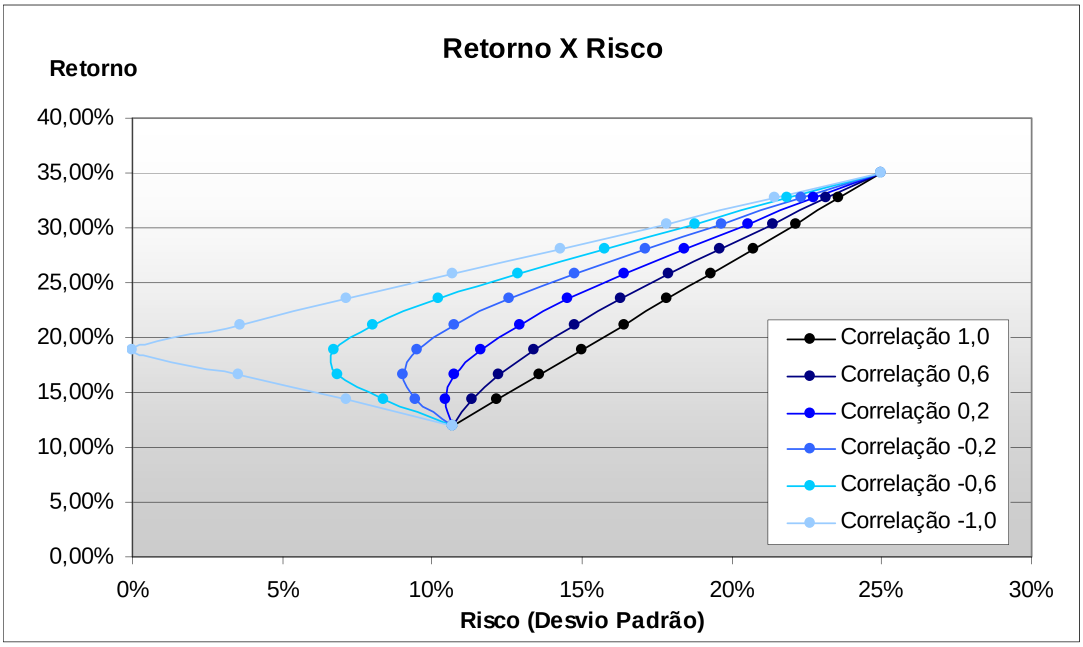


Figura 2-4 : Retorno X Risco das carteiras com diferentes correlações

Esse efeito observado é causado pela diversificação: quando formamos carteiras de investimento compostas por ativos cuja correlação é menor que 1, a risco da carteira tende a ser menor do que uma média ponderada dos riscos dos ativos individuais. É relevante ressaltar que a correlação é uma medida de -1 a 1 que mensura a relação entre o comportamento de dois ativos: quando a correlação é alta, há indicação de que os preços dos dois ativos movimentam-se juntos, ou seja, quando um sobre, o outro também sabe. Por outro lado, quando a correlação é negativa, há indicação que o preço de um ativo sobe quando o do outro desce. Quando há ativos com essa característica compondo a carteira de investimentos, pode haver boas oportunidades para se obterem altos retornos com baixo níveis de risco.

Em um caso extremo, quando a correlação é perfeitamente negativa (-1), seria possível construir uma carteira que apresenta um retorno significante, mas risco nulo. No entanto observa-se que raramente são encontrados no mercado ativos com correlação altamente negativa.

CONCEITOS DE MODELAGEM MATEMÁTICA

3 Conceitos de Modelagem Matemática

Nesta seção as técnicas utilizadas para a medição do risco e para a geração de cenários são estudadas. Conceituam-se as medidas de risco empregadas e descreve-se a evolução dos preços dos ativos, pela aplicação do método da Simulação de Monte Carlo. Por fim, o método de apreçamento de opções é apresentado.

3.1 Medidas de Risco

A gestão dos riscos financeiros aos quais o negócio de uma empresa está exposto é uma tarefa fundamental para que qualquer tipo de instituição possa ter sucesso e perpetuar ao longo do tempo. Segundo LEWIS (2003), os riscos financeiros são usualmente classificados em risco de crédito, risco operacional e risco de mercado. Este trabalho pretende estudar apenas o risco de mercado, definido pela ameaça à condição das instituições financeiras resultante de movimentos adversos no valor ou volatilidade dos preços de mercado, taxas de juros, taxas de câmbio e commodities.

Há uma grande gama de medidas de risco existentes, representando um tema em constante pesquisa e desenvolvimento. De acordo com a finalidade, há diferentes medidas de risco que podem ser apropriadas. A seguir estão descritas as medidas de risco que serão adotadas neste trabalho.

3.1.1 Desvio-padrão e Variância

Assumindo-se que uma variável estudada segue uma distribuição normal de probabilidades, a medida de risco natural é o desvio-padrão ou a variância. A variância de uma variável aleatória é uma medida de dispersão de sua função de densidade de probabilidade.

Se X é uma variável aleatória, a variância é descrita como:

$\sigma_X^2 = \sum (x - \mu_X)^2 \cdot p(x)$, se X é uma variável discreta.

$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot f(x)dx$, se X é uma variável contínua.

onde:

$\mu_X =$ Média de X

$p(x) =$ Probabilidade de x

$f(x) =$ Função densidade de probabilidade de x

A variância é uma medida sempre positiva, mensurada em unidades quadráticas de X. A partir da variância calcula-se o desvio padrão, que, assim como a variância, é uma medida de dispersão de X:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

onde:

$\sigma_X =$ Desvio padrão de X

$\sigma_X^2 =$ Variância de X

O desvio padrão é mensurado nas mesmas unidades de X, e é também utilizado para representar a volatilidade de um ativo. Por mais que haja uma associação entre os termos desvio padrão e volatilidade, é importante ressaltar que este último tem um sentindo maior, significando o nível de risco de um ativo, não obrigatoriamente mensurado pelo desvio padrão.

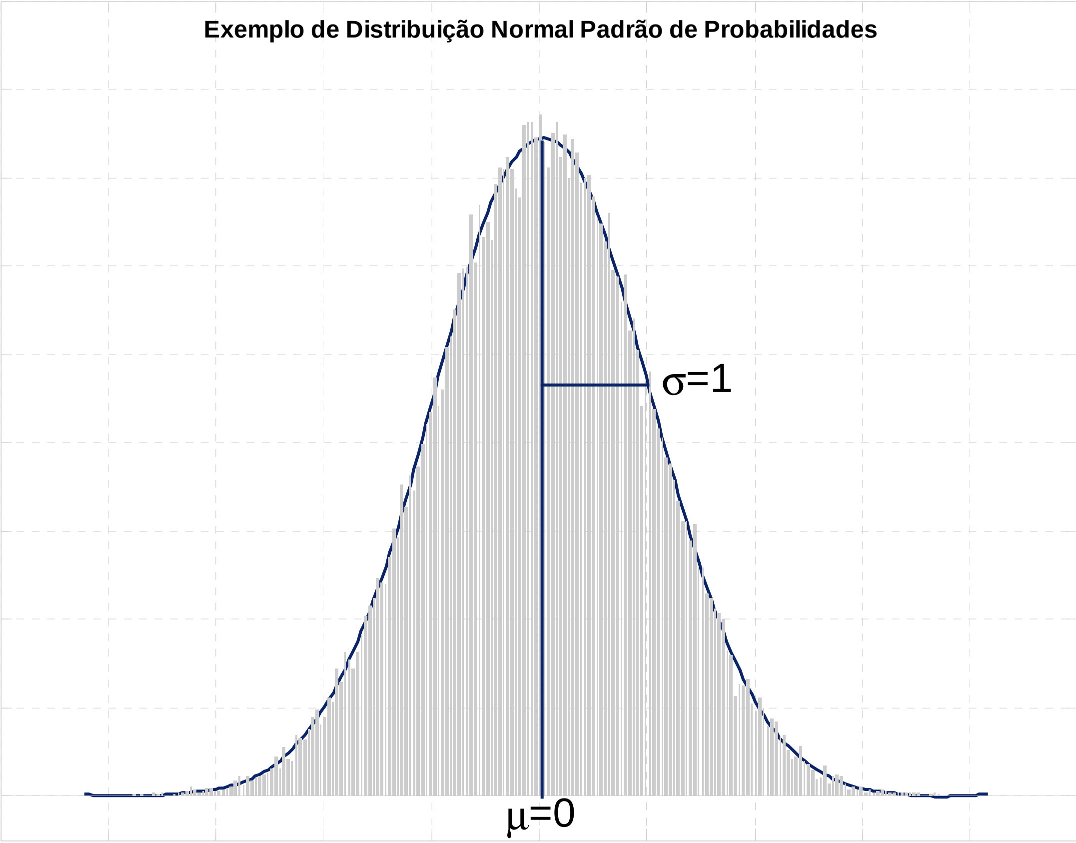


Figura 3-1: Distribuição normal padrão (média zero, desvio padrão unitária)

Quando se estuda o comportamento de ativos financeiros e de carteiras de investimentos formadas por estes, o uso do desvio padrão ou da variância como medida de risco só é adequado se adotamos a hipótese de que os retornos seguem uma distribuição normal de probabilidades. Sabe-se que as opções são instrumentos com *payoffs* altamente assimétricos, de tal forma que a hipótese de distribuição normal de retornos é violada quando inserimos estes derivativos na carteira de investimento. A literatura recente (veja JUDICE *et al*. (2003)) tem buscado diferentes medidas de risco a fim de reduzir as deficiências das medidas tradicionais como a variância e o desvio médio absoluto (*MAD*). O Valor em Risco (VaR) e o Valor em Risco Condicional (CVaR), descritos a seguir, são duas medidas frequentemente estudadas com este objetivo.

3.1.2 Valor em Risco (VaR)

Segundo HULL (2005) o VaR de uma carteira de investimentos é definido como a perda máxima que uma carteira pode sofrer, em um determinado horizonte de investimento e com um certo nível de confiança α%. Trata-se, portanto, de uma métrica baseada em um percentil da distribuição de retornos da carteira.

Se assumirmos que uma dada variável aleatória X representa os possíveis retornos de uma carteira de investimento, então o VaR, segundo ROCKAFELLAR *et al.* (2002) pode ser definido como:

$$VaR(X,\alpha) = \{x \in \Re \mid \int_x^\infty f(x)dx = \alpha\}$$

onde: $\alpha =$ Nível de confiança

$f(x) =$ Função densidade de probabilidade de x

Ou seja, o Valor em Risco para um dado nível de confiança representa um percentual da distribuição de retornos da carteira em um determinado horizonte de investimento, conforme representado pela figura abaixo:

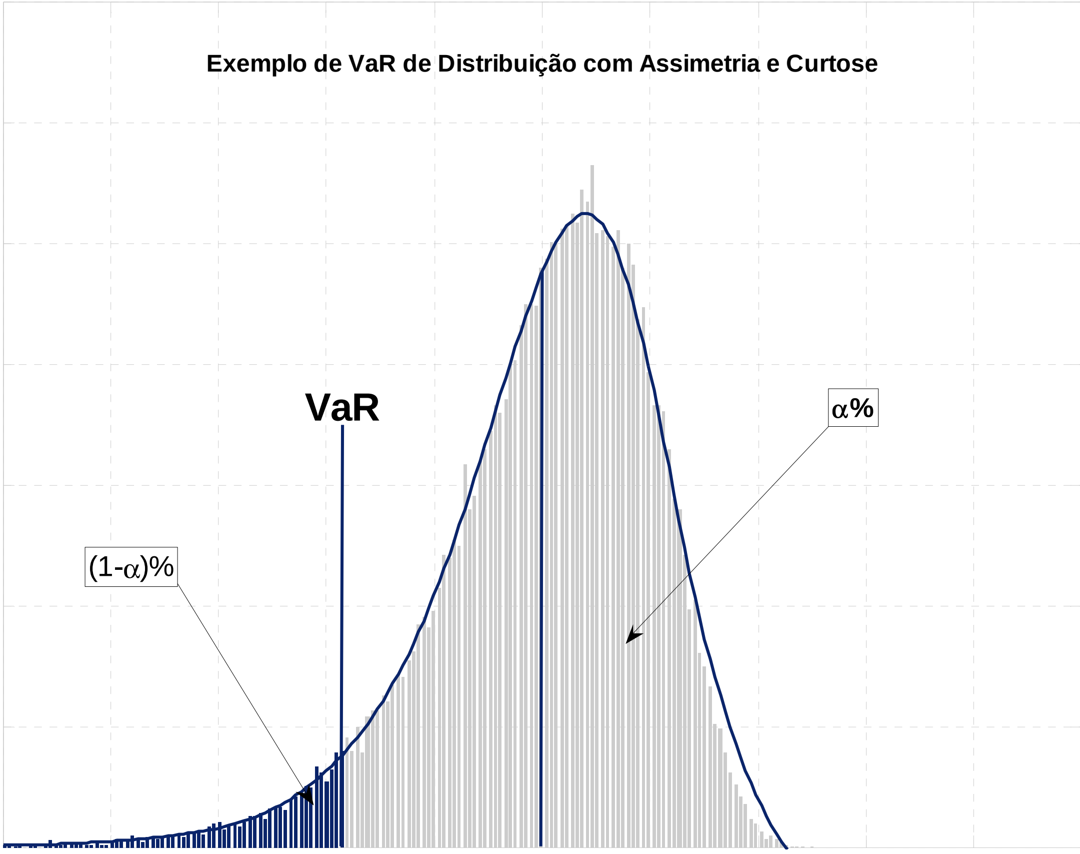


Figura 3-2: Cálculo do VaR (Valor em Risco) de uma distribuição

Há diversas formas de se calcular o VaR de uma carteira de investimentos. As mais usuais são através do método paramétrico e do método da série histórica.

No *método paramétrico*, é adotada a hipótese que os retornos individuais de todos os ativos seguem uma distribuição normal de probabilidades. Logo, sendo o retorno total da carteira uma combinação linear dos ativos, assume-se que os retornos da carteira também sejam normalmente distribuídos. Neste caso, o cálculo do VaR deriva diretamente dos parâmetros da média e distribuição da variável aleatória X:

$$VaR(X,\alpha) = \mu_X - z_\alpha \cdot \sigma_X \qquad \text{com} \qquad F(z_\alpha) = 1 - \alpha$$

onde: $F(z_\alpha) =$ Função de densidade de probabilidade acumulada de uma distribuição normal padrão

No entanto, conforme explicado anteriormente, a hipótese de que os retornos seguem uma distribuição normal é muito forte, e é violada quando estão presentes na carteira instrumentos com retornos assimétricos, como é o caso das opções.

No *método da série histórica*, não são adotadas quaisquer hipóteses sobre a distribuição de probabilidades dos retornos dos ativos, e o VaR é calculado diretamente como o percentil de uma série de retornos das carteiras. Ou seja, os retornos das carteiras serão ordenados crescentemente, e, para uma série de N valores dos retornos da carteira, o VaR será o (α.N)-iésimo elemento da distribuição. Neste método, podem ser utilizadas séries históricas de retornos passadas dos ativos, ou podem ser geradas séries de possíveis valores futuros dos retornos através da técnica da Simulação de Monte Carlo, descrita na seção 3.2.1.

O VaR foi desenvolvido pelo banco J.P. Morgan na década de 90, a fim de suprir a necessidade de uma metodologia para cálculo do risco de mercado que permitisse mensurar, de forma eficiente e prática, a extensão de possíveis perdas que uma instituição poderia sofrer em uma carteira.

Embora o VaR seja adequado quando se trata de carteiras com derivativos, e que, portanto, apresentam distribuições de retornos assimétricas, o VaR não fornece informação alguma sobre a extensão da cauda da distribuição:

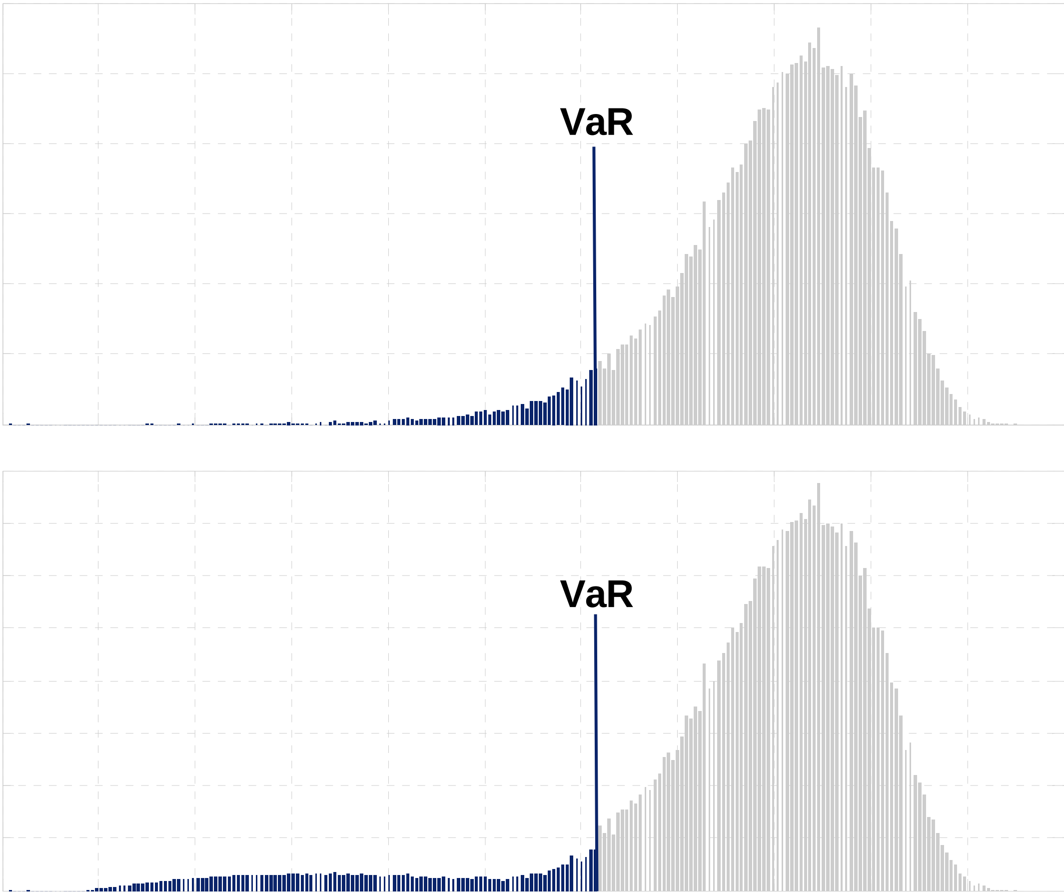


Figura 3-3: VaR de duas distribuições de probabilidades distintas

Desta forma, quando temos distribuições com cauda pesada, duas carteiras diferentes podem apresentar o mesmo VaR mas representam perdas potenciais muito maiores, resultando em resultados catastróficos. Uma medida de risco que é robusta frente a este problema é o Valor em Risco Condicional (CVaR).

3.1.3 Valor em Risco Condicional (CVaR)

Recentemente autores consagrados como ROCKAFELLAR *et al.* (2002) têm analisado medidas de risco que tratam da cauda da distribuição. Usualmente analisa-se o Valor em Risco Condicional (CVaR), uma medida de risco definida como a expectativa de perdas excedentes ao VaR à um nível de confiança dado. Ou seja, enquanto o VaR indica que, com probabilidade de α% as perdas da carteira (representadas pela variável aleatória X) não excederão uma quantia VaR(X,α), o CVaR indica que, considerando-se que o pior evento, cuja probabilidade de ocorrer é (1-α%), ocorreu, a perda média da carteira esperada é de CVaR(X,α).

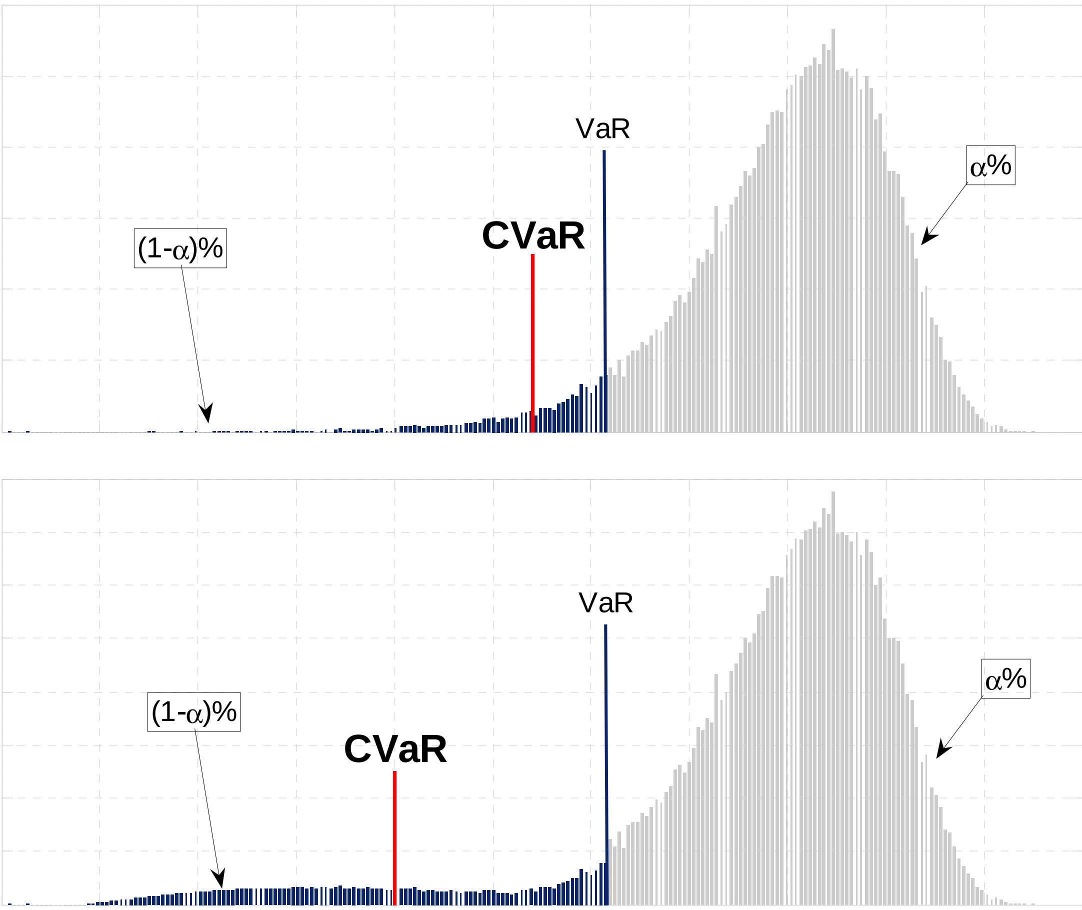


Figura 3-4: Comparação entre o CVaR e o VaR de duas distribuições de probabilidades

Uma das formas de cálculo do CVaR é através do método da série histórica ou Simulação de Monte Carlo: ordena-se os valores da série de retornos da carteira e calcula-se uma média entre os valores contidos entre o menor elemento e o (α.N)-iésimo elemento (o VaR). Logo o CVaR é definido como a média dos retornos da carteira contidos no (1-α%) percentil.

O CVaR é uma medida de risco que quantifica o retorno esperado da carteira em um baixo percentil da distribuição de probabilidades, de tal forma que pode-se controlar a cauda esquerda da distribuição de retornos, sendo adequada, portanto, para distribuição de retornos com assimetria e/ou curtose.

Além disso, o CVaR, ao contrário do VaR, exibe propriedades que o classificam como uma medida de risco *coerente* no sentido de ARTZNER *et al.* (1999): *"Coerência: uma medida de risco, que satisfaça os axiomas de invariância de translação, subaditividade, homogeneidade positiva e monotonicidade, é determinada coerente"*.

3.2 Geração de Cenários

Para um gestor alocar sua carteira de forma ótima as informações sobre os preços e retornos dos ativos são necessárias. No entanto, dado que a evolução dos preços dos ativos pode ser vista como um passeio aleatório, o gestor precisa modelar as incertezas aos quais ele está sujeito. O objetivo é projetar os valores dos ativos até um dado horizonte de investimento, de tal forma que sejam simulados diferentes caminhos que os preços dos ativos poderiam traçar ao longo do tempo. Assume-se, portanto, que o futuro é discretizado em uma grande gama de possibilidades, e então o risco ao qual o investidor está exposto pode ser calculado pela variação do valor total da carteira de investimento de acordo com os diferentes cenários simulados.

Uma forma de realizar a tarefa de geração de cenários para os preços futuros dos ativos é através da Simulação de Monte Carlo.

3.2.1 Simulação de Monte Carlo

Segundo HULL (2005), o movimento de preços de uma ação pode ser analisado como um processo de Wiener, um tipo específico de processo estocástico muito importante na Matemática. O processo de Wiener apresenta a propriedade de Markov: a distribuição condicional de probabilidades depende apenas do estado atual, sendo independente do caminho traçado até o momento atual. Desta forma, quando modelamos o preço de uma ação como um processo de Wiener, toda a informação relevante para o movimento futuro do preço está concentrada no valor atual da ação.

Para que sejam geradas as trajetórias dos preços futuros das ações até a data de horizonte, são efetuadas várias simulações, considerando-se que a equação que rege o movimento dos preços é a seguinte:

$$\frac{dS}{S} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{dt}$$

$$\varepsilon \sim N(0,1)$$

onde:

$S =$ Preço da ação

$\mu =$ Taxa de retorno esperada

$\sigma =$ Volatilidade da ação

$\varepsilon =$ Variável aleatória normal padrão

Está equação corresponde ao movimento browniano do preço de uma ação, considerando as simplificações de taxa de retorno e volatilidade constante ao longo do tempo. Como pode ser observado, o preço de uma ação é modelado como um passeio aleatório, onde o preço está sujeito a choques.

No entanto, a equação apresentada acima se aplica apenas ao comportamento de uma variável. No problema estudado, deseja-se gerar cenários para os valores de diferentes ações escolhidas. Neste caso a simulação se torna mais robusta quando consideramos que o movimento de preços dos ativos são correlacionados, como de fato ocorre na realidade. Esta interdependência entre os preços e retornos dos ativos é representada pela matriz de variância-covariância (Σ). Neste trabalho, calcula-se a matriz de variância-covariância através da metodologia EWMA – *Exponentially weighted moving average*, descrita no Anexo A.

Quando tratamos então de uma distribuição multivariada de preços de ativos, temos que gerar choques multivariados, ou seja, não representados por uma série de variáveis aleatórias normais padrão independentes, mas sim extraídas a partir de uma distribuição multivariada, que representa a correlação existente entre os movimentos das diferentes variáveis.

De acordo com LEWIS (2003), o método numérico normalmente adotado para gerar essas variáveis aleatórias normais multivariadas utiliza a decomposição de Cholesky:

$$\sum = T \cdot T'$$

onde:

$\Sigma =$ Matriz de covariância dos ativos

$T =$ Fator de Cholesky

Para um conjunto de *k* ativos, o processo de simulação é iniciado pela geração de *k* séries de números aleatórios com distribuição normal de média zero e desvio-padrão unitário. A matriz de variância-covariância é então decomposta, através da fatoração de Cholesky. O fator calculado T, uma matriz triangular inferior, é então utilizado para multiplicar a matriz formada pelos vetores independentes de números pseudo-aleatórios gerados, de forma que o resultado sejam choques correlacionados entre si:

$$\varepsilon_K = T \cdot Z$$

$$\varepsilon_K \sim N_k(0, \Sigma)$$

onde:

$\varepsilon_K =$ Variáveis normais multivariadas

$T =$ Fator de Cholesky

$k =$ Número de ativos

$Z =$ Matriz formada por *k* vetores de variáveis normais padrão indepentes (ε)

Aplicando-se esses choques para diversos períodos subseqüentes, com um grande número de simulações, é possível gerar uma seqüência de caminhos que o preço de um ativo pode seguir. A figura abaixo representa os cenários obtidos para o preço de uma ação, cujo valor inicial era R$ 107 e cujo movimento foi simulado para o próximo mês (21 dias úteis):

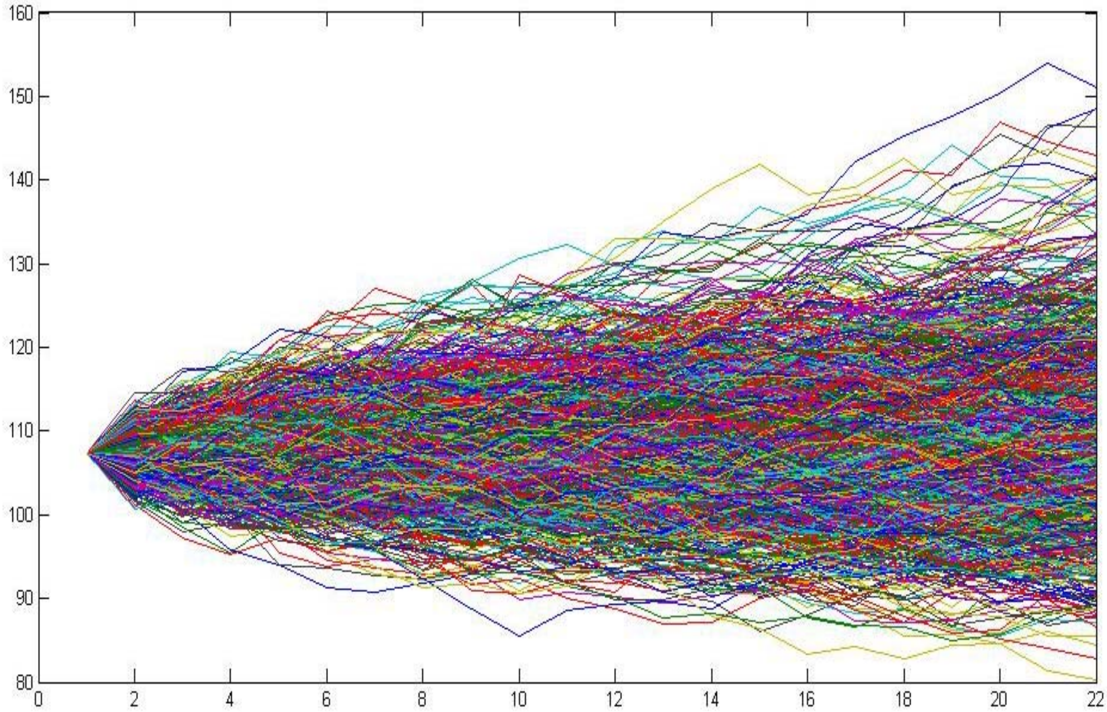


Figura 3-5: Cenários para o preço de uma ação obtidos por Simulação de Monte Carlo

Nos estudos realizados neste trabalho, a Simulação de Monte Carlo foi utilizada para gerar diferentes cenários para três ações analisadas. Foi adotada a hipótese de que as médias dos retornos individuais e a matriz de variância-covariância são constantes durante o horizonte de investimento analisado.

3.3 Apreçamento de Opções

Ao contrário das ações, as opções apresentam peculiaridades estruturais que não permitem que seja aplicada diretamente a metodologia de Simulação de Monte Carlo para determinar seus preços justos. Utiliza então um modelo de apreçamento para as opções, ou seja, primeiro são simulados os preços das ações das quais as opções derivam e então as preços das opções são calculadas em cada um dos instantes de tempo dos diferentes cenários gerados.

3.3.1 O modelo de Black-Scholes

Em 1973, Fischer Black e Myron Scholes propuseram um modelo para calcular o preço justo, livre de arbitragem, de opções e compra e venda. Este trabalho resultou em um Premio Nobel de Economia e em uma metodologia de apreçamento de opções que se tornou referência mundialmente.

As principais hipóteses adotadas pelo modelo de BLACK-SCHOLES (1973) são:

- O preço do ativo objeto da ação segue um movimento geométrico Browniano com média (μ) e volatilidade (σ) constante;
- Não há opções de arbitragem;
- Não há custos de transação;
- A venda a descoberto do ativo objeto é permitida;
- Não há custos de transação;
- Os ativos objetos são perfeitamente divisíveis;
- Existe uma taxa de juros livre de risco, que é constante.

No modelo para precificação de BLACK-SCHOLES (1973), o preço de uma opção é uma função de 5 variáveis – preço e a volatilidade do ativo-objeto, o preço de exercício da opção, o tempo até o vencimento da opção e a taxa de juros livre de risco – representada pela fórmula abaixo:

$$c = S \cdot N(d_1) - E \cdot e^{-rt} \cdot N(d_2) \qquad d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot t}{\sigma \cdot \sqrt{t}}$$

$$p = E \cdot e^{-rt} \cdot N(-d_2) - S \cdot N(-d_1) \qquad d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{t}$$

onde:

$c =$ Prêmio teórico da opção de compra (*call*)

$p =$ Prêmio teórico da opção de venda (*put*)

$S =$ Preço atual do ativo-objeto

$E =$ Preço de exercício

$r =$ Taxa de juros livre de risco

$t =$ Tempo para o vencimento da opção

$\sigma =$ Volatilidade do ativo-objeto

$N(x) =$ Função de probabilidade cumulativa de uma variável normal padronizada

Neste trabalho adotou-se este modelo descrito para o apreçamento das opções. Nos cálculos efetuados, assumiu-se que a taxa de juros nominal é constante até o vencimento, e representada pela taxa CDI de mercado. O tempo do vencimento da opção é igual ao período até o horizonte de investimento, uma vez que foi considerado que o vencimento das opções coincide com o horizonte.

A volatilidade de cada ação também foi considerada constante até o horizonte de investimento, e foi calculada a partir da variância, representada pela diagonal da matriz variância-covariância (Σ) calculada anteriormente.

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

4 Formulação Matemática

Neste capítulo descrevem-se a formulação de um modelo matemático para gestão de carteiras de investimentos. Após uma introdução que explicará as principais características do modelo, serão detalhados os principais parâmetros, variáveis e restrições. Duas funções objetivos distintas, uma que utiliza o CVaR como medida de risco, e outra que utiliza a variância, serão propostas.

4.1 Principais Características do Modelo

O problema que este modelo objetiva resolver é a de um investidor que, dentre um universo de i ativos, deve decidir sobre como alocar seu capital disponível, de tal forma a maximizar sua utilidade em uma data de horizonte T. Além dos ativos, o investidor também tem disponível opções de compra (*calls*) e de venda (*puts)* sobre os ativos, nas quais ele pode optar por comprar a fim de diminuir (*hedgear*) seus riscos.

Considera-se que, no momento inicial $T0$, o investidor dispõe apenas de um valor em caixa (h) e uma carteira inicial de ativos. Ou seja, assume-se que no instante adicional o investidor não dispõe de capital aplicado em derivativos.

Além disso, assume-se que as opções utilizadas vencem na data de horizonte analisada. Desta forma, caso a opção esteja no dinheiro ou dentro do dinheiro na data de horizonte, ela será exercida e gerará um *payoff*. Caso contrário, se ela estiver fora do dinheiro, a opção não será exercida.

O objetivo do modelo é satisfazer um nível mínimo de retorno médio e minimizar a medida de risco da carteira escolhida. São propostas duas variações do modelo: uma que utiliza o CVaR como medida de risco, e outra que utiliza a variância. Considera-se que o investidor fará uma decisão de alocação inicial e irá permanecer com a carteira desta forma até a data de horizonte, ou seja, rebalanceamentos da composição da carteira não são permitidos.

Embora a decisão sobre a alocação da carteira seja pontual e analisada apenas uma vez, é importante ressaltar que são considerados os movimentos dos preços dos ativos durante todo o período compreendido entre a data inicial e a data do horizonte. Ou seja, embora sejam relevantes apenas os preços iniciais e os preços no horizonte dos ativos, são geradas *S* trajetórias simuladas da distribuição multivariada composta pelos preços dos diferentes ativos. O objetivo deste procedimento de simulação dos preços das ações durante todo o período é representar robustamente as oscilações e o comportamento do mercado. É importante ressaltar que os cenários simulados são equiprováveis, ou seja, a probabilidade de ocorrência é a mesma para cada um deles.

O apreçamento das ações na data inicial será realizado seguindo o modelo de BLACK-SCHOLES (1973), que depende dos fatores: preço de exercício, preço do ativo, taxa livre de risco, volatilidade do ativo e tempo até o vencimento. A volatilidade dos ativos (das ações-objeto das opções) será calculada pelo método EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*) e considerada constante durante o período compreendido entre o instante inicial e o horizonte de investimento. Assim como é prática usual do mercado, será considerado que a taxa CDI representa a taxa livre de risco no mercado brasileiro. Também será assumido que essa taxa é constante durante o período de investimento. Desta forma, as opções poderão ter seus preços iniciais definidos pelos preços iniciais das ações e destes fatores aqui descritos. Em relação aos *payoffs* das opções na data de horizonte, eles serão função dos valores das ações no horizonte em cada cenário projetado pelas simulações, uma vez que os outros parâmetros são constantes para todos os cenários simulados.

4.2 Variáveis do Modelo

As seguintes variáveis serão utilizadas para indexação:

$I = \{1,2,..., i\}$: conjunto de ações disponíveis

$S = \{1,2,..., s\}$: conjunto de simulações realizadas

$C = \{1,2,..., c\}$: conjunto de *calls* disponíveis

$P = \{1,2..., p\}$: conjunto de *puts* disponíveis

Os seguintes parâmetros e variáveis determinísticas fazem parte do modelo:

h : capital disponível em caixa em *T0* (instante inicial)

w_i^0 : quantidade de ações *i* na carteira inicial

μ : nível mínimo de retorno médio aceitável

α : nível de confiança para o cálculo do CVAR

δ : custo de transação (em % do valor transacionado)

T : horizonte de investimento (em dias)

rf : taxa livre de risco (% aa)

π_i^0 : preço do ativo *i* em *T0* (instante inicial)

$blc(c, E_c)$: preço de uma *call* em *T0* (instante inicial) com preço de exercício *E* e cujo ativo objeto é a ação *c*.

$blp(p, E_p)$: preço de uma *put* em *T0* (instante inicial) com preço de exercício *E* e cujo ativo objeto é a ação *p*.

V^0 : valor total da carteira em *T0* (instante inicial)

As variáveis que dependem do cenário simulado são:

π_i^s : preço do ativo *i* na data de horizonte, no cenário *s*

V_s : valor total da carteira na data de horizonte, no cenário *s*

R_s : retorno obtido pela carteira até a data de horizonte, no cenário *s*

As decisões que o modelo objetiva determinar são representadas pelas seguintes variáveis de decisão:

b_i : quantidade de ações *i* compradas

s_i : quantidade de ações *i* vendidas

w_i^T : quantidade de ações *i* na carteira final

xc_c : quantidade de *calls c* compradas

xp_p : quantidade de *puts* p compradas

Por fim, a seguinte variável auxiliar é utilizada:

$\overline{R}$: retorno médio obtido dentre os cenários simulados

4.3 Restrições

As restrições do modelo são:

$$h + \sum_i s_i \cdot \pi_i^0 \cdot (1-\delta) = \sum_i b_i \cdot \pi_i^0 \cdot (1+\delta) + \sum_c xc_c \cdot blc(c, E_c) + \sum_p xp_p \cdot blp(p, E_p) \quad (4.1)$$

$$V^0 = \sum_i w_i^0 \cdot \pi_i^0 + h \quad (4.2)$$

$$V_s = \sum_i w_i^T \cdot \pi_i^s + \sum_c xc_c \cdot \max(\pi_c^s - E_c, 0) + \sum_p xp_p \cdot \max(E_p - \pi_p^s, 0), \forall s \in S \quad (4.3)$$

$$\sum_c xc_c \cdot blc(c, E_c) + \sum_p xp_p \cdot blp(p, E_p) \leq \sum_i w_i^T \cdot \pi_i^0, \forall i \in I \quad (4.4)$$

$$R_s = \frac{V_s}{V^o} - 1, \forall s \in S \quad (4.5)$$

$$\overline{R} = \sum_s \frac{1}{S} \cdot R_s \quad (4.6)$$

$$\overline{R} \geq \mu \quad (4.7)$$

$$w_i^T = w_i^0 + b_i - s_i, \forall i \in I \quad (4.11)$$

$$w_i^T \geq 0, \forall i \in I \quad (4.12)$$

$$b_i \geq 0, \forall i \in I \quad (4.13)$$

$$w_i^0 \geq s_i \geq 0, \forall i \in I \quad (4.14)$$

$$xc_c \geq 0, \forall c \in C \quad (4.15)$$

$$xp_p \geq 0, \forall p \in P \tag{4.16}$$

O balanço inicial é representado na restrição (4.1), que impõe que o capital disponível em caixa mais o gerado através de ativos que já estavam na carteira deve ser igual aos gastos com compras de ativos, *calls* e *puts*.

O cálculo do valor da carteira inicial é representado na restrição (4.2), pela soma do capital disponível em caixa (h) com o valor dos ativos no instante inicial. Já o valor da carteira final, no cenário s, é calculado pela restrição (4.3), sendo a soma dos valores dos ativos na data de horizonte mais os *payoffs* gerados pelas opções de compra e venda que o investidor comprou.

Na restrição (4.4) está-se limitando a exposição do investidor em ações: para cada ativo, o valor gasto nas compras de *calls* e *puts* deve ser menor ou igual ao valor do total daquele ativo. Desta forma se está garantindo que só será permitido o uso dos derivativos para *hedge* dos riscos, inibindo a especulação. É importante notar que, caso a decisão proposta pelo modelo seja de não investir nenhuma quantia em um determinado ativo, automaticamente as posições nas opções sobre este ativo serão forçadas para o valor zero.

O cálculo do retorno ao período da carteira, sob cada cenário s, é realizado através da restrição (4.5). Já na restrição (4.6) se impõe que o retorno médio seja a média ponderada dos retornos dos distintos cenários (que neste caso são assumidos como sendo equiprováveis). Este retorno médio deve satisfazer um nível mínimo estipulado pelo investidor, conforme representado na restrição (4.7).

O balanço de cada ativo é representado pela restrição (4.11): a quantidade de cada ativo na carteira final deve ser igual à quantidade inicial somada com a quantidade comprada e subtraída da quantidade vendida. A quantidade de ativos vendidos deve ser menor que a quantidade inicial que o investidor possui (restrição 4.14), de forma a não permitir vendas a descoberto.

Ao investidor também não é permitida a venda de opções, novamente restringindo-se a utilização de derivativos para *hedge* dos riscos de mercado. Essa restrição limita a exposição ao risco do investidor, uma vez que dessa forma ele apenas poderá comprar o direito de exercer as opções, o que poderá ser ou não exercido, mas nunca assumirá a obrigação de exercê-las (situação do lançador de opções). Esse limite imposto está representado nas restrições (4.15) e (4.16).

4.4 Função Objetivo

A função objetivo representa a medida de risco que se deseja minimizar. São propostas duas variações do modelo: uma que utiliza o CVaR como medida de risco, e outra que utiliza a variância. As duas funções objetivo estão descritas a seguir:

4.4.1 CVaR

O modelo proposto minimiza o nível de risco da carteira, mensurado pelo CVaR, ou seja, o valor esperado dos retornos abaixo do VaR. No entanto, temos primeiro que representar de forma linearizada o cálculo do CVaR da carteira.

Seja x o conjunto de decisões sobre a carteira, sendo portanto o conjunto que engloba todas as variáveis de decisão citadas na seção anterior. Para um conjunto de decisões x, podemos associar uma função de perda a cada cenário simulado:

$$L_s = f(x), \forall s \in S$$

onde: $L_s =$ Função de perda

$x =$ Conjunto de decisões tomadas

A probabilidade que a função de perda não exceda um nível especificado z é portanto igual a soma da probabilidade daquelas cenários cuja perda foi menor que z:

$$\psi(x, z) = \sum_{s | L_s \leq z} p_s$$

onde: $p_s =$ Probabilidade do cenário s ocorrer

Logo, podemos definir o VaR como o menor valor de z tal que a probabilidade de que a função de perda não exceda z seja maior que um nível de confiança α%:

$$VaR(x,\alpha) = \min\{z \in \Re \mid \psi(x,z) \geq \alpha\}$$

O CVaR, calculado como a perda média dos valores da carteira que excederem o VaR a um dado nível de confiança α%, pode então ser definido como:

$$CVaR(x,\alpha) = \mathrm{E}[L_s \mid L_s \geq VaR(x,\alpha)]$$

ROCKAFELLAR *et al.* (2002) demonstra que a formulação para o CVaR com o uso de simulação pode também ser escrita como:

$$CVaR(x,\alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \left(\sum_{s|L_s \leq z} p_s - \alpha \right) \cdot z + \frac{1}{1-\alpha} \cdot \left(\sum_{s|L_s > z} p_s \cdot L_s \right)$$

Conforme apresentado por TOPALOGLOU (2004), esta formulação do CVaR pode ser ainda simplificada, adicionando-se a variável auxiliar y_s, de tal forma que:

$$y_s = \max\{0; L_s - z\}$$

$$CVaR(x,\alpha) = z + \left(\frac{1}{1-\alpha} \right) \cdot \sum_s p_s \cdot y_s$$

Como consideramos aqui que todos os cenários simulados são equiprováveis, podemos então definir a função objetivo como o CVaR calculado pela soma do VaR da carteira com o somatório ponderado das perdas condicionais além do VaR nos diferentes cenários simulados:

$$MIN \quad z+\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\cdot\sum_{s}\frac{1}{S}\cdot y_s \tag{4.0a}$$

Neste caso, são necessárias algumas variáveis auxiliares na formulação do modelo:

z : VaR das perdas da carteira

y_s : variável auxiliar para linearizar a função de risco do CVaR

L_s : perda total da carteira no cenário *s*

Conjuntamente com estas variáveis auxiliares, são inseridas restrições adicionais ao modelo, para o cálculo do CVaR:

$$y_s \geq L_s - z, \forall s \in S \tag{4.8}$$

$$L_s = -R_s, \forall s \in S \tag{4.9}$$

$$y_s \geq 0, \forall s \in S \tag{4.10}$$

As restrições (4.8), (4.9) e (4.10) impõem o cálculo das variáveis auxiliares do CVaR. Desta forma a perda total da carteira em um cenário *s* é determinada quantitativamente como o oposto do retorno ao período, e a perda da carteira além do VaR deve ser maior do que a perda total menos o valor do VaR.

4.4.2 Variância

Quando adotamos a variância como medida de risco, podemos calculá-la diretamente pelo somatório ponderado dos desvios quadráticos entre a variável (os retornos em cada simulação) e sua média (o retorno médio obtido):

$$MIN \quad \frac{1}{S} \cdot \sum_{s} \left(R_s - \overline{R}\right)^2 \tag{4.0b}$$

Neste caso não é necessário nenhuma variável auxiliar ou restrição adicional, no entanto o modelo deixa de ser linear e torna-se quadrático.

VALIDAÇÃO DO MODELO

5 Validação do Modelo

5.1 Ativos Utilizados e Série Histórica

Consideramos um universo de 3 ações nos testes: Petrobrás PN (PETR4), Usiminas PNA (USIM5) e Vale do Rio Doce PNA (VALE5). Essas ações foram escolhidas devida a sua alta liquidez, o que facilita a negociação das ações e de suas opções no mercado.

Como base de dados dos ativos, foi utilizado o histórico de preços ajustados das ações de janeiro de 1992 a dezembro de 2005. Os preços históricos são ajustados de tal forma que representem apenas os retornos de fato gerados pela oscilação nos preços das ações, efetuando "correções" toda vez que há um *split* (prática onde número de ações existentes é multiplicado por um fator e o valor da ação é dividido por esse fator) ou a emissão de novos lotes de ações.

As séries históricas de preços ajustados e retornos diários de cada ação estão representados a seguir:

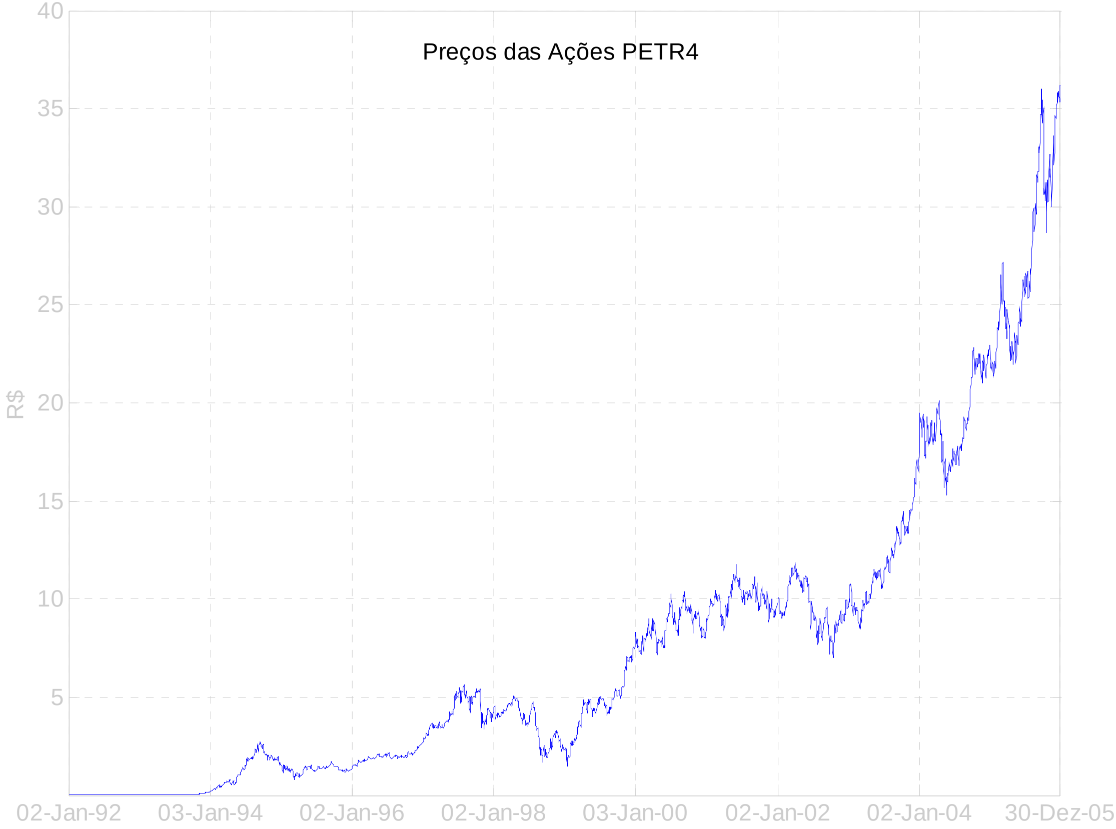


Figura 5-1: Série histórica de preços da ação PETR4

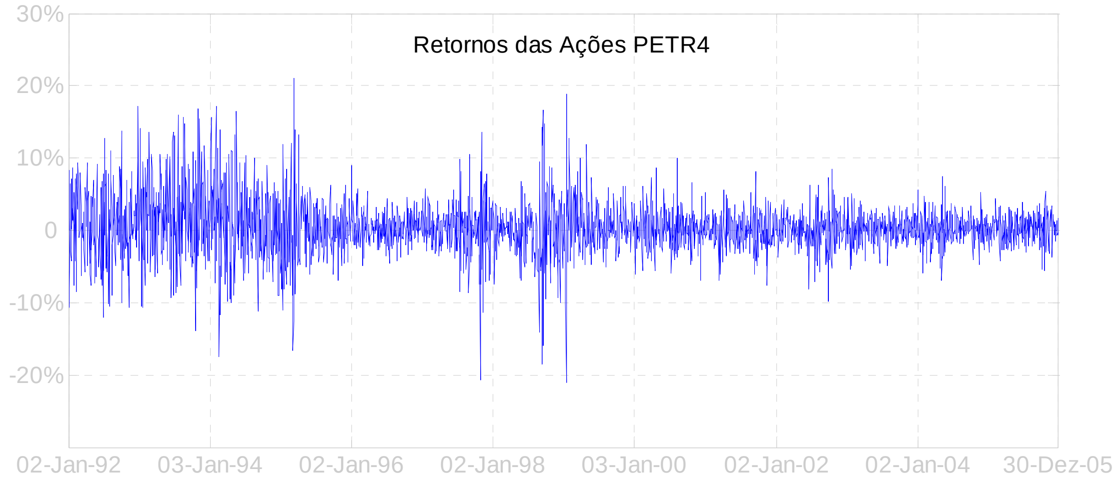


Figura 5-2: Série histórica de retornos da ação PETR4

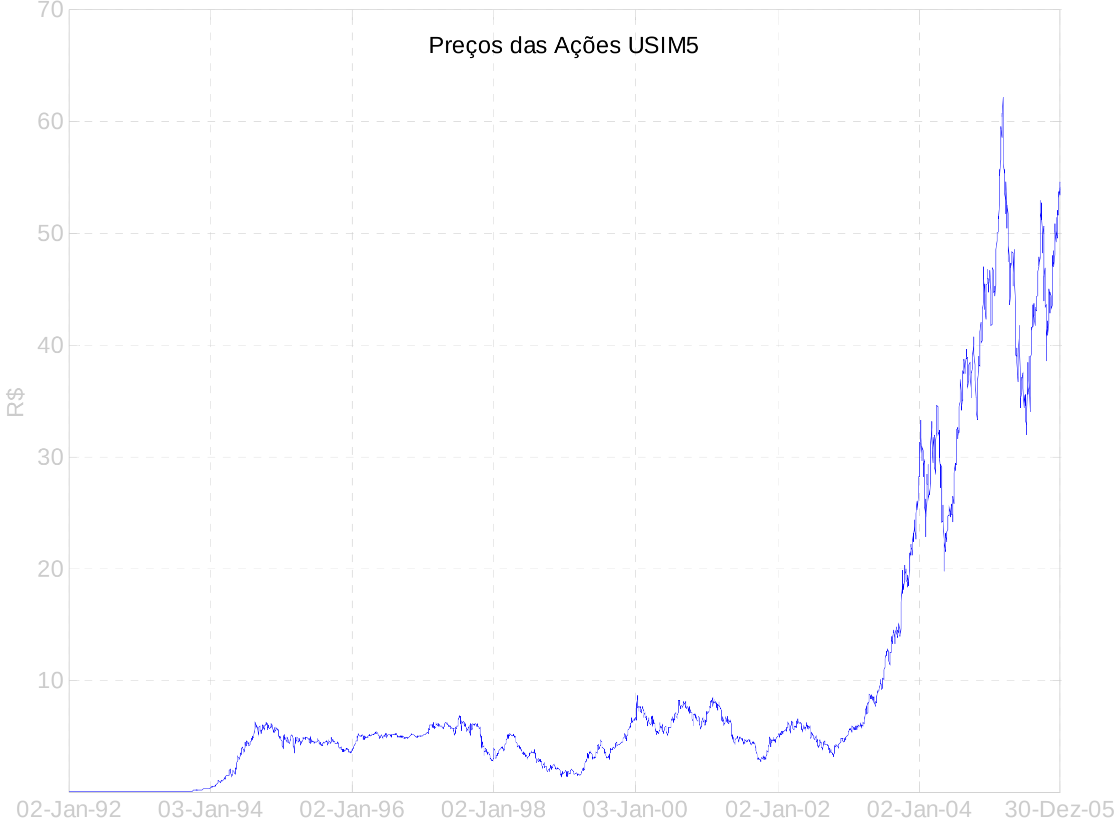


Figura 5-3: Série histórica de preços da ação USIM5

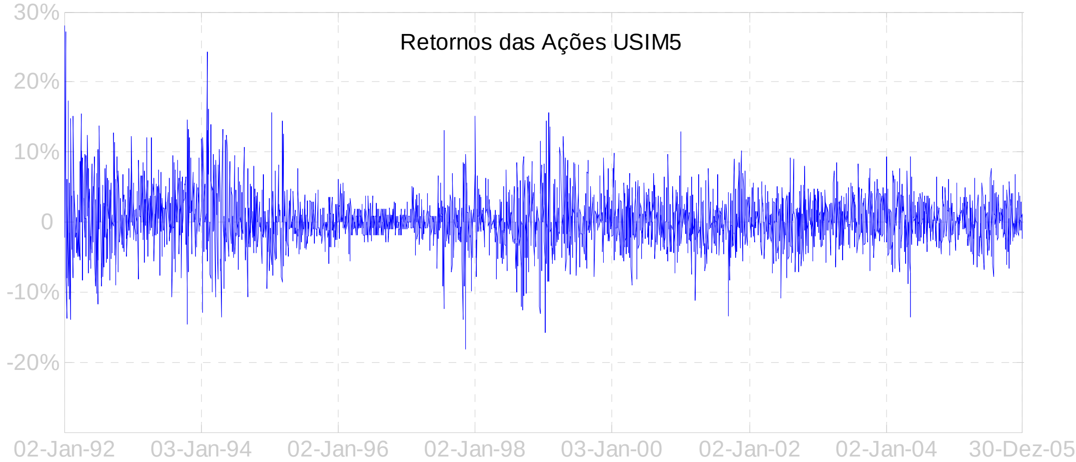


Figura 5-4: Série histórica de retornos da ação USIM5

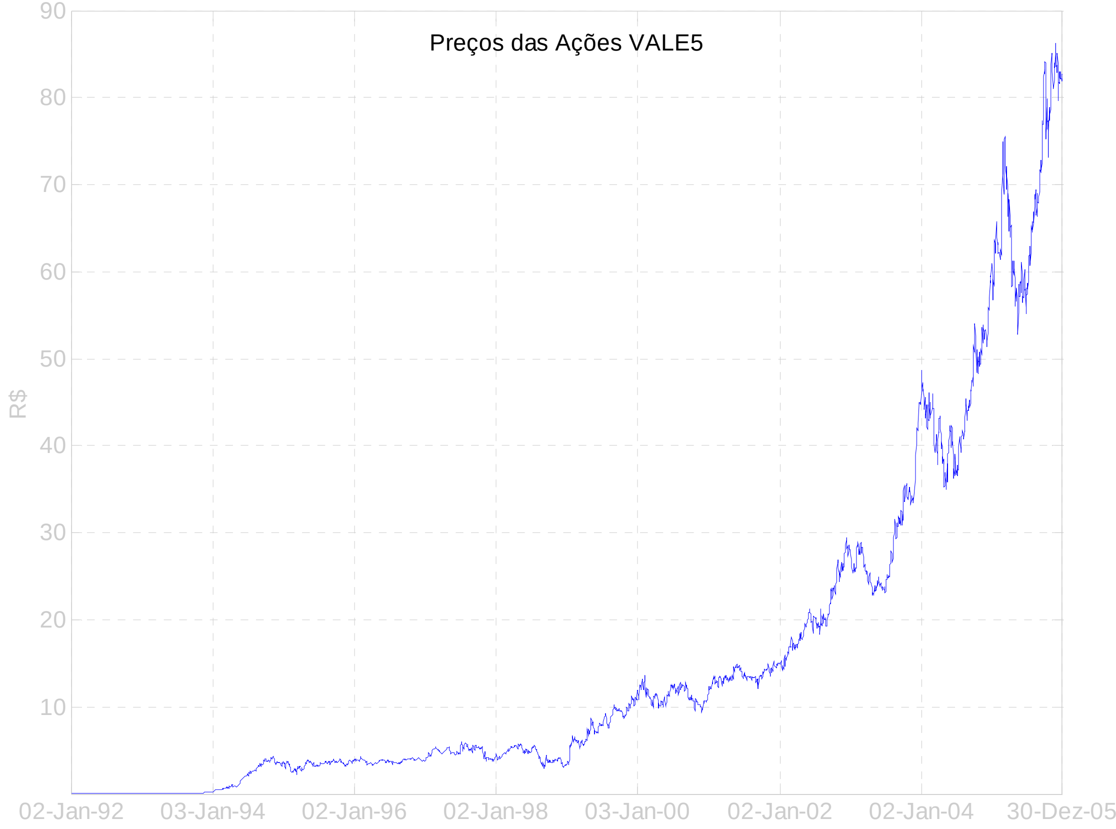


Figura 5-5: Série histórica de preços da ação VALE5

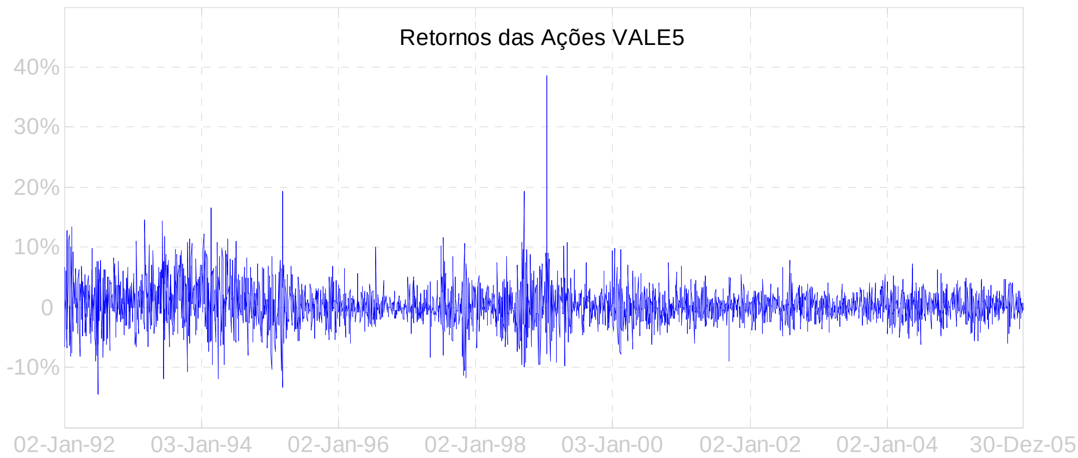


Figura 5-6: Série histórica de retornos da ação VALE5

5.2 Derivativos Utilizados

Além do conjunto das três ações descritas na seção anterior, considerou-se que ao investidor também estariam disponíveis 12 opções: duas *calls* e duas *puts* sobre cada uma das ações.

Todas as opções disponíveis e os respectivos *payoffs*, em função do valor da ação objeto da opção e desconsiderando-se os preços de compra das opções, estão detalhados nas três tabelas a seguir:

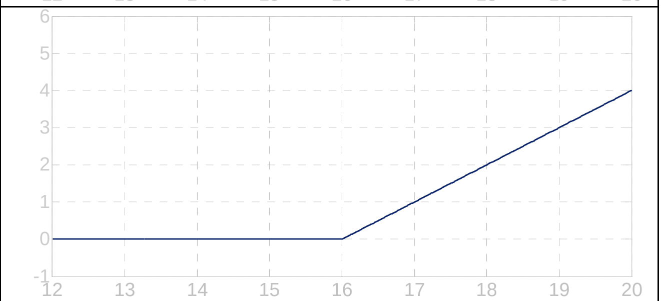
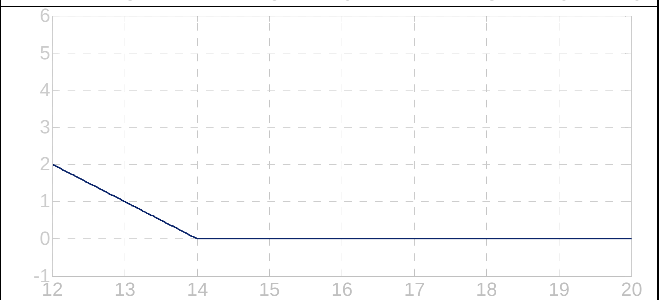
	Ação objeto	Tipo	Preço de Exercício	Payoff da Opção em função do preço da Ação Objeto
c1	PETR4	Call	14	
c2	PETR4	Call	16	
p1	PETR4	Put	14	
p2	PETR4	Put	16	

Tabela 5-1: Gama de opções sobre a ação PETR4 disponíveis ao investidor

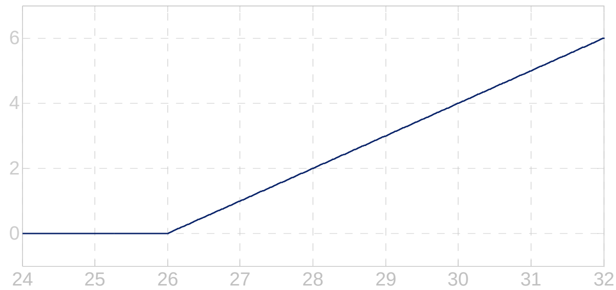
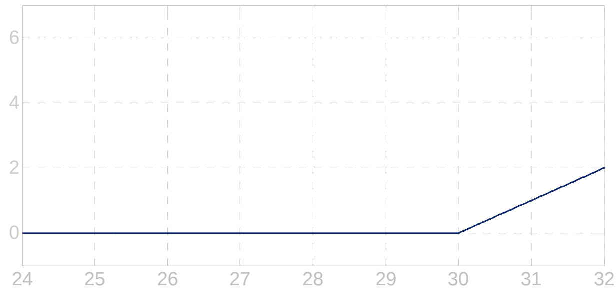
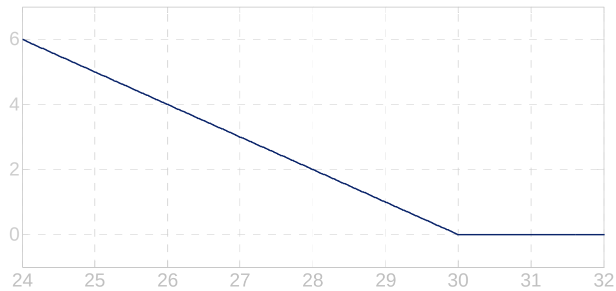
	Ação objeto	Tipo	Preço de Exercício	Payoff da Opção em função do preço da Ação Objeto
c3	USIM5	Call	26	
c4	USIM5	Call	30	
p3	USIM5	Put	26	
p4	USIM5	Put	30	

Tabela 5-2: Gama de opções sobre a ação USIM5 disponíveis ao investidor

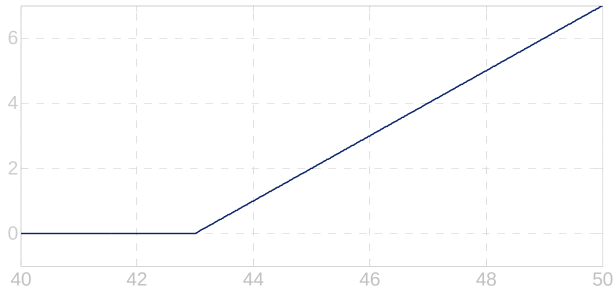
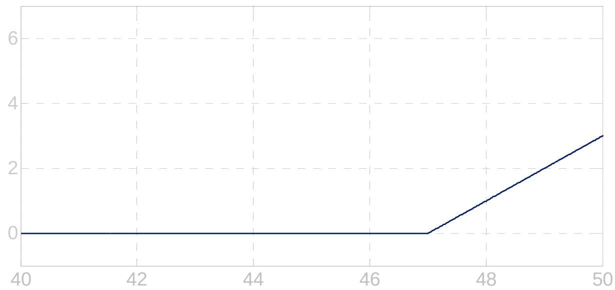
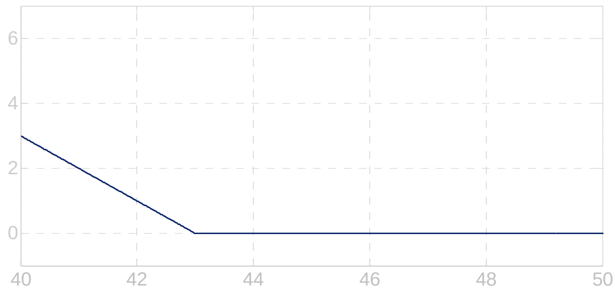
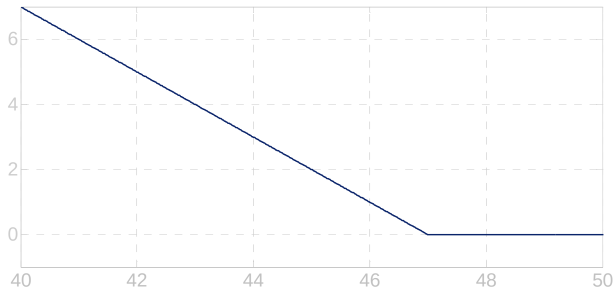
	Ação objeto	Tipo	Preço de Exercício	Payoff da Opção em função do preço da Ação Objeto
c5	VALE5	Call	43	
c6	VALE5	Call	47	
p5	VALE5	Put	43	
p6	VALE5	Put	47	

Tabela 5-3: Gama de opções sobre a ação VALE5 disponíveis ao investidor

5.3 Testes Iniciais

Uma vez tendo concluída a formulação matemática, testes iniciais foram efetuados para a validação do modelo. O horizonte de investimento considerado é de 21 dias (1 mês). A data inicial onde a decisão de investimento será realizada é 02/01/2004. Assumiu-se que todas as opções vencem na data de horizonte.

Foram considerados 2% de custos de transação proporcionais, e uma taxa livre de risco (CDI) de 16% a.a., assumida constante até a data de horizonte. Considerou-se que o investidor não possui nenhum ativo em sua carteira inicial, e dispõe de R$ 50.000 em caixa.

O preço das ações foi simulado seguindo a metodologia da Simulação de Monte Carlo descrita na seção 3.2.1. Foram realizadas 1.000 simulações, de tal forma que foram analisados 1.000 trajetórias diferentes para as ações durante o período compreendido entre janeiro e fevereiro de 2004. Os preços iniciais das ações (preços históricos de 31/12/2003, o dia útil anterior da data da decisão de investimento) eram:

Preços Iniciais Ações		Estatísticas	
Código Ação	**Preço**	**Retorno (%aa)**	**Volatilidade (%aa)**
PETR4	R$ 16,89	46,3%	40,1%
USIM5	R$ 28,19	77,9%	54,0%
VALE5	R$ 44,78	67,6%	40,3%

Tabela 5-4: Preços iniciais e estatísticas das ações

Nas colunas da direita da tabela anterior estão descritos os retornos médios e as volatilidades das ações, calculados a partir da média e desvio padrão da série histórica de retornos dos papéis. Foram utilizados os últimos 5 anos de dados da série histórica dos preços das ações. Para o cálculo da matriz de covariância das ações, utilizou a técnica EWMA com fator de decaimento 1. As ações apresentaram a seguinte matriz de correlação:

	PETR4	USIM5	VALE5
PETR4	1,000	0,344	0,306
USIM5	0,344	1,000	0,224
VALE5	0,306	0,224	1,000

Tabela 5-5: Correlação entre as ações

Utilizando o modelo de apreçamento de opções de BLACK-SCHOLES (1973), os seguintes preços iniciais foram obtidos para as *calls* e *puts* disponíveis:

Preços Iniciais Opções			
Tipo	Exercício	Ação-objeto	Preço Inicial
Call	14	PETR4	R$ 3,07
Call	16	PETR4	R$ 1,40
Call	26	USIM5	R$ 3,18
Call	30	USIM5	R$ 1,14
Call	43	VALE5	R$ 3,32
Call	47	VALE5	R$ 1,36
Put	14	PETR4	R$ 0,03
Put	16	PETR4	R$ 0,34
Put	26	USIM5	R$ 0,73
Put	30	USIM5	R$ 2,65
Put	43	VALE5	R$ 1,11
Put	47	VALE5	R$ 3,11

Tabela 5-6: Preços iniciais das opções

Analisaram-se os resultados obtidos com as duas funções objetivos distintas: uma que utiliza o CVaR como medida de risco e outra que utiliza a variância. Para cada caso, foi calculada a fronteira eficiente, formada pelas 36 carteiras ótimas obtidas ao se variar o retorno mínimo (parâmetro da restrição 4.7 do modelo) entre 5% e 75% (ao ano), em incrementos de 2%.

As fronteiras eficientes, assim como exemplos de carteiras ótimas e o posicionamento do investidor em cada um dos ativos, estão descritos a seguir.

5.3.1 Resultados com CVaR

Adotou-se um nível de confiança de 95% para o cálculo do CVaR. A parametrização utilizada gerou um modelo de otimização linear composto de 6.023 variáveis e 6.021 restrições lineares. A fronteira eficiente calculada foi a seguinte:

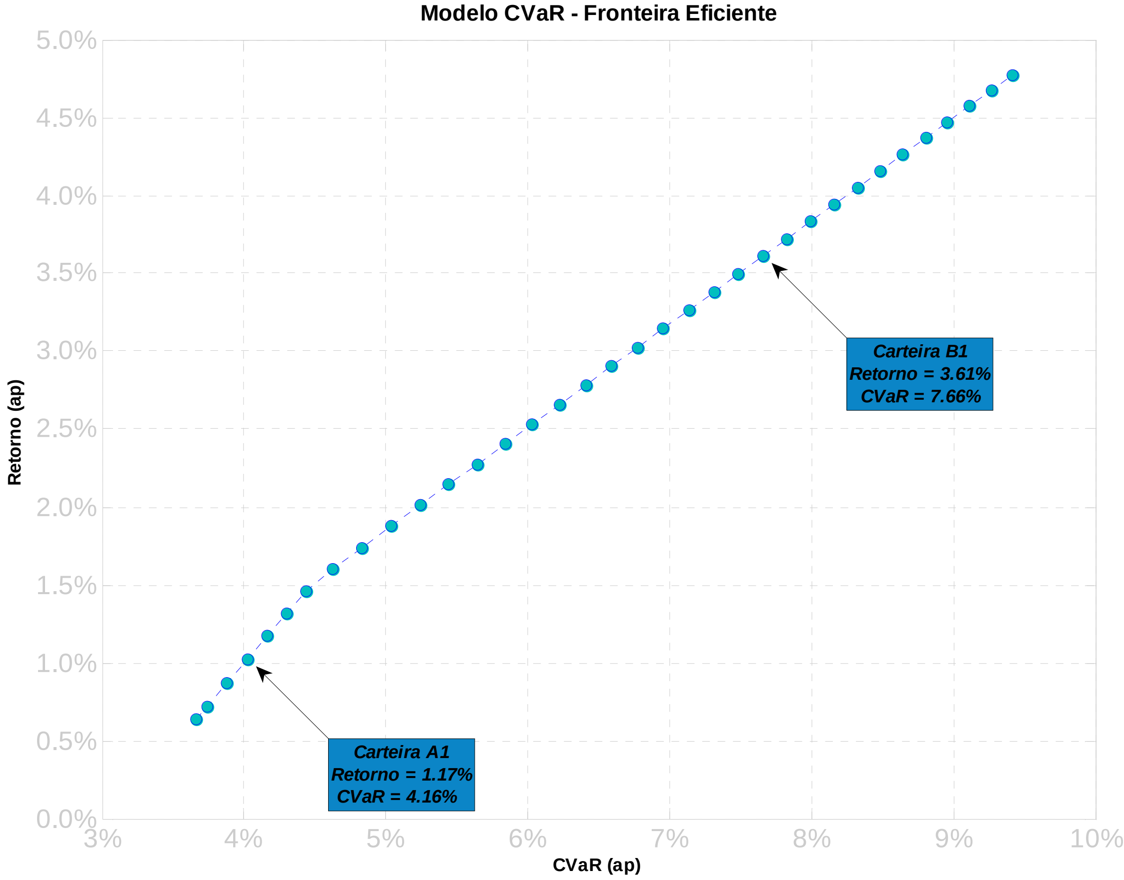


Figura 5-7: Fronteira Eficiente obtida com o modelo CVaR

Destacaram-se, para exemplificação, as duas carteiras A1 e B1 indicadas no gráfico. A composição detalhada das carteiras sugeridas, assim como os perfis de *payoffs* que o investidor obtém em função do preço da ação estão descritos a seguir. É interessante observar que em todos os 36 pontos da fronteira o modelo sugere carteiras de investimentos com posicionamentos sempre limitados no lado da perda, através de estratégias que usam as opções. Observa-se que esse resultado é esperado, uma vez que o modelo minimiza a medida de risco CVaR, que mede justamente a extensão da cauda esquerda da distribuição de retornos da carteira.

Carteira A1

Retorno (ao período)	1.17%
CVaR (ao período)	4.16%

A carteira A1 apresenta um retorno esperado ao período de 1.17% (equivalente a um retorno anualizado de 14.98%) e um CVaR de 4.16%. É formada por ações e opções da Usiminas (USIM5) e da Vale do Rio Doce (VALE5). Nos dois casos o modelo sugere o posicionamento em ações e *puts* na proporção 1 para 1. Este posicionamento garante ao investidor que suas perdas estão limitadas e seus ganhos são ilimitados, uma vez que o preço da ação ultrapasse o preço de exercício da *put* (R$ 30 para a USIM5 e R$ 47 para a VALE5).

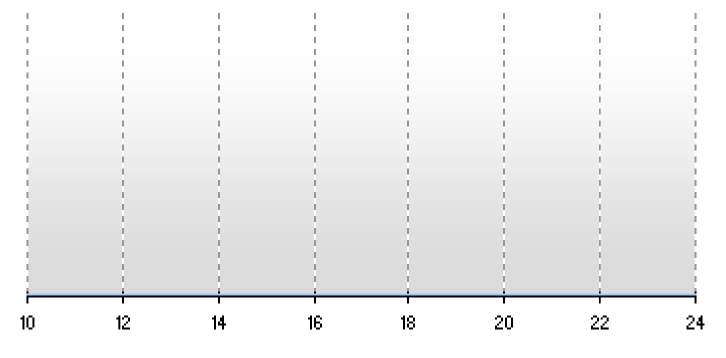
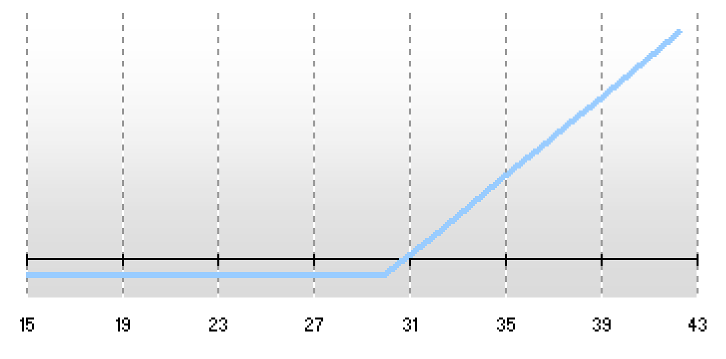
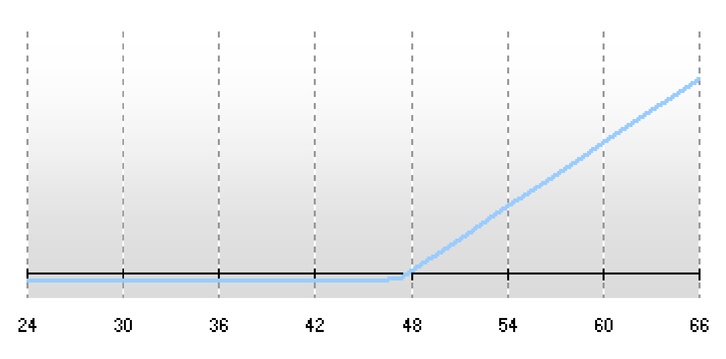
Ativo		Quantidade	Payoff do Investidor em função do preço da ação
PETR4	**Ações**	**0**	
	Call (E=14)	0	
	Call (E=16)	0	
	Put (E=14)	0	
	Put (E=16)	0	
USIM5	**Ações**	**969**	
	Call (E=26)	0	
	Call (E=30)	0	
	Put (E=26)	0	
	Put (E=30)	969	
VALE5	**Ações**	**401**	
	Call (E=43)	0	
	Call (E=47)	0	
	Put (E=43)	0	
	Put (E=47)	401	

Tabela 5-7: Alocação detalhada para a Carteira A1 (modelo CVaR)

<u>Carteira B1</u>

Retorno (ao período)	3.61%
CVaR (ao período)	7.66%

A carteira B1 apresenta um retorno esperado ao período de 3.61% (equivalente a um retorno anualizado de 53.05%) e um CVaR de 4.16%. É formada apenas por ações e opções da Usiminas (USIM5). O modelo sugere o posicionamento em *calls* e em *puts* do mesmo preço de exercício, R$ 30. Dessa forma o investidor tem suas perdas limitadas e seus ganhos alavancados e ilimitados, uma vez que o preço da ação ultrapasse este preço de exercício.

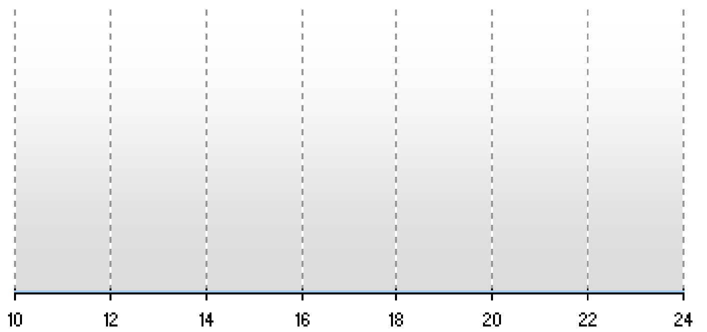
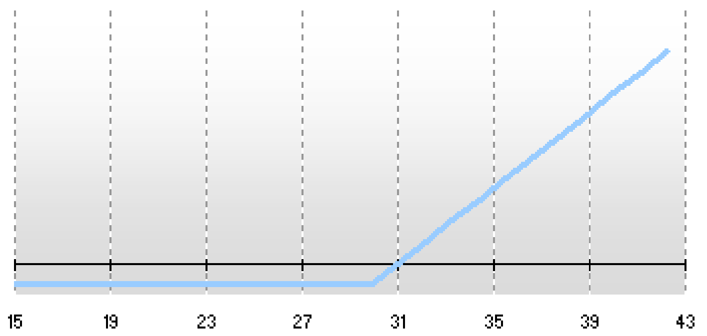
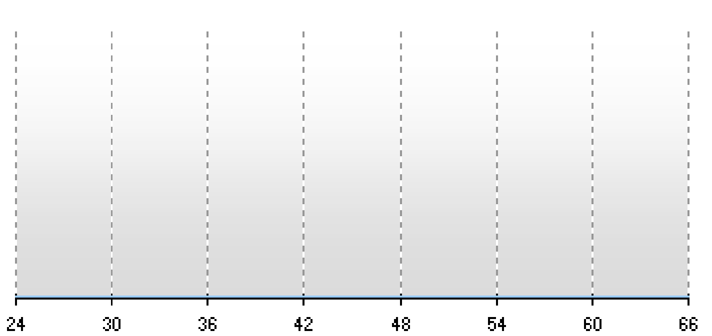
Ativo		Quantidade	Payoff do Investidor em função do preço da ação
PETR4	**Ações**	**0**	
	Call (E=14)	0	
	Call (E=16)	0	
	Put (E=14)	0	
	Put (E=16)	0	
USIM5	**Ações**	**1.539**	
	Call (E=26)	0	
	Call (E=30)	1.449	
	Put (E=26)	0	
	Put (E=30)	1.539	
VALE5	**Ações**	**0**	
	Call (E=43)	0	
	Call (E=47)	0	
	Put (E=43)	0	
	Put (E=47)	0	

Tabela 5-8: Alocação detalhada para a Carteira B1 (modelo CVaR)

5.3.2 Resultados com Variância

A parametrização utilizada do modelo que minimiza a Variância gerou um problema de otimização quadrática composto de 3022 variáveis e 3012 restrições lineares. A fronteira eficiente calculada foi a seguinte:

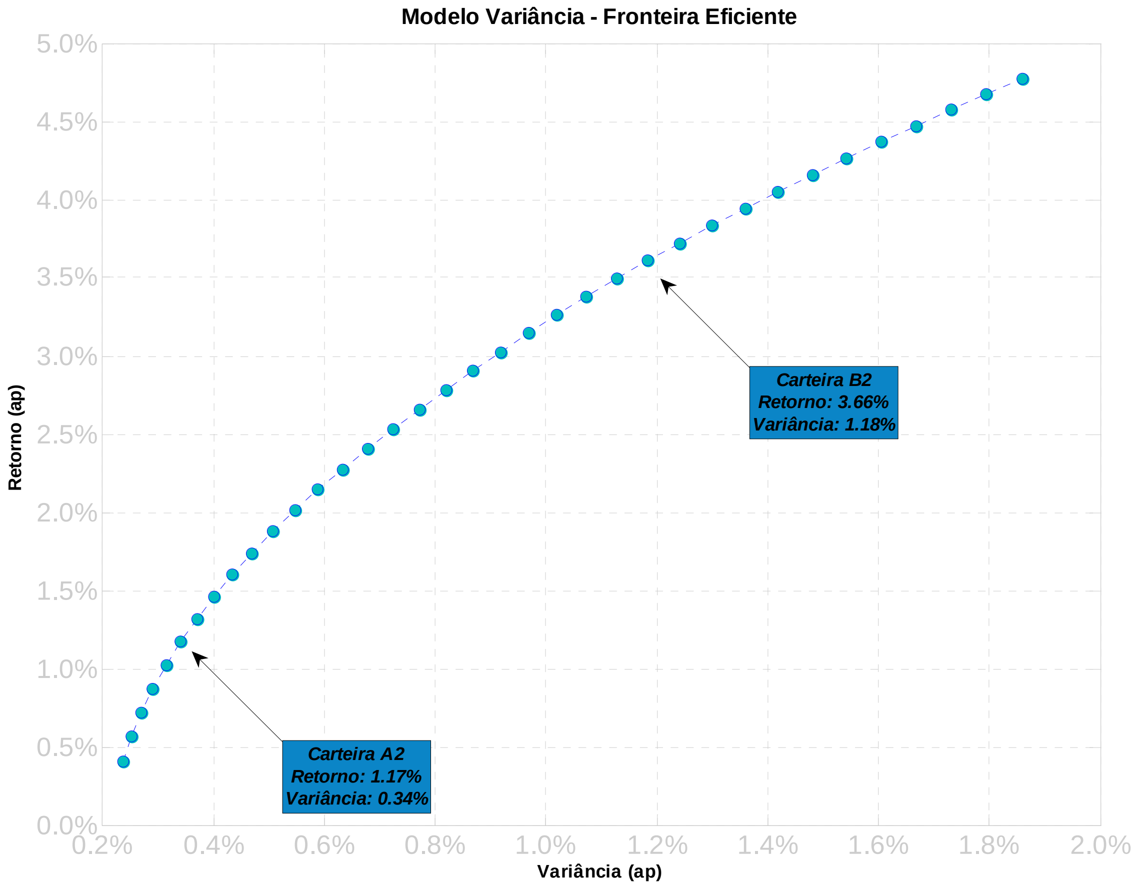


Figura 5-8: Fronteira Eficiente obtida com o modelo Variância

Destacaram-se, para exemplificação, as duas carteiras A2 e B2 indicadas no gráfico. A composição detalhada das carteiras sugeridas, assim como os perfis de *payoffs* que o investidor obtém em função do preço da ação, está descrita a seguir. Ao contrário do modelo com CVaR, o modelo que minimiza a variância não gera carteiras que minimizam as perdas: as carteiras sugeridas sempre utilizam ações e opções para gerar estratégias mistas que, em muitos casos, deixam o investidor desprotegido contra perdas significativas.

Carteira A2

Retorno (ao período)	1.17%
Variância (ao período)	0.34%

A carteira A2 apresenta um retorno esperado ao período de 1.17% (equivalente a um retorno anualizado de 14.98%) e uma variância de 0.34%. Efetuando a conversão, esta carteira apresenta um desvio padrão (volatilidade) de 5.83% (equivalente a um desvio padrão anualizado de 20.40%). É formada por ações e opções da Petrobras (PETR4), Usiminas (USIM5) e Vale do Rio Doce (VALE5). Os posicionamentos gerados pelas ações e opções deixam o investidor exposto à perdas significativas, no caso de uma queda grande no preço da ação da Usiminas (USIM5).

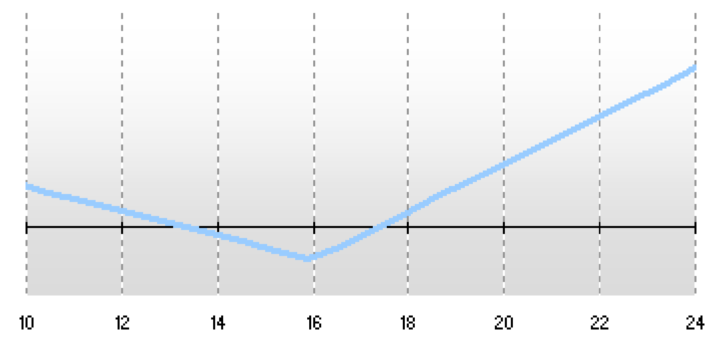
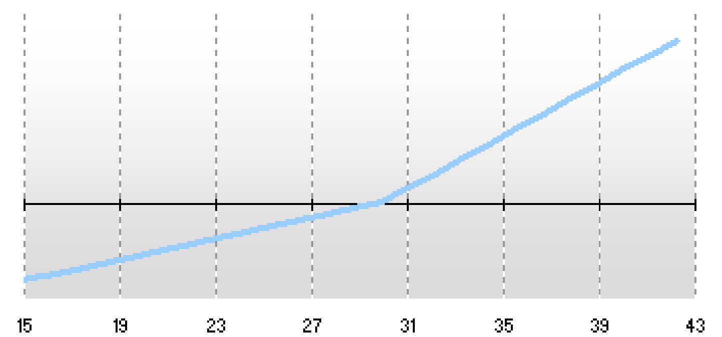
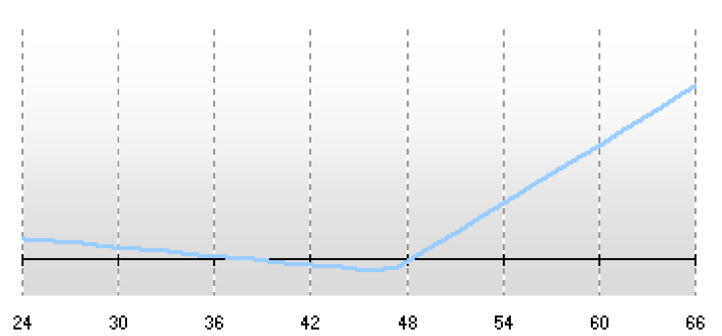
Ativo		Quantidade	Payoff do Investidor em função do preço da ação
PETR4	**Ações**	**678**	
	Call (E=14)	0	
	Call (E=16)	0	
	Put (E=14)	0	
	Put (E=16)	1,024	
USIM5	**Ações**	**418**	
	Call (E=26)	0	
	Call (E=30)	0	
	Put (E=26)	0	
	Put (E=30)	254	
VALE5	**Ações**	**513**	
	Call (E=43)	0	
	Call (E=47)	0	
	Put (E=43)	0	
	Put (E=47)	592	

Tabela 5-9: Alocação detalhada para a Carteira A2 (modelo Variância)

Carteira B2

Retorno (ao período)	3.61%
Variância (ao período)	1.18%

A carteira B2 apresenta um retorno esperado ao período de 3.61% (equivalente a um retorno anualizado de 53.05%) e uma variância de 1.18%. Efetuando a conversão, esta carteira apresenta um desvio padrão (volatilidade) de 10.88% (equivalente a um desvio padrão anualizado de 38.45%). É formada por ações e opções da Petrobras (PETR4), Usiminas (USIM5) e Vale do Rio Doce (VALE5). Novamente, o modelo que minimiza a variância gera carteiras que deixam o investidor exposto a perda significativas, e até mesmo totalmente desprotegidos contra quedas, como no caso da Usiminas (USIM5).

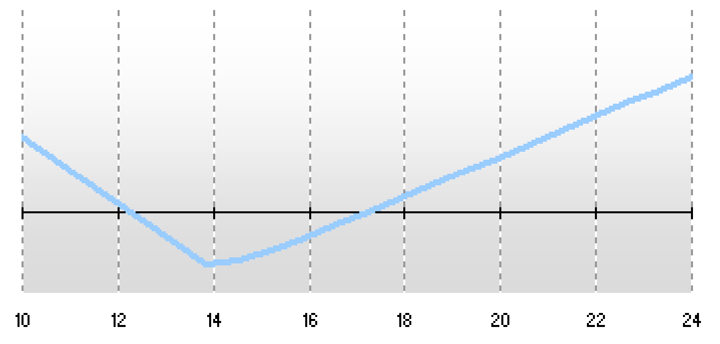
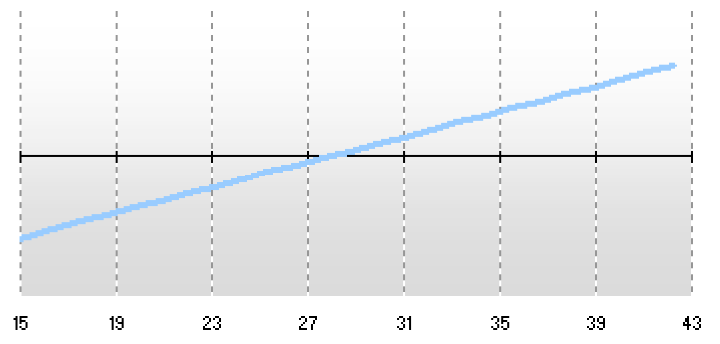
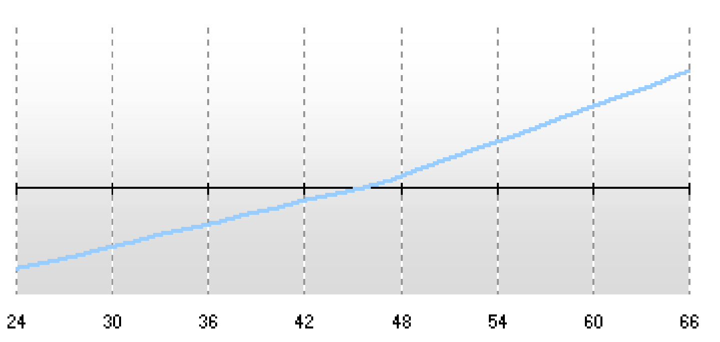
Ativo		Quantidade	Payoff do Investidor em função do preço da ação
PETR4	**Ações**	**157**	
	Call (E=14)	830	
	Call (E=16)	0	
	Put (E=14)	1,629	
	Put (E=16)	158	
USIM5	**Ações**	**665**	
	Call (E=26)	0	
	Call (E=30)	0	
	Put (E=26)	0	
	Put (E=30)	0	
VALE5	**Ações**	**546**	
	Call (E=43)	0	
	Call (E=47)	0	
	Put (E=43)	0	
	Put (E=47)	191	

Tabela 5-10: Alocação detalhada para a Carteira B2 (modelo Variância)

5.4 Análise de sensibilidade

Foram realizados extensivos testes para analisar a sensibilidade do modelo aos parâmetros utilizados. Os seguintes parâmetros do modelo foram analisados:

- **Nível de retorno mínimo (μ):** foram analisados valores de 5% a 75% (anualizados), variando em intervalos de 2%. Os diferentes valores geraram 36 carteiras, que são utilizadas para a construção das fronteiras eficientes, assim como exemplificado na Figura 5-7 (“Fronteira Eficiente obtida com o modelo CVaR”, página 73) e na Figura 5-8 (“Fronteira Eficiente obtida com o modelo Variância”, página 76).

- **Medida de risco:** conforme detalhado na seção 4 (“Formulação Matemática”, página 52), o modelo foi analisado com duas medidas de risco diferentes – o CVaR (Valor em Risco Condicional) e a variância. Conforme esperado, as carteiras ótimas sugeridas pelo modelo são consideravelmente alteradas de acordo com a medida de risco utilizada.

Estes itens descritos acima são parâmetros que influenciam diretamente a formulação matemática do modelo. Os resultados obtidos variando-se estes parâmetros foram exemplificados na seção anterior (“Testes Iniciais”, página 71). Para os dados obtidos completos (2 medidas de risco x 36 níveis de retorno = 72 carteiras ótimas), veja o Anexo B.

Quando se analisa o modelo com a medida de risco CVaR, há ainda um terceiro parâmetro que afeta diretamente o modelo:

- **Nível de confiança (α) do CVaR:** determina qual o percentil para distribuição de retornos será utilizado para o cálculo do CVaR. Quando variamos esse parâmetro, a resposta do modelo também é alterada, uma vez que, quanto maior o nível de confiança, menor a amostra da cauda esquerda que está sendo utilizada para o cálculo do CVaR. Foram analisados os valores de 95%, 97% e 99% para o nível de confiança. Os resultados obtidos foram consistentes entre si: por mais que o CVaR calculado seja diferente, o posicionamento do investidor (representado pelo perfil do *payoff* obtido em função do preço da ação) em cada ativo é bastante semelhante. Em todos os casos o modelo sugere que sejam compradas *puts* na mesma quantidade que a ação-objeto. E, em alguns casos, sugere também a compra de *calls* para alavancar o resultado quando o preço da ação superar o preço de exercício da *call*. Os dados completos obtidos para três níveis de retornos escolhidos (μ=1.46%, μ=2.28% e μ=3.14%) estão disponíveis no Anexo E.

Além destes há outros parâmetros que influenciam indiretamente os resultados obtidos. A influência é considerada indireta porque não são propriamente parâmetros da formulação matemática do modelo, mas alteram substancialmente as estatísticas históricas das ações. Isto é, são alterados os valores obtidos para os retornos médios, as volatilidades históricas e a matriz de covariância das ações, que, por sua vez, são parâmetros utilizados para gerar os cenários através do método da Simulação de Monte Carlo. Logicamente, uma vez que os diferentes cenários simulados são alterados, as carteiras ótimas sugeridas pelo modelo são diferentes. Estes parâmetros da simulação são os seguintes:

- **Fator de decaimento para o método EWMA:** foram analisados os valores de 0.95, 0.98 e 1.00. Conforme detalhado no Anexo A, este fator determina o peso que cada observação histórica terá quando forem calculados os retornos e a matriz de covariância (e as volatilidades, consequentemente). Quando se utiliza o valor 1.00, assume-se que todas as observações têm o mesmo peso (equivalente o método linear usual). Quando valores inferiores a 1.00 são utilizados, é dada maior importância às observações mais recentes. É interessante priorizar as observações mais recentes quando houve uma grande mudança no movimento das ações, como um período de recessão, de tal forma que os preços recentes são considerados mais adequados para representar o movimento futuro dos ativos.

- **Período de dados**: conforme detalhado na seção 5.1 (“Ativos Utilizados e Série Histórica”, página 64), os dados disponíveis para os testes foram séries históricas de preços ajustados a partir de 1992. No entanto, de acordo com a fração utilizada da série histórica, as estatísticas (retorno médio, matriz de covariância e volatilidade) das ações são alteradas significativamente. Isso acontece porque os dados muito antigos representam outros ciclos da economia brasileira, afetando, portanto, os resultados dos cenários gerados pela Simulação de Monte Carlo para o movimento futuro dos ativos. Foram analisados 4 diferentes frações da série histórica: 5, 7, 9 e 11 anos de dados. Ou seja, no primeiro caso estamos utilizando dados a partir de 5 anos antes da data inicial considerada no cálculo das carteiras (data onde o investidor decidirá a alocação da carteira até o horizonte de investimento); no segundo caso, a partir de 7 anos antes da data inicial; e assim sucessivamente.

Para exemplificar a forma como os parâmetros da simulação (fator de decaimento EWMA e o período de dados utilizados) alteram substancialmente as estatísticas históricas das ações, abaixo estão descritos os retornos médios a volatilidades (anualizados) obtidos em cada caso analisado:

		Período de dados = 5 anos		Período de dados = 7 anos		Período de dados = 9 anos		Período de dados = 11 anos	
Fator EWMA = 0.90		Retorno (%aa)	Vola (%aa)	Retorno (%aa)	Vola (%aa)	Retorno (%aa)	Vola (%aa)	Retorno (%aa)	Vola (%aa)
	PETR4	46.3%	22.0%	30.9%	22.0%	27.3%	22.0%	143.1%	22.0%
	USIM5	77.9%	39.7%	28.2%	39.7%	19.8%	39.7%	119.3%	39.7%
	VALE5	67.6%	29.0%	42.3%	29.0%	32.4%	29.0%	127.4%	29.0%
Fator EWMA = 0.95		Retorno (%aa)	Vola (%aa)	Retorno (%aa)	Vola (%aa)	Retorno (%aa)	Vola (%aa)	Retorno (%aa)	Vola (%aa)
	PETR4	46.3%	22.4%	30.9%	22.4%	27.3%	22.4%	143.1%	22.4%
	USIM5	77.9%	42.1%	28.2%	42.1%	19.8%	42.1%	119.3%	42.1%
	VALE5	67.6%	30.2%	42.3%	30.2%	32.4%	30.2%	127.4%	30.2%
Fator EWMA = 1.00		Retorno (%aa)	Vola (%aa)	Retorno (%aa)	Vola (%aa)	Retorno (%aa)	Vola (%aa)	Retorno (%aa)	Vola (%aa)
	PETR4	46.3%	40.1%	30.9%	47.2%	27.3%	48.7%	143.1%	57.6%
	USIM5	77.9%	54.0%	28.2%	55.9%	19.8%	52.9%	119.3%	57.6%
	VALE5	67.6%	40.3%	42.3%	45.2%	32.4%	45.1%	127.4%	50.4%

Tabela 5-11: Estatísticas históricas (retorno médio e volatilidade anualizados) obtidos variando-se o fator de decaimento EWMA e o período de dados utilizado

Conforme explicado acima, modificando-se estas estatísticas, alteram-se significativamente os cenários gerados pelo método da Simulação de Monte Carlo. Para exemplificar visualmente esta relação, fixou-se o período de dados utilizados em 7 anos e variou-se o fator de decaimento EWMA. Para cada caso, foram gerados 10.000 cenários para um horizonte de 21 dias úteis (1 mês) e depois foram calculados os preços médios das ações, a cada instante. Os resultados obtidos foram então representados em gráficos, agrupados por ação:

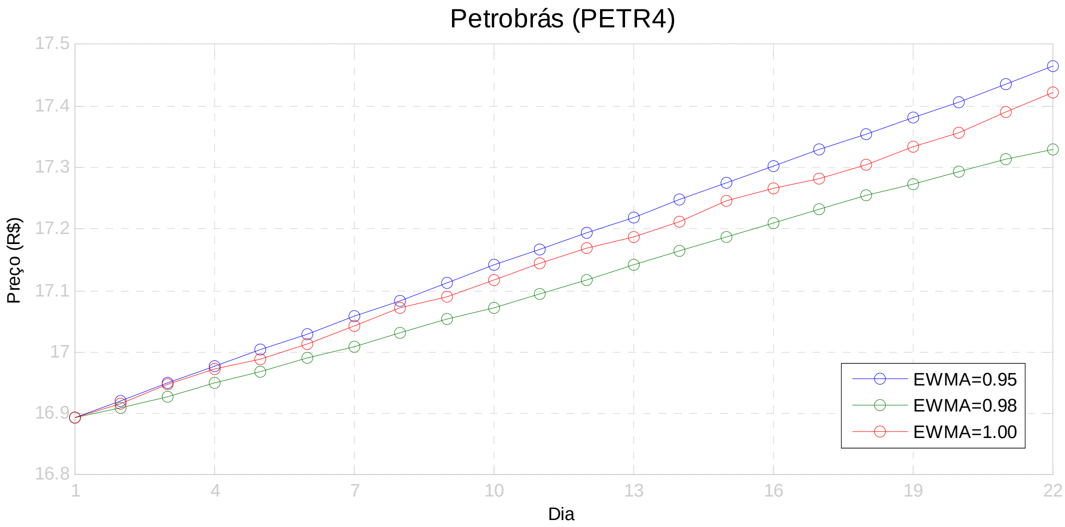


Figura 5-9: Preços simulados médios para PETR4 alterando-se o fator de decaimento EWMA (e fixando-se o período de dados utilizados em 7 anos)

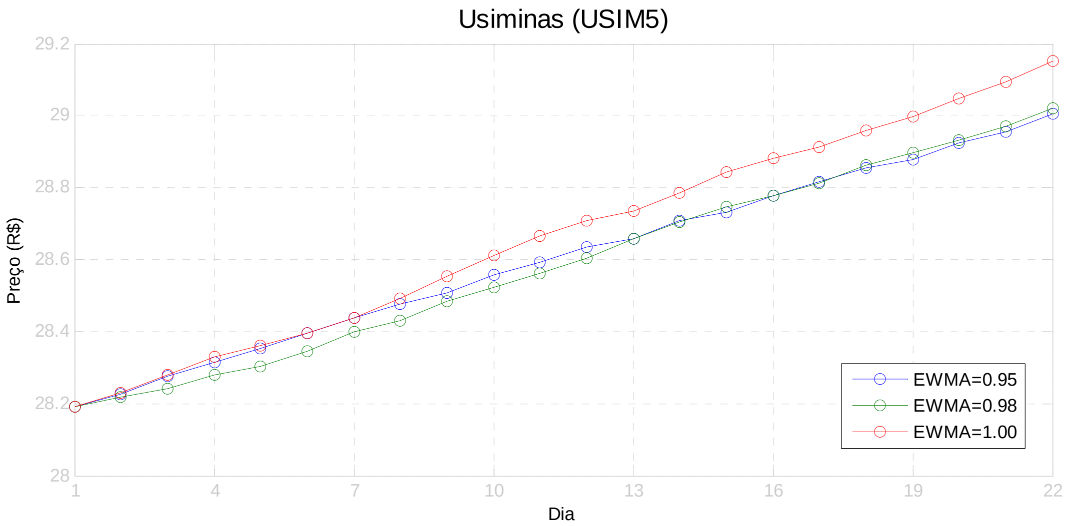


Figura 5-10: Preços simulados médios para USIM5 alterando-se o fator de decaimento EWMA (e fixando-se o período de dados utilizados em 7 anos)

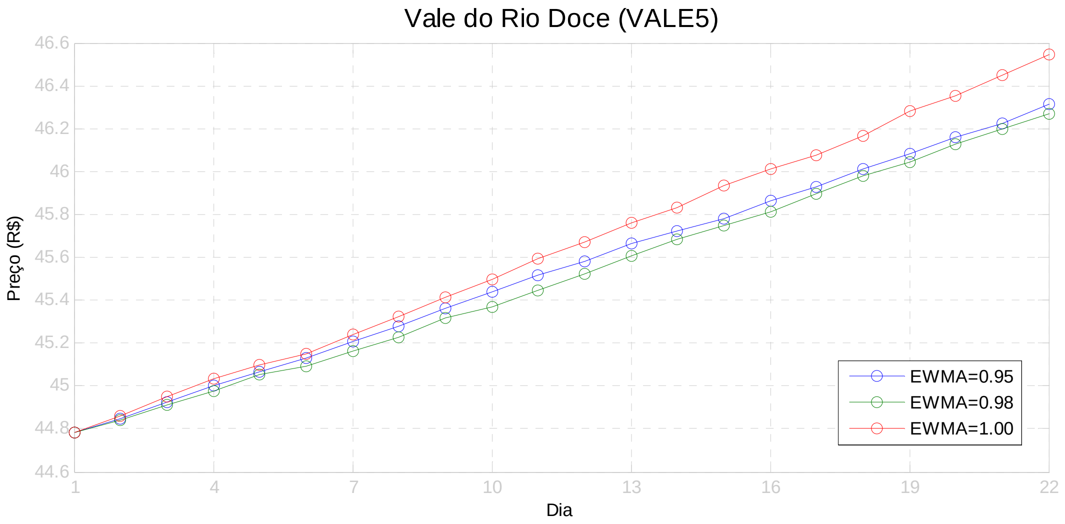


Figura 5-11: Preços simulados médios para VALE5 alterando-se o fator de decaimento EWMA (e fixando-se o período de dados utilizados em 7 anos)

Analogamente, analisou o comportamento dos preços simulados médios quando fixamos o fator de decaimento EWMA (em 0.98) e variamos o parâmetro do período de dados utilizados:

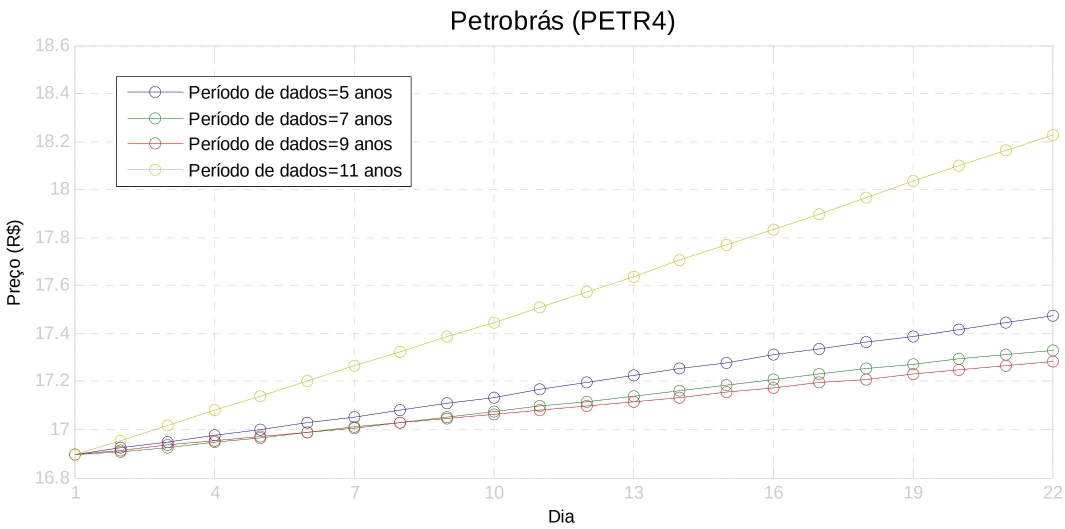


Figura 5-12: Preços simulados médios para PETR4 alterando-se o período de dados utilizados (e fixando-se o fator de decaimento EWMA em 0.98)

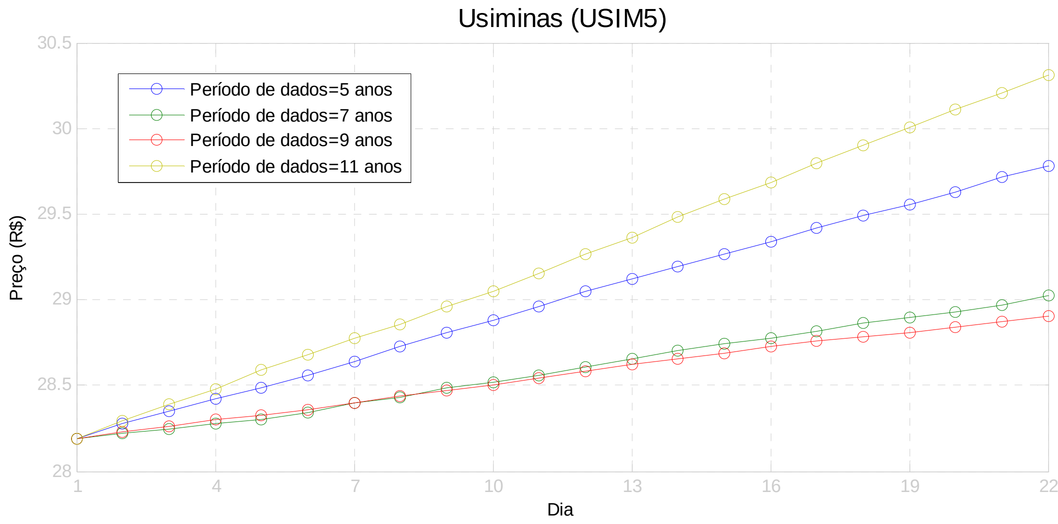


Figura 5-13: Preços simulados médios para USIM5 alterando-se o período de dados utilizados (e fixando-se o fator de decaimento EWMA em 0.98)

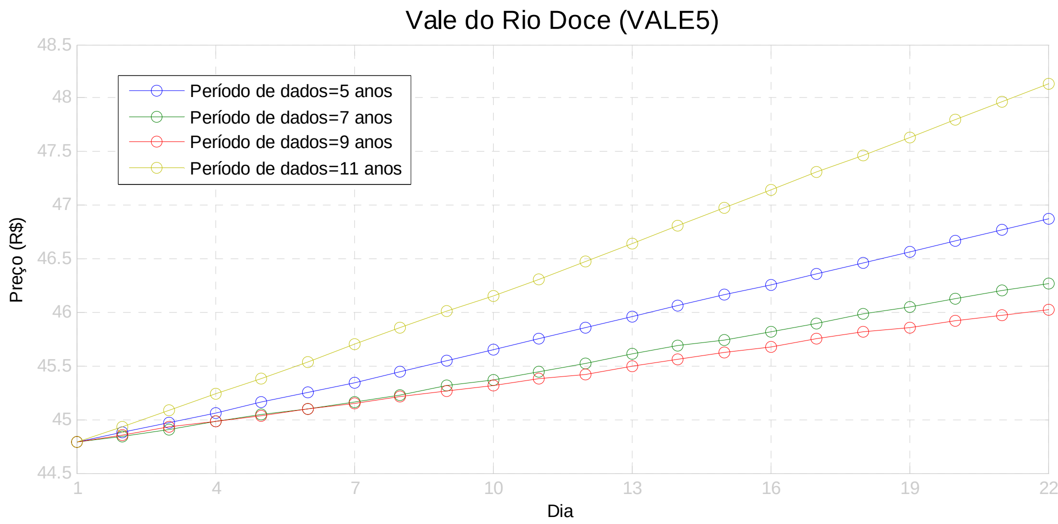


Figura 5-14: Preços simulados médios para VALE5 alterando-se o período de dados utilizados (e fixando-se o fator de decaimento EWMA em 0.98)

É possível notar que os preços simulados são significativamente alterados de acordo com o período de dados e o fator de decaimento utilizados. Uma vez que que os preços são alterados, os preços iniciais das opções e seus *payoffs* sofrem modificações. Dessa forma é esperado que o modelo gere carteiras diferentes.

Os seis gráficos mostrados acima apresentam apenas um parte das análises realizadas. Os dados completos dos preços simulados médios obtidos variando-se os parâmetros da simulação estão disponíveis no Anexo C.

Para quantificar a influência destes parâmetros da simulação nas carteiras ótimas sugeridas pelo modelo, fixou-se um nível mínimo de retorno (μ=2.01%) e observaram-se as alocações sugeridas de acordo com o período de dados utilizado e o fator de decaimento EWMA. Os dados completos desta análise estão disponíveis no Anexo D.

Em resumo, observa-se que o modelo com a medida de risco variância gera carteiras com diferentes estratégias, sem apresentar um padrão. Em alguns casos sugere o posicionamento apenas na ação (deixando o investidor totalmente exposto à grandes quedas), em alguns apenas na ação e em uma *call* ou em *put*, e em outros forma estratégias mistas com o posicionamento tanto na ação como em *calls* e *puts* de preços de exercício diferentes. Ou seja, não é possível identificar nenhum padrão nas carteiras sugeridas.

O modelo com a medida de risco CVaR, por outro lado, geram carteiras com um padrão muito bem definido: quando há alocação em uma determinada ação, sempre sugere a compra de *puts* sobre esta ação, na mesma quantidade. Conforme explicado anteriormente, esta estratégia protege totalmente o investidor contra grandes quedas no preço da ação, uma vez que a queda do preço da ação é compensada pelo *payoff* da *put*, limitando a perda do investidor ao custo da compra da *put.* E, em alguns casos, o modelo sugere um posicionamento adicional em *calls*, alavancando os ganhos do investidor quando o preço da ação supera o preço de exercício da opção.

5.5 Testes Seqüenciais e Comparação com Benchmark

Realizaram-se também testes adicionais para verificar o desempenho do modelo, considerando-se um investidor que, mensalmente, utiliza o modelo e posiciona-se de acordo com a carteira ótima sugerida. Apenas para exemplificação, assume-se que o retorno anual mínimo, aceitável pelo investidor, é de 15% (o que corresponde a um retorno mensal de 1.17%).

O universo de ativos e opções disponíveis, e os outros parâmetros adotados são os mesmo dos utilizados na seção anterior. Considera-se que, a cada início de mês o investidor zera suas posições, computando o retorno de fato realizado da carteira, executa o modelo com o histórico de preços atualizado e aloca novamente R$ 50.000 de acordo com a composição da carteira ótima sugerida pelo modelo. Este processo é iniciado em Julho de 2004 e repetido pelos próximos 12 meses seguintes. Esta análise tenta simular fielmente a aplicação prática do modelo por um investidor.

A cada início de mês, portanto, o investidor irá executar o modelo com os seguintes parâmetros:

- **Data inicial: (**primeiro dia útil do mês atual)
- **Horizonte de Investimento:** 21 dias
- **Nível de retorno mínimo (μ):** 1.17%
- **Caixa Inicial**: R$ 50.000
- **Número de simulações:** 1.000
- **Custo de transação (% do valor negociado):** 2%
- **Taxa livre de risco:** 12%
- **Período de dados utilizados:** 5 anos

- **Fator de decaimento para o método EWMA:** 1.00

- **Nível de confiança (apenas no caso do CVaR):** 95%

Como *benchmark* dos retornos obtidos pela carteira do investidor, adota-se o índice Bovespa. O índice Bovespa (também conhecido como Ibovespa) é índice que acompanha a evolução média das cotações das ações negociadas na Bovespa – Bolsa de Valores de São Paulo. Este índice representa o valor de uma carteira teórica, quadrimestralmente reavaliada, formada pelas ações que, em conjunto, representaram 80% do volume transacionado à vista nos 12 meses anteriores à formação da carteira. O rigor metodológico deste índice (veja http://www.bovespa.com.br para maiores detalhes) e o fato que a Bovespa concentra mais de 90% das transações de ações no Brasil concedem ao Ibovespa o *status* de mais importante índice e mais utilizado *benchmark* na visão dos investidores brasileiros que negociam ações. Justifica-se, desta forma, a escolha, neste trabalho, do Ibovespa como *benchmark* .

5.5.1 Resultados com CVaR

Os resultados obtidos a cada mês estão resumidos na tabela abaixo. Em cada período é possível observar qual foi a alocação da carteira do investidor, assim como o CVaR (ao mês) calculado pelo modelo. É interessante observar que, em nenhum mês em que houve resultado negativo o CVaR calculado foi ultrapassado, indicando que o nível de significância utilizado (95%) é suficiente para o investidor ter um bom controle de suas perdas máximas esperadas.

Período	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Data Inicial	01-jul-04	02-ago-04	01-set-04	01-out-04	01-nov-04	01-dez-04	03-jan-05	01-fev-05	01-mar-05	01-abr-05	02-mai-05	01-jun-05
Data Horizonte	02-ago-04	01-set-04	01-out-04	01-nov-04	01-dez-04	03-jan-05	01-fev-05	01-mar-05	01-abr-05	02-mai-05	01-jun-05	01-jul-06
Retorno Mínimo (%am)	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
CVaR (%am)	1.7%	3.1%	7.5%	12.7%	10.6%	12.2%	14.1%	14.0%	13.2%	13.3%	13.8%	13.1%
PETR4	0	0	0	421	0	404	694	951	622	768	411	697
USIM5	0	0	0	437	0	67	152	162	101	90	260	59
VALE5	1045	1031	985	438	918	685	451	325	400	370	491	491
Call PETR4 (14)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Call PETR4 (16)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Call USIM5 (26)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Call USIM5 (30)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Call VALE5 (43)	0	0	0	0	387	0	0	0	0	0	0	0
Call VALE5 (47)	35391	2921	3208	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Put PETR4 (14)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Put PETR4 (16)	0	0	0	0	0	0	7195	0	0	0	0	0
Put USIM5 (26)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Put USIM5 (30)	0	0	0	1188	0	0	1273	0	0	0	0	2407
Put VALE5 (43)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Put VALE5 (47)	1045	1031	985	913	1305	2086	3403	0	0	0	3296	2066
Retorno Realizado (%am)	-1.0%	-1.8%	35.2%	-3.3%	7.3%	7.1%	3.6%	13.1%	-2.0%	-13.0%	2.1%	0.4%
Retorno Ibovespa (%am)	5.1%	0.3%	5.6%	-2.1%	8.4%	1.9%	-6.1%	14.8%	-3.4%	-7.7%	5.0%	-2.5%

Tabela 5-12: Resultados dos testes seqüenciais utilizando o modelo com CVaR

Nas duas últimas linhas estão descritos os retornos de fato realizados pelo investidor e pelo Ibovespa no mês. Representando-se graficamente os retornos mensais e acumulados, observa-se que o desempenho do modelo é excelente:

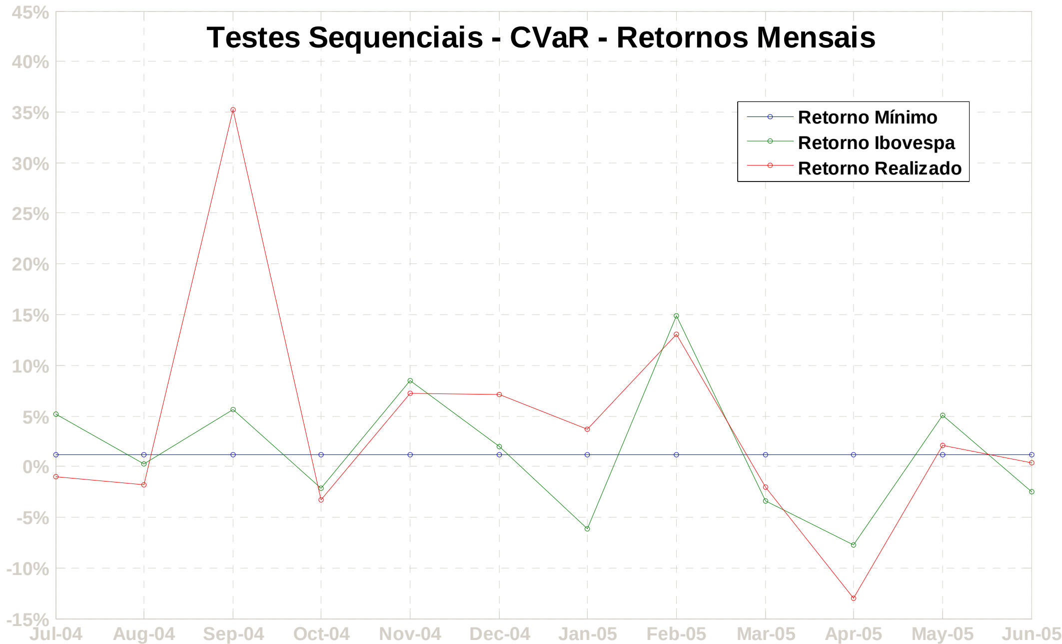


Figura 5-15: Retornos mensais dos testes seqüenciais utilizando o modelo com CVaR

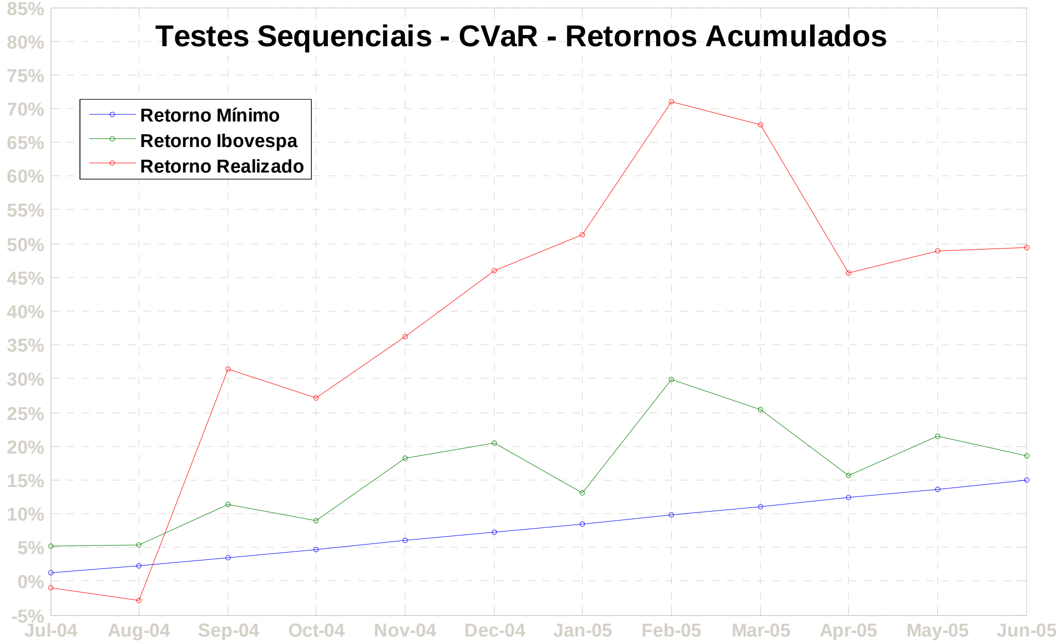


Figura 5-16: Retornos acumulados dos testes seqüenciais utilizando o modelo com CVaR

Observa-se que o desempenho acumulado do modelo conseguiu superar significativamente os retornos do Ibovespa. Considerando-se que os testes realizados consideraram apenas 3 ações dentre a enorme gama que compõe o Ibovespa, estes resultados mostram um desempenho realmente muito favorável ao utilizar as carteiras ótimas geradas pelo modelo proposto.

5.5.2 Resultados com Variância

Os resultados obtidos a cada mês com a variação do modelo que utiliza a variância como medida de risco estão resumidos na tabela abaixo. Em cada período é possível observar qual foi a alocação da carteira do investidor, assim como a variância (ao mês) calculada pelo modelo e o desvio-padrão (calculado diretamente através da raiz quadrada da variância).

Período	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Data Inicial	01-jul-04	02-ago-04	01-set-04	01-out-04	01-nov-04	01-dez-04	03-jan-05	01-fev-05	01-mar-05	01-abr-05	02-mai-05	01-jun-05
Data Horizonte	02-ago-04	01-set-04	01-out-04	01-nov-04	01-dez-04	03-jan-05	01-fev-05	01-mar-05	01-abr-05	02-mai-05	01-jun-05	01-jul-06
Retorno Mínimo (%am)	1.2%	1.2%	1.2%	1.2%	1.2%	1.2%	1.2%	1.2%	1.2%	1.2%	1.2%	1.2%
Variância (%am)	0.6%	0.3%	0.5%	0.6%	0.8%	0.6%	0.8%	0.6%	0.6%	0.7%	0.7%	0.7%
Desvio-padrão (%am)	7.5%	5.6%	7.2%	7.7%	8.8%	7.8%	8.7%	8.0%	7.8%	8.1%	8.5%	8.1%
PETR4	155	105	79	634	151	899	287	998	807	491	156	555
USIM5	50	59	108	294	346	122	374	82	50	172	309	185
VALE5	941	894	791	454	584	430	436	366	375	408	552	464
Call PETR4 (14)	748	483	295	0	407	0	0	0	0	0	0	0
Call PETR4 (16)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Call USIM5 (26)	546	184	314	0	20	0	0	0	0	0	0	0
Call USIM5 (30)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Call VALE5 (43)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Call VALE5 (47)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Put PETR4 (14)	0	0	10944	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Put PETR4 (16)	0	0	1441	13213	0	0	0	62588	1102347	3	0	0
Put USIM5 (26)	0	0	0	1729	2411	1	0	0	0	0	0	3063
Put USIM5 (30)	0	806	0	1446	876	4877	2	16106	18100417	0	3346	2006
Put VALE5 (43)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Put VALE5 (47)	647	751	890	401	279	1566	0	31104	2087173	0	5108	1723
Retorno Realizado (%am)	12.3%	2.1%	7.0%	-3.1%	9.8%	3.7%	4.3%	11.7%	-1.6%	-13.8%	0.8%	-1.3%
Retorno Ibovespa (%am)	5.1%	0.3%	5.6%	-2.1%	8.4%	1.9%	-6.1%	14.8%	-3.4%	-7.7%	5.0%	-2.5%

Tabela 5-13: Resultados dos testes seqüenciais utilizando o modelo com Variância

Os retornos mensais e os retornos acumulados estão representados graficamente nos dois gráficos a seguir:

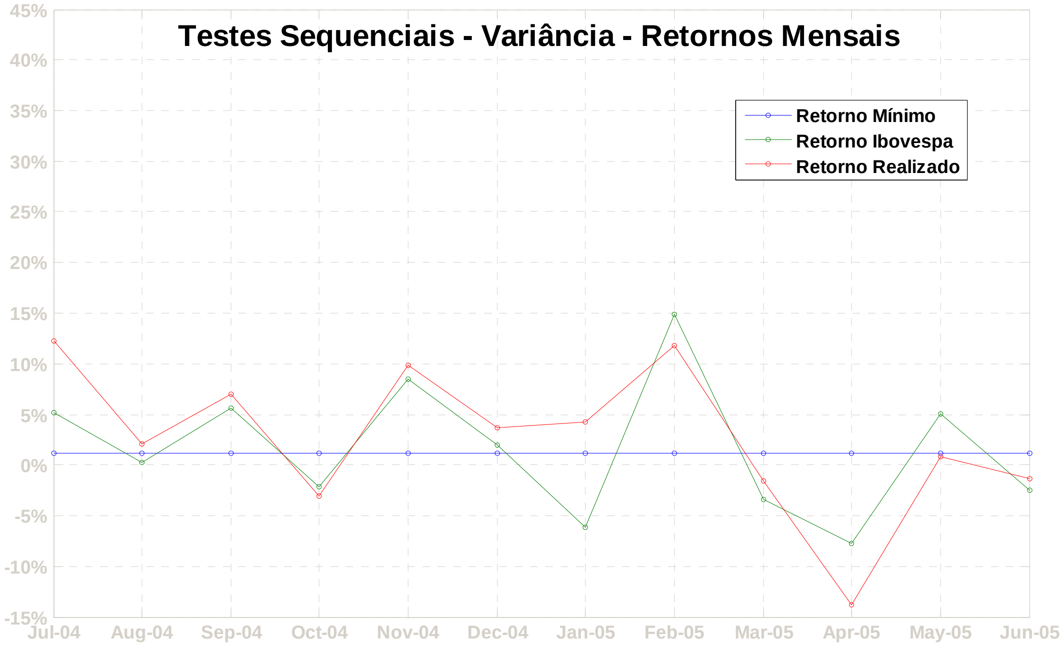


Figura 5-17: Retornos mensais dos testes seqüenciais utilizando o modelo com Variância

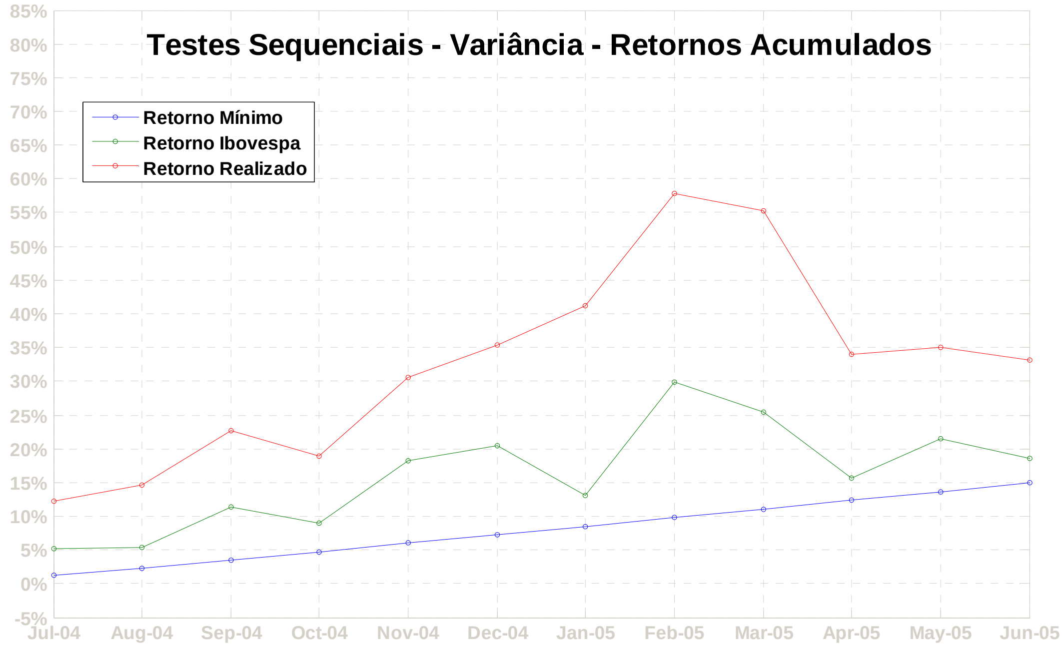


Figura 5-18: Retornos acumulados dos testes seqüenciais utilizando o modelo com Variância

Observa-se que os retornos mensais obtidos pelas carteiras sugeridas pelo modelo que utiliza a variância foram semelhantes àqueles do modelo com a medida de risco CVaR. No entanto as alocações sugeridas foram significativamente diferentes, e o retorno acumulado do modelo que utiliza o CVaR foi superior.

CONCLUSÃO

6 Conclusão

Este trabalho teve como objetivo o desenvolvimento de um modelo matemático para gestão de carteiras de investimentos, que permitisse a utilização de opções para a construção das estratégias de posicionamento do investidor e que minimizasse o risco mensurado através do CVaR, uma medida mais consistente e robusta do que as normalmente utilizadas nos modelos clássicos de otimização.

Conforme apresentado anteriormente, foram realizados extensivos testes para analisar o desempenho das carteiras ótimas geradas pelo modelo. Os parâmetros que influenciam a simulação dos preços e a otimização das carteiras foram descritos e foram realizadas análise de sensibilidades. Por último, realizou-se uma análise através de uma metodologia seqüencial, que simula a utilização mensal do modelo por um investidor, ao longo de um ano, comparando os resultados obtidos com um *benchmark* de mercado, representado pelo índice Ibovespa. Em todos os momentos foram comparados os resultados obtidos pelo modelo que minimiza o risco mensurado segundo a abordagem CVaR à uma variação do modelo, que utiliza a variância como medida de risco.

As estratégias geradas pelo modelo que utiliza a variância não seguiram um padrão. Em alguns casos sugere o posicionamento apenas na ação (deixando o investidor totalmente exposto à grandes quedas), em alguns apenas na ação e em uma *call* ou em *put*, e em outros forma estratégias mistas com o posicionamento tanto na ação como em *calls* e *puts* de preços de exercício diferentes. Ou seja, não é possível identificar nenhum padrão nas carteiras sugeridas.

Por outro lado, o modelo que minimiza o CVaR gerou resultados bastantes consistentes entre si. Quando houve alocação em uma determinada ação, o modelo sempre sugere a compra de *puts* sobre esta ação, na mesma quantidade. Conforme explicado anteriormente, esta estratégia protege totalmente o investidor contra grandes quedas no preço da ação, uma vez que a queda do preço da ação é compensada pelo *payoff* da *put*, limitando a perda do investidor ao custo da compra da *put.* Esta estratégia é conhecida como *protective put*. Em alguns casos, o modelo sugere um posicionamento adicional em *calls*, alavancando os ganhos do investidor quando o preço da ação supera o preço de exercício da opção.

Os resultados comprovaram que o objetivo de desenvolver um modelo de gestão de carteiras de investimentos com opções que possa ser aplicado na prática por um investidor foi atingido. O modelo proposto é eficiente computacionalmente. Todos os procedimentos necessários para a simulação dos preços das ações e o cálculo de uma fronteira eficiente composta por 36 carteiras são realizados em aproximadamente 2 minutos, utilizando-se o MatLab R2006a, em um Athlon64 +3000 com 1gb de Ram.

É importante observar que a metodologia utilizada e a ferramenta desenvolvida é fácilmente adaptada para outros problemas de pesquisa operacional e engenharia de produção. A grande contribuição deste trabalho foi permitir a inclusão de opções sobre os ativos disponíveis e a utilização de uma medida de risco robusta no modelo de otimização desenvolvido. A ferramenta aqui apresentada poderia ser adaptada para a utilização, por exemplo, por um produtor de *commodities* que visa a sua proteção (*hedge*) contra as oscilações do preço de seu produto no mercado financeiro.

Para atingir o objetivo do trabalho, foi realizado um extensivo estudo e revisão bibliográfica sobre os conceitos financeiros e matemáticos que foram necessários, entre eles: Teoria Moderna de Carteira, mecanismos e produtos derivativos, estratégias com derivativos e o modelos de apreçamento de opções, métodos numéricos para simulação de variáveis aleatórias, metodologias para aferição de risco e métodos para cálculo da matriz de covariância de variáveis. Foram utilizados como referência livros de autores consagrados, como HULL (2005) e BODIE (2000), para o estudo dos principais conceitos financeiros e matemáticos. Realizou-se também uma busca de artigos científicos que representassem o que há de mais novo e avançado na gestão de carteiras de ativos com derivativos, resultando na adoção da metodologia CVaR para aferição de risco.

Ainda não são conhecidas aplicações no país que utilizam a abordagem descrita, que integra a simulação dos preços dos ativos e o apreçamento das opções com a otimização das carteiras e gerações de estratégias minimizando o CVaR, representando, portanto, uma contribuição significativa do trabalho.

6.1 Recomendações para trabalhos futuros

O resultado obtido no trabalho desenvolvido alcançou as expectativas, no entanto há pontos em que trabalhos futuros poderiam desenvolver e estender o estudo aqui apresentado:

- **Rebalanceamento da carteira:** o modelo proposto poderia ser estendido para uma abordagem multiperíodo que permitisse o rebalanceamento da carteira entre a data inicial e a data de horizonte. Na aplicação estudada, o horizonte de investimento de um mês poderia, por exemplo, permitir que o investidor realizasse o rebalanceamento de sua carteira semanalmente.

- **Universo de ativos e opções maior:** para fins didáticos, neste trabalho consideramos que o investidor dispunha de apenas 3 ações e 12 opções para alocar seu capital. Esse universo poderia ser expandido para contemplar um número maior de ativos.

- **Inclusão de contratos futuros:** poderia-se estender o modelo proposto para permitir a alocação de contratos futuros, sobre, por exemplo, o índice Ibovespa, de tal forma que estratégias ainda mais avançadas poderiam ser geradas.

- **Software para auxiliar a utilização pelo investidor:** poderia-se desenvolver uma ferramenta com uma interface gráfica amigável para o investidor que deseja calcular a fronteira eficiente e analisar as carteiras ótimas geradas pelo modelo. O resultado final então seria apresentado ao investidor através de gráficos, formulários e tabelas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

7 Referências Bibliográficas

ARTZNER P.; DELBAEN, F.; EBER, J. M.; HEATH, D. **Coherent measures of risk**. Mathematical Finance, 9(3):203–228, 1999.

BIRGE, J. R. **Introduction to Stochastic Programming**. New York: Springer-Verlag New York, Inc. 1997.

BLACK, F.; SCHOLES, M. **The Pricing of Options and Corporate Liabilities**. Journal of Political Economy 81, p. 637-659, Maio-Junho 1973.

BODIE, Z.; KANE, A.; MARCUS, A.. **Fundamentos de Investimentos**. Porto Alegre: Bookman, 2000.

FIGUEIREDO, A. C.. **Introdução aos Derivativos**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005.

HULL, J. C. **Fundamentos dos Mercados Futuros e de Opções**. São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros, 2005.

JORION, P. **Value at Risk: A Nova Fonte de Referência para a Gestão de Risco Financeiro.** 2ª ed. São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros, 2003

JUDICE, J. J.; RIBEIRO, C. O.; SANTOS, J. P. J. **Análise comparativa dos modelos de selecção de carteiras de ações de Markowitz e Konno**. Investigação Operacional, v.23, n.2, p.211-224, dez. 2003.

LARSEN, N.; MAUSSER, H.; URYASEV, S.; **Algorithms for Optimization of Value-at-Risk**. Research Report 2001-9, ISE Dept., University of Florida, 2001.

LEWIS, N. C. **Market Risk Modelling: Applied Statistical Methods for Practitioners.** Londres: Risk Water Group Ltd., 2003.

MARKOWITZ, H. M. Portfolio Selection. **Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.

MORGAN, Banco J. P. **RiskMetrics**. 4ª ed. New York, J.P. Morgan, 1996. 296p.

ROCKAFELLAR, R.T.; URYASEV, S. **Conditional Value-at-Risk for general loss distributions**. Journal of Banking and Finance, v.26, n.7, p.1443–1471, 2002.

RUSSI, B.. **Otimização multiperíodo de carteiras de investimento utilizando a técnica de geração de árvores de cenários**. São Paulo, 2005. 96 p.

TOPALOGLOU, N. **A Stochastic Programming Framework For International Portfolio Management.** University Of Cyprus, 2004.

WINSTON, L. W. **Introduction to Mathematical Programming**. Indiana University: Duxbury Press, 1995.

ANEXOS

ANEXO A: Método EWMA para cálculo da matriz das volatilidades e matriz de covariância das ações.

Os movimentos no preço de um ativo financeiro podem ser representados pela sua volatilidade, isto é, o desvio padrão da distribuição dos retornos. A volatilidade é normalmente calculada adotando-se pesos iguais para todas as observações:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^{T} (r_t - \bar{r})^2}$$

onde:

$\bar{r} =$ Média dos retornos do ativo

$r_t =$ Retorno no ativo no instante *t*

$T =$ Número total de observações

E analogamente, a covariância entre dois ativos é dada por:

$$\sigma_{12}^2 = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^{T} (r_{1t} - \bar{r}_1) \cdot (r_{2t} - \bar{r}_2)$$

No entanto, segundo MORGAN (1996), para captar de forma mais eficiente a dinâmica da volatilidade pode-se utilizar uma média móvel exponencial das observações históricas, onde as observações mais recentes têm um peso maior na estimação da volatilidade. Uma das principais vantagens dessa abordagem é que a volatilidade calculada reage mais rapidamente aos choques do mercado, uma vez que os dados mais recentes têm mais peso do que os dados mais antigos. Segundo esta metodologia, a volatilidade é calculada pela fórmula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\left(\sum_{t=1}^{T} \lambda^{t-1}\right)} \cdot \sum_{t=1}^{T} \lambda^{t-1} (r_t - \bar{r})^2} \cong \sqrt{(1-\lambda) \cdot \sum_{t=1}^{T} \lambda^{t-1} (r_t - \bar{r})^2}$$

onde:

$\lambda =$ Fator de decaimento]0,1]

Como se pode notar, quando o fator de decaimento é igual a 1, o estimador da volatilidade iguala-se ao método onde todas as observações têm pesos iguais. Quanto menor for o fator de decaimento, maior importância será dada às observações mais recentes. Para exemplificação, veja como os pesos que cada observação receberá serão alterados de acordo com o fator de decaimento:

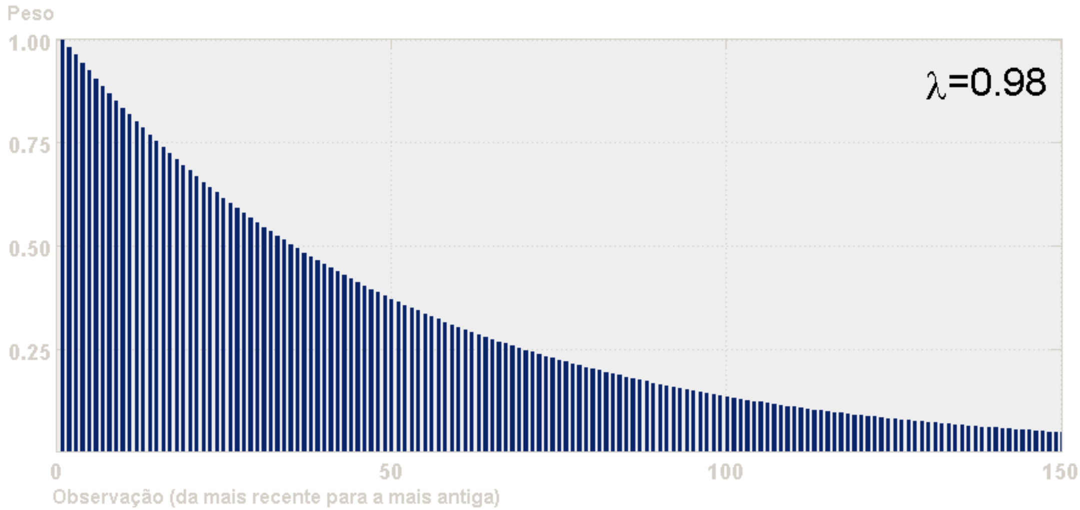


Figura 8-1: Pesos das observações para o fator de decaimento = 0.98

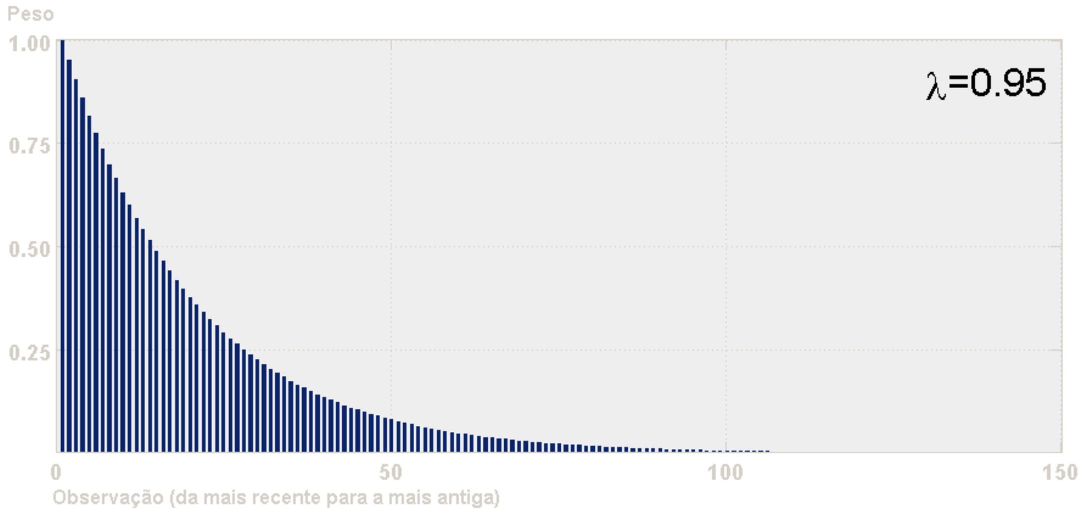


Figura 8-2: Pesos das observações para o fator de decaimento = 0.95

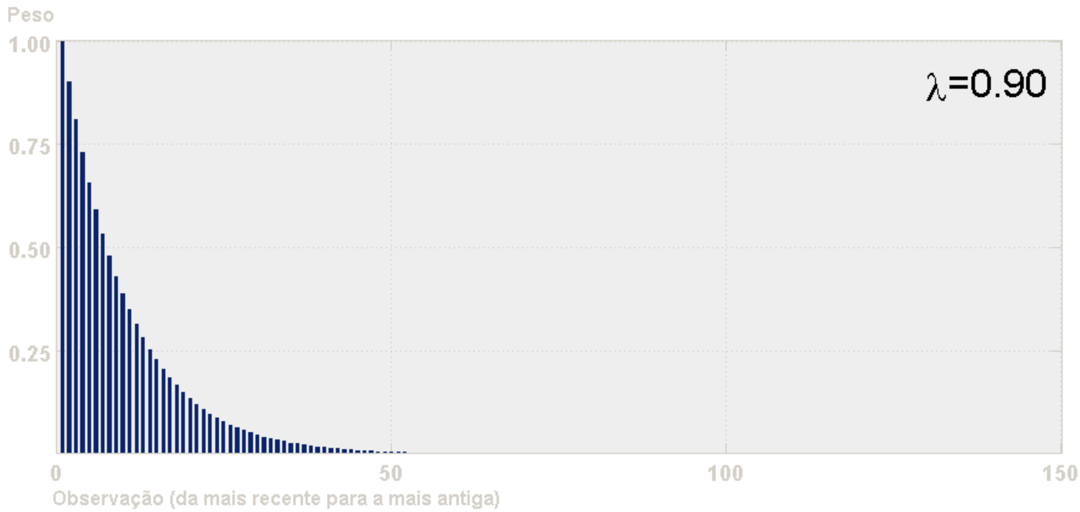


Figura 8-3: Pesos das observações para o fator de decaimento = 0.90

Neste trabalho a metodologia EWMA também foi usada, de forma semelhante ao caso da volatilidade, para o cálculo das covariâncias entre os ativos:

$$\sigma_{12}^2 = (1-\lambda)\cdot\sum_{t=1}^{T}\lambda^{t-1}\cdot(r_{1t}-\bar{r}_1)\cdot(r_{2t}-\bar{r}_2)$$

ANEXO B: Análise de sensibilidade – efeito do nível mínimo de retorno e da medida de risco utilizada na alocação ótima das carteiras.

As fronteiras eficientes das figuras “Fronteira Eficiente obtida com o modelo CVaR” (página 73) e “Fronteira Eficiente obtida com o modelo Variância” (página 76) foram obtidas variando-se o nível mínimo de retorno e a medida de risco utilizada. Para dois níveis mínimos de retorno escolhidos (μ=1.17% e μ=3.61%), as alocações completas das carteiras foram detalhadas na seção 5.3 (página 71).

Nas duas tabelas a seguir estão os detalhamentos de todas as carteiras obtidas, tanto se utilizando a medida de risco CVaR, como a variância. Adotou-se 1.00 para o fator de decaimento EWMA e 5 anos de dados utilizados da série histórica de preços disponíveis. Os outros parâmetros adotados foram:

- **Data inicial:** 02/01/2004
- **Horizonte de Investimento:** 21 dias
- **Caixa Inicial**: R$ 50.000
- **Número de simulações:** 1.000
- **Custo de transação (% do valor negociado):** 2%
- **Taxa livre de risco:** 12%

Carteira	Retorno	CVaR	AÇÕES			OPÇÕES											
			PETR4	USIM5	VALE5	Call PETR4 (14)	Call PETR4 (16)	Call USIM5 (26)	Call USIM5 (30)	Call VALE5 (43)	Call VALE5 (47)	Put PETR4 (14)	Put PETR4 (16)	Put USIM5 (26)	Put USIM5 (30)	Put VALE5 (43)	Put VALE5 (47)
1	0.64%	3.66%	0	0	1025	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1025
2	0.64%	3.66%	0	0	1025	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1025
3	0.72%	3.74%	0	144	932	0	0	0	0	0	0	0	0	0	144	0	932
4	0.87%	3.88%	0	423	752	0	0	0	0	0	0	0	0	0	423	0	752
5	1.02%	4.02%	0	698	575	0	0	0	0	0	0	0	0	0	698	0	575
6	1.17%	4.16%	0	969	401	0	0	0	0	0	0	0	0	0	969	0	401
7	1.32%	4.30%	0	1235	230	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1235	0	230
8	1.46%	4.44%	0	1497	61	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1497	0	61
9	1.60%	4.62%	0	1590	0	0	0	0	62	0	0	0	0	0	1590	0	0
10	1.74%	4.83%	0	1586	0	0	0	0	158	0	0	0	0	0	1586	0	0
11	1.88%	5.04%	0	1583	0	0	0	0	252	0	0	0	0	0	1583	0	0
12	2.01%	5.24%	0	1579	0	0	0	0	346	0	0	0	0	0	1579	0	0
13	2.14%	5.44%	0	1576	0	0	0	0	438	0	0	0	0	0	1576	0	0
14	2.28%	5.64%	0	1573	0	0	0	0	528	0	0	0	0	0	1573	0	0
15	2.40%	5.84%	0	1569	0	0	0	0	618	0	0	0	0	0	1569	0	0
16	2.53%	6.03%	0	1566	0	0	0	0	706	0	0	0	0	0	1566	0	0
17	2.66%	6.22%	0	1563	0	0	0	0	793	0	0	0	0	0	1563	0	0
18	2.78%	6.41%	0	1560	0	0	0	0	878	0	0	0	0	0	1560	0	0
19	2.90%	6.59%	0	1557	0	0	0	0	963	0	0	0	0	0	1557	0	0
20	3.03%	6.78%	0	1554	0	0	0	0	1047	0	0	0	0	0	1554	0	0
21	3.14%	6.96%	0	1551	0	0	0	0	1129	0	0	0	0	0	1551	0	0
22	3.26%	7.13%	0	1548	0	0	0	0	1211	0	0	0	0	0	1548	0	0
23	3.38%	7.31%	0	1545	0	0	0	0	1291	0	0	0	0	0	1545	0	0
24	3.49%	7.48%	0	1542	0	0	0	0	1371	0	0	0	0	0	1542	0	0
25	3.61%	7.66%	0	1539	0	0	0	0	1449	0	0	0	0	0	1539	0	0
26	3.72%	7.83%	0	1536	0	0	0	0	1527	0	0	0	0	0	1536	0	0
27	3.83%	7.99%	0	1533	0	0	0	0	1603	0	0	0	0	0	1533	0	0
28	3.94%	8.16%	0	1531	0	0	0	0	1679	0	0	0	0	0	1531	0	0
29	4.05%	8.32%	0	1528	0	0	0	0	1754	0	0	0	0	0	1528	0	0
30	4.16%	8.48%	0	1525	0	0	0	0	1828	0	0	0	0	0	1525	0	0
31	4.26%	8.64%	0	1523	0	0	0	0	1901	0	0	0	0	0	1523	0	0
32	4.37%	8.80%	0	1520	0	0	0	0	1974	0	0	0	0	0	1520	0	0
33	4.47%	8.96%	0	1517	0	0	0	0	2046	0	0	0	0	0	1517	0	0
34	4.57%	9.11%	0	1515	0	0	0	0	2116	0	0	0	0	0	1515	0	0
35	4.67%	9.27%	0	1512	0	0	0	0	2187	0	0	0	0	0	1512	0	0
36	4.77%	9.42%	0	1510	0	0	0	0	2256	0	0	0	0	0	1510	0	0

Tabela 8-1: Carteiras ótimas da fronteira eficiente obtida com a medida de risco CVaR, fator EWMA = 1.00 e 5 anos de período de dados utilizados.

Carteira	Retorno	Variância	AÇÕES			OPÇÕES											
			PETR4	USIM5	VALE5	Call PETR4 (14)	Call PETR4 (16)	Call USIM5 (26)	Call USIM5 (30)	Call VALE5 (43)	Call VALE5 (47)	Put PETR4 (14)	Put PETR4 (16)	Put USIM5 (26)	Put USIM5 (30)	Put VALE5 (43)	Put VALE5 (47)
1	0.41%	0.24%	634	402	513	0	0	0	0	0	0	0	1242	0	501	0	747
2	0.57%	0.25%	643	406	513	0	0	0	0	0	0	0	1197	0	450	0	715
3	0.72%	0.27%	652	409	513	0	0	0	0	0	0	0	1152	0	400	0	683
4	0.87%	0.29%	660	412	513	0	0	0	0	0	0	0	1109	0	350	0	652
5	1.02%	0.31%	669	415	513	0	0	0	0	0	0	0	1066	0	302	0	622
6	1.17%	0.34%	678	418	513	0	0	0	0	0	0	0	1024	0	254	0	592
7	1.32%	0.37%	686	420	514	0	0	0	0	0	0	4	981	0	207	0	562
8	1.46%	0.40%	693	423	514	0	0	0	0	0	0	95	922	0	161	0	534
9	1.60%	0.43%	699	427	515	0	0	0	0	0	0	296	841	0	117	0	507
10	1.74%	0.47%	704	430	515	0	0	0	0	0	0	505	760	0	73	0	481
11	1.88%	0.51%	709	433	516	0	0	0	0	0	0	707	680	0	30	0	455
12	2.01%	0.55%	711	441	515	0	0	0	0	0	0	929	581	0	0	0	424
13	2.14%	0.59%	704	464	507	0	0	0	0	0	0	1197	437	0	0	0	378
14	2.28%	0.63%	687	486	502	14	0	0	0	0	0	1423	312	0	0	0	340
15	2.40%	0.68%	587	503	520	138	0	0	0	0	0	1350	323	0	0	0	352
16	2.53%	0.72%	489	520	537	261	0	0	0	0	0	1277	334	0	0	0	363
17	2.66%	0.77%	392	537	554	382	0	0	0	0	0	1205	345	0	0	0	375
18	2.78%	0.82%	296	553	571	501	0	0	0	0	0	1134	355	0	0	0	386
19	2.90%	0.87%	201	569	588	619	0	0	0	0	0	1064	366	0	0	0	398
20	3.03%	0.92%	138	585	596	708	0	0	0	0	0	1053	360	0	0	0	393
21	3.14%	0.97%	142	602	586	733	0	0	0	0	0	1171	319	0	0	0	351
22	3.26%	1.02%	145	618	576	758	0	0	0	0	0	1287	278	0	0	0	311
23	3.38%	1.07%	149	634	566	782	0	0	0	0	0	1403	237	0	0	0	270
24	3.49%	1.13%	153	650	556	806	0	0	0	0	0	1516	197	0	0	0	230
25	3.61%	1.18%	157	665	546	830	0	0	0	0	0	1629	158	0	0	0	191
26	3.72%	1.24%	161	680	536	853	0	0	0	0	0	1739	119	0	0	0	152
27	3.83%	1.30%	164	696	526	877	0	0	0	0	0	1850	80	0	0	0	114
28	3.94%	1.36%	168	711	517	900	0	0	0	0	0	1958	43	0	0	0	75
29	4.05%	1.42%	171	726	506	922	0	0	0	7	0	2040	20	0	0	0	46
30	4.16%	1.48%	175	741	493	941	0	0	0	28	0	2089	20	0	0	0	32
31	4.26%	1.54%	179	757	480	961	0	0	0	49	0	2138	19	0	0	0	18
32	4.37%	1.60%	182	772	467	979	0	0	0	70	0	2192	15	0	0	0	4
33	4.47%	1.67%	185	787	453	999	0	0	0	96	0	2257	4	0	0	0	0
34	4.57%	1.73%	189	803	439	1020	0	0	0	125	0	2296	4	0	0	0	0
35	4.67%	1.79%	193	818	424	1040	0	0	0	154	0	2339	1	0	0	0	0
36	4.77%	1.86%	197	833	410	1060	0	0	0	183	0	2378	0	0	0	0	0

Tabela 8-2: Carteiras ótimas da fronteira eficiente obtida com a medida de risco variância, fator EWMA = 1.00 e 5 anos de período de dados utilizados.

ANEXO C: Análise de sensibilidade – efeito dos parâmetros da simulação nos preços médios dos cenários.

Conforme explicado na seção 5.4 (página 79), os parâmetros da simulação (fator de decaimento utilizado no método EWMA e período de dados utilizados) influenciam significativamente os cenários gerados pelo método da Simulação de Monte Carlo. Para analisar este efeito, fixou-se a data inicial em 02-Jan-2004, geraram-se 10.000 cenários para um horizonte de 21 dias úteis (1 mês) e depois foram calculados os preços médios das ações, a cada instante (dia). Parte desses dados foi representada visualmente nas figuras das páginas 83 a 85. Os dados completos obtidos estão detalhados nas três tabelas a seguir:

Preços simulados médios para a ação da Petrobrás (PETR4)												
Dia	Perído de dados utilizados = 5 anos			Perído de dados utilizados = 7 anos			Perído de dados utilizados = 9 anos			Perído de dados utilizados = 11 anos		
	Fator EWMA: 0.95	Fator EWMA: 0.98	Fator EWMA: 1.00	Fator EWMA: 0.95	Fator EWMA: 0.98	Fator EWMA: 1.00	Fator EWMA: 0.95	Fator EWMA: 0.98	Fator EWMA: 1.00	Fator EWMA: 0.95	Fator EWMA: 0.98	Fator EWMA: 1.00
1	16.89	16.89	16.89	16.89	16.89	16.89	16.89	16.89	16.89	16.89	16.89	16.89
2	16.92	16.92	16.92	16.91	16.91	16.92	16.91	16.91	16.91	16.96	16.95	16.96
3	16.95	16.95	16.96	16.93	16.93	16.95	16.93	16.94	16.94	17.02	17.02	17.03
4	16.98	16.97	16.99	16.95	16.95	16.97	16.95	16.95	16.96	17.08	17.08	17.11
5	17.00	17.00	17.02	16.98	16.97	16.99	16.96	16.97	16.99	17.15	17.14	17.18
6	17.03	17.03	17.06	16.99	16.99	17.01	16.98	16.99	17.02	17.21	17.20	17.25
7	17.06	17.05	17.09	17.01	17.01	17.04	17.00	17.00	17.04	17.27	17.26	17.33
8	17.08	17.08	17.12	17.03	17.03	17.07	17.02	17.03	17.06	17.34	17.32	17.40
9	17.11	17.11	17.14	17.05	17.05	17.09	17.04	17.05	17.09	17.40	17.39	17.47
10	17.14	17.14	17.18	17.07	17.07	17.12	17.05	17.06	17.11	17.46	17.44	17.55
11	17.17	17.17	17.21	17.09	17.10	17.14	17.07	17.08	17.13	17.52	17.51	17.62
12	17.19	17.20	17.24	17.11	17.12	17.17	17.09	17.10	17.16	17.59	17.57	17.69
13	17.22	17.23	17.28	17.12	17.14	17.19	17.11	17.12	17.19	17.66	17.64	17.78
14	17.25	17.25	17.30	17.15	17.16	17.21	17.13	17.14	17.21	17.72	17.70	17.85
15	17.27	17.28	17.34	17.16	17.19	17.25	17.15	17.16	17.24	17.78	17.77	17.91
16	17.30	17.31	17.37	17.18	17.21	17.27	17.17	17.18	17.27	17.85	17.83	17.99
17	17.33	17.34	17.40	17.21	17.23	17.28	17.18	17.19	17.29	17.91	17.90	18.06
18	17.35	17.36	17.43	17.23	17.25	17.30	17.20	17.21	17.32	17.98	17.97	18.15
19	17.38	17.39	17.46	17.25	17.27	17.34	17.21	17.23	17.33	18.05	18.03	18.21
20	17.41	17.42	17.50	17.26	17.29	17.36	17.23	17.25	17.36	18.12	18.10	18.29
21	17.44	17.45	17.54	17.28	17.31	17.39	17.24	17.27	17.39	18.18	18.16	18.37
22	17.47	17.47	17.58	17.30	17.33	17.42	17.26	17.28	17.42	18.25	18.23	18.44

Tabela 8-3: Preços simulados médios para ação PETR4, considerando-se a data inicial de 02/01/2004 e um horizonte de 21 dias úteis.

Preços simulados médios para a ação da Usiminas (USIM5)												
Dia	Perído de dados utilizados = 5 anos			Perído de dados utilizados = 7 anos			Perído de dados utilizados = 9 anos			Perído de dados utilizados = 11 anos		
	Fator EWMA: 0.95	Fator EWMA: 0.98	Fator EWMA: 1.00	Fator EWMA: 0.95	Fator EWMA: 0.98	Fator EWMA: 1.00	Fator EWMA: 0.95	Fator EWMA: 0.98	Fator EWMA: 1.00	Fator EWMA: 0.95	Fator EWMA: 0.98	Fator EWMA: 1.00
1	28.19	28.19	28.19	28.19	28.19	28.19	28.19	28.19	28.19	28.19	28.19	28.19
2	28.27	28.28	28.27	28.22	28.22	28.23	28.22	28.23	28.22	28.29	28.29	28.30
3	28.36	28.35	28.36	28.28	28.24	28.28	28.26	28.26	28.26	28.40	28.39	28.42
4	28.43	28.42	28.44	28.31	28.28	28.33	28.29	28.30	28.30	28.50	28.48	28.53
5	28.51	28.49	28.52	28.35	28.30	28.36	28.31	28.33	28.34	28.60	28.59	28.62
6	28.59	28.56	28.60	28.40	28.35	28.39	28.35	28.36	28.38	28.69	28.68	28.72
7	28.67	28.64	28.67	28.44	28.40	28.44	28.39	28.40	28.42	28.79	28.77	28.83
8	28.74	28.73	28.75	28.48	28.43	28.49	28.42	28.44	28.46	28.89	28.85	28.93
9	28.81	28.80	28.85	28.51	28.48	28.55	28.45	28.47	28.49	28.98	28.96	29.05
10	28.90	28.88	28.93	28.56	28.52	28.61	28.48	28.50	28.52	29.08	29.05	29.17
11	28.97	28.96	29.02	28.59	28.56	28.66	28.52	28.55	28.53	29.16	29.15	29.28
12	29.05	29.05	29.11	28.64	28.60	28.71	28.55	28.58	28.57	29.28	29.26	29.40
13	29.12	29.12	29.18	28.66	28.66	28.74	28.60	28.63	28.61	29.39	29.36	29.53
14	29.19	29.20	29.27	28.71	28.70	28.78	28.63	28.65	28.63	29.49	29.48	29.63
15	29.26	29.26	29.36	28.73	28.74	28.84	28.68	28.69	28.68	29.60	29.58	29.73
16	29.35	29.34	29.45	28.78	28.78	28.88	28.70	28.73	28.74	29.70	29.69	29.84
17	29.42	29.42	29.53	28.81	28.81	28.91	28.73	28.76	28.76	29.80	29.80	29.94
18	29.49	29.49	29.61	28.85	28.86	28.96	28.74	28.78	28.80	29.89	29.90	30.07
19	29.58	29.56	29.70	28.88	28.90	29.00	28.77	28.81	28.82	30.00	30.01	30.18
20	29.66	29.63	29.77	28.92	28.93	29.05	28.79	28.84	28.85	30.11	30.11	30.29
21	29.73	29.71	29.85	28.96	28.97	29.09	28.81	28.87	28.89	30.23	30.21	30.41
22	29.80	29.78	29.92	29.00	29.02	29.15	28.84	28.90	28.93	30.33	30.31	30.53

Tabela 8-4: Preços simulados médios para ação USIM5, considerando-se a data inicial de 02/01/2004 e um horizonte de 21 dias úteis.

Preços simulados médios para a ação da Vale do Rio Doce (VALE5)												
Dia	Perído de dados utilizados = 5 anos			Perído de dados utilizados = 7 anos			Perído de dados utilizados = 9 anos			Perído de dados utilizados = 11 anos		
	Fator EWMA: 0.95	Fator EWMA: 0.98	Fator EWMA: 1.00	Fator EWMA: 0.95	Fator EWMA: 0.98	Fator EWMA: 1.00	Fator EWMA: 0.95	Fator EWMA: 0.98	Fator EWMA: 1.00	Fator EWMA: 0.95	Fator EWMA: 0.98	Fator EWMA: 1.00
1	44.78	44.78	44.78	44.78	44.78	44.78	44.78	44.78	44.78	44.78	44.78	44.78
2	44.88	44.88	44.89	44.85	44.84	44.86	44.84	44.85	44.83	44.93	44.93	44.95
3	44.98	44.96	45.00	44.92	44.91	44.95	44.91	44.92	44.90	45.11	45.08	45.12
4	45.08	45.06	45.10	45.00	44.98	45.04	44.97	44.98	44.96	45.27	45.24	45.31
5	45.18	45.17	45.19	45.07	45.05	45.10	45.02	45.03	45.02	45.43	45.38	45.48
6	45.28	45.25	45.30	45.13	45.10	45.15	45.08	45.09	45.11	45.60	45.53	45.67
7	45.38	45.35	45.41	45.21	45.17	45.24	45.13	45.15	45.19	45.76	45.70	45.85
8	45.46	45.45	45.53	45.28	45.23	45.32	45.20	45.22	45.24	45.89	45.85	46.02
9	45.55	45.55	45.63	45.37	45.32	45.42	45.27	45.26	45.32	46.06	46.01	46.20
10	45.66	45.65	45.74	45.44	45.37	45.50	45.32	45.32	45.37	46.23	46.16	46.37
11	45.77	45.76	45.85	45.52	45.45	45.59	45.39	45.38	45.43	46.38	46.31	46.54
12	45.87	45.85	45.97	45.58	45.52	45.67	45.45	45.42	45.51	46.55	46.47	46.71
13	45.99	45.95	46.07	45.66	45.61	45.76	45.52	45.50	45.58	46.70	46.64	46.90
14	46.10	46.07	46.19	45.72	45.69	45.83	45.58	45.56	45.64	46.87	46.81	47.08
15	46.21	46.17	46.30	45.78	45.75	45.93	45.64	45.62	45.71	47.04	46.98	47.23
16	46.31	46.26	46.42	45.86	45.81	46.01	45.71	45.68	45.81	47.20	47.14	47.40
17	46.40	46.35	46.53	45.93	45.89	46.07	45.76	45.75	45.86	47.37	47.31	47.56
18	46.51	46.47	46.64	46.01	45.98	46.17	45.83	45.81	45.93	47.53	47.47	47.75
19	46.61	46.57	46.75	46.08	46.05	46.28	45.89	45.86	46.00	47.69	47.63	47.93
20	46.71	46.66	46.85	46.16	46.13	46.35	45.94	45.92	46.09	47.86	47.80	48.12
21	46.81	46.77	46.95	46.22	46.20	46.45	46.01	45.97	46.16	48.04	47.97	48.29
22	46.92	46.87	47.08	46.31	46.27	46.55	46.06	46.03	46.20	48.20	48.14	48.47

Tabela 8-5: Preços simulados médios para ação VALE5, considerando-se a data inicial de 02/01/2004 e um horizonte de 21 dias úteis.

ANEXO D: Análise de sensibilidade – efeito dos parâmetros da simulação na alocação ótima das carteiras.

Assim como esclarecido na seção 5.4 (página 79), os parâmetros da simulação (fator de decaimento utilizado no método EWMA e período de dados utilizados), influenciam indiretamente as alocações das carteiras ótimas obtidas. Estes parâmetros alteram substancialmente as estatísticas históricas das ações, conforme detalhado na Tabela 5-11 (página 82). Desta forma, os diferentes cenários obtidos pelo método da Simulação de Monte Carlo são alterados, que, por sua vez, influenciam as carteiras ótimas sugeridas pelo modelo.

Para exemplificar este efeito, adotou um nível mínimo de retorno (μ) de 2.01% ao período (equivalente a um retorno anualizado de 27.00%) e um nível de confiança (α) de 95% (aplicável apenas ao caso do modelo com a medida de risco CVaR), e então observou-se a carteira ótima sugerida com os parâmetros da simulação eram alterados. Os outros parâmetros adotados foram:

- **Data inicial:** 02/01/2004
- **Horizonte de Investimento:** 21 dias
- **Caixa Inicial**: R$ 50.000
- **Número de simulações:** 1.000
- **Custo de transação (% do valor negociado):** 2%
- **Taxa livre de risco:** 12%

Os dados completos das carteiras obtidas estão descritos nas duas tabelas a seguir:

Fator EWMA	Período Utililizado	Retorno	CVaR	AÇÕES PETR4	USIM5	VALE5	OPÇÕES Call PETR4 (14)	Call PETR4 (16)	Call USIM5 (26)	Call USIM5 (30)	Call VALE5 (43)	Call VALE5 (47)	Put PETR4 (14)	Put PETR4 (16)	Put USIM5 (26)	Put USIM5 (30)	Put VALE5 (43)	Put VALE5 (47)
0.90	5 anos	2.01%	3.81%	0	0	1023	0	0	0	0	0	789	0	0	0	0	0	1023
0.95	5 anos	2.01%	4.67%	0	0	1014	0	0	0	0	0	1187	0	0	0	0	0	1014
1.00	5 anos	2.01%	5.24%	0	1579	0	0	0	0	346	0	0	0	0	0	1579	0	0
0.90	7 anos	2.01%	6.03%	0	0	1000	0	0	0	0	0	2200	0	0	0	0	0	1000
0.95	7 anos	2.01%	3.55%	26	0	1017	0	0	0	0	0	0	1394689	37	0	0	0	1018
1.00	7 anos	2.01%	8.55%	0	0	973	0	0	0	0	0	1434	0	0	0	0	0	973
0.90	9 anos	2.01%	10.60%	0	0	951	0	0	0	0	0	5103	0	0	0	0	0	951
0.95	9 anos	2.01%	8.04%	0	0	978	0	0	0	0	0	3188	0	0	0	0	0	978
1.00	9 anos	2.01%	13.02%	0	0	925	0	0	0	0	0	2904	0	0	0	0	0	925
0.90	11 anos	2.05%	2.56%	0	0	1037	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1037
0.95	11 anos	2.01%	2.68%	1	0	1035	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1034
1.00	11 anos	2.26%	4.65%	0	0	1014	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1014

Tabela 8-6: Carteiras ótimas obtidas pelo modelo com a medida de risco CVaR, fixando-se um nível mínimo de retorno de 2.01% ao período e um nível de confiança de 95%.

Fator EWMA	Período Utiliilizado	Retorno	Variância	AÇÕES			OPÇÕES											
				PETR4	USIM5	VALE5	Call PETR4 (14)	Call PETR4 (16)	Call USIM5 (26)	Call USIM5 (30)	Call VALE5 (43)	Call VALE5 (47)	Put PETR4 (14)	Put PETR4 (16)	Put USIM5 (26)	Put USIM5 (30)	Put VALE5 (43)	Put VALE5 (47)
0.90	5 anos	2.01%	0.33%	1139	257	496	0	0	0	0	0	0	1	1184	0	0	0	87
0.95	5 anos	2.01%	0.28%	1282	246	437	0	0	0	0	0	0	0	0	0	195	0	161
1.00	5 anos	2.01%	0.55%	711	441	515	0	0	0	0	0	0	929	581	0	0	0	424
0.90	7 anos	2.01%	0.88%	377	119	648	2102	0	312	0	179	0	0	0	0	1119	0	88
0.95	7 anos	2.01%	0.74%	411	31	743	2262	0	31	0	0	0	0	852	0	155	0	269
1.00	7 anos	2.01%	1.82%	191	112	850	1041	0	0	0	111	0	0	1	0	0	0	315
0.90	9 anos	2.01%	0.92%	535	66	569	2980	0	97	0	355	0	0	0	0	712	0	394
0.95	9 anos	2.01%	1.10%	631	125	418	3515	0	321	0	383	0	0	0	0	1142	0	430
1.00	9 anos	2.01%	3.01%	273	144	683	1481	0	431	0	368	0	0	0	0	1028	0	0
0.90	11 anos	2.01%	0.16%	1162	300	396	0	0	0	0	0	0	0	0	0	755	0	616
0.95	11 anos	2.01%	0.16%	1128	276	426	0	0	0	0	0	0	1	0	0	654	0	645
1.00	11 anos	2.01%	0.66%	444	599	450	0	0	0	0	0	0	0	59	0	942	0	534

Tabela 8-7: Carteiras ótimas obtidas pelo modelo com a medida de risco variância, fixando-se um nível mínimo de retorno de 2.01% ao período.

.

ANEXO E: Análise de sensibilidade – efeito do nível de significância do cálculo do CVaR na alocação ótima das carteiras.

O nível de significância (α) determina qual o percentil da distribuição de retornos que será utilizado para o cálculo do CVaR, conforme a conceituação da seção 3.1.3 (página 43).

Para analisar o efeito deste parâmetro nas alocações das carteiras ótimas sugeridas, fixaram-se três níveis mínimos de retornos (μ=1.46%, μ=2.28% e μ=3.14%) e então as carteiras ótimas foram calculadas, alternando-se os valores de 95%, 97% e 99% para o nível de confiança. Os outros parâmetros adotados foram:

- **Data inicial:** 02/01/2004
- **Horizonte de Investimento:** 21 dias
- **Caixa Inicial**: R$ 50.000
- **Número de simulações:** 1.000
- **Custo de transação (% do valor negociado):** 2%
- **Taxa livre de risco:** 12%
- **Fator de decaimento EWMA:** 1.00
- **Período de dados utilizados:** 5 anos

Os resultados obtidos estão descritos na tabela a seguir:

Retorno	Nível de Confiança	CVaR	AÇÕES			OPÇÕES											
			PETR4	USIM5	VALE5	Call PETR4 (14)	Call PETR4 (16)	Call USIM5 (26)	Call USIM5 (30)	Call VALE5 (43)	Call VALE5 (47)	Put PETR4 (14)	Put PETR4 (16)	Put USIM5 (26)	Put USIM5 (30)	Put VALE5 (43)	Put VALE5 (47)
1.46%	95%	4.44%	0	1497	61	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1497	0	61
1.46%	97%	3.88%	0	0	1023	0	0	0	0	0	81	0	0	0	0	0	1023
1.46%	99%	3.96%	0	0	1022	0	0	0	0	0	114	0	0	0	0	0	1022
2.28%	95%	5.64%	0	1573	0	0	0	0	528	0	0	0	0	0	1573	0	0
2.28%	97%	4.90%	0	0	1012	0	0	0	0	0	473	0	0	0	0	0	1012
2.28%	99%	5.02%	0	0	1010	0	0	0	0	0	517	0	0	0	0	0	1010
3.14%	95%	6.96%	0	1551	0	0	0	0	1129	0	0	0	0	0	1551	0	0
3.14%	97%	6.00%	0	0	1000	0	0	0	0	0	891	0	0	0	0	0	1000
3.14%	99%	6.14%	0	0	998	0	0	0	0	0	947	0	0	0	0	0	998

Tabela 8-8: Carteiras ótimas obtidas pelo modelo com a medida de risco CVaR, variando-se o nível de confiança.

Os resultados obtidos foram consistentes entre si: por mais que o CVaR calculado seja diferente, o posicionamento do investidor (representado pelo perfil do *payoff* obtido em função do preço da ação) em cada ativo é bastante semelhante. Como podemos notar pelos dados da tabela acima, em todos os casos em que o modelo sugere o posicionamento em alguma ação, ele também sugere a compra de *puts* que têm como objeto esta mesma ação, na mesma quantidade. Dessa forma o investidor está totalmente protegido contra quaisquer quedas no preço da ação que ultrapassarem o preço de exercício da *put*. Nestes casos, o resultado do posicionamento do investidor neste ativo (composto pelo posicionamento da ação e nas opções derivadas) sempre terá sua perda limitada ao custo da compra das *puts*.

Em alguns casos o modelo também sugere uma compra de *calls*. Com esta alocação, os ganhos obtidos pelo investidor, caso o preço da ação supere o preço de exercício da *call*, são alavancados.