



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA



SEL0394 - Projeto de Formatura

Sistemas Chaveados: Estudo Geral

Aluno: Guilherme Afonso Mazanti

Orientadores: Yacine Chitour
Mario Sigalotti

São Carlos
2011

GUILHERME AFONSO MAZANTI

SISTEMAS CHAVEADOS: ESTUDO GERAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Escola de Engenharia de São Carlos, da
Universidade de São Paulo

Curso de Engenharia Elétrica com ênfase em
Eletrônica

ORIENTADORES: YACINE CHITOUR, MARIO SIGALOTTI

São Carlos
2011

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

M475s Mazanti, Guilherme Afonso.
Sistemas chaveados : estudo geral. / Guilherme Afonso
Mazanti ; orientador Yacine Chitour ; Mario Sigalotti --
São Carlos, 2011.

Monografia (Graduação em Engenharia Elétrica com
ênfase em Eletrônica) -- Escola de Engenharia de São
Carlos da Universidade de São Paulo, 2011.

1. Sistemas chaveados. 2. Estabilidade. 3.
Estabilização. 4. Sistemas lineares. 5. Funções de
Lyapunov. 6. Funções de Lyapunov quadráticas comuns. 7.
Teoremas recíprocos de Lyapunov. 8. Princípios
variacionais. 9. Tempo de permanência. 10. Funções de
Lyapunov múltiplas. 11. Excitação persistente. I.
Titulo.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Nome: Guilherme Afonso Mazanti

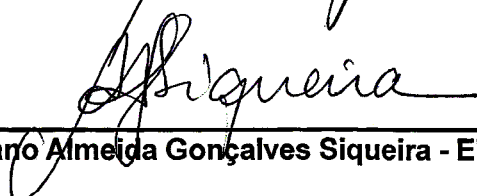
Título: "Switched Systems: An Overview ("Sistemas Chaveados: Estudo Geral")"

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado
em 25/11/2011,


com NOTA 10,0 (dez, zero), pela comissão julgadora:



Prof. Associado Marco Henrique Terra - EESC/USP



Prof. Dr. Adriano Almeida Gonçalves Siqueira - EESC/USP



Prof. Associado Homero Schiabel
Coordenador da CoC-Engenharia Elétrica
EESC/USP

Agradecimentos

E eis que, com este trabalho de conclusão de curso, encerro mais uma etapa da minha vida, a minha graduação. E são estes momentos de encerramento muito propícios para reflexão sobre a vida, ^{o universo} e tudo mais, reflexão esta que leva naturalmente a pensar na importância que certas pessoas apresentam em nossas vidas e no nosso percurso. É este então o momento propício¹ para exteriorizar os meus mais sinceros agradecimentos a essas pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para que eu trilhasse o caminho que me leva hoje a esta conclusão de curso.

Como toda boa seção de agradecimentos, começo a minha agradecendo à minha família. Porque, francamente, só mãe mesmo para ouvir um “então, estou indo morar sozinho a mais de 300km daqui, manda feijão congelado? Fim de semana que vem trago roupas para lavar” e achar isto normal. E a minha, no meio da minha graduação, ainda teve que ouvir um “então, mãe, estou indo morar por 2 anos e meio na França, mas eu volto depois, tá?”. E ainda por cima minha família toda me apoiou nessas decisões à primeira vista malucas, mas que me trouxeram aonde estou hoje. Então, por todo apoio, fica aqui à minha família o meu muito obrigado!

Deixo também meus agradecimentos a todos os meus amigos. Foi com eles, afinal, que passei a maior parte dos momentos da minha vida universitária, bons ou ruins². Foram eles que estavam ao meu lado em todos esses momentos e, por isso tudo, agradeço muito.

Passando aos que mais diretamente me auxiliaram na minha vida acadêmica e no presente trabalho, agradeço aos meus professores. Muitos foram meus professores que, de uma forma ou de outra, me apoiaram e me ajudaram em vários momentos da minha graduação. O agradecimento especial vai certamente para o professor Hildebrando, meu orientador de iniciação científica por mais de dois anos, que desenvolveu o meu gosto por matemática e sempre me motivou e me auxiliou nas minhas escolhas acadêmicas. Agradeço também aos professores Yacine e Mario, meus orientadores de estágio na França, que me ajudaram a desenvolver o meu primeiro projeto de pesquisa “de verdade” - primeiro de muitos, espero!

A todos os supracitados, e a tantos outros que me auxiliaram de uma forma ou de outra, deixo aqui o meu muito obrigado: Muito obrigado!

¹Logo antes da próxima centena de páginas de trabalho científico e das centenas de equações que elas trazem.

²A classificação dos nossos churrascos vegetarianos como “bons”, “ruins” ou simplesmente “coisas de nerds malucos” fica como exercício para o leitor.

Resumo

Sistemas chaveados aparecem naturalmente em certos modelos de processos físicos, em que a dinâmica do sistema muda abruptamente segundo certas condições. Mais recentemente, os sistemas chaveados têm despertado interesse devido aos sistemas de controle em que uma lógica é utilizada para selecionar um dentre vários comportamentos possíveis do sistema; isto é particularmente utilizado no contexto do projeto de múltiplos controladores para uma única planta a fim de melhorar o desempenho do sistema.

A análise da estabilidade dos sistemas sob chaveamento não é uma questão trivial, pois o chaveamento em um sistema introduz fenômenos não observados nos subsistemas que o compõem; assim, um sistema chaveado pode ser composto de subsistemas estáveis mas apresentar um comportamento instável. Faz-se necessária, por conseguinte, uma análise mais refinada da estabilidade de sistemas chaveados para obter condições que garantam sua estabilidade, tanto do ponto de vista de análise de um sistema sob um chaveamento ou classe de chaveamentos quanto do ponto de vista de projeto de sinal de chaveamento estabilizante para um sistema.

Este trabalho apresenta os principais resultados de estabilidade e estabilização de sistemas chaveados obtidos nos últimos anos, com enfoque tanto em resultados aplicáveis na prática quanto em técnicas matemáticas de análise e estudo de sistemas chaveados. Um novo resultado sobre estabilização de sistemas de controle lineares planares a excitação persistente com taxa de convergência arbitrária também é apresentado.

Palavras-chave: sistemas chaveados, estabilidade, estabilização, sistemas lineares, funções de Lyapunov, funções de Lyapunov quadráticas comuns, teoremas recíprocos de Lyapunov, princípios variacionais, tempo de permanência, funções de Lyapunov múltiplas, excitação persistente.

Abstract

Switched systems appear naturally when modeling certain physical processes in which the dynamics of the system changes abruptly under certain conditions. More recently, switched systems have attracted interest due to the use of control systems in which a certain logic is used to select one of several possible behaviors of the system; this is particularly used in the context of design of multiple controllers to a single plant in order to improve system performance.

The stability analysis of systems under switching is not trivial, since the switching introduces phenomena not observed in subsystems that compose the original system; for instance, a switched system may be composed of stable subsystems and yet present an unstable behavior. It is thus necessary to perform a more refined analysis of the stability of switched systems to obtain conditions that guarantee stability, both in terms of analysis of a system under a switching signal or a class of switching signals and in terms of the choice of a switching signal that stabilizes a given system.

This paper presents the main results of stability and stabilization of switched systems obtained in recent years, focusing both on results applicable in practice and on techniques of mathematical analysis and study of switched systems. A new result on the stabilization of planar persistently excited linear control systems with arbitrary rate of convergence is also presented.

Keywords: switched systems, stability, stabilization, linear systems, Lyapunov functions, common quadratic Lyapunov functions, converse Lyapunov theorems, variational principles, dwell time, multiple Lyapunov functions, persistence of excitation.

Résumé

Les systèmes à commutation apparaissent naturellement dans la modélisation de quelques processus physiques, dans lesquels la dynamique du système change brusquement sous certaines conditions. Plus récemment, les systèmes à commutation ont suscité plus d'intérêt en raison des systèmes de commande dans lesquels une logique est utilisée pour choisir un parmi plusieurs comportements possibles du système ; ceci est particulièrement utilisé dans le projet de plusieurs contrôleurs pour un seul système en vue d'améliorer sa performance.

L'analyse de la stabilité des systèmes à commutation n'est pas triviale, car la commutation introduit des phénomènes qui ne sont pas présents dans les sous-systèmes qui composent le système d'origine ; ainsi, un système à commutation peut être composé de sous-systèmes stables et présenter pourtant un comportement instable. Par conséquent, il est nécessaire de faire une analyse plus fine de la stabilité des systèmes à commutation pour obtenir des conditions qui garantissent la stabilité, que ce soit d'un point de vue d'analyse d'un système sous un signal ou une classe de signaux de commutation ou d'un point de vue de projet de signal de commutation capable de stabiliser un système.

Ce document présente les principaux résultats de stabilité et stabilisation des systèmes à commutation obtenus dans les dernières années, en se concentrant à la fois sur des résultats applicables en pratique et sur des techniques mathématiques d'analyse et d'étude de systèmes à commutation. Un nouveau résultat sur la stabilisation de systèmes de commande linéaires planaires à excitation persistante avec un taux de convergence arbitraire est aussi présenté.

Mots-clés : systèmes à commutation, stabilité, stabilisation, systèmes linéaires, fonctions de Lyapunov, fonctions de Lyapunov quadratiques communes, théorèmes réciproques de Lyapunov, principes variationnels, temps de permanence, fonctions de Lyapunov multiples, excitation persistante.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Sistemas híbridos	1
1.2	Sistemas chaveados	2
1.3	Trabalho realizado	8
1.4	Organização do documento	9
2	Definições	11
2.1	Notações	11
2.2	Sistemas chaveados	11
2.3	Soluções de sistemas chaveados	15
2.3.1	Comportamento de Zenão	16
2.3.2	Movimento escorregadio	18
2.4	Estabilidade	20
2.5	Funções de Lyapunov	22
3	Análise da estabilidade sob chaveamento arbitrário	27
3.1	Sistemas chaveados, inclusões diferenciais e estabilidade robusta	28
3.2	Função de Lyapunov quadrática comum	29
3.2.1	Matrizes que comutam	30
3.2.2	Algoritmos numéricos	31
3.2.3	Condições suficientes para a existência de CQLF	32
3.2.4	Condições necessárias e suficientes para a existência de CQLF	36
3.3	Outros tipos de funções de Lyapunov	38
3.4	Teoremas recíprocos de Lyapunov	41
3.5	Análise por princípios variacionais	43
3.5.1	Problema da estabilidade absoluta	44
3.5.2	Sistemas a tempo discreto	45
3.5.3	Sistemas chaveados planares a dois subsistemas	45
4	Análise da estabilidade sob chaveamento restrito	53
4.1	Chaveamento restrito pelo tempo	55
4.1.1	Tempo de permanência	55

4.1.2	Funções de Lyapunov múltiplas	58
4.1.3	Estabilização de sistemas com tempo de permanência	60
4.1.4	Sinais de chaveamento a excitação persistente	62
4.2	Chaveamento restrito pelo estado	68
4.2.1	Funções de Lyapunov quadráticas por partes	68
4.3	Estabilização pelo chaveamento	72
4.3.1	Estabilização quadrática	73
4.3.2	Estabilização quadrática por partes	77
4.3.3	Estabilizabilidade pelo chaveamento	79
5	Estabilização de sistemas de controle lineares planares a excitação persistente com taxa de convergência arbitrária	81
5.1	Estratégia da demonstração	82
5.2	Mudança de variáveis	83
5.3	Propriedades do sistema nas novas variáveis	85
5.3.1	Coordenadas polares	85
5.3.2	Rotações ao redor da origem	85
5.3.3	Decomposição do tempo em intervalos \mathcal{J}_+ e \mathcal{J}_0	88
5.3.4	Estimativas em intervalos da família \mathcal{J}_+	89
5.3.5	Estimativas em intervalos da família \mathcal{J}_0	94
5.3.6	Estimativa de y	106
5.4	Demonstração do Teorema 5.1	107
6	Conclusões	109
	Referências Bibliográficas	111

Lista de Figuras

1.1	Modelo de sistema híbrido do sistema de refrigeração de um quarto.	1
1.2	Comportamento da solução $x(t)$ do sistema chaveado do Exemplo 1.1 quando $x(0) = (0, 1)^T$ e $\sigma(0) = 1$	5
1.3	Comportamento da solução $x(t)$ do sistema chaveado do Exemplo 1.2 quando $x(0) = (1, 0)^T$ e $\sigma(0) = 1$	8
2.1	Trajétória do sistema chaveado definido por (2.5) quando $x(0) = (2, 0)^T$ e $\sigma(0) = 1$. .	17
2.2	Sinal de chaveamento correspondente à trajetória da Figura 2.1.	18
2.3	Campo de vetores (em vermelho) e trajetória (em azul) do sistema chaveado do Exemplo 2.5.	19
2.4	Campos de vetores normalizados A_1x (em azul) e A_2x (em vermelho) (representados em roxo no caso em que são paralelos), retas em que estes campos são paralelos e regiões Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4	24
2.5	Trajétória do sistema chaveado (2.11) sob a lógica de chaveamento (2.12) e com condição inicial $x(0) = (1, 0)^T$	25
2.6	Região elíptica $\frac{(r-3)^2}{8} + q^2 < 1$ (em azul) e parte da região elíptica $\frac{(r-300)^2}{80000} + \frac{q^2}{100} < 1$ (em vermelho).	26
4.1	Representação das condições do Teorema 4.8 para um sistema chaveado com 3 subsistemas. Estão representadas as funções $V_k(x(t))$, $k \in \{1, 2, 3\}$, em linha contínua quando o subsistema k está ativo e em tracejado senão. Verifica-se que a função $V_{\sigma(t)}(x(t))$ não é decrescente, mas o critério do Teorema 4.8 está satisfeito: a cada vez que se entra no subsistema k , o valor de $V_k(x(t))$ é inferior ao valor desta função quando se saiu do subsistema k pela última vez.	59
4.2	Representação de uma partição do espaço de estados \mathbb{R}^2 em 7 regiões Ω_k . O chaveamento de k a m só pode ocorrer na região $\Omega_k \cap \Omega_m$	69
4.3	Representação de algumas trajetórias do sistema (4.39).	75
4.4	Função de Lyapunov $V(x) = x^T Px$ calculada sobre as trajetórias do sistema (4.39) representadas na Figura 4.3.	76

5.1	Uma função β , um intervalo I e o intervalo correspondente J . As propriedades de que precisamos são que $J \subset I$ e que $\gamma(s) \geq \frac{\mu}{2T}$ para $s \in J$. Neste caso, pode-se mostrar que a solução gira em sentido horário em volta da origem em J e que o número de voltas aumenta como $k^{3/4}$, enquanto que, no resto do intervalo I , o número de voltas ao redor da origem em sentido anti-horário é em $O(k^{1/2})$, o que implica que, para k grande o suficiente, $\theta(t+T) - \theta(t) \leq -2\pi$	86
5.2	Argumento de contradição utilizado para mostrar a segunda desigualdade em (5.23). A existência de t tal que $\theta(t) > \theta(t_{n-1})$ permite construir um intervalo $[s_0, s_1]$ em que $\theta(s_1) > \theta(s_0)$ mas $\dot{\theta} \leq 0$, levando assim a um absurdo.	89
5.3	Campo de vetores f para $\gamma = 1$ (em azul) e $\gamma = 0$ (em vermelho). Todos os vetores representados estão normalizados. As conclusões do Princípio do Máximo de Pontryagin implicam que γ_* pode chavear no máximo uma vez no interior de cada quadrante Q_1 e Q_2 . Ademais, este chaveamento possível é de 1 a 0 em Q_2 e de 0 a 1 em Q_1 , pois $f_S(y) < 0$ no interior de Q_1 e $f_S(y) > 0$ no interior de Q_2	103
5.4	Representação da solução y_* . Como enunciado no Lema 5.11, y_* é uma solução de (5.42) com $\gamma_*(t) = 1$ em $[0, s_1]$, $\gamma_*(t) = 0$ em (s_1, s_2) e $\gamma_*(t) = 1$ em $(s_2, \tau_*]$. A solução $y_*(t)$ está em Q_2 para $t \in [0, s_1]$ e em Q_1 para $t \in [s_2, \tau_*]$	103

Capítulo 1

Introdução

1.1 Sistemas híbridos

São conhecidos sob o nome de *sistemas híbridos* os sistemas dinâmicos cujo comportamento é determinado pela interação entre dinâmicas contínuas e discretas [2, 3, 26, 32, 43]. O estudo destes sistemas tem atraído enorme interesse em pesquisa nos últimos anos, reunindo pesquisadores de diversas áreas como engenharia de controle, matemática e ciências de computação, devido às suas inúmeras aplicações em áreas como controle de sistemas mecânicos, controle de processos, indústria automotiva, sistemas de potência, controle de tráfego aéreo, processos químicos, sistemas de transporte, dentre outros [2, 3, 32].

Um exemplo elementar de sistema híbrido é o sistema de refrigeração de um quarto, composto pelas características térmicas do quarto, por um aparelho de ar-condicionado e por um elemento de controle que decide quando acionar ou não o aparelho de ar-condicionado [3]. Assim, as características térmicas do quarto e o aparelho de ar-condicionado fornecem uma dinâmica contínua da temperatura, que interage com o elemento de controle, cuja dinâmica é discreta e só possui dois estados: acionamento do ar-condicionado ou não. Esta interação pode assim ser modelada considerando-se que a temperatura θ do quarto é regida por um sistema dinâmico S_0 quando o ar-condicionado está desligado e por um outro sistema dinâmico S_1 quando o ar-condicionado está ligado, e a passagem de um sistema a outro é feita através da lógica de controle, que seleciona S_1 quando se está no sistema S_0 e a temperatura ultrapassa um limiar θ_0 , e seleciona S_0 quando se está no sistema S_1 e a temperatura cai abaixo de um limiar θ_1 , conforme a situação da Figura 1.1.

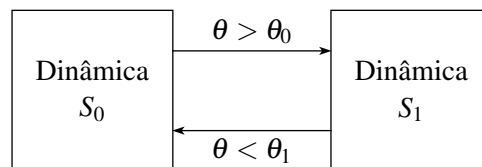


FIGURA 1.1: *Modelo de sistema híbrido do sistema de refrigeração de um quarto.*

Um outro exemplo de aplicação da modelagem por sistemas híbridos é no controle de motores automotivos a combustão [7]. Um motor de combustão a quatro ciclos, por exemplo, possui uma representação híbrida natural, com quatro estados discretos, cada um regido por uma dinâmica interna

contínua, a transição entre estes estados sendo determinada pelo movimento dos pistões do motor, que depende, por sua vez, da dinâmica interna, evidenciando a interligação entre as dinâmicas contínua e discreta. Embora esta representação híbrida seja natural, o tratamento tradicional deste problema é através de modelos contínuos levando em conta apenas valores médios aproximados, o que torna a análise do sistema mais simples, mas tem a desvantagem de ser apenas um modelo aproximado. Para se poder aprimorar o funcionamento de um motor, atendendo a exigências de segurança, conforto dos passageiros e redução de emissões e de consumo de combustível, é necessário um modelo mais preciso, que leve em conta o funcionamento interno do motor em cada ciclo, e um modelo híbrido responde a estas exigências.

1.2 Sistemas chaveados

Em muitas aplicações, o interesse principal está na dinâmica contínua e suas propriedades, e a dinâmica discreta tem apenas um papel secundário. Assim, ao invés de estudar em detalhes a dinâmica discreta, pode-se simplesmente considerar que o sistema é descrito por várias dinâmicas contínuas e que uma certa lógica de chaveamento escolhe uma destas dinâmicas, e estuda-se desta forma o comportamento do sistema segundo uma certa família de lógicas de chaveamento. Tais sistemas, em que são dadas uma família de dinâmicas contínuas e uma família de chaveamentos entre estas dinâmicas, são chamados *sistemas chaveados* [26, 32]. Os sistemas chaveados podem assim ser vistos como um ponto de vista sobre os sistemas híbridos, em que se faz abstração da dinâmica discreta precisa a fim de se obter propriedades sobre a dinâmica contínua.

Matematicamente, pode-se descrever um sistema chaveado em \mathbb{R}^d através de uma família de aplicações $f_k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $k \in \mathcal{I}$, sendo \mathcal{I} um conjunto de índices, e de uma função $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{I}$ constante por partes, segundo a equação dinâmica

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (1.1)$$

O estado x é assim a valores em \mathbb{R}^d e o *sinal de chaveamento* σ é a valores no conjunto de índices \mathcal{I} . Podem-se também descrever sistemas chaveados a tempo discreto através de uma família de equações de diferenças, segundo

$$x[j+1] = f_{\sigma[j]}(x[j]), \quad j \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

O sinal de chaveamento σ determina qual das dinâmicas f_k , $k \in \mathcal{I}$, é seguida pelo sistema a cada intervalo de tempo. O sinal σ pode ser visto de várias formas, cada uma delas sendo mais adaptada a um tipo de problema e a um tipo de análise. Pode-se, por exemplo, considerar que σ é um sinal que depende unicamente de t , caso em que se diz que o chaveamento é dependente do tempo, ou controlado pelo tempo. Em alguns casos, pode-se considerar igualmente que σ depende também do estado x , caso em que se diz que o sinal de chaveamento é dependente do estado. Este sinal também pode ter memória, no caso em que $\sigma(t)$ depende de $\sigma(\tau)$ para $\tau < t$. Sob um ponto de vista de controle, pode-se também considerar os casos em que σ é controlado, isto é, pode ser escolhido ou modificado por projeto, ou autônomo, em que σ vem de uma condição natural de funcionamento do sistema e não pode ser alterado. O chaveamento definido por σ também pode ser considerado

determinístico ou aleatório.

O interesse principal do estudo de um sistema chaveado são as propriedades da dinâmica da variável contínua x que representa o estado do sistema. Neste documento, interessamo-nos às propriedades de *estabilidade e estabilização* dos sistemas (1.1) e (1.2). Assim, supondo que a origem é um ponto de equilíbrio destes sistemas, desejamos estudar as condições sob as quais se pode garantir que uma solução $x(t)$ de (1.1) (resp. uma solução $x[j]$ de (1.2)) tenda à origem quando $t \rightarrow +\infty$ (resp. $j \rightarrow +\infty$). No caso em que o sinal de chaveamento σ é controlado, é também de interesse obter métodos de escolha do sinal σ a fim de garantir que, para o sinal σ escolhido, o sistema seja estável. Também é de interesse investigar as propriedades de estabilização de um *sistema de controle chaveado*,

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t), u(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

a tempo contínuo, ou

$$x[j+1] = f_{\sigma[j]}(x[j], u[j]), \quad j \in \mathbb{N}$$

a tempo discreto. O problema é então estudar a escolha de realimentações de estado $u = \phi_k(x)$, $k \in \mathcal{J}$, de forma que o sistema $\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t), \phi_{\sigma(t)}(x(t)))$ (resp. $x[j+1] = f_{\sigma[j]}(x[j], \phi_{\sigma[j]}(x[j]))$) seja estável; pode também ser de interesse estudar o caso em que se dispõe de apenas uma única realimentação de estado $u = \phi(x)$ para estabilizar o sistema, o que é particularmente útil quando não se tem acesso direto ao sinal de chaveamento σ .

Um caso particular importante dos sistemas chaveados são os *sistemas chaveados lineares*, em que cada aplicação f_k é linear e dada por $f_k(x) = A_k x$, com $A_k \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Neste caso, o sistema (1.1) se escreve

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

e o sistema a tempo discreto (1.2) se escreve

$$x[j+1] = A_{\sigma[j]} x[j], \quad j \in \mathbb{N}.$$

Apesar de ser um caso particular de sistema chaveado, os sistemas chaveados lineares são de grande importância e seu estudo tem atraído boa parte do trabalho de pesquisa em sistemas chaveados, com o objetivo de estudar tópicos como estabilidade, controlabilidade e observabilidade e projetar controladores com boas características de desempenho e estabilidade [4, 11, 13–15, 17, 29, 40, 43].

O estudo da estabilidade de sistemas chaveados lineares mostra que existem efeitos interessantes que ocorrem devido à interação entre a dinâmica contínua e a lógica de chaveamento. O seguinte exemplo, inspirado de um exemplo similar de [17], mostra um destes efeitos.

Exemplo 1.1. Consideremos o sistema chaveado linear

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t) \tag{1.3}$$

com $\sigma(t) \in \mathcal{J} = \{1, 2\}$ e

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}.$$

As matrizes A_1 e A_2 são ambas estáveis e possuem os mesmos autovalores $\lambda_{1,2} = -1 \pm 3i$. Consideramos o sinal de chaveamento σ definido da seguinte forma: σ é constante por partes, σ chaveia de 1 a 2 quando $x_2(t) = 0$ e a dinâmica atual é $\sigma(t^-) = 1$, e σ chaveia de 2 a 1 quando $x_1(t) = 0$ e a dinâmica atual é $\sigma(t^-) = 2$; isto é,

$$\sigma(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } \sigma(t^-) = 1 \text{ e } x_2(t) = 0, \\ 1 & \text{se } \sigma(t^-) = 2 \text{ e } x_1(t) = 0. \end{cases}$$

O sinal σ é assim dependente do estado e com memória. Notando por $\Phi_1(t)$ e $\Phi_2(t)$ as matrizes fundamentais dos sistemas lineares $\dot{x} = A_1x$ e $\dot{x} = A_2x$, respectivamente, temos

$$\Phi_1(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos 3t & -3 \sin 3t \\ \frac{1}{3} \sin 3t & \cos 3t \end{pmatrix}, \quad \Phi_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos 3t & \frac{1}{3} \sin 3t \\ -3 \sin 3t & \cos 3t \end{pmatrix}.$$

Afirmamos que toda solução não identicamente nula deste sistema chaveado tende exponencialmente ao infinito quando $t \rightarrow +\infty$, e, assim, a origem do sistema chaveado é instável. Para ver isto, começamos considerando a trajetória de condição inicial $x(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ e tal que $\sigma(0) = 1$. Pela definição de σ , existe um intervalo $[0, t_1)$ tal que $\sigma(t) = 1$ para $t \in [0, t_1)$, e, assim, neste intervalo, a solução se escreve

$$x(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -3 \sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix}.$$

Assim, a solução gira no sentido anti-horário em torno da origem. Pela definição de σ , ocorre um chaveamento para $\sigma(t) = 2$ no instante em que a solução passa pelo eixo x_1 , isto é, no instante $t = \pi/6$. Desta forma, $\sigma(t) = 1$ para $t \in [0, \pi/6)$ e $\sigma(\pi/6) = 2$. Um cálculo imediato a partir da expressão explícita mostra que

$$\|x(t)\| \geq e^{-\pi/6} \quad \text{para } t \in [0, \pi/6) \quad (1.4)$$

e temos

$$x(\pi/6) = \begin{pmatrix} -3e^{-\pi/6} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Similarmente, σ é constante e igual a 2 num intervalo a partir de $\pi/6$, e, neste intervalo, temos

$$x(t) = -3e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(3(t - \pi/6)) \\ 3 \sin(3(t - \pi/6)) \end{pmatrix},$$

e, assim, a solução gira em torno da origem no sentido horário. Pela definição de σ , este sinal permanece em 2 até que a solução atinja o eixo x_2 , isto é, em $t = \pi/3$, instante em que ocorre um

chaveamento para 1. Desta forma, $\sigma(t) = 2$ para $t \in [\pi/6, \pi/3)$ e $\sigma(\pi/3) = 1$. Um cálculo imediato a partir da expressão explícita mostra que

$$\|x(t)\| \geq 3e^{-\pi/3} \quad \text{para } t \in [\pi/6, \pi/3) \quad (1.5)$$

e temos

$$x(\pi/3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 9e^{-\pi/3} \end{pmatrix}.$$

A solução volta assim para o eixo x_2 com σ valendo 1, e, assim, seu comportamento a partir de então pode ser deduzido do que já foi estudado por homogeneidade. Em particular, por (1.4) e (1.5), deduz-se que

$$\|x(t)\| \geq 3^n e^{-(n+1)\frac{\pi}{6}} \quad \text{para } t \in [n\frac{\pi}{6}, (n+1)\frac{\pi}{6}), n \in \mathbb{N},$$

e, como $3e^{-\pi/6} > 1$, deduz-se assim que $\|x(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ exponencialmente. O comportamento desta solução está ilustrado na Figura 1.2.

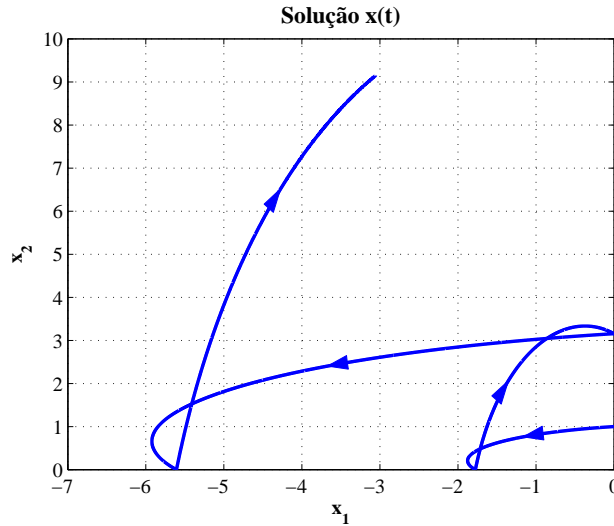


FIGURA 1.2: Comportamento da solução $x(t)$ do sistema chaveado do Exemplo 1.1 quando $x(0) = (0, 1)^T$ e $\sigma(0) = 1$.

A homogeneidade do sistema permite afirmar que $\|x(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ exponencialmente para toda solução $x(t)$ do sistema com condição inicial $x(0) \neq 0$ sobre o eixo x_2 e com $\sigma(0) = 1$. Similarmente, se a condição inicial $x(0) \neq 0$ está sobre o eixo x_1 e $\sigma(0) = 2$, então basta notar que a solução correspondente $x(t)$ coincide com $\tilde{x}(t + \pi/6)$ para uma solução \tilde{x} com condição inicial $\tilde{x}(0) \neq 0$ sobre o eixo x_2 e $\tilde{\sigma}(0) = 1$, e, desta forma, $\|x(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ exponencialmente.

Se $x(t)$ é uma solução com condição inicial fora dos eixos e com um certo valor de $\sigma(0)$, então x gira em torno da origem, no sentido anti-horário se $\sigma(0) = 1$ e no sentido horário se $\sigma(0) = 2$, até atingir um dos eixos, e, a partir deste ponto, x coincide com uma trajetória descrita anteriormente, de forma que $\|x(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ exponencialmente; isto vale igualmente para os casos em que a condição inicial não-nula $x(0)$ está sobre o eixo x_1 e $\sigma(0) = 1$ ou em que $x(0)$ está

sobre o eixo x_2 e $\sigma(0) = 2$.

Logo, toda solução não identicamente nula do sistema chaveado (1.3) tende exponencialmente ao infinito quando $t \rightarrow +\infty$, e, assim, a origem é um ponto de equilíbrio instável do sistema. \square

O interesse do Exemplo 1.1 é mostrar que, mesmo quando o chaveamento é realizado entre dois sistemas que são, isoladamente, assintoticamente estáveis, o sistema chaveado pode ser instável. A referência [17] ressalta a importância deste fato, lembrando que o chaveamento entre dois sistemas assintoticamente estáveis pode ocorrer no controle da dinâmica longitudinal de uma aeronave com ângulo de ataque restrito, o que mostra que é uma necessidade prática encontrar condições, sobre os sistemas que compõem um sistema chaveado ou sobre o sinal de chaveamento, sob as quais se pode garantir que o sistema chaveado seja estável.

Outro exemplo interessante consiste em uma modificação do Exemplo 1.1.

Exemplo 1.2. Consideremos o sistema chaveado linear

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) \quad (1.6)$$

com $\sigma(t) \in \mathcal{J} = \{1, 2\}$ e

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como no caso do Exemplo 1.1, as matrizes A_1 e A_2 possuem os mesmos autovalores $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$, mas são agora matrizes instáveis. O sinal de chaveamento considerado consiste em uma modificação do anterior e é dado por

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma(t^-) = 2 \text{ e } x_2(t) = 0, \\ 2 & \text{se } \sigma(t^-) = 1 \text{ e } x_1(t) = 0. \end{cases}$$

Notamos por $\Phi_1(t)$ e $\Phi_2(t)$ as matrizes fundamentais dos sistemas lineares $\dot{x} = A_1x$ e $\dot{x} = A_2x$, respectivamente, e, assim

$$\Phi_1(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos 3t & -3 \sin 3t \\ \frac{1}{3} \sin 3t & \cos 3t \end{pmatrix}, \quad \Phi_2(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos 3t & \frac{1}{3} \sin 3t \\ -3 \sin 3t & \cos 3t \end{pmatrix},$$

isto é, as matrizes fundamentais são as mesmas que no Exemplo 1.1, a menos do termo exponencial e^{-t} , que é agora e^t . Afirmamos que toda solução não identicamente nula deste sistema chaveado tende exponencialmente à origem quando $t \rightarrow +\infty$, e, assim, a origem do sistema chaveado é exponencialmente estável. Similarmente ao caso anterior, isto é mostrado considerando inicialmente a trajetória de condição inicial $x(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ e tal que $\sigma(0) = 1$. Pela definição de σ , existe um intervalo $[0, t_1)$ tal que $\sigma(t) = 1$ para $t \in [0, t_1)$, e, assim, neste intervalo, a solução se escreve

$$x(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \frac{1}{3} \sin 3t \end{pmatrix}.$$

Assim, a solução gira no sentido anti-horário em torno da origem. Ocorre um chaveamento para $\sigma(t) = 2$ no instante em que a solução passa pelo eixo x_2 , isto é, em $t = \pi/6$, e, assim, $\sigma(t) = 1$ para $t \in [0, \pi/6)$ e $\sigma(\pi/6) = 2$. Um cálculo imediato a partir da expressão explícita mostra que

$$\|x(t)\| \leq e^{\pi/6} \quad \text{para } t \in [0, \pi/6) \quad (1.7)$$

e

$$x(\pi/6) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}e^{\pi/6} \end{pmatrix}.$$

Similarmente, σ é constante e igual a 2 num intervalo a partir de $\pi/6$, e, neste intervalo, temos

$$x(t) = \frac{1}{3}e^t \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sin(3(t - \pi/6)) \\ \cos(3(t - \pi/6)) \end{pmatrix},$$

e, assim, a solução gira em torno da origem no sentido horário. O chaveamento seguinte ocorre quando a solução atinge o eixo x_2 , isto é, em $t = \pi/3$, e, assim, $\sigma(t) = 2$ para $t \in [\pi/6, \pi/3)$ e $\sigma(\pi/3) = 1$. Um cálculo imediato a partir da expressão explícita mostra que

$$\|x(t)\| \leq \frac{1}{3}e^{\pi/3} \quad \text{para } t \in [\pi/6, \pi/3) \quad (1.8)$$

e

$$x(\pi/3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}e^{\pi/3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A solução volta assim para o eixo x_1 com σ valendo 1, e, assim, como no caso do Exemplo 1.1, pode-se deduzir o comportamento da solução a partir deste instante por homogeneidade. Em particular, por (1.7) e (1.8), deduz-se que

$$\|x(t)\| \leq \frac{1}{3^n}e^{(n+1)\frac{\pi}{6}} \quad \text{para } t \in [n\frac{\pi}{6}, (n+1)\frac{\pi}{6}), \quad n \in \mathbb{N},$$

e, como $\frac{1}{3}e^{\pi/6} < 1$, deduz-se assim que $\|x(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ exponencialmente. O comportamento desta solução está ilustrado na Figura 1.3.

O argumento para mostrar que $\|x(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ exponencialmente para toda solução $x(t)$ do sistema (1.6) é idêntico ao argumento análogo feito no Exemplo 1.1, utilizando a homogeneidade do sistema e o fato de toda solução passar pelos eixos x_1 e x_2 . Desta forma, toda solução não identicamente nula do sistema chaveado (1.3) tende exponencialmente à origem quando $t \rightarrow +\infty$, e, assim, a origem é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável do sistema. \square

O Exemplo 1.2 mostra assim uma situação contrária à do Exemplo 1.1: mesmo quando o chaveamento é realizando entre dois sistemas que são, isoladamente, instáveis, o sistema chaveado pode ser exponencialmente estável. Estes dois exemplos ilustram o quanto a dinâmica do sistema chaveado pode ser diferente da dinâmica dos subsistemas que o compõem. Além disto, eles ajudam a definir questões de interesse prático em sistemas chaveados. Assim, quando temos subsistemas estáveis e deseja-se que o sistema chaveado composto por estes subsistemas seja estável, o Exemplo 1.1 mostra

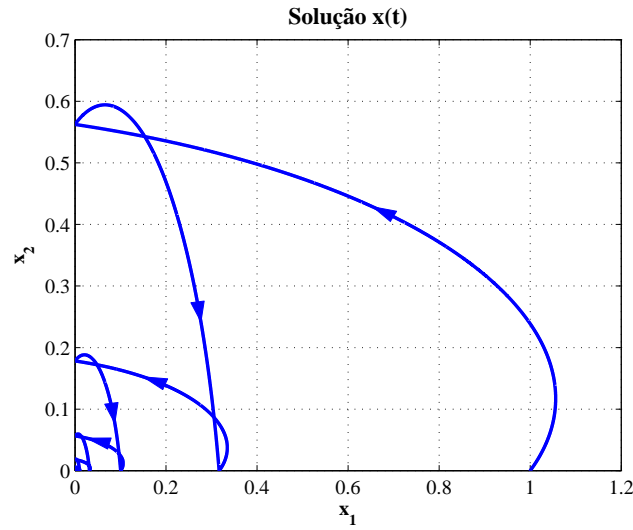


FIGURA 1.3: Comportamento da solução $x(t)$ do sistema chaveado do Exemplo 1.2 quando $x(0) = (1, 0)^T$ e $\sigma(0) = 1$.

que a estabilidade dos subsistemas não implica a estabilidade do sistema chaveado, sendo portanto de interesse a obtenção de condições suplementares sobre os subsistemas ou sobre o sinal de chaveamento para garantir a estabilidade do sistema chaveado. Por outro lado, o Exemplo 1.2 mostra que é possível estabilizar os subsistemas instáveis de um sistema chaveado através do sinal de chaveamento, e a questão de interesse prático é então obter condições sobre os subsistemas instáveis e sobre o sinal de chaveamento para que isto possa ocorrer.

1.3 Trabalho realizado

A redação deste documento faz parte do Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Elétrica - Ênfase em Eletrônica, na Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, do aluno Guilherme Afonso Mazanti. Esse trabalho tem por base o estágio de pesquisa [35] realizado pelo aluno no CMAP - Centre de Mathématiques Appliquées, da École Polytechnique, França, no período de abril a junho de 2011, e em trabalhos subsequentes, em que o estudo de sistemas chaveados foi iniciado pelo aluno. O presente panorama não-exaustivo da pesquisa em sistemas chaveados permite ao aluno uma melhor compreensão do estado da pesquisa neste tópico, permitindo assim um melhor direcionamento de futuros trabalhos sobre o assunto.

Tendo por base o artigo [15], o trabalho [35] interessa-se pelo problema da estabilização a velocidade arbitrária de sistemas de controle do tipo

$$\dot{x} = Ax + \sigma(t)Bu$$

para $x \in \mathbb{R}^d$, $u \in \mathbb{R}^m$ e σ um sinal de chaveamento a *excitação persistente*, isto é, existem constantes $T \geq \mu > 0$ tais que, para todo t ,

$$\int_t^{t+T} \sigma(s)ds \geq \mu.$$

Mais geralmente, o interesse é o estudo deste tipo de sistema não só para o caso em que σ é um sinal de chaveamento, mas sim para o caso em que $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ pertence a uma certa classe de sinais. Em [15], mostrou-se que, quando u é um controle escalar, $(A, B) \in \mathbb{R}^{d \times d} \times \mathbb{R}^d$ é controlável e todos os autovalores de A possuem parte real negativa ou nula, é possível, dadas constantes $T \geq \mu > 0$, escolher o controle u sob a forma $u = -Kx$ de tal forma que o sistema resultante seja estável para toda função $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ mensurável a excitação persistente com constantes T, μ . Notemos que o caso em que σ é um sinal de chaveamento a excitação persistente é um caso particular deste resultado e, assim, isto fornece um importante resultado de estabilização de sistemas de controle chaveados a excitação persistente, em que o sinal de controle pode ser escolhido de forma uniforme com relação à classe de sinais de chaveamento a excitação persistente para constantes $T \geq \mu > 0$ fixadas.

Apesar da estabilização ser possível, também foi mostrado em [15] que, quando a razão μ/T é pequena, esta estabilização não pode ser realizada a velocidade arbitrária, isto é, a *taxa máxima de convergência exponencial* é finita, e isto tanto para sinais $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ quanto para sinais de chaveamento a excitação persistente. Um problema aberto apresentado em [15] foi assim de determinar se é possível obter um resultado de estabilização a velocidade arbitrária para uma classe mais restrita de sinais σ , e uma classe sugerida foi a de sinais $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ lipschitzianos com constante de Lipschitz limitada por um valor M .

Foi este problema de estabilização a velocidade arbitrária que foi tratado pelo aluno em [35]. Neste documento, foi mostrado que é possível estabilizar a velocidade arbitrária o sistema $\dot{x} = Ax + \sigma(t)bu$, em que $x \in \mathbb{R}^2$, A é o duplo integrador e u é um controle escalar, quando σ é um sinal a excitação persistente lipschitziano de constante de Lipschitz limitada por um valor M . Este resultado pôde ainda ser generalizado ao caso em que (A, b) é um par controlável em dimensão 2, e o resultado do trabalho realizado durante o estágio de pesquisa, acrescido desta generalização subsequente, foi submetido para publicação [14]. Os enunciados precisos dos resultados obtidos estão apresentados na Seção 4.1.4 e a demonstração do resultado principal obtido no estágio é assunto do Capítulo 5.

Assim, este documento tem por objetivo complementar o estudo de sistemas chaveados iniciado pelo aluno em [35], trazendo um panorama do estado atual da pesquisa neste tópico. O propósito é explorar os diversos aspectos da teoria de sistemas chaveados, mostrando quais os principais resultados obtidos sobre as questões de estabilização e estabilidade de sistemas chaveados e quais as principais linhas de pesquisa que têm sido tratadas recentemente. Para a compilação deste panorama, foram utilizados diversos artigos que exploram os principais aspectos de sistemas chaveados [2, 3, 17, 29, 32, 43], além de livros sobre o tema [26, 45] e artigos sobre tópicos mais específicos [4, 7, 11, 13, 15, 27, 31, 38].

1.4 Organização do documento

O objetivo deste documento é o estudo da estabilidade e da estabilização de sistemas chaveados. Devido ao fato de boa parte da pesquisa recente em sistemas chaveados ter se concentrado sobre os sistemas chaveados lineares, estes últimos serão o tópico principal do estudo, mas alguns dos resultados aqui apresentados serão dados em um contexto mais geral. Por se tratar de um estudo introdutório sobre as questões de estabilidade e estabilização de sistemas chaveados, restringimo-nos a sistemas em que o estado x pertence ao espaço euclidiano \mathbb{R}^d .

A organização do documento é a seguinte. No Capítulo 2, são dadas as principais definições que serão utilizadas ao longo deste documento. O Capítulo 3 trata do caso de sistemas chaveados em que o sinal de chaveamento σ é visto como uma função constante por partes arbitrária, visando obter condições de estabilidade para este caso. Outros resultados podem ser obtidos no caso em que o chaveamento definido por σ obedece a certas restrições, e é este o interesse do Capítulo 4. Em particular, o Capítulo 4 trata também dos resultados obtidos no estágio de pesquisa [35]. A demonstração do resultado principal obtido em [35] é assunto do Capítulo 5. Finalmente, o Capítulo 6 conclui as questões abordadas neste documento.

Capítulo 2

Definições

2.1 Notações

Neste documento, a notação \mathbb{R}_+ é utilizada para o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, \infty)$ e \mathbb{N} denota o conjunto dos inteiros positivos ou nulos, isto é, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, enquanto que $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. O conjunto das matrizes $d \times m$ a coeficientes reais é notado por $\mathbb{R}^{d \times m}$, e, como usualmente, o conjunto das matrizes coluna $\mathbb{R}^{d \times 1}$ é identificado com os vetores de \mathbb{R}^d . A norma p , $p \in [1, \infty]$, de um elemento $x \in \mathbb{R}^d$ é notada por $\|x\|_p$ e a norma de matriz associada de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ é notada igualmente por $\|A\|_p$. No caso $p = 2$ da norma euclidiana, notamos estas quantidades simplesmente por $\|x\|$ e $\|A\|$, respectivamente. Para um número complexo z , $\text{Re}(z)$ denota sua parte real e $\text{Im}(z)$, a sua parte imaginária.

Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ simétrica, escrevemos $A \succ 0$ para dizer que A é definida positiva e $A \succeq 0$ para dizer que A é semidefinida positiva. Dadas duas matrizes $A, B \in \mathbb{R}^{d \times d}$, a notação $A \succ B$ quer simplesmente dizer $A - B \succ 0$, e analogamente para $A \succeq B$. Finalmente, as notações $A \prec B$ e $A \preceq B$ querem dizer $B \succ A$ e $B \succeq A$, respectivamente.

Dado um conjunto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ (ou $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{d \times d}$), notamos por $\text{co}\mathcal{A}$ o seu envelope convexo, definido por

$$\text{co}\mathcal{A} = \left\{ \sum_{k=1}^N \alpha_k x_k \mid x_k \in \mathcal{A}, \alpha_k \in \mathbb{R}_+, \sum_{k=1}^N \alpha_k = 1, N \in \mathbb{N}^* \right\},$$

que é o menor conjunto convexo contendo \mathcal{A} . Quando $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$ para $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{d \times d}$, este conjunto é notado igualmente por $\gamma(A_1, A_2)$.

Dados dois inteiros $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ com $k_2 > k_1$, utilizamos a notação $\llbracket k_1, k_2 \rrbracket$ para o conjunto dos inteiros de k_1 a k_2 , isto é, o intervalo de inteiros $\{k \in \mathbb{Z} \mid k_1 \leq k \leq k_2\} = \{k_1, k_1 + 1, \dots, k_2 - 1, k_2\}$. Dado um número $x \in \mathbb{R}$, a notação $\lfloor x \rfloor$ é utilizada para notar o maior inteiro menor ou igual a x , isto é, $\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro satisfazendo $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.

2.2 Sistemas chaveados

Neste capítulo, são apresentadas as principais definições necessárias ao estudo da estabilidade e estabilização de sistemas chaveados. Para isto, começamos dando uma descrição matemática da noção

de sistema de controle chaveado em \mathbb{R}^d , que tem por base as definições dadas em [29, 31, 32, 45].

Definição 2.1 (Sistema de controle chaveado a tempo contínuo). Seja \mathcal{J} um conjunto de índices e $f_k : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$, $k \in \mathcal{J}$, uma família de aplicações. Definimos o *sistema de controle chaveado (a tempo contínuo)* (ou simplesmente *sistema chaveado*) como o sistema de controle descrito por

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t), u(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (2.1)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^d$ é o *estado*, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é uma entrada de *controle* e $\sigma(t) \in \mathcal{J}$ é um *sinal de chaveamento*, que é uma função constante por partes satisfazendo a equação

$$\sigma(t) = \varphi(t, \sigma(t^-), x(t))$$

para uma certa *lógica de chaveamento* $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{J} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{J}$ em uma dada classe \mathcal{G} . Os instantes t de descontinuidade de σ são chamados de *instantes de chaveamento*. Cada sistema

$$\dot{x}(t) = f_k(x(t), u(t)), \quad k \in \mathcal{J}$$

é chamado de *subsistema* ou *modo* do sistema chaveado (2.1).

A Definição 2.1 traz um quadro matemático amplo para tratar os sistemas chaveados, e diversas considerações podem ser feitas a seu respeito. Em primeiro lugar, deve-se notar que cada subsistema

$$\dot{x}(t) = f_k(x(t), u(t))$$

é por si só um sistema de controle. Notemos que poderia ter sido dada uma definição mais geral, em que cada subsistema é do tipo

$$\dot{x}(t) = f_k(t, x(t), u(t)),$$

isto é, f_k depende explicitamente de t . Isto é matematicamente possível, mas não possui muito interesse do ponto de vista prático: um sistema chaveado surge através do chaveamento entre diversas dinâmicas, e, assim, a dependência principal da dinâmica em função do tempo é através do sinal de chaveamento σ , de forma que, na maioria dos modelos, f_k não depende explicitamente de t , o que justifica não considerarmos este caso aqui, apesar de ser útil em alguns casos práticos. Também poderíamos considerar subsistemas do tipo

$$\dot{x}(t) = f_k(x(t), u(t), d(t)),$$

em que $d(t)$ é um sinal externo, que pode representar, por exemplo, uma perturbação ou um ruído no sistema. Este tipo de modelo apresenta diversas aplicações práticas, mas, por simplicidade, suporemos, no tratamento dado aqui, a ausência de sinais externos.

Quando são considerados sistemas de controle, além de uma *equação de estado* do tipo

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$

inclui-se também no modelo do sistema uma *equação de saída*

$$y(t) = g(x(t), u(t)).$$

Assim, poderíamos ter incluído na Definição 2.1, para cada subsistema $k \in \mathcal{J}$ de um sistema chaveado, além da equação de estado

$$\dot{x} = f_k(x(t), u(t)),$$

uma *equação de saída*

$$y(t) = g_k(x(t), u(t)).$$

Isto não foi feito por simplicidade: uma vez que o objetivo principal deste documento é analisar a estabilidade de sistemas chaveados, que concerne assim propriedades referentes ao estado x , fazemos abstração da saída y do sistema. Enfatizamos que a saída y é importante para algumas questões de estabilidade, como, por exemplo, a estabilização por realimentação de saída, mas estes tópicos não serão tratados aqui.

Um caso particular importante da Definição 2.1 é quando cada subsistema do sistema chaveado é autônomo, isto é, as funções f_k são todas independentes da variável de controle u . A análise das noções de estabilidade de Lyapunov tem por base este caso, que é também o caso ao qual é reduzido o sistema de controle quando se realiza uma realimentação de estado do tipo $u = g(x)$. Este será o principal caso tratado neste documento.

Outra simplificação realizada aqui é o fato de considerar que o estado x do sistema chaveado é uma variável no espaço \mathbb{R}^d . Em muitas aplicações, é natural definir o estado como pertencente a uma certa variedade M , e certos resultados apresentados aqui podem ser generalizados a este caso; porém, para manter a simplicidade de uma exposição inicial do tópico, são considerados apenas os sistemas definidos sobre \mathbb{R}^d .

Na definição acima, não foi feita nenhuma hipótese quanto ao número de subsistemas de um dado sistema chaveado. Na maioria dos casos de interesse, este número é finito, isto é, podemos tomar $\mathcal{J} = \{1, \dots, N\}$ para um certo $N \in \mathbb{N}^*$, mas alguns dos resultados apresentados aqui são mais gerais e podem ser aplicados a uma família infinita de subsistemas.

Os sistemas chaveados podem ser vistos como um ponto de vista dos sistemas híbridos, no qual as propriedades de interesse são as da dinâmica da variável contínua x . Assim, no estudo de sistemas chaveados, a lógica de chaveamento particular φ não é de muito interesse, o que justifica o fato de, na Definição 2.1, não se fixar uma única lógica de chaveamento particular φ , mas permitir que esta seja escolhida dentro de uma classe \mathcal{G} . Isto quer simplesmente dizer que, ao se estudar um sistema chaveado, busca-se em geral estudar suas propriedades não para uma única lógica de chaveamento particular, mas sim para toda uma classe de lógicas de chaveamento.

Alguns casos particulares de lógicas de chaveamento são de grande importância prática. O primeiro é quando as lógicas φ da classe \mathcal{G} são funções unicamente do tempo, e assim a equação do sinal de chaveamento σ torna-se

$$\sigma(t) = \varphi(t), \quad \varphi \in \mathcal{G},$$

isto é, o sinal de chaveamento é a própria lógica de chaveamento, que é escolhida em uma classe \mathcal{G} .

Neste caso, dizemos que o chaveamento é dependente do tempo. Dizemos ainda que este sinal de chaveamento é arbitrário se a classe \mathcal{G} for a classe de todas os sinais de chaveamento, isto é, se

$$\mathcal{G} = \{\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{J} \mid \varphi \text{ é constante por partes}\}.$$

Outro caso importante é quando cada φ da classe \mathcal{G} depende apenas do estado x . Neste caso, a equação do sinal de chaveamento σ é

$$\sigma(t) = \varphi(x(t)), \quad \varphi \in \mathcal{G}$$

e diz-se que o chaveamento é dependente do estado. Casos mais gerais de sinais de chaveamento são discutidos, por exemplo, em [45].

Pode-se também classificar o chaveamento em autônomo ou controlado. No primeiro caso, a classe \mathcal{G} é dada, definida pelo modelo físico utilizado e não pode ser alterada, enquanto que, no segundo caso, a classe \mathcal{G} pode ser escolhida por projeto de forma a se atingir um dado objetivo de controle.

Similarmente à Definição 2.1, pode-se igualmente definir um sistema de controle chaveado a tempo discreto.

Definição 2.2 (Sistema de controle chaveado a tempo discreto). Seja \mathcal{J} um conjunto de índices e $f_k : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$, $k \in \mathcal{J}$, uma família de aplicações. Definimos o *sistema de controle chaveado (a tempo discreto)* como o sistema de controle descrito por

$$x[j+1] = f_{\sigma[j]}(x[j], u[j]), \quad j \in \mathbb{N} \tag{2.2}$$

em que $x[j] \in \mathbb{R}^d$ é o *estado*, $u[j] \in \mathbb{R}^m$ é uma entrada de *controle* e $\sigma[j] \in \mathcal{J}$ é um *sinal de chaveamento*, que satisfaz a equação

$$\sigma[j+1] = \varphi(j, \sigma[j], x[j])$$

para uma certa *lógica de chaveamento* $\varphi : \mathbb{N} \times \mathcal{J} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{J}$ em uma dada classe \mathcal{G} . Cada sistema

$$x[j+1] = f_k(x[j], u[j]), \quad k \in \mathcal{J}$$

é chamado de *subsistema* ou *modo* do sistema chaveado (2.2).

Esta definição é o análogo em tempo discreto da Definição 2.1, em que a notação $g[j]$, com a variável entre colchetes, é utilizada para enfatizar que a variável j da função g é uma variável discreta. Com relação à Definição 2.1, nota-se que não é mais necessário exigir que σ seja uma função constante por partes. As demais observações feitas para a Definição 2.1 são também aplicáveis neste caso.

No caso em que toda função f_k é linear, isto é, em que $f_k(x, u) = A_k x + B_k u$ para certas matrizes $A_k \in \mathbb{R}^{d \times d}$ e $B_k \in \mathbb{R}^{d \times m}$, diz-se que o sistema chaveado correspondente é um *sistema chaveado linear*. Este tipo de sistema tem atraído o maior interesse recente em pesquisa devido à sua grande importância. De fato, modelos lineares são encontrados nas mais diversas áreas aplicadas, surgindo de

fenômenos lineares ou de linearizações em torno de pontos de operação de fenômenos não-lineares. Além disto, devido à maior simplicidade matemática dos modelos lineares, mais resultados podem ser obtidos para este caso, utilizando técnicas que, muitas vezes, aplicam-se apenas a sistemas lineares, numa situação similar ao que ocorre no estudo de equações diferenciais lineares. A restrição ao caso linear também preserva diversos aspectos matemáticos interessantes dos sistemas chaveados que são devidos ao chaveamento; por exemplo, os Exemplos 1.1 e 1.2 apresentados no Capítulo 1 mostram fenômenos de desestabilização e estabilização devidos ao chaveamento em sistemas lineares. Assim, devido à ampla pesquisa realizada nesta área e ao interesse dos resultados, boa parte desta exposição se concentrará nos sistemas chaveados lineares.

2.3 Soluções de sistemas chaveados

Tendo definido o conceito de sistemas chaveados, é importante definir o que queremos dizer com a solução de um tal sistema, que é o objeto da Definição 2.3. Para $j_0, j_1 \in \mathbb{N}$ com $j_0 < j_1$, lembremos que a notação $\llbracket j_0, j_1 \rrbracket$ representa o intervalo de inteiros $\{j_0, j_0 + 1, j_0 + 2, \dots, j_1 - 1, j_1\}$.

Definição 2.3. Seja o sistema chaveado dado por

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t), u(t)), \quad (2.3a)$$

$$\sigma(t) = \varphi(t, \sigma(t^-), x(t)), \quad (2.3b)$$

$$t \in \mathbb{R}_+, x(t) \in \mathbb{R}^d, u(t) \in \mathbb{R}^m, \sigma(t) \in \mathcal{J}, \varphi \in \mathcal{G}. \quad (2.3c)$$

Dizemos que uma função absolutamente contínua $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma *solução* do sistema (2.3) no intervalo $[t_0, t_1]$ para um controle $u(t)$ dado se existir $\varphi \in \mathcal{G}$ e uma função $\sigma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{J}$ constante por partes e com um número finito de descontinuidades em todo intervalo de tempo limitado tais que o par (x, σ) satisfaz (2.3a) e (2.3b) para quase todo $t \in [t_0, t_1]$.

Similarmente, para o sistema chaveado

$$x[j+1] = f_{\sigma[j]}(x[j], u[j]), \quad (2.4a)$$

$$\sigma[j+1] = \varphi(j, \sigma[j], x[j]), \quad (2.4b)$$

$$j \in \mathbb{N}, x[j] \in \mathbb{R}^d, u[j] \in \mathbb{R}^m, \sigma[j] \in \mathcal{J}, \varphi \in \mathcal{G}, \quad (2.4c)$$

diz-se que a função $x : \llbracket j_0, j_1 \rrbracket \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma *solução* do sistema (2.4) no intervalo $\llbracket j_0, j_1 \rrbracket$ para um controle $u[j]$ dado se existir $\varphi \in \mathcal{G}$ e uma função $\sigma : \llbracket j_0, j_1 \rrbracket \rightarrow \mathcal{J}$ tais que o par (x, σ) satisfaz (2.4a) e (2.4b) para todo $j \in \llbracket j_0, j_1 \rrbracket$.

Observamos que, na definição de solução de sistema chaveado a tempo contínuo, a continuidade absoluta de x garante que esta função possui uma derivada em quase todo ponto $t \in [t_0, t_1]$ (em que o termo “quase todo” é usado no sentido da medida de Lebesgue em \mathbb{R}), de forma que faz sentido exigir que esta função satisfaça (2.3a) para quase todo t . Para o sistema chaveado a tempo discreto (2.4), não é necessário supor a continuidade absoluta de x nem o fato de σ ser constante por partes, pois estas condições são supérfluas no contexto de funções de uma variável discreta.

Algumas questões delicadas surgem na definição de soluções. Notemos, em primeiro lugar, que há lógicas de chaveamento que conduzem à não-existência de soluções. De fato, se, por exemplo, tomamos, em $\mathcal{J} = \{1, 2\}$, a função $\varphi : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$, independente de t e de x e dependente apenas de σ , dada por $\varphi(1) = 2$, $\varphi(2) = 1$, então não existe nenhuma função constante por partes $\sigma : I \rightarrow \mathcal{J}$, em que I é um intervalo real, tal que $\sigma(t) = \varphi(\sigma(t^-))$, e, assim, se \mathcal{G} é reduzida a esta função φ , o sistema (2.3) não possui nenhuma solução. Em geral, porém, supõe-se que a classe \mathcal{G} é escolhida de tal forma a que este caso não ocorra e que, para toda $\varphi \in \mathcal{G}$, o sistema possa apresentar ao menos uma solução para toda condição inicial $x(t_0) \in \mathbb{R}^d$, o que é o caso nos exemplos práticos de sistemas chaveados. Não entramos aqui em detalhes sobre condições para que isto ocorra, mas enfatizamos que este é o caso quando consideramos chaveamentos dependentes do tempo ou do estado, que são nosso principal caso de interesse.

2.3.1 Comportamento de Zenão

Certas lógicas de chaveamento podem conduzir a sinais de chaveamento que apresentem um número infinito de descontinuidades em um intervalo de tempo limitado, o chamado *comportamento de Zenão*. Isto ocorre, por exemplo, no sistema do Exemplo 2.4.

Exemplo 2.4. Seja o sistema chaveado com dois subsistemas definido em \mathbb{R}^2 por

$$\dot{x}(t) = \frac{A_{\sigma(t)}x(t)}{\|A_{\sigma(t)}x(t)\|} \quad (2.5a)$$

com

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5b)$$

e com a lógica de chaveamento

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma(t^-) = 2 \text{ e } x_2(t) = 0, \\ 2 & \text{se } \sigma(t^-) = 1 \text{ e } x_1(t) = 0. \end{cases} \quad (2.5c)$$

em que utilizamos a convenção $\frac{x}{\|x\|} = 0$ se $x = 0$. As trajetórias de $\dot{x} = \frac{A_1x}{\|A_1x\|}$ são elipses centradas na origem, de eixo maior em x_1 , de eixo menor em x_2 e tais que o eixo maior é o dobro do eixo menor. De fato, considerando $V_1(x) = \frac{x_1^2}{4} + x_2^2$, calcula-se que $\frac{d}{dt}V_1(x(t)) = \frac{1}{2}x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = \frac{1}{\|A_1x\|}(-x_1x_2 + x_1x_2) = 0$, donde segue que V_1 é constante ao longo das trajetórias de $\dot{x} = \frac{A_1x}{\|A_1x\|}$, o que implica o resultado enunciado. Similarmente, as trajetórias de $\dot{x} = \frac{A_2x}{\|A_2x\|}$ são elipses centradas na origem, de eixo maior em x_2 , de eixo menor em x_1 e tais que o eixo maior é o dobro do eixo menor, o que pode ser visto constatando-se que a derivada ao longo de uma trajetória da função $V_2(x) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{4}$ é nula. A trajetória deste sistema de condição inicial $x(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}^T$ e $\sigma(0) = 1$ está representada na Figura 2.1.

A partir do instante $t = 0$, a trajetória do sistema é um arco de elipse de semi-eixo maior 2 no eixo x_1 e semi-eixo menor 1 no eixo x_2 , percorrida no sentido anti-horário, até o instante de chaveamento t_1 em que $x_1(t_1) = 0$; neste instante, $x_2(t_1) = 1$. A partir de então, ocorre o

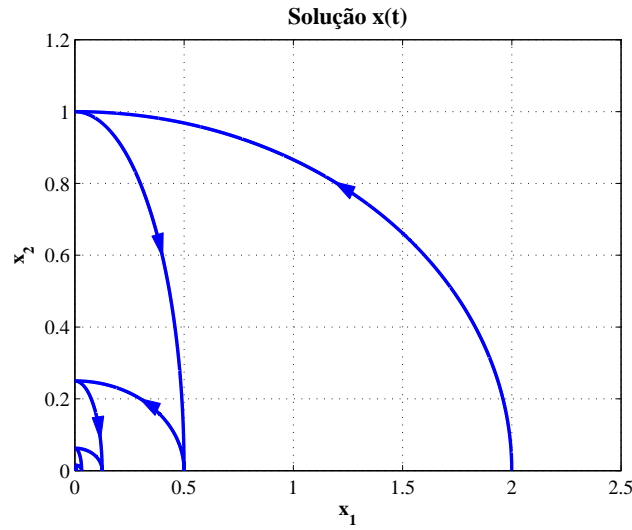


FIGURA 2.1: Trajetória do sistema chaveado definido por (2.5) quando $x(0) = (2,0)^T$ e $\sigma(0) = 1$.

chaveamento para o subsistema 2 e a trajetória é um arco de elipse de semi-eixo maior 1 no eixo x_2 e semi-eixo menor $1/2$ no eixo x_1 , percorrida no sentido horário, até o instante de chaveamento t_2 em que $x_2(t_2) = 0$; neste instante, $x_1(t_2) = 1/2$. Verifica-se que, a partir de então, a situação é similar, fornecendo uma trajetória composta por diversos arcos de elipse, e os instantes de chaveamento formam uma sequência $(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, \dots)$.

Afirmamos que a sequência dos instantes de chaveamento converge para um certo t_* finito. De fato, para ver isto, basta notar que o instante t é igual ao comprimento da trajetória percorrida de 0 a t , pois este comprimento vale

$$\ell(t) = \int_0^t \|\dot{x}(s)\| ds = \int_0^t ds = t$$

uma vez que $\|\dot{x}(t)\| = 1$ para quase todo t , enquanto a origem não for atingida. Seja a elipse centrada na origem, de semi-eixo maior 2 no eixo x_1 e de semi-eixo menor 1 no eixo x_2 e notemos por ℓ_0 o comprimento do arco desta elipse correspondente ao primeiro quadrante, de forma que $t_1 = \ell_0$. Assim, temos

$$t_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\ell_0}{2^k},$$

donde segue que

$$t_* = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 2\ell_0,$$

que é assim finito. O sinal de chaveamento correspondente à solução da Figura 2.1 está mostrado na Figura 2.2.

Este sinal possui assim um número infinito de descontinuidades em um intervalo de tempo limitado. \square

Nota-se que, no caso do comportamento de Zenão do Exemplo 2.4, pode-se definir x como zero e σ qualquer a partir de t_* , e obtém-se assim um par (x, σ) que satisfaz as condições da Definição

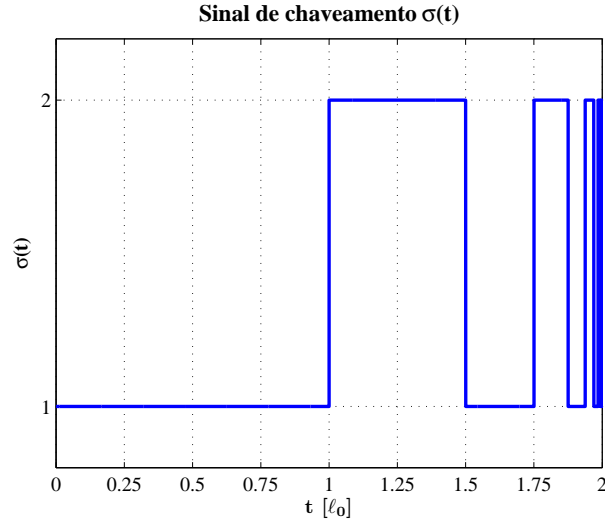


FIGURA 2.2: Sinal de chaveamento correspondente à trajetória da Figura 2.1.

2.3, exceto pelo fato de σ possuir um número infinito de descontinuidades em um intervalo de tempo limitado. Porém, em casos mais complicados de sistemas chaveados, detectar comportamentos de Zenão e estender a solução além do ponto de acumulação dos instantes de chaveamento pode ser uma tarefa complicada. Além disso, na prática, é desejável evitar o comportamento de Zenão, pois uma frequência muito grande de chaveamento pode causar com que os componentes físicos do sistema trabalhem fora de sua região de operação, fazendo com que o modelo matemático do sistema não seja necessariamente válido e causando um possível desgaste ou estrago dos componentes. Assim, para simplicidade de análise neste estudo, à imagem do que é feito nas principais referências [26,29,43,45], exige-se que o sinal de chaveamento de uma solução apresente um número finito de descontinuidades em todo intervalo de tempo limitado.

2.3.2 Movimento escorregadio

Consideremos um sistema chaveado com chaveamento dependente do estado e com um número finito N de subsistemas, de forma que $\mathcal{J} = \{1, \dots, N\}$. Neste caso, uma lei de chaveamento $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{J}$ particiona o espaço de estados em regiões $\Omega_n = \varphi^{-1}(n)$, $n \in \mathcal{J}$, e os chaveamentos podem ser definidos através de *superfícies de chaveamento* \mathcal{S}_{nm} , em que \mathcal{S}_{nm} é a fronteira comum de Ω_n e Ω_m . Um fenômeno importante que pode ocorrer neste caso é o chamado *movimento escorregadio*, em que a solução, ao atravessar de uma região Ω_n a uma região Ω_m , deixa de estar definida segundo a Definição 2.3, um caso que é mostrado no Exemplo 2.5.

Exemplo 2.5. Consideremos o sistema chaveado $\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t))$ com dois subsistemas f_1 e f_2 definidos por

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e com um chaveamento dependente do estado dado pela lei

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_2 \geq 0, \\ 2 & \text{se } x_2 < 0. \end{cases}$$

Tomemos uma trajetória com condição inicial no semiplano $x_2 > 0$. Assim, temos $\sigma(t) = 1$ até o instante t_1 em que esta trajetória atinge a superfície \mathcal{S} definida por $x_2 = 0$, conforme a situação da Figura 2.3. Neste instante, porém, a solução deixa de estar definida, pois a trajetória não pode entrar no semiplano $x_2 < 0$, uma vez que o campo de vetores f_2 aponta na direção de \mathcal{S} , nem voltar ao semiplano $x_2 > 0$, pois o campo f_1 aponta na direção de \mathcal{S} , nem ficar em \mathcal{S} , uma vez que, sobre \mathcal{S} , o campo f_1 aponta na direção do semiplano $x_2 < 0$.

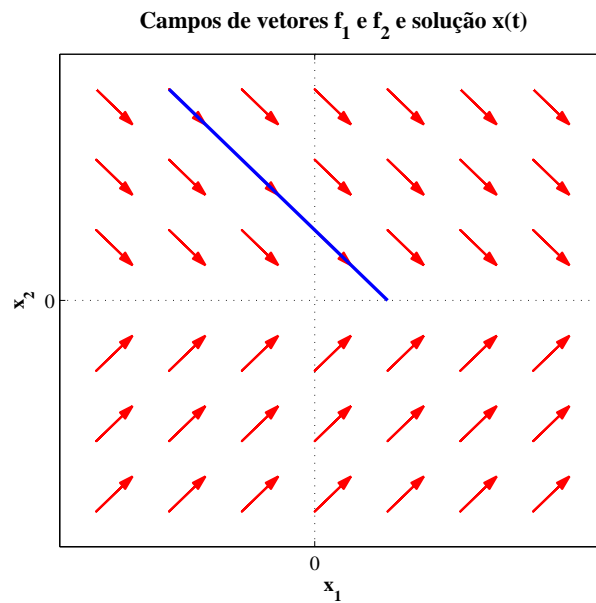


FIGURA 2.3: Campo de vetores (em vermelho) e trajetória (em azul) do sistema chaveado do Exemplo 2.5.

□

Um comportamento típico que pode ocorrer na prática em uma situação como a do Exemplo 2.5 é a solução oscilar entre os dois modos do sistema devido, por exemplo, ao atraso nos sensores de detecção de posição ou nos elementos de chaveamento do sistema físico; neste caso, na situação da Figura 2.3, a solução, após o instante t_1 , seguiria na direção positiva do eixo x_1 oscilando entre as regiões $x_2 < 0$ e $x_2 > 0$ numa estreita faixa em torno de \mathcal{S} . Isto corresponde ao chamado *movimento escorregadio*, em que a solução “escorrega” sobre a superfície \mathcal{S} entre as duas regiões $x_2 > 0$ e $x_2 < 0$. Este movimento pode muitas vezes ser indesejável devido ao grande número de chaveamentos que ocorre num sistema prático, mas sua ocorrência também permite que o sistema siga uma dinâmica diferente das dinâmicas de seus subsistemas, o que pode ser desejável em alguns casos para resolver problemas de controle difíceis ou impossíveis de serem resolvidos de outra forma.

Assim, para levar em conta no modelo matemático a possibilidade de ocorrência de movimento escorregadio, generaliza-se o conceito de solução de sistema chaveado definindo a chamada *solução*

no sentido de Filippov. Para um sistema chaveado com chaveamento dependente do estado e em que o espaço de estados está particionado em regiões abertas Ω_n , $n \in \mathcal{J}$, e $\mathcal{S}_{i_1 i_2 \dots i_k}$ é a fronteira comum das regiões $\Omega_{i_1}, \dots, \Omega_{i_k}$, diz-se que uma função absolutamente contínua x é uma solução de Filippov se satisfizer a *inclusão diferencial*

$$\dot{x} \in F(x)$$

em que $F(x) = \{f_n(x)\}$ se $x \in \Omega_n$ e $F(x) = \text{co}\{f_{i_1}(x), \dots, f_{i_k}(x)\}$ se $x \in \mathcal{S}_{i_1 \dots i_k}$; lembramos que $\text{co}A$ denota o envelope convexo do conjunto A .

Exemplo 2.6. Retomemos o Exemplo 2.5. Utilizando o conceito de solução de Filippov, verifica-se que uma solução deste sistema deve satisfazer

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T & \text{se } x_2 > 0, \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T & \text{se } x_2 < 0, \\ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \end{pmatrix}^T & \text{se } x_2 = 0, \text{ com } \alpha \in [-1, 1]. \end{cases} \quad (2.6)$$

Assim, a solução definida como no Exemplo 2.5 até t_1 e definida por $x(t) = \begin{pmatrix} x(t_1) + (t - t_1) & 0 \end{pmatrix}^T$ para $t > t_1$ satisfaz (2.6) e é assim solução no sentido de Filippov do sistema chaveado do Exemplo 2.5. \square

2.4 Estabilidade

Seja o sistema chaveado dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_{\sigma(t)}(x(t)), \\ \sigma(t) &= \varphi(t, \sigma(t^-), x(t)), \\ t \in \mathbb{R}_+, x(t) \in \mathbb{R}^d, u(t) \in \mathbb{R}^m, \sigma(t) \in \mathcal{J}, \varphi \in \mathcal{G}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Nosso objetivo agora é estudar a estabilidade dos pontos de equilíbrio deste sistema e, para isto, começamos definindo o conceito de ponto de equilíbrio.

Definição 2.7. Dizemos que $p \in \mathbb{R}^d$ é um *ponto de equilíbrio* do sistema (2.7) se $f_k(p) = 0$ para todo $k \in \mathcal{J}$.

Para o estudo da estabilidade de um ponto de equilíbrio p de (2.7), podemos supor, sem perda de generalidade, que o ponto de equilíbrio em questão é a origem. Os conceitos de estabilidade que utilizamos aqui são os de estabilidade uniforme, estabilidade uniforme assintótica e estabilidade uniforme exponencial. Antes de defini-los, lembramos a definição de uma função de classe \mathcal{KL} .

Definição 2.8. Dizemos que a função contínua $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é de *classe \mathcal{K}* se for estritamente crescente e tal que $\phi(0) = 0$. Dizemos que a função contínua $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é de *classe \mathcal{L}* se for decrescente e $\psi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Finalmente, dizemos que $\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é de *classe \mathcal{KL}* se $r \mapsto \beta(r, t)$ for de classe \mathcal{K} para todo $t \geq 0$ e se $t \mapsto \beta(r, t)$ for de classe \mathcal{L} para todo $r \geq 0$.

Podemos assim definir os conceitos de estabilidade que serão utilizados na sequência.

Definição 2.9. Consideremos o sistema chaveado (2.7).

- (a) A origem de (2.7) é *uniformemente estável (US)* se, dado $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $\|x(0)\| < \delta$ implica $\|x(t)\| < \varepsilon$ para $t \geq 0$ e para toda solução x de (2.7).
- (b) A origem de (2.7) é *uniformemente assintoticamente estável (UAS)* se existir $\delta > 0$ e uma função β de classe \mathcal{KL} tais que, para todo $x(0)$ com $\|x(0)\| \leq \delta$, para toda solução x de (2.7) e para todo $t \geq 0$, tenhamos

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(0)\|, t). \quad (2.8)$$

- (c) Se a origem de (2.7) for uniformemente assintoticamente estável e tal que a função β dada em (b) possa ser escolhida sob a forma $\beta(r, t) = Mre^{-\lambda t}$ para certas constantes $M > 0$, $\lambda > 0$, dizemos que a origem é *uniformemente exponencialmente estável (UES)*.
- (d) Se, em (b), a função β for independente de δ e a desigualdade (2.8) for válida para todo $x(0) \in \mathbb{R}^d$, dizemos que o equilíbrio é *global* e que a origem é *globalmente uniformemente assintoticamente estável (GUAS)*. Se estivermos no caso de (c), dizemos que a origem é *globalmente uniformemente exponencialmente estável (GUES)*.

A uniformidade à qual fazemos referência nestas definições é com relação ao sinal de chaveamento particular σ : as condições exigidas nas definições de estabilidade devem ser válidas para toda lei de chaveamento $\varphi \in \mathcal{G}$ e todo sinal de chaveamento σ satisfazendo esta lei. No que segue, por simplicidade, omitiremos o termo “uniformemente” do tipo de estabilidade considerado, deixando-o implícito. Também por simplicidade, faremos o abuso de linguagem de falar da estabilidade *do sistema chaveado* (2.7) ao invés da estabilidade *da origem do sistema chaveado*.

No caso de sistemas chaveados lineares, os conceitos de GUAS e GUES coincidem. Além disto, para sistemas chaveados lineares em que o chaveamento depende apenas do tempo, ou em que o chaveamento depende do estado x apenas através de sua direção $\frac{x}{\|x\|}$ e não de sua norma $\|x\|$, a homogeneidade do sistema garante que toda estabilidade do sistema será global.

No caso de um sistema chaveado a tempo discreto

$$\begin{aligned} x[j+1] &= f_{\sigma[j]}(x[j]), \\ \sigma[j+1] &= \varphi(j, \sigma[j], x[j]), \\ j \in \mathbb{N}, x[j] &\in \mathbb{R}^d, u[j] \in \mathbb{R}^m, \sigma[j] \in \mathcal{I}, \varphi \in \mathcal{G}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

pode-se definir, analogamente à Definição 2.7, a noção de ponto de equilíbrio de (2.9), que, neste caso, corresponde à noção de um ponto fixo comum a todas as aplicações.

Definição 2.10. Dizemos que $p \in \mathbb{R}^d$ é um *ponto de equilíbrio* do sistema (2.9) se $f_k(p) = p$ para todo $k \in \mathcal{I}$.

Assim como no caso contínuo, o estudo da estabilidade de um ponto de equilíbrio se faz, sem perda de generalidade, supondo que o ponto de equilíbrio em questão é a origem. Neste caso, as definições dos conceitos de estabilidade dadas na Definição 2.9 se aplicam igualmente ao caso discreto, bastando substituir a variável contínua t pela variável discreta j .

2.5 Funções de Lyapunov

A análise de estabilidade através das funções de Lyapunov constitui um dos principais métodos de estudo de estabilidade de sistemas chaveados. A ideia principal deste método é procurar por uma função $V(x)$ do estado x que seja positiva definida e decrescente ao longo das trajetórias de *todos* os subsistemas $\dot{x}(t) = f_k(x(t))$ do sistema chaveado (2.7). Neste caso, a função V é chamada de função de Lyapunov, e a sua existência permite obter resultados de estabilidade.

Definição 2.11. Seja $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função de classe \mathcal{C}^1 positiva definida. Dizemos que V é uma *função de Lyapunov* para o sistema chaveado (2.7) se existir uma função contínua definida positiva $W : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^d$ e todo $k \in \mathcal{I}$,

$$\nabla V \cdot f_k(x) \leq -W(x). \quad (2.10)$$

O resultado principal neste caso é o seguinte, apresentado em [26], que consiste em uma generalização do teorema de Lyapunov para sistemas dinâmicos ao caso de sistemas chaveados.

Teorema 2.12. *Se existir uma função de Lyapunov radialmente ilimitada para o sistema chaveado (2.7), então este sistema é GUAS.*

No caso discreto, a condição (2.10) é substituída pela condição de decrescimento estrito de V ao longo das trajetórias do sistema; isto é, se $x[j]$ é uma solução de (2.9), exige-se que $V(x[j+1]) - V(x[j]) \leq -W(x[j])$. O Teorema 2.12 permanece válido neste caso.

Deve-se notar que a Definição 2.11 não traz o caso mais geral de funções de Lyapunov. Pode-se, por exemplo, considerar funções V e W definidas apenas em uma vizinhança em torno da origem e a desigualdade (2.10) satisfeita apenas nesta vizinhança; neste caso, não se pode obter um resultado de estabilidade global como o Teorema 2.12, mas pode-se concluir a estabilidade assintótica local do equilíbrio da origem.

Da mesma forma, outras generalizações do conceito de função de Lyapunov são possíveis, em que, por exemplo, não se exige que V seja de classe \mathcal{C}^1 , ou em que se permite o uso de múltiplas funções de Lyapunov V . Assim, pode-se considerar, por exemplo, funções de Lyapunov chaveadas, isto é, que dependem do sinal $\sigma(t)$, funções de Lyapunov múltiplas, funções de Lyapunov quadráticas por partes, funções de Lyapunov lineares por partes, dentre outras. Estes conceitos serão introduzidos posteriormente conforme necessário.

Um caso particular importante de função de Lyapunov é quando esta é quadrática, isto é, quando $V(x) = x^T P x$.

Definição 2.13. Dizemos que a função de Lyapunov V da Definição 2.11 é *quadrática* se $V(x) = x^T P x$

para uma certa matriz P simétrica definida positiva. Neste caso, dizemos também que V é uma *função de Lyapunov quadrática comum (CQLF)* do sistema chaveado (2.7).

Neste caso, o resultado análogo ao Teorema 2.12, apresentado também em [26], possui uma conclusão mais forte.

Teorema 2.14. *Se existir uma CQLF para o sistema chaveado (2.7) e se a função W da Definição 2.11 for quadrática, então (2.7) é GUES.*

Assim, boa parte do estudo da estabilidade de sistemas chaveados tem por objetivo procurar condições sobre os subsistemas $\dot{x} = f_k(x)$ para garantir a existência de uma função de Lyapunov para o sistema chaveado, o que permite garantir a sua estabilidade. Muitas vezes, o objetivo é procurar uma CQLF, uma vez que a forma particular da CQLF $V(x) = x^T P x$ e os resultados de funções de Lyapunov quadráticas para sistemas lineares simplificam o procedimento de procura da CQLF, e, assim, muitos resultados foram obtidos neste sentido. Porém, não se pode esperar obter uma teoria geral baseada apenas em CQLFs, pois existem sistemas chaveados GUES que não possuem uma CQLF, como mostra o Exemplo 2.15, retirado de [26] e originalmente apresentado em [16].

Exemplo 2.15. Seja o sistema chaveado linear com $\mathcal{J} = \{1, 2\}$,

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t), \quad (2.11a)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 1/10 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.11b)$$

e $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{J}$ um sinal de chaveamento arbitrário, isto é, σ é uma função mensurável qualquer constante por partes e com um número finito de descontinuidades em todo intervalo limitado de tempo.

Afirmamos que este sistema é GUES. Uma forma de demonstrar isto geometricamente é através da técnica do *chaveamento de pior caso*, em que se procura obter o sinal de chaveamento que corresponde ao caso de maior afastamento possível da origem. Esta técnica tem diversas aplicações em sistemas chaveados [8, 14, 16, 26] e se, no pior caso, a solução ainda convergir para a origem, então esta convergência ocorre para todos os outros sinais de chaveamento possíveis. Notemos que os campos de vetores $A_1 x$ e $A_2 x$ são paralelos em duas retas passando pela origem, a saber, as retas de equações

$$2x_1 + (\sqrt{161} + 11)x_2 = 0, \quad 2x_1 - (\sqrt{161} - 11)x_2 = 0.$$

Estas retas dividem o plano em quatro regiões, notadas Q_1 , Q_2 , Q_3 e Q_4 , conforme a Figura 2.4.

Nas regiões Q_1 e Q_3 , o campo $A_1 x$ aponta mais para fora que o campo $A_2 x$ e, assim, o maior afastamento da origem é obtido seguindo $A_1 x$ em Q_1 e Q_3 . Em Q_2 e Q_4 , é o campo $A_2 x$ que aponta mais para fora, e, assim, o maior afastamento da origem é obtido seguindo $A_2 x$ em Q_2 e

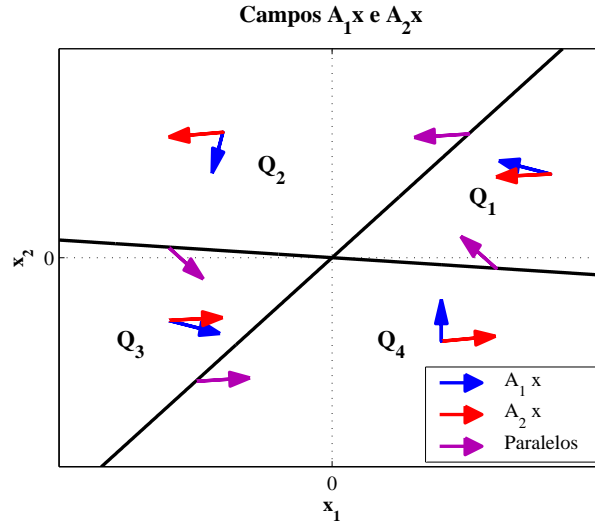


FIGURA 2.4: Campos de vetores normalizados A_1x (em azul) e A_2x (em vermelho) (representados em roxo no caso em que são paralelos), retas em que estes campos são paralelos e regiões Q_1 , Q_2 , Q_3 e Q_4

Q_4 . Logo, pode-se definir a lógica de chaveamento

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in Q_1 \text{ ou } x \in Q_3, \\ 2 & \text{se } x \in Q_2 \text{ ou } x \in Q_4, \end{cases} \quad (2.12)$$

e o sinal de chaveamento $\sigma(t) = \varphi(x(t))$. Para este sinal de chaveamento, toda solução do sistema tende exponencialmente à origem. De fato, tomando a solução de condição inicial $x(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$, a trajetória da solução pode ser calculada explicitamente utilizando-se as matrizes fundamentais

$$e^{A_1 t} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad e^{A_2 t} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & -10 \sin t \\ \frac{1}{10} \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Uma representação gráfica da solução está mostrada na Figura 2.5.

Notamos por t_1 o instante em que a trajetória atinge pela primeira vez a reta $2x_1 - (\sqrt{161} - 11)x_2 = 0$, por t_2 o instante em que a reta $2x_1 + (\sqrt{161} + 11)x_2 = 0$ é atingida pela primeira vez, e por t_3 o instante em que a solução volta para o eixo x_1 , em seu semi-eixo negativo. Um cálculo direto mostra que

$$t_1 = \arctan\left(\frac{\sqrt{161} + 11}{20}\right), \quad t_2 - t_1 = \arctan\left(\frac{\sqrt{161}}{9}\right), \quad t_3 - t_2 = \arctan\left(\frac{\sqrt{161} - 11}{20}\right)$$

e que

$$x(t_3) = e^{-(t_1+t_2+t_3)} \begin{pmatrix} -\frac{9\sqrt{161}+121}{40} \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,8727 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, ao voltar para o eixo x_1 no instante t_3 , a norma da solução diminui. Por homogeneidade, isto garante que $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ exponencialmente. Também por homogeneidade, toda solução com

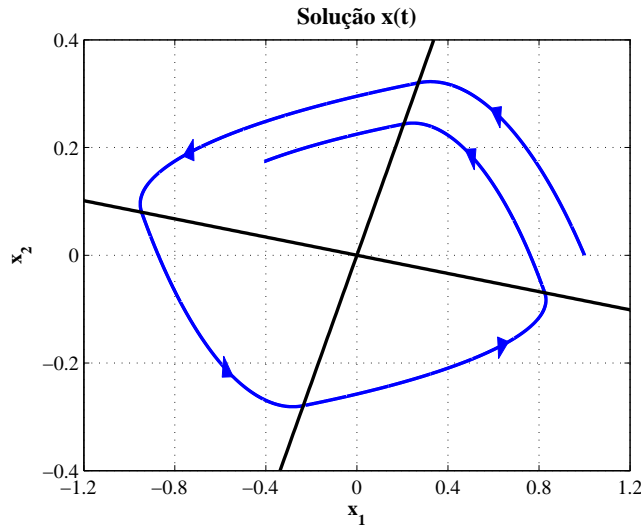


FIGURA 2.5: Trajetória do sistema chaveado (2.11) sob a lógica de chaveamento (2.12) e com condição inicial $x(0) = (1, 0)^T$.

condição inicial no eixo x_1 tende à origem exponencialmente, e, como as soluções deste sistema circulam em torno da origem, toda solução do sistema passa pelo eixo x_1 , donde segue que toda solução do sistema chaveado (2.11) sob a lógica de chaveamento (2.12) tende à origem exponencialmente. Esta lógica de chaveamento fornece um limitante inferior uniforme (com relação à lógica de chaveamento) para a velocidade exponencial de convergência das soluções do sistema (2.11), e, assim, toda solução do sistema chaveado (2.11) converge exponencialmente para a origem sob qualquer lógica de chaveamento, o que mostra que o sistema é GUES. O Exemplo 3.33 abaixo mostrará este resultado de outra forma, através de critérios algébricos sobre as matrizes A_1 e A_2 utilizando o Teorema 3.32. Notemos que a demonstração do Teorema 3.32 utiliza a técnica do *pior caso*, fornecendo um critério algébrico mais simples do que a utilização direta da técnica.

Verificamos agora que o sistema (2.11) não possui uma CQLF. De fato, suponhamos que existisse $V(x) = x^T P x$ uma CQLF do sistema para uma certa matriz P simétrica definida positiva. Sem perda de generalidade, podemos escrever

$$P = \begin{pmatrix} 1 & q \\ q & r \end{pmatrix},$$

pois, se V é uma CQLF, então αV é uma CQLF para todo $\alpha > 0$, o que justifica a normalização do primeiro coeficiente de P . Como V é função de Lyapunov, temos em particular

$$\nabla V \cdot A_1 x < 0, \quad \nabla V \cdot A_2 x < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

donde segue que

$$A_1^T P + P A_1 \prec 0, \quad A_2^T P + P A_2 \prec 0.$$

Calculamos então

$$-A_1^T P - PA_1 = \begin{pmatrix} 2-2q & 2q+1-r \\ 2q+1-r & 2q+2r \end{pmatrix}, \quad -A_2^T P - PA_2 = \begin{pmatrix} 2-\frac{q}{5} & 2q+10-\frac{r}{10} \\ 2q+10-\frac{r}{10} & 20q+2r \end{pmatrix},$$

e, lembrando que uma matriz é definida positiva se e somente se todos os seus menores principais forem positivos, obtemos que estas matrizes são definidas positivas se e somente se

$$\begin{cases} q < 1 \\ r^2 - 6r + 8q^2 + 1 < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} q < 10 \\ r^2 - 600r + 800q^2 + 10000 < 0, \end{cases}$$

o que fornece assim as regiões elípticas dadas por

$$\frac{(r-3)^2}{8} + q^2 < 1, \quad \frac{(r-300)^2}{80000} + \frac{q^2}{100} < 1.$$

Estas regiões, esboçadas na Figura 2.6, não se interceptam. Assim, não há nenhum par $(q, r) \in \mathbb{R}^2$ que torne as matrizes $-A_1^T P - PA_1$ e $-A_2^T P - PA_2$ simultaneamente definidas positivas, o que mostra que o sistema (2.11) não possui uma CQLF.

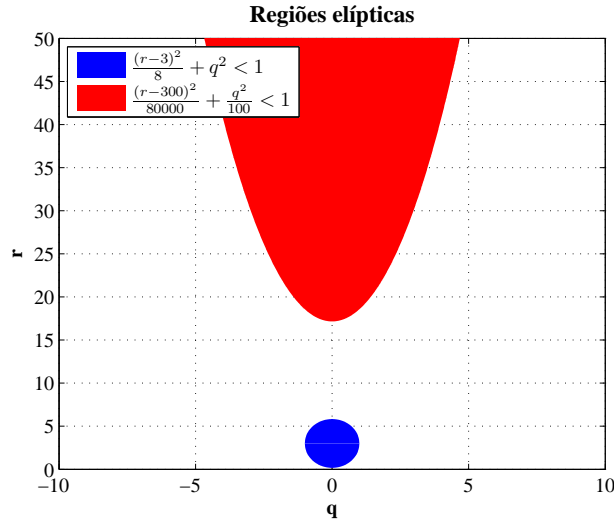


FIGURA 2.6: Região elíptica $\frac{(r-3)^2}{8} + q^2 < 1$ (em azul) e parte da região elíptica $\frac{(r-300)^2}{80000} + \frac{q^2}{100} < 1$ (em vermelho).

□

O Exemplo 2.15 mostra assim que, embora a procura de uma CQLF seja uma técnica usual e muito utilizada no estudo da estabilidade de sistemas chaveados, ela não permite realizar um estudo completo de estabilidade, pois a existência de uma CQLF é uma condição suficiente mas não necessária para a estabilidade exponencial. Isto justifica a procura de funções de Lyapunov sob formas mais complicadas para se obter critérios mais gerais.

Capítulo 3

Análise da estabilidade sob chaveamento arbitrário

Neste capítulo, estudamos o sistema chaveado dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f_{\sigma(t)}(x(t)), & \sigma &\in \mathcal{G}, \\ x(t) &\in \mathbb{R}^d, & \sigma(t) &\in \mathcal{J}, \quad t \in \mathbb{R}_+\end{aligned}\tag{3.1}$$

com

$$\mathcal{G} = \{\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{J} \text{ mensurável} \mid \sigma \text{ é constante por partes e possui um número finito de descontinuidades em todo intervalo de tempo limitado}\},$$

e seu equivalente a tempo discreto,

$$\begin{aligned}x[j+1] &= f_{\sigma[j]}(x[j]), & \sigma &\in \mathcal{G}, \\ x[j] &\in \mathbb{R}^d, & \sigma[j] &\in \mathcal{J}, \quad j \in \mathbb{N}\end{aligned}\tag{3.2}$$

com $\mathcal{G} = \{\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{J}\}$. Estes sistemas correspondem assim ao caso de chaveamento dependente do tempo arbitrário: supomos que a dinâmica do sistema possa seguir qualquer sinal de chaveamento possível. Notemos que a definição da classe \mathcal{G} de sinais de chaveamento possíveis depende do contexto. Em quase todo o capítulo, nosso interesse será pelo sistema chaveado linear

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \quad \sigma \in \mathcal{G},\tag{3.3}$$

ou, no caso discreto,

$$x[j+1] = A_{\sigma[j]}x[j], \quad \sigma \in \mathcal{G},\tag{3.4}$$

e suporemos, exceto quando explicitado o contrário, que o conjunto de índices \mathcal{J} é finito, isto é, há apenas uma quantidade finita de subsistemas, e escrevemos $\mathcal{J} = \{1, \dots, N\}$.

3.1 Sistemas chaveados, inclusões diferenciais e estabilidade robusta

O estudo da estabilidade de sistemas chaveados sob um chaveamento arbitrário se relaciona com outras áreas de estudo, principalmente as chamadas inclusões diferenciais e problemas de estabilidade robusta. Na prática, explorar estas relações é importante para poder aplicar aos sistemas chaveados técnicas e teorias desenvolvidas em outros contextos, permitindo inclusive uma transposição direta de certos resultados.

No caso de chaveamento arbitrário, o estudo do sistema chaveado está fortemente relacionado com o estudo das chamadas *inclusões diferenciais* [43]. Assim, correspondente ao sistema chaveado linear

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \quad (3.5)$$

temos a inclusão diferencial

$$\dot{x}(t) \in \{Ax(t) \mid A \in \mathcal{A}\} \quad (3.6)$$

com $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$. Uma solução de (3.6) é uma função absolutamente contínua x satisfazendo $\dot{x}(t) \in \{Ax(t) \mid A \in \mathcal{A}\}$ em quase todo $t \in \mathbb{R}_+$, e isto é equivalente à existência de uma aplicação mensurável $\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{J}$ tal que

$$\dot{x}(t) = A_{\rho(t)}x(t)$$

em quase todo $t \in \mathbb{R}_+$. Assim, a noção de solução da inclusão diferencial (3.6) é uma generalização da noção de solução do sistema chaveado (3.5) em que o sinal de chaveamento arbitrário σ é substituído por uma função mensurável qualquer ρ . Toda solução sistema chaveado (3.5) é assim solução de (3.6) e, como o sinal de chaveamento em (3.5) é arbitrário, espera-se que considerar uma função mensurável qualquer ρ não seja muito diferente de considerar um sinal de chaveamento arbitrário σ , isto é, espera-se que o conjunto das soluções de (3.5) esteja fortemente relacionado com o conjunto das soluções de (3.6). Além disso, notando por $\text{co}\mathcal{A}$ o envelope convexo de \mathcal{A} , podemos considerar igualmente a inclusão diferencial convexificada

$$\dot{x}(t) \in \{Ax(t) \mid A \in \text{co}\mathcal{A}\}. \quad (3.7)$$

Como nos processos de convexificação em sistemas de controle, espera-se que as soluções de (3.7) estejam fortemente relacionadas com as de (3.5) e (3.6). De fato, [43] fornece a relação entre estes sistemas através dos conjuntos atingíveis. Notando

$$\mathcal{A}_t^{\text{chaveado}}(x_0) = \{x(t) \mid x \text{ é solução de (3.5) para algum sinal de chaveamento } \sigma \text{ e } x(0) = x_0\},$$

$$\mathcal{A}_t^{\text{id}}(x_0) = \{x(t) \mid x \text{ é solução de (3.6) e } x(0) = x_0\},$$

$$\mathcal{A}_t^{\text{id, conv}}(x_0) = \{x(t) \mid x \text{ é solução de (3.7) e } x(0) = x_0\},$$

temos

$$\mathcal{A}_t^{\text{chaveado}}(x_0) \subset \mathcal{A}_t^{\text{id}}(x_0) \subset \mathcal{A}_t^{\text{id, conv}}(x_0) = \overline{\mathcal{A}_t^{\text{chaveado}}(x_0)},$$

que mostra assim a relação entre as soluções de (3.5), (3.6) e (3.7) e explicita a proximidade que há entre elas. Esta proximidade pode ser explorada para se obter informações sobre o sistema (3.5) a

partir de informações sobre os sistemas (3.6) e (3.7), que vêm sendo estudados há mais tempo e sobre os quais mais resultados são conhecidos; ver, por exemplo, [21, 22].

O problema (3.7) pode também ser visto como o problema de buscar uma solução do sistema linear incerto politópico variante no tempo

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (3.8)$$

com $A(t) \in \text{co}\mathcal{A} = \text{co}\{A_1, \dots, A_N\}$, sendo $\text{co}\mathcal{A}$ um polítopo em $\mathbb{R}^{d \times d}$ e $A(t)$ uma função mensurável. A estabilidade de (3.8) é estudada em termos de *estabilidade exponencial robusta*, isto é, deseja-se que toda solução $x(t)$ convirja exponencialmente para a origem, independentemente da função mensurável $A(t)$ a valores em \mathcal{A} escolhida, a robustez sendo portanto com relação à matriz $A(t)$ do sistema. Vários resultados existem para este tipo de sistema, e traduzi-los para o caso de sistemas chaveados torna-se possível através de um resultado apresentado em [29].

Teorema 3.1. *O sistema chaveado (3.3) é exponencialmente estável se e somente se o sistema (3.8) for robustamente exponencialmente estável.*

Através desta equivalência, pode-se assim obter resultados de estabilidade para sistemas chaveados a partir de resultados já estabelecidos para sistemas do tipo (3.8). A título de exemplo, mencionamos que os Teoremas 3.22 e 3.25 apresentados abaixo foram inicialmente mostrados no contexto de (3.8), e é o Teorema 3.1 que permite o seu enunciado como um teorema sobre sistemas chaveados.

O análogo é válido para sistemas a tempo discreto. Assim, ao sistema chaveado linear a tempo discreto (3.4), pode-se associar o sistema

$$x[j+1] = A[j]x[j] \quad (3.9)$$

com $A[j]$ pertencente ao polítopo $\text{co}\mathcal{A} = \text{co}\{A_1, \dots, A_N\}$ de $\mathbb{R}^{d \times d}$. O Teorema 3.1 é também válido neste caso.

Teorema 3.2. *O sistema chaveado (3.4) é exponencialmente estável se e somente se o sistema (3.9) for robustamente exponencialmente estável.*

Apesar de não fazermos referência explícita aos Teoremas 3.1 e 3.2, deve-se lembrar que são estes teoremas que estão por trás de alguns dos resultados apresentados nas próximas seções, permitindo interpretar resultados de estabilidade robusta em termos de resultados sobre sistemas chaveados.

3.2 Função de Lyapunov quadrática comum

Uma das formas de se analisar a estabilidade de sistemas chaveados sob chaveamento arbitrário é através da procura de uma função de Lyapunov quadrática comum (CQLF). Como foi explicitado no Exemplo 2.15, nem todo sistema chaveado GUES possui uma CQLF, mas a procura por uma CQLF, além de ser matematicamente mais simples, leva a vários critérios de estabilidade importantes.

Interessamo-nos ao sistema chaveado linear (3.3) e seu correspondente em tempo discreto, (3.4), que relembramos aqui.

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \quad \sigma \in \mathcal{G}, \quad (3.3)$$

$$x[j+1] = A_{\sigma[j]}x[j], \quad \sigma \in \mathcal{G}. \quad (3.4)$$

Uma CQLF para estes sistemas é uma função de Lyapunov do tipo $V(x) = x^T P x$ com P uma matriz simétrica definida positiva. No caso contínuo, a condição

$$\nabla V(x) \cdot A_k x < 0$$

pode ser escrita como

$$P A_k + A_k^T P \prec 0, \quad \forall k \in \mathcal{J}, \quad (3.10)$$

e, no caso discreto, a condição exigida é que $V(x[j])$ seja estritamente decrescente, o que corresponde à condição

$$A_k^T P A_k - P \prec 0, \quad \forall k \in \mathcal{J}. \quad (3.11)$$

As desigualdades matriciais (3.10) e (3.11) são desigualdades matriciais lineares (LMIs), e, assim, o problema de encontrar uma CQLF para o sistema chaveado (3.3) (resp. (3.4)) é equivalente ao problema de encontrar uma solução P à LMI (3.10) (resp. (3.11)).

3.2.1 Matrizes que comutam

Consideremos inicialmente o caso de uma família finita de matrizes $\{A_1, \dots, A_N\}$. Um primeiro critério de estabilidade através da obtenção de uma CQLF é obtido no caso em que as matrizes desta família são todas Hurwitz e comutam duas a duas, isto é, se $A_i A_j = A_j A_i$ para todos $i, j \in \mathcal{J}$ [3].

Teorema 3.3. *Seja $\mathcal{J} = \{1, \dots, N\}$ e suponha que as matrizes A_i , $i \in \mathcal{J}$ comutem duas a duas e sejam todas Hurwitz. Sejam P_1, \dots, P_N as matrizes simétricas definidas positivas que satisfazem as equações de Lyapunov*

$$\begin{aligned} A_1^T P_1 + P_1 A_1 &= -I, \\ A_i^T P_i + P_i A_i &= -P_{i-1}, \quad i = 2, \dots, N, \end{aligned}$$

Então P_N é dada por

$$P_N = \int_0^\infty e^{A_N^T t_N} \int_0^\infty e^{A_{N-1}^T t_{N-1}} \dots \int_0^\infty e^{A_1^T t_1} e^{A_1 t_1} dt_1 \dots e^{A_{N-1} t_{N-1}} dt_{N-1} e^{A_N t_N} dt_N$$

e a função $V(x) = x^T P_N x$ é uma CQLF para o sistema chaveado (3.3).

Este resultado possui igualmente um análogo discreto.

Teorema 3.4. *Seja $\mathcal{J} = \{1, \dots, N\}$ e suponha que as matrizes A_i , $i \in \mathcal{J}$ comutem duas a duas e sejam todas Hurwitz. Sejam P_1, \dots, P_N as matrizes simétricas definidas positivas que satisfazem as equações*

de Lyapunov

$$\begin{aligned} A_1^T P_1 A_1 - P_1 &= -I, \\ A_i^T P_i A_i - P_i &= -P_{i-1}, \quad i = 2, \dots, N, \end{aligned}$$

Então a função $V(x) = x^T P_N x$ é uma CQLF para o sistema chaveado (3.4).

Assim, no caso em que as matrizes dos subsistemas comutam, há sempre uma CQLF para o sistema correspondente, e um corolário dos Teoremas 3.3 e 3.4 é então a estabilidade do sistema chaveado.

Corolário 3.5. *Sob as hipóteses do Teorema 3.3 (resp. Teorema 3.4), o sistema chaveado (3.3) (resp. (3.4)) é GUES.*

3.2.2 Algoritmos numéricos

Na prática, boa parte dos casos de interesse correspondem a sistemas cujas matrizes não comutam e, assim, o Corolário 3.5 não se aplica. A obtenção de critérios para o caso geral, porém, é bem mais complicada. Uma técnica possível é a busca numérica por soluções das LMIs (3.10) e (3.11) utilizando métodos clássicos de análise numérica, como algoritmos de otimização convexa. Alguns algoritmos são capazes de resolver uma LMI desde que esta possua uma solução, e há também critérios para a existência de soluções que podem ser verificados numericamente; por exemplo, em [43], afirma-se que, se existir R_i , $i \in \mathcal{J} = \{1, \dots, N\}$, tal que $R_i \succ 0$ e

$$\sum_{i=1}^N (A_i^T R_i + R_i A_i) \succ 0,$$

então a LMI (3.10) não possui solução simétrica definida positiva.

Um método numérico de solução de LMIs que merece destaque é o apresentado em [28], baseado num algoritmo de gradiente iterativo que garante a convergência para uma solução P das LMIs (3.10) em um número finito de iterações, quando uma solução existe. A consideração inicial do algoritmo é notar que, se existir $P \succ 0$ satisfazendo

$$A_i^T P + P A_i \prec 0, \quad \forall i \in \mathcal{J} = \{1, \dots, N\}, \quad (3.12)$$

então, dada uma matriz arbitrária $Q \succ 0$, a menos de multiplicar P por um escalar suficientemente grande, temos

$$A_i^T P + P A_i + Q \preceq 0, \quad \forall i \in \mathcal{J} = \{1, \dots, N\}, \quad (3.13)$$

e esta segunda condição é na verdade equivalente à primeira, o que faz com que seja possível resolver as LMIs de (3.12) procurando por soluções de (3.13). Assim, fixa-se $Q \succ 0$. O algoritmo parte de uma função diferenciável convexa f definida sobre o espaço das matrizes de $\mathbb{R}^{d \times d}$ simétricas que, a cada matriz R , associa um número real $f(R)$ com a propriedade que $f(R) \leq 0$ se e somente se $R \preceq 0$.

Define-se assim $v(P, A) = f(A^T P + PA + Q)$ e uma função $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{J}$ por $h(k) = (k \bmod N) + 1$. Para $\alpha \in [0, 2]$ e $r > 0$ arbitrários e para $k \in \mathbb{N}$, define-se

$$\mu_k = \frac{\alpha v(P_k, A_{h(k)}) + r \|\nabla_P v(P_k, A_{h(k)})\|}{\|\nabla_P v(P_k, A_{h(k)})\|^2}.$$

O método numérico de [28] é então

$$P_{k+1} = \begin{cases} P_k - \mu_k \nabla_P v(P_k, A_{h(k)}), & \text{se } v(P_k, A_{h(k)}) > 0, \\ P_k, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.14)$$

O resultado principal de [28] é a convergência deste método numérico.

Teorema 3.6. *Para o algoritmo (3.14) acima, se existirem soluções de (3.13), então existe um inteiro k^* tal que P_{k^*} é solução de (3.13).*

Assim, quando o sistema (3.3) admitir uma CQLF, esta pode ser calculada utilizando o algoritmo acima. O artigo [28] sugere escolhas possíveis da função f e propõe modificações neste algoritmo que facilitariam a convergência, além de propor um algoritmo estocástico capaz de determinar uma CQLF para uma família compacta (possivelmente infinita) de matrizes Hurwitz que garante a convergência no sentido de probabilidade.

Apesar da eficiência dos métodos numéricos para o cálculo da CQLF de um sistema chaveado quando esta existe, estes algoritmos não ajudam a compreender o motivo por que uma CQLF existe ou não para um dado sistema chaveado, nem de estudar a relação entre a existência da CQLF e a dinâmica do sistema chaveado. Assim, por exemplo, a questão de determinar quais classes de matrizes apresentam uma CQLF não pode ser respondida através dos algoritmos numéricos. Além disto, estes algoritmos podem não ser eficientes para um número grande de matrizes, o que justifica o estudo de estruturas especiais de matrizes que garantem a existência de uma CQLF.

3.2.3 Condições suficientes para a existência de CQLF

Um dos problemas no estudo da existência de uma CQLF para um sistema chaveado é determinar classes de matrizes para as quais a existência de uma CQLF é garantida. Um caso particular disto foi dado na Seção 3.2.1, em que foram dados resultados de existência de CQLF para matrizes que comutam, e outros casos mais gerais podem ser obtidos.

Um primeiro caso corresponde às classes de matrizes que admitem a função de Lyapunov $V(x) = x^T x$, isto é, que satisfazem

$$A^T + A \prec 0. \quad (3.15)$$

Assim, se todas as matrizes de $\{A_k, k \in \mathcal{J}\}$ admitem esta função de Lyapunov, ela é evidentemente uma CQLF para o sistema chaveado correspondente, que é portanto GUES. A referência [43] lembra que todas as matrizes normais, isto é, as matrizes A com $AA^T = A^T A$, satisfazem (3.15) se forem Hurwitz, e que, se A satisfaz (3.15) e S é anti-simétrica, então $A + S$ também satisfaz (3.15). Estes critérios podem assim ser úteis para determinar a existência de uma CQLF, que, neste caso, é conhecida e vale $V(x) = x^T x$.

Um segundo caso lembrado por [43] é o de matrizes triangulares.

Teorema 3.7. *Suponhamos as matrizes Hurwitz $\{A_1, \dots, A_N\}$ triangulares superiores. Então o sistema chaveado correspondente admite uma CQLF da forma $V(x) = x^T P x$ com P uma matriz diagonal.*

Uma generalização imediata deste resultado é o caso das matrizes Hurwitz que são simultaneamente triangularizáveis, isto é, de uma família $\{A_1, \dots, A_N\}$ para a qual existe R não-singular tal que $RA_i R^{-1}$ é triangular superior para todo i . De fato, se este for o caso, então o Teorema 3.7 garante a existência de P tal que

$$Q_i = (R^{-1})^T A_i^T R^T P + P R A_i R^{-1} \prec 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Assim, Q_i é simétrica e definida negativa, e portanto o mesmo vale para $R^T Q_i R$, donde segue que

$$A_i^T R^T P R + R^T P R A_i = R^T Q_i R \prec 0,$$

e assim $V(x) = x^T R^T P R x$ é uma CQLF para o sistema chaveado definido pelas matrizes A_1, \dots, A_N . Obtemos assim o seguinte corolário.

Corolário 3.8. *Suponhamos que as matrizes Hurwitz $\{A_1, \dots, A_N\}$ sejam simultaneamente triangularizáveis. Então o sistema chaveado correspondente admite uma CQLF.*

O caso da Seção 3.2.1 segue assim como caso particular, uma vez que uma família de matrizes que comutam duas a duas pode ser simultaneamente triangularizada.

O Teorema 3.7 e o Corolário 3.8 mostram assim que, quando consideramos o caso em que as matrizes $\{A_1, \dots, A_N\}$ são triangulares superior ou triangularizáveis, a verificação da estabilidade exponencial do sistema chaveado (3.3) é imediata, bastando verificar a estabilidade exponencial de cada subsistema que o constitui. Porém, perturbações de uma família de matrizes triangulares superiores ou triangularizáveis podem fazer com que a família deixe de sê-lo, e, além disto, muitos casos práticos lidam com matrizes que não são destes tipos. Assim, faz-se necessário obter resultados mais gerais que o Teorema 3.7 e o Corolário 3.8.

O artigo [27] apresenta um outro ponto de vista do Corolário 3.8. De fato, [27] mostra o seguinte resultado.

Teorema 3.9. *Seja $\{A_k, k \in \mathcal{J}\}$ uma família compacta (possivelmente infinita) de matrizes Hurwitz. Se a álgebra de Lie gerada por esta família for solúvel, então o sistema chaveado correspondente (3.3) admite uma CQLF.*

Lembramos que uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita solúvel se $\mathfrak{g}^k = \{0\}$ para um certo k , em que \mathfrak{g}^k é definido por recorrência como $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}^k, \mathfrak{g}^k]$. Um cálculo direto mostra que toda álgebra de Lie gerada por família de matrizes triangulares superiores é solúvel, e esse resultado estende-se facilmente às álgebras de Lie geradas por famílias de matrizes simultaneamente triangularizáveis. Por outro lado, se a álgebra de Lie gerada por uma certa família de matrizes é solúvel, então esta família é simultaneamente triangularizável, e, assim, o Teorema 3.9 é equivalente ao Corolário 3.8. Porém, o Teorema 3.9 é ainda interessante, uma vez que relaciona a existência de uma CQLF com a

álgebra de Lie gerada pela família de matrizes que define o sistema chaveado. Além disto, enquanto que a verificação da triangularização simultânea de uma família de matrizes pode ser complicada, a verificação da solubilidade de uma álgebra de Lie é direta e parte apenas das matrizes originais. O ponto de vista do Teorema 3.9 possibilita igualmente uma extensão deste resultado a sistemas não-lineares, dada em [27].

Teorema 3.10. *Seja o sistema chaveado não-linear (3.1) e suponhamos $f_k(0) = 0$ e f_k de classe \mathcal{C}^1 em uma vizinhança da origem D para todo $k \in \mathcal{J}$. Suponhamos ainda que a família $\{f_k, k \in \mathcal{J}\}$ possa ser parametrizada por um conjunto de índices compacto \mathcal{J} de tal forma que $k \mapsto \frac{\partial f_k}{\partial x}(x)$ seja uma função contínua de k para todo $x \in D$. Notemos $F_k = \frac{\partial f_k}{\partial x}(0)$ e suponhamos que F_k seja uma matriz Hurwitz para todo $k \in \mathcal{J}$. Se a álgebra de Lie gerada por $\{F_k, k \in \mathcal{J}\}$ for solúvel, então o sistema (3.1) admite uma CQLF local, e é assim UES.*

O fato de o Teorema 3.9 relacionar a álgebra de Lie gerada por uma família de matrizes com a existência de uma CQLF indica que o estudo da álgebra de Lie pode trazer informações importantes sobre o comportamento do sistema chaveado (3.3). Um outro indício deste fato é que a álgebra de Lie traduz as relações de comutação entre as matrizes de uma família, e, como foi visto na Seção 3.2.1, estas relações também são importantes para o estudo da existência de uma CQLF. Com base nisto, [1] traz um resultado que generaliza o Teorema 3.9.

Teorema 3.11. *Consideremos uma família compacta de matrizes Hurwitz $\{A_k, k \in \mathcal{J}\}$. Seja \mathfrak{g} a álgebra de Lie gerada por $\{I, A_k \mid k \in \mathcal{J}\}$ e notemos $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{s}$ a decomposição de Levi de \mathfrak{g} em seu radical \mathfrak{r} e em uma subálgebra semi-simples \mathfrak{s} . Se \mathfrak{s} é compacta, então o sistema chaveado (3.3) admite uma CQLF. Além disso, se \mathfrak{s} não for compacta, então existe uma família finita de matrizes Hurwitz que geram \mathfrak{g} e tais que o sistema chaveado correspondente não é GUES.*

Lembramos que o radical \mathfrak{r} de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é o maior ideal solúvel contido em \mathfrak{g} , sendo que a subálgebra \mathfrak{f} de \mathfrak{g} é chamada de ideal se $[g, f] \in \mathfrak{f}$ para todo $f \in \mathfrak{f}, g \in \mathfrak{g}$. Neste caso, a decomposição de Levi consiste em escrever $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{s}$ em que \mathfrak{s} é uma álgebra de Lie semi-simples, isto é, de radical 0.

O Teorema 3.11, além de fornecer um critério mais forte para a existência de uma CQLF, mostra também que este critério é em certo sentido o melhor que se pode esperar através de álgebras de Lie, pois, quando este critério não está satisfeito, uma determinada família de geradores da álgebra de Lie \mathfrak{g} dá origem a um sistema chaveado que não é GUES e, portanto, que não admite uma CQLF. Uma observação sobre o seu enunciado é que, para concluir a existência de uma CQLF, não é necessária a introdução da matriz identidade I na família de geradores da álgebra de Lie \mathfrak{g} , isto é, podemos considerar simplesmente \mathfrak{g} gerada por $\{A_k, k \in \mathcal{J}\}$. A introdução da matriz identidade faz-se necessária apenas para que seja válida a segunda parte do teorema, que conclui a existência de uma família de geradores Hurwitz cujo sistema chaveado correspondente não é GUES.

Assim como o Teorema 3.9, o Teorema 3.11 admite uma generalização ao caso não-linear.

Teorema 3.12. *Seja o sistema chaveado não-linear (3.1) e suponhamos que suas funções f_k satisfaçam as hipóteses do Teorema 3.10. Definamos F_k como no Teorema 3.10 e seja \mathfrak{g} a álgebra de Lie gerada por $\{F_k, k \in \mathcal{J}\}$, ainda sob a hipótese de todas as F_k serem Hurwitz. Notemos por $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{s}$ a*

decomposição de Levi de \mathfrak{g} em seu radical \mathfrak{r} e em uma subálgebra semi-simples \mathfrak{s} . Se \mathfrak{s} é compacta, então o sistema chaveado (3.1) admite uma CQLF local, e é assim UES.

Um outro ponto de vista na análise da estabilidade de sistemas chaveados é através do *operador de Lyapunov*. Notando por $S^{d \times d}$ o subespaço de $\mathbb{R}^{d \times d}$ das matrizes simétricas, o operador de Lyapunov definido por $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ é a aplicação $L_A : S^{d \times d} \rightarrow S^{d \times d}$ dada por

$$L_A(P) = PA + A^T P.$$

Assim, a matriz A é Hurwitz se e somente se existir $P \succ 0$ tal que $L_A(P) \prec 0$. Pode-se igualmente definir o *operador de Lyapunov adjunto* L_A^* com relação ao produto escalar $\langle X, Y \rangle = \text{Tr}(X^T Y)$ em $S^{d \times d}$ através da relação

$$\langle X, L_A(Y) \rangle = \langle L_A^*(X), Y \rangle, \quad \forall X, Y \in S^{d \times d}.$$

Como

$$\begin{aligned} \langle X, L_A(Y) \rangle &= \langle X, YA + A^T Y \rangle = \text{Tr}(X^T YA + X^T A^T Y) = \\ &= \text{Tr}(AX^T Y + X^T A^T Y) = \text{Tr}((XA^T + AX)^T Y) = \langle XA^T + AX, Y \rangle, \end{aligned}$$

a definição de L_A^* mostra que

$$L_A^*(X) = XA^T + AX = L_{A^T}(X).$$

Os operadores de Lyapunov podem ser utilizados para obter condições suficientes para a existência de uma CQLF para um sistema chaveado [43]. A base deste estudo é a observação que um sistema chaveado a dois subsistemas, definidos pelas matrizes Hurwitz A_1 e A_2 , possui uma CQLF se e somente se existir $Q \succ 0$ tal que $L_{A_1} L_{A_2}^{-1}(Q) \succ 0$. Com isto, mostram-se os seguintes resultados.

Teorema 3.13. *Seja um sistema chaveado (3.3) a dois subsistemas, definidos pelas matrizes A_1 e A_2 . Suponhamos A_1 e A_2 Hurwitz. Se*

$$L_{A_2 - A_1}^* L_{A_2 - A_1} - L_{A_1}^* L_{A_1} - L_{A_2}^* L_{A_2} \prec 0,$$

então este sistema chaveado possui uma CQLF.

Teorema 3.14. *Seja $\{A_1, \dots, A_N\}$ uma família de matrizes Hurwitz, e defina*

$$\mu_{ij} = \lambda_{\min} \left(L_{A_i} L_{A_j}^{-1}(I) \right), \quad i, j \in \{1, \dots, N\}$$

e $M = (\mu_{ij})$. Se M for semi-positiva, isto é, se existir $x \in \mathbb{R}^N$ com $x_i \geq 0$ para todo i tal que $(Mx)_i > 0$ para todo i , então o sistema chaveado definido por esta família de matrizes admite uma CQLF.

Estes dois resultados fornecem assim condições diretas sobre os operadores de Lyapunov que permitem concluir a existência de uma CQLF, e, por conseguinte, a estabilidade exponencial de um sistema chaveado. Diferentemente do Corolário 3.8 e do Teorema 3.11, que fornecem condições sobre

a forma das matrizes ou sobre propriedades de sua álgebra de Lie, estes resultados exigem condições algébricas sobre os operadores de Lyapunov das matrizes do sistema chaveado. Estes diferentes pontos de vista fornecem assim diferentes critérios, que possuem, cada um, sua aplicabilidade.

3.2.4 Condições necessárias e suficientes para a existência de CQLF

Em alguns casos particulares, podem-se obter resultados de existência de CQLF que fornecem condições necessárias e suficientes. Um primeiro resultado deste tipo, mencionado em [29], considera um sistema planar composto de duas matrizes Hurwitz. Lembramos que $\gamma(A, B)$ denota o envelope convexo de $\{A, B\}$, $\gamma(A, B) = \{\alpha A + (1 - \alpha)B \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$.

Teorema 3.15. *Sejam A_1 e A_2 duas matrizes Hurwitz de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. As condições a seguir são equivalentes:*

- (a) *existe uma CQLF para o sistema chaveado linear correspondente às matrizes A_1 e A_2 ;*
- (b) *todas as matrizes de $\gamma(A_1, A_2)$ e $\gamma(A_1, A_2^{-1})$ são Hurwitz;*
- (c) *as matrizes $A_1 A_2$ e $A_1 A_2^{-1}$ não possuem autovalores reais negativos.*

Estas condições algébricas sobre A_1 e A_2 são facilmente verificáveis e fornecem um resultado simples e elegante sobre a existência de uma CQLF para um par de matrizes em dimensão 2; porém, os argumentos utilizados na demonstração não permitem uma generalização deste tipo de resultado a dimensões superiores ou a mais matrizes. No caso de dimensão superior, é possível, para o caso de dois subsistemas, obter uma condição necessária de existência de CQLF.

Teorema 3.16. *Sejam A_1 e A_2 duas matrizes Hurwitz de $\mathbb{R}^{d \times d}$. Se existir uma CQLF para o sistema chaveado correspondente a estas matrizes, então as matrizes $A_1[\alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2]$ e $A_1[\alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2]^{-1}$ não possuem nenhum autovalor real negativo para todo $\alpha \in [0, 1]$.*

Um outro resultado interessante para um par de matrizes Hurwitz A_1, A_2 em dimensão qualquer pode ser obtido quando o posto da diferença destas matrizes é 1, isto é, quando a dimensão da imagem da aplicação linear $A_2 - A_1$ é 1.

Teorema 3.17. *Sejam A_1 e A_2 duas matrizes Hurwitz de $\mathbb{R}^{d \times d}$ com $\text{posto}(A_2 - A_1) = 1$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (a) *existe uma CQLF para o sistema chaveado linear correspondente às matrizes A_1 e A_2 ;*
- (b) *todas as matrizes $A_1 + \alpha A_2$, $\alpha \geq 0$, são não-singulares;*
- (c) *a matriz $A_1 A_2$ não possui autovalores reais negativos.*

Isto é particularmente útil no caso de sistemas de controle lineares $\dot{x} = Ax + bu$ em que a entrada u é escalar e em que se faz uma realimentação de estado $u = -k^T x$. Neste caso, o sistema realimentado segue a dinâmica $\dot{x} = (A - bk^T)x$. O Teorema 3.17 pode ser aplicado quando o sistema de controle pode chavear entre o sistema não-controlado $\dot{x} = Ax$ e o sistema controlado $\dot{x} = (A - bk^T)x$, pois as matrizes A e $A - bk^T$ diferem de bk^T , que é uma matriz de posto 1.

Os teoremas anteriores se aplicam apenas ao caso em que se consideram apenas dois subsistemas, mas é de muito interesse prático o estudo de casos que consideram um número maior de subsistemas. Evidentemente, uma condição necessária para que um sistema chaveado com N subsistemas seja exponencialmente estável é que cada par de subsistemas seus forme um sistema chaveado exponencialmente estável, mas, a menos de certos casos particulares, esta condição não é suficiente. Um importante caso particular em que isto é suficiente, porém, é quando os subsistemas do sistema chaveado são *positivos*. Lembramos que o sistema linear $\dot{x} = Ax$ é positivo se, para toda condição inicial $x(0)$ com todas as suas componentes positivas ou nulas, a solução $x(t)$ correspondente possui todas as suas componentes positivas ou nulas para todo $t \geq 0$. O fato de o sistema ser positivo é equivalente ao fato de a matriz A possuir todas as suas entradas não-diagonais positivas ou nulas, e uma matriz deste tipo é chamada matriz *Metzler*.

Sistemas positivos aparecem naturalmente na prática em certas aplicações, em que o fato de a variável ser positiva ou nula possui uma interpretação particular. Assim, em fenômenos envolvendo trocas de calor, reações químicas, concentração de substâncias (como por exemplo em modelos atmosféricos envolvendo concentração de água ou poluentes), modelos estocásticos (em que a variável de estado representa uma probabilidade), é frequente encontrar sistemas positivos. Sua presença também ocorre em certos casos de sistemas mecânicos ou elétricos, e, assim, apesar de a classe de sistemas positivos ser um caso particular, ela é de elevada importância prática; para mais detalhes sobre estes sistemas, ver [19].

Em [23], dois resultados importantes sobre a estabilidade de sistemas positivos planares são apresentados.

Teorema 3.18. *Sejam $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ duas matrizes Hurwitz e Metzler. Então o sistema chaveado composto por estas matrizes é exponencialmente estável se e somente se admitir uma CQLF.*

Assim, no caso particular de sistemas chaveados planares positivos, a existência de uma CQLF é na verdade equivalente à estabilidade exponencial e, portanto, não há nenhuma perda de generalidade ao se estudar a estabilidade deste tipo de sistema através da procura de uma CQLF.

Teorema 3.19. *Seja $\{A_1, \dots, A_N\}$ uma família de matrizes Hurwitz e Metzler em $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. Então o sistema chaveado correspondente a estas matrizes é GUES se e somente se cada par de matrizes $\{A_i, A_j\}$, $1 \leq i < j \leq N$, admitir uma CQLF.*

Assim, em sistemas positivos planares, basta analisar cada par de matrizes A_i, A_j que compõem o sistema, o que pode ser feito, por exemplo, através do Teorema 3.15. No caso geral de sistemas planares, apesar de o resultado acima não ser necessariamente válido, pode-se ainda obter um resultado similar considerando triplas de matrizes, conforme apresentado em [29].

Teorema 3.20. *Seja $\{A_1, \dots, A_N\}$ uma família de matrizes Hurwitz em $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que, notando $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{1 \leq i, j \leq 2}$ para todo $k \in \{1, \dots, N\}$, tenhamos $a_{21}^{(k)} \neq 0$ para todo k . Então existe uma CQLF para o sistema chaveado formado por esta família de matrizes se e somente se existir uma CQLF para cada tripla de matrizes $\{A_i, A_j, A_k\}$ com $i, j, k \in \{1, \dots, N\}$ distintos.*

Outros critérios para a existência de uma CQLF existem, baseados em outros tipos de análise dos sistemas; porém, os critérios apresentados acima representam boa parte dos caminhos de pesquisa

seguidos recentemente, além de serem úteis para aplicações práticas. A busca de condições sobre as matrizes de um sistema chaveado que garantam a existência de uma CQLF ainda é um tema de pesquisa ativo, e o problema de achar condições necessárias e suficientes para a existência de uma CQLF no contexto geral de sistemas chaveados lineares ainda está aberto.

3.3 Outros tipos de funções de Lyapunov

Como foi lembrado no começo da Seção 3.2, a existência de uma CQLF para um sistema chaveado é uma condição suficiente, mas não necessária, de estabilidade exponencial. Assim, dado um sistema chaveado, é interessante buscar a existência de funções de Lyapunov sob outras formas a fim de se obter resultados menos conservadores.

Uma classe de funções que apresenta interesse neste sentido é a classe das *funções de Lyapunov quadráticas chaveadas*, isto é, de funções da forma

$$V(t, x) = x^T P_{\sigma(t)} x.$$

Assim, a função V depende do sinal de chaveamento $\sigma(t)$. Quando escolhemos P_k de tal forma que

$$P_k A_k + A_k^T P_k \prec 0$$

para todo $k \in \mathcal{J}$, então V é definida positiva, e basta assim estabelecer o seu decrescimento ao longo das soluções para estabelecer a estabilidade exponencial do sistema chaveado correspondente.

Para sistemas a tempo discreto, [18] propõe um critério necessário e suficiente para a existência de uma função de Lyapunov quadrática chaveada. Consideramos assim o sistema chaveado linear a tempo discreto (3.4) e procuramos uma função de Lyapunov sob a forma

$$V(j, x) = x^T P_{\sigma[j]} x. \quad (3.16)$$

Supondo todos os subsistemas de (3.4) exponencialmente estáveis, para cada subsistema $k \in \mathcal{J} = \{1, \dots, N\}$, existe P_k tal que $V_k(x) = x^T P_k x$ é uma função de Lyapunov do subsistema $x[j+1] = A_k x[j]$, e queremos assim encontrar matrizes P_k que satisfaçam

$$A_k^T P_k A_k - P_k \prec 0$$

para todo $k \in \mathcal{J}$. Neste caso, a função V definida em (3.16) é definida positiva, e basta então encontrar condições para que ela seja decrescente sobre toda trajetória do sistema chaveado, isto é, para que

$$V(j+1, x[j+1]) - V(j, x[j]) < 0 \quad (3.17)$$

quando $x[j] \neq 0$. O artigo [18] fornece algumas condições necessárias e suficientes para que isto ocorra.

Teorema 3.21. *Consideremos o sistema chaveado a tempo discreto (3.4). As seguintes condições são*

equivalentes:

(a) Existe uma função de Lyapunov chaveada sob a forma (3.16) para a qual a diferença (3.17) é estritamente negativa.

(b) Existem matrizes P_k simétricas definidas positivas e matrizes $F_k, G_k \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $k \in \mathcal{J}$, tais que, para todos $k, m \in \mathcal{J}$,

$$\begin{pmatrix} A_k F_k^T + F_k A_k^T - P_k & A_k G_k - F_k \\ G_k^T A_k^T - F_k^T & P_m - G_k - G_k^T \end{pmatrix} \prec 0,$$

e a função de Lyapunov é então dada por (3.16).

(c) Existem P_k simétricas definidas positivas, $k \in \mathcal{J}$, satisfazendo, para todos $k, m \in \mathcal{J}$,

$$\begin{pmatrix} P_k & A_k^T P_m \\ P_m A_k & P_m \end{pmatrix} \succ 0,$$

e a função de Lyapunov é então dada por (3.16).

(d) Existem matrizes P_k simétricas definidas positivas e matrizes $G_k \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $k \in \mathcal{J}$, tais que, para todos $k, m \in \mathcal{J}$,

$$\begin{pmatrix} -P_k & A_k G_k \\ G_k^T A_k^T & P_m - G_k - G_k^T \end{pmatrix} \prec 0,$$

e a função de Lyapunov é então dada por (3.16).

Nestes casos, o sistema chaveado (3.4) é exponencialmente estável.

Assim, pode-se verificar a existência de uma função de Lyapunov quadrática chaveada resolvendo desigualdades matriciais lineares, o que pode ser feito numericamente através de algoritmos de otimização convexa. Quando todas as P_k são iguais, a função (3.16) torna-se uma CQLF do sistema chaveado (3.4), e, assim, estes critérios são mais gerais que os obtidos através de CQLFs; porém, a existência de uma função de Lyapunov do tipo (3.16) é ainda uma condição apenas suficiente para a estabilidade exponencial.

Um outro tipo de função de Lyapunov de interesse são as *funções de Lyapunov lineares por partes*. Para o sistema chaveado linear a tempo contínuo (3.3) com $\mathcal{J} = \{1, \dots, N\}$, uma função de Lyapunov deste tipo de escreve sob a forma

$$V(x) = \max_{1 \leq i \leq m} |w_i^T x| \quad (3.18)$$

em que $w_i \in \mathbb{R}^d$, $i \in \{1, \dots, m\}$, e as funções lineares $x \mapsto w_i^T x$ são chamadas de geradores da função de Lyapunov linear por partes.

A vantagem do uso de funções de Lyapunov lineares por partes é que a existência de uma tal função é não apenas suficiente mas também necessária para a estabilidade exponencial do sistema (3.3), conforme o Teorema 3.25 abaixo, e, assim, critérios envolvendo este tipo de função são suficientemente gerais. Porém, atualmente, poucos desses critérios são conhecidos para esse tipo de função, e, além disto, os métodos numéricos desenvolvidos com base nestas funções apresentam em geral uma complexidade de cálculo elevada, o que dificulta o seu uso na prática. Uma das dificuldades

frequentemente encontradas é o fato de não se saber, a princípio, quantos vetores w_i são necessários para que (3.18) seja uma função de Lyapunov linear por partes.

Notando por W a matriz de $\mathbb{R}^{d \times m}$ cujas colunas são os vetores w_i , a função V de (3.18) se escreve como

$$V(x) = \|W^T x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |w_i^T x|.$$

Um resultado de [36] fornece uma condição necessária e suficiente para a existência de uma função de Lyapunov linear por partes para o sistema chaveado (3.3), que é, portanto, uma condição necessária e suficiente de estabilidade exponencial.

Teorema 3.22. *A função $V(x) = \|W^T x\|_\infty$ é uma função de Lyapunov linear por partes para o sistema chaveado (3.3) se e somente se $m \geq d$, W for de posto d e existir $Q_i = (q_{jk}^{(i)})_{1 \leq j, k \leq m} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $i \in \{1, \dots, N\}$, cada uma possuindo uma diagonal negativa estritamente dominante, isto é, tal que*

$$q_{kk}^{(i)} < - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N q_{kj}^{(i)}, \quad i \in \{1, \dots, N\}, k \in \{1, \dots, m\},$$

e tal que

$$A_i^T W = W Q_i^T, \quad i \in \{1, \dots, N\}.$$

Notemos que uma outra linha possível de generalização destes resultados é procurar funções de Lyapunov do tipo $V(x) = \|W^T x\|_p$ para $p \in [1, \infty]$, e alguns resultados existem neste sentido.

O Teorema 3.22 possui também uma versão para sistemas chaveados a tempo discreto, apresentada em [36].

Teorema 3.23. *A função $V(x) = \|W^T x\|_\infty$ é uma função de Lyapunov linear por partes para o sistema chaveado (3.4) se e somente se $m \geq d$, W for de posto d e existir $Q_i = (q_{jk}^{(i)})_{1 \leq j, k \leq m} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $i \in \{1, \dots, N\}$, cada uma com no máximo d elementos não-nulos em cada coluna e tal que*

$$\|Q_i\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{k=1}^m |q_{jk}^{(i)}| < 1,$$

satisfazendo

$$A_i^T W = W Q_i^T, \quad i \in \{1, \dots, N\}.$$

As condições dos Teoremas 3.22 e 3.23 são difíceis de serem verificadas na prática, sobretudo devido ao fato de não se saber a princípio qual o valor de m . Neste sentido, alguns teoremas tentam fornecer critérios mais fáceis de serem verificados, mas válidos apenas para certos casos particulares. É o caso do teorema abaixo, apresentado em [43], em que são considerados dois sistemas no plano e procura-se uma função de Lyapunov linear por partes com $m = 4$.

Teorema 3.24. *Seja o sistema chaveado linear definido pelas matrizes $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ e suponhamos que os espectros de A_1 e de A_2 estejam contidos em $(-\infty, 0)$, e que exista $\alpha \in (0, 1)$ tal que o espectro de $\alpha A_1 + (1 - \alpha) A_2$ não intercepte o eixo real. Neste caso, existe uma função de Lyapunov linear por partes com $m = 4$ se e somente se, para todo $\alpha \in [0, 1]$, o módulo da parte real dos autovalores de $\alpha A_1 + (1 - \alpha) A_2$ for maior que o módulo da parte imaginária.*

Evidentemente, os resultados apresentados aqui sobre os diversos tipos de funções de Lyapunov não são exaustivos, uma vez que muito esforço tem sido dedicado a este tópico recentemente. Em particular, na linha de pesquisa das funções de Lyapunov lineares por partes, vários algoritmos numéricos foram desenvolvidos para se obter numericamente uma tal função quando ela existir; porém, em geral, o problema destes algoritmos é possuir uma complexidade elevada, dificultando assim sua aplicação a sistemas de dimensão elevada e com muitos subsistemas.

3.4 Teoremas recíprocos de Lyapunov

Nas Seções 3.2 e 3.3, buscamos estudar a estabilidade do sistema chaveado procurando por uma função de Lyapunov comum sob uma certa forma particular. O caso mais comum é a procura por uma função de Lyapunov quadrática comum, que, conforme visto, nem sempre existe. Assim, é de interesse estudar os chamados teoremas recíprocos, que, partindo de um sistema, concluem a existência de funções de Lyapunov sob uma determinada forma, para poder obter assim critérios mais abrangentes do que a procura por uma função de Lyapunov quadrática.

O principal resultado obtido neste sentido está apresentado em [36], fornecendo diversos tipos de funções de Lyapunov que existem para um sistema chaveado exponencialmente estável.

Teorema 3.25. *Consideremos o sistema chaveado (3.3). Então, são equivalentes:*

- (a) *O sistema (3.3) é GUES.*
- (b) *Existe uma função de Lyapunov V estritamente convexa, definida positiva, homogênea de grau 2 da forma*

$$V(x) = x^T L(x) x$$

com $L(x) \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $V(0) = 0$,

$$L(x)^T = L(x) = L(\tau x) \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^d, x \neq 0, \tau \in \mathbb{R}, \tau \neq 0,$$

cuja derivada ao longo das soluções de (3.3) satisfaz

$$\max_{y \in \{A_1 x, \dots, A_N x\}} \frac{\partial V}{\partial x}(y) \leq -\gamma \|x\|^2 \quad \text{para um certo } \gamma > 0, \quad (3.19)$$

em que

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x) = \inf_{h>0} \frac{V(x+hy) - V(x)}{h}.$$

- (c) *Existe uma função de Lyapunov quadrática por partes V , definida por*

$$V(x) = \max_{1 \leq i \leq m} (w_i^T x)^2$$

para certos vetores $w_i \in \mathbb{R}^d$, $i \in \{1, \dots, m\}$, tais que $m \geq d$, a matriz W cujas colunas são os vetores w_i tem posto d , e tal que a derivada de V ao longo das soluções de (3.3) satisfaz (3.19).

(d) Existe uma função de Lyapunov linear por partes V , definida por

$$V(x) = \max_{1 \leq i \leq m} |w_i^T x|$$

para certos vetores $w_i \in \mathbb{R}^d$, $i \in \{1, \dots, m\}$, tais que $m \geq d$, a matriz W cujas colunas são os vetores w_i tem posto d , e tal que a derivada de V ao longo das soluções de (3.3) satisfaz (3.19).

(e) Existe uma função de Lyapunov de classe \mathcal{C}^∞ , homogênea de grau $2p$ para um certo inteiro $p \geq 1$, definida por

$$V(x) = \sum_{i=1}^m (w_i^T x)^{2p}$$

para certos vetores $w_i \in \mathbb{R}^d$, $i \in \{1, \dots, m\}$, tais que $m \geq d$, a matriz W cujas colunas são os vetores w_i tem posto d , e tal que a derivada de V ao longo das soluções de (3.3) satisfaz

$$2p \max_{y \in \{A_1 x, \dots, A_N x\}} \left\{ \sum_{i=1}^m (w_i^T x)^{2p-1} w_i^T y \right\} \leq -\eta \|x\|^{2p}$$

para um certo $\eta > 0$.

Este teorema fornece, assim, diversas formas de funções de Lyapunov cuja existência é não só suficiente mas também necessária para a estabilidade exponencial. Estas funções não são tão simples de se manipular algebricamente quanto funções de Lyapunov quadráticas, o que explica a maior dificuldade para obtenção de critérios tendo por base estas funções, mas ainda assim alguns critérios podem ser estabelecidos, como os Teoremas 3.22 e 3.23 da Seção 3.3 acima.

Um outro resultado de teorema recíproco de Lyapunov, obtido em [16], garante que a estabilidade exponencial, para sistemas lineares, é equivalente à existência de uma função de Lyapunov homogênea de grau 2 e de classe \mathcal{C}^1 . Existem também teoremas recíprocos de Lyapunov para sistemas a tempo discreto e para sistemas chaveados não-lineares [43]. Para sistemas a tempo discreto, por exemplo, sabe-se que, para uma inclusão linear a tempo discreto exponencialmente estável, existe uma norma que é uma função de Lyapunov. Um outro resultado, para sistemas não-lineares, estabelece que a existência de um equilíbrio GUAS equivale à existência de uma função de Lyapunov suave.

Um resultado apresentado em [34] garante que, para um sistema chaveado linear, sempre existe uma função de Lyapunov polinomial, mas o polinômio em questão pode ter um grau arbitrariamente grande.

Teorema 3.26. *Seja um sistema chaveado linear definido pela família de matrizes $\{A_k, k \in \mathcal{J}\}$, e suponhamos esta família compacta. Se este sistema for GUES, então ele admite uma função de Lyapunov polinomial.*

Teorema 3.27. *Seja Ξ o conjunto de todos os sistemas chaveados lineares GUES definidos por um par de matrizes $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Para um par de matrizes A, B definindo um sistema de Ξ , notemos por $m(A, B)$ o menor grau possível de uma função de Lyapunov polinomial para o sistema chaveado definido por A e B . Então $m(A, B)$ não pode ser limitado uniformemente sobre a classe Ξ .*

Este último resultado quer dizer que é possível encontrar sistemas chaveados planares exponencialmente estáveis compostos de dois subsistemas tais que o grau mínimo de uma função de Lyapunov polinomial para este sistema é arbitrariamente grande. Isto sugere que estas funções de Lyapunov são complicadas, e sumariza em parte as dificuldades de se obter uma teoria geral de estabilidade de sistemas chaveados através das funções de Lyapunov.

O estudo da estabilidade de sistemas chaveados através de funções de Lyapunov corresponde a uma ampla área de pesquisa, com diversas questões ainda em aberto. As Seções 3.2, 3.3 e 3.4 mostraram diversos resultados importantes que representam as principais linhas de pesquisa em estabilidade de sistemas chaveados através de funções de Lyapunov, apresentando as principais técnicas utilizadas neste domínio através de resultados que são, em geral, aplicáveis em contextos práticos, mas é importante lembrar que esta lista é não-exaustiva e que diversos outros resultados relacionando estabilidade e funções de Lyapunov existem.

3.5 Análise por princípios variacionais

Um ponto de vista que tem se mostrado eficiente para o estudo de sistemas chaveados é a análise de sua estabilidade através do uso de princípios variacionais, tendo por objetivo caracterizar o *pior caso*, correspondente ao chaveamento que torna o sistema o “mais instável” o possível. O Exemplo 2.15 mostra a aplicação desta técnica em um caso particular, utilizando argumentos geométricos para justificar que a trajetória construída é de fato a pior; propomo-nos aqui a mostrar os resultados da utilização desta técnica de um ponto de vista mais geral, justificando as construções através de princípios variacionais aplicados a problemas de controle ótimo.

Em [32], a técnica geral utilizada na análise por princípios variacionais é explicada. Assim, consideremos o sistema chaveado (3.1) com dois subsistemas, definidos pelas aplicações f_1 e f_2 . Notando por $u = \sigma - 1$, de forma que u é a valores em $\{0, 1\}$, o sistema (3.1) pode ser escrito como

$$\dot{x} = f_1(x) + u(t)(f_2(x) - f_1(x)), \quad u(t) \in \{0, 1\}. \quad (3.20)$$

Assim, (3.20) pode ser visto como um sistema de controle de entrada $u(t) \in \{0, 1\}$. Para simplificar a análise por princípios variacionais, é interessante considerar o problema convexificado, isto é,

$$\dot{x} = f_1(x) + u(t)(f_2(x) - f_1(x)), \quad u(t) \in [0, 1], \quad (3.21)$$

em que exige-se que $u(t)$ seja apenas mensurável. Nota-se que toda solução de (3.20) é também solução de (3.21) e, assim, a estabilidade de (3.21) implica a de (3.20). Deve-se notar que o estudo de (3.20) a partir do estudo de (3.21) é simplesmente uma aplicação dos princípios descritos na Seção 3.1.

O estudo do sistema (3.21) pode ser feito procurando-se o controle u^* o “mais desestabilizante” possível, isto é, aquele que maximiza um funcional que representa o crescimento exponencial da norma da solução com o tempo. Assim, um tal u^* pode ser caracterizado como a solução a um problema de controle ótimo, para o qual diversos resultados estão disponíveis, destacando-se o Princípio

do Máximo de Pontryagin (ver, por exemplo, [10]). Assim, se a trajetória correspondente a u^* for estável, por maximizar o crescimento exponencial da normal da solução, isto implica que toda trajetória de (3.21) é também estável, donde se conclui a estabilidade de (3.1).

Nota-se também que, neste tipo de estudo de estabilidade, as relações de comutação entre os campos de vetores f_1 e f_2 têm um papel importante nas propriedades do sistema chaveado (3.1) e do sistema de controle correspondente (3.21). Assim, é interessante estudar a álgebra de Lie gerada por estes campos de vetores, e o estudo das álgebras de Lie combinado com o uso de princípios variacionais tem se provado importante para se compreender as questões de estabilidade dos sistemas chaveados.

As principais vantagens do estudo de sistemas chaveados por princípios variacionais, segundo [32], são a possibilidade de se aplicar importantes resultados da teoria de controle ótimo, o fato de a análise da “pior trajetória” explicitar quais os mecanismos exatos do chaveamento que levam à instabilidade, e o fato de resultados sobre estes sistemas serem automaticamente válidos em contextos mais gerais, por serem obtidos para (3.21) em vez de diretamente para (3.1).

3.5.1 Problema da estabilidade absoluta

Para ilustrar a aplicabilidade dos métodos variacionais, apresentamos aqui os resultados de [32] que se referem ao sistema chaveado linear a dois subsistemas

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\sigma(t)}x(t) \\ \text{com } A_1 &= A, A_2 = A + kbc^T \end{aligned} \quad (3.22)$$

em que $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ é Hurwitz, $b, c \in \mathbb{R}^d$, o par (A, b) é controlável e o par (A, c) é observável. Conforme o procedimento descrito acima, o estudo deste sistema é feito através do estudo de

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)B_kx(t), \quad u \in \mathcal{U}, \quad (3.23)$$

em que $B_k = kbc^T$ e \mathcal{U} é a classe das funções mensuráveis a valores em $[0, 1]$. A questão de [32] é calcular o valor crítico de k para a estabilidade exponencial deste sistema, isto é, calcular

$$k^* = \inf\{k > 0 \mid (3.23) \text{ não é GUES}\}. \quad (3.24)$$

O estudo deste problema de controle permite resolver o *problema da estabilidade absoluta*, um problema formulado na década de 1940 que objetiva estudar a estabilidade de um sistema de controle sob uma determinada realimentação de saída, sendo um problema clássico de controle para o qual condições várias condições suficientes de estabilidade haviam sido dadas ao longo dos anos, e para o qual o método variacional permite fornecer uma condição necessária e suficiente em determinados casos [32]. Esta condição necessária e suficiente é equivalente ao cálculo da constante k^* de (3.24).

O uso de métodos variacionais permite, quando $k = k^*$, caracterizar um controle u^* e a trajetória correspondente x^* de (3.23) tais que x^* não tende exponencialmente à origem e, portanto, mostra a não-ocorrência da estabilidade exponencial. Apesar de obter informações sobre k^* a partir disto ser difícil no caso geral, [32] cita um critério aplicável em sistemas em dimensão 2 ou 3.

Teorema 3.28. *Se $d = 2$ ou $d = 3$, então, para $k = k^*$, a equação*

$$\det(e^{\tau B_k} e^{\eta A} + I) = 0 \quad (3.25)$$

admite uma solução $\tau > 0$, $\eta > 0$, enquanto que nenhuma solução de (3.25) existe quando $k \in [0, k^)$.*

Esta condição pode ser interpretada com o a existência de uma trajetória fechada e, assim, [32] fornece um método de programação dinâmica que permite determinar mais explicitamente a solução de (3.25), reduzindo esta equação a uma única equação escalar em k^* . A solução desta equação escalar permite assim determinar uma condição necessária e suficiente para a estabilidade exponencial de (3.22).

3.5.2 Sistemas a tempo discreto

A aplicação dos métodos variacionais pode também ser feita a sistemas a tempo discreto, como mostra [37], em que os princípios variacionais são utilizados para se estudar questões de acessibilidade do espaço de estados de um sistema de controle a tempo discreto. Em particular, alguns resultados de estabilidade são apresentados em [37], e destacamos aqui o seguinte.

Teorema 3.29. *Seja o sistema chaveado linear a tempo discreto (3.4) constituído de dois subsistemas definidos pelas matrizes A_1 e A_2 , e suponhamos cada subsistema exponencialmente estável. Suponhamos que, para todo $k \geq 1$,*

$$[[A_0, A_1], A_0^k] = 0,$$

e, notando $P = A_0^{-2}[A_0, A_1]$ e $Q = A_0^{-1}A_1$, suponhamos também que

$$P^2 = 0, \quad PQ = 0.$$

Então o sistema (3.4) é GUES.

3.5.3 Sistemas chaveados planares a dois subsistemas

Um caso que ilustra a aplicação dos métodos variacionais para a obtenção de critérios da estabilidade é o apresentado em [8], em que é dado um critério de estabilidade para um sistema chaveado em \mathbb{R}^2 definido por um par de matrizes Hurwitz A, B . Este critério leva em conta todos os casos possíveis que podem ocorrer, fornecendo assim uma classificação completa dos sistemas chaveados planares compostos de dois subsistemas. Apresentamos aqui o resultado de [34], que traz uma versão corrigida do enunciado de [8].

Sejam assim duas matrizes A e B de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. O caso em que A e B não são Hurwitz não apresenta interesse, pois, neste caso, um sinal de chaveamento constante já mostra que não há a estabilidade exponencial sob chaveamento arbitrário, e supomos assim A e B Hurwitz. O caso em que A e B comutam já está tratado no Teorema 3.3 e, assim, consideramos apenas o caso não-comutativo. Portanto, supomos doravante que são válidas as seguintes hipóteses:

(H1). Sejam λ_1, λ_2 (resp. λ_3, λ_4) os autovalores de A (resp. B). Então $\text{Re}(\lambda_1) < 0, \text{Re}(\lambda_2) < 0, \text{Re}(\lambda_3) < 0$ e $\text{Re}(\lambda_4) < 0$.

(H2). $[A, B] \neq 0$.

Além disso, supomos, por simplicidade, as seguintes hipóteses:

(H3). A e B são diagonalizáveis em \mathbb{C} .

(H4). Sejam v_1, v_2 (resp. v_3, v_4) os autovetores de A (resp. B). Então $v_i \neq v_j$ para $i \in \{1, 2\}, j \in \{3, 4\}$.

No caso em que A ou B não são diagonalizáveis em \mathbb{C} , o sistema pode ou não ser GUES, e, para saber qual é o caso, basta aplicar técnicas similares às de [8]; isto foi feito em [5], que fornece um critério para o caso em que uma das matrizes não é diagonalizável. No caso em que A ou B são diagonalizáveis mas um autovetor de A coincide com um autovetor de B , argumentos similares aos apresentados em [8] mostram que o sistema é GUES.

Quando as hipóteses (H1) a (H4) acima estão satisfeitas, podem-se calcular quantidades a partir de A e B que permitem decidir a estabilidade exponencial do sistema chaveado correspondente. Definimos assim estas quantidades.

Definição 3.30. Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ e suponha que são válidas as hipóteses (H1), (H2), (H3) e (H4). Escolhamos os índices 1, 2, 3 e 4 dos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e λ_4 de forma que os autovalores λ_1 e λ_2 de A satisfaçam $|\lambda_2| > |\lambda_1|$ se ambos forem reais ou $\text{Im}(\lambda_2) < 0$ no caso em que ambos são complexos não-reais, e similarmente, que os autovalores λ_3 e λ_4 de B satisfaçam $|\lambda_4| > |\lambda_3|$ se ambos forem reais ou $\text{Im}(\lambda_4) < 0$ no caso em que ambos são complexos não-reais. Definimos as quantidades

$$\begin{aligned} \rho_A &= -i \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, & \rho_B &= -i \frac{\lambda_3 + \lambda_4}{\lambda_3 - \lambda_4}, \\ \mathcal{K} &= 2 \frac{\text{Tr}(AB) - \frac{1}{2} \text{Tr}(A) \text{Tr}(B)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)}, \\ \mathcal{D} &= \mathcal{K}^2 + 2\rho_A \rho_B \mathcal{K} - (1 + \rho_A^2 + \rho_B^2). \end{aligned}$$

Os valores numéricos destas quantidades satisfazem certas relações que estão resumidas na proposição a seguir.

Proposição 3.31. Sejam A e B como na Definição 3.30. Então

- (a) $\rho_A \in \mathbb{R}, \rho_A > 0$ se e somente se A possuir autovalores não-reais (e analogamente para B).
- (b) $\rho_A \in i\mathbb{R}, \rho_A/i > 1$ se e somente se A possuir autovalores reais (e analogamente para B).
- (c) $\mathcal{D} \in \mathbb{R}$.
- (d) Se os autovalores de A e B são complexos não-reais, então $\mathcal{K} \in \mathbb{R}$ e $|\mathcal{K}| > 1$.
- (e) Se os autovalores de A e B são reais, então $\mathcal{K} \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

(f) Uma dentre as matrizes A e B possui autovalores reais e a outra não se e somente se $\mathcal{K} \in i\mathbb{R}$.

A partir do cálculo das quantidades da Definição 3.30, utilizando as técnicas variacionais para o estudo da “pior trajetória”, [8] apresenta um critério de estabilidade no caso bidimensional para o sistema

$$\dot{x}(t) = u(t)Ax(t) + (1 - u(t))Bx(t), \quad u \in \mathcal{U}, \quad (3.26)$$

com \mathcal{U} a classe das funções mensuráveis a valores em $[0, 1]$ e $x \in \mathbb{R}^2$. A estabilidade exponencial deste sistema implica evidentemente a estabilidade exponencial do sistema chaveado (3.3) com as matrizes A e B , pois toda solução de (3.3) é solução de (3.26).

Teorema 3.32. *Sejam A e B duas matrizes reais satisfazendo as hipóteses (H1), (H2), (H3) e (H4) acima e sejam ρ_A , ρ_B , \mathcal{K} e \mathcal{D} como na Definição 3.30. Temos então as seguintes condições de estabilidade do sistema chaveado (3.26):*

Caso (CC). *Se A e B possuírem autovalores complexos não-reais, então:*

Caso (CC.1). *Se $\mathcal{D} < 0$, então (3.26) é GUES.*

Caso (CC.2). *Se $\mathcal{D} > 0$, então:*

Caso (CC.2.1). *Se $\mathcal{K} < -1$, então (3.26) é instável.*

Caso (CC.2.2). *Se $\mathcal{K} > 1$, então definimos ρ_{CC} por*

$$\rho_{CC} = \exp \left[-\rho_A \arctan \left(\frac{-\rho_A \mathcal{K} + \rho_B}{\sqrt{\mathcal{D}}} \right) - \rho_B \arctan \left(\frac{\rho_A - \rho_B \mathcal{K}}{\sqrt{\mathcal{D}}} \right) - \frac{\pi}{2} (\rho_A + \rho_B) \right] \times \\ \times \sqrt{\frac{\rho_A \rho_B + \mathcal{K} + \sqrt{\mathcal{D}}}{\rho_A \rho_B + \mathcal{K} - \sqrt{\mathcal{D}}}}.$$

Então (3.26) é GUES se $\rho_{CC} < 1$, apenas estável (mas não assintoticamente) se $\rho_{CC} = 1$ e instável se $\rho_{CC} > 1$.

Caso (CC.3). *Se $\mathcal{D} = 0$, então (3.26) é GUES se $\mathcal{K} > 1$ e apenas estável (mas não assintoticamente) se $\mathcal{K} < -1$.*

Caso (RC). *Se A e B possuírem um autovalores reais e a outra autovalores complexos não-reais, defina $\chi = \rho_A \mathcal{K} - \rho_B$, em que ρ_A e ρ_B são escolhidos de forma a que $\rho_A \in i\mathbb{R}$ e $\rho_B \in \mathbb{R}$. Então:*

Caso (RC.1) *Se $\mathcal{D} > 0$, então (3.26) é GUES.*

Caso (RC.2) *Se $\mathcal{D} < 0$, então $\chi \neq 0$ e:*

Caso (RC.2.1) *Se $\chi > 0$, então (3.26) é instável e, neste caso, $\mathcal{K}/i < 0$.*

Caso (RC.2.2) *Se $\chi < 0$, então:*

Caso (RC.2.2.A) *Se $\mathcal{K}/i \leq 0$, então (3.26) é GUES.*

Caso (RC.2.2.B) *Se $\mathcal{K}/i > 0$, então definimos ρ_{RC} por*

$$\rho_{RC} = \left(\frac{m^+}{m^-} \right)^{-\frac{1}{2}(\rho_A/i-1)} e^{-\rho_B \bar{t}} \left[m^- \sin \bar{t} \sqrt{1 - \mathcal{K}^2} - (\cos \bar{t} - \mathcal{K}/i \sin \bar{t}) \right]$$

com

$$m^\pm = \frac{-\chi \pm \sqrt{-\mathcal{D}}}{(-\rho_A/i - 1)\mathcal{K}/i},$$

$$\bar{t} = \arccos \left(\frac{-\rho_A/i + \rho_B \mathcal{K}/i}{\sqrt{(1 - \mathcal{K}^2)(1 + \rho_B^2)}} \right).$$

Então (3.26) é GUES se $\rho_{RC} < 1$, apenas estável (mas não assintoticamente) se $\rho_{RC} = 1$ e instável se $\rho_{RC} > 1$.

Caso (RC.3) Se $\mathcal{D} = 0$, então (3.26) é GUES se $\chi < 0$ e apenas estável (mas não assintoticamente) se $\chi > 0$.

Caso (RR). Se A e B possuírem autovalores reais, então:

Caso (RR.1) Se $\mathcal{D} < 0$, então (3.26) é GUES e, além disso, temos $|\mathcal{K}| > 1$.

Caso (RR.2) Se $\mathcal{D} > 0$, então $\mathcal{K} \neq -\rho_A \rho_B$ (note que $-\rho_A \rho_B > 1$) e:

Caso (RR.2.1) Se $\mathcal{K} > -\rho_A \rho_B$, então (3.26) é instável.

Caso (RR.2.2) Se $\mathcal{K} < -\rho_A \rho_B$, então:

Caso (RR.2.2.A) Se $\mathcal{K} > -1$, então (3.26) é GUES.

Caso (RR.2.2.B) Se $\mathcal{K} < -1$, então definimos ρ_{RR} por

$$\rho_{RR} = -f^{sim}(\rho_A, \rho_B, \mathcal{K}) f^{assim}(\rho_A, \rho_B, \mathcal{K}) f^{assim}(\rho_B, \rho_A, \mathcal{K})$$

com

$$f^{sim}(\rho_A, \rho_B, \mathcal{K}) = \frac{1 + \rho_A/i + \rho_B/i + \mathcal{K} - \sqrt{\mathcal{D}}}{1 + \rho_A/i + \rho_B/i + \mathcal{K} + \sqrt{\mathcal{D}}},$$

$$f^{assim}(\rho_A, \rho_B, \mathcal{K}) = \left(\frac{\rho_B/i - \mathcal{K}\rho_A/i - \sqrt{\mathcal{D}}}{\rho_B/i - \mathcal{K}\rho_A/i + \sqrt{\mathcal{D}}} \right)^{\frac{1}{2}(\rho_A/i - 1)}.$$

Então (3.26) é GUES se $\rho_{RR} < 1$, apenas estável (mas não assintoticamente) se $\rho_{RR} = 1$ e instável se $\rho_{RR} > 1$.

Caso (RR.3) Se $\mathcal{D} = 0$, então (3.26) é GUES se $\mathcal{K} < -\rho_A \rho_B$ e apenas estável (mas não assintoticamente) se $\mathcal{K} > -\rho_A \rho_B$.

Este teorema apresenta assim uma classificação completa da estabilidade dos sistemas chaveados lineares planares a dois subsistemas. Notemos, primeiramente, que esta classificação em termos dos autovalores de A e de B e das quantidades ρ_A , ρ_B , \mathcal{K} e \mathcal{D} não é simples, e que diversos casos tiveram de ser estabelecidos a fim de se fazer uma classificação completa. Isto é um evidente contraste com o caso de um único sistema linear, $\dot{x} = Ax$, em que os autovalores de A e suas multiplicidades fornecem toda a informação de estabilidade do sistema de uma forma direta, e traduz o fato de o chaveamento, mesmo entre dois sistemas planares, enriquecer bastante a dinâmica do sistema chaveado com relação às

dinâmicas possíveis dos subsistemas quando considerados independentemente. É também notável o fato de um critério completo como este ter sido obtido através do estudo da “pior trajetória” utilizando métodos variacionais, o que evidencia a extrema aplicabilidade dos métodos variacionais e a força dos resultados obtidos através deles.

Para exemplificar um caso do Teorema 3.32, retomamos o Exemplo 2.15 a fim de mostrar a estabilidade do sistema considerado naquele exemplo através desse último resultado.

Exemplo 3.33. Seja o sistema chaveado do Exemplo 2.15, definido, com $\mathcal{J} = \{1, 2\}$, por

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t),$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 1/10 & -1 \end{pmatrix},$$

e $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{J}$ um sinal de chaveamento arbitrário, isto é, σ é uma função mensurável qualquer constante por partes e com um número finito de descontinuidades em todo intervalo limitado de tempo.

Desejamos mostrar que este sistema é GUES utilizando o Teorema 3.32. Para utilizar a mesma notação do teorema, escrevemos $A = A_1$ e $B = A_2$. Começamos então calculando os autovalores de A e B . Na notação utilizada na Definição 3.30, temos assim

$$\lambda_1 = -1 + i, \quad \lambda_2 = -1 - i, \quad \lambda_3 = -1 + i, \quad \lambda_4 = -1 - i.$$

Verifica-se assim que a hipótese (H1) está satisfeita. Além disto, um cálculo imediato mostra que

$$[A, B] = \begin{pmatrix} 9,9 & 0 \\ 0 & -9,9 \end{pmatrix},$$

e, assim, A e B não comutam, e (H2) está satisfeita. Como os autovalores de A e B são complexos não-reais, estas matrizes são diagonalizáveis em \mathbb{C} , e, assim, (H3) está satisfeita. Finalmente, um cálculo imediato de autovetores mostra que

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ -i \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 10 \\ i \end{pmatrix},$$

e, assim, (H4) está satisfeita, e o Teorema 3.32 é aplicável. Calculamos então as quantidades da Definição 3.30,

$$\rho_A = \rho_B = 1, \quad \mathcal{K} = 5,05, \quad \mathcal{D} = 32,6025.$$

O Teorema 3.32 mostra assim que estamos no caso (CC.2.2). Para determinar a estabilidade do sistema, basta então calcular ρ_{CC} . Com quatro casas decimais de precisão, temos

$$\rho_{CC} = 0,8727,$$

e, assim, o Teorema 3.32 garante que o sistema chaveado (3.27) é GUES. □

Deve-se notar que a aplicação do Teorema 3.32 torna mais fácil a demonstração da estabilidade exponencial do Exemplo 2.15. De fato, o Exemplo 2.15 mostra diretamente a estabilidade exponencial do sistema chaveado (3.27) através de um argumento de pior caso, enquanto que o Teorema 3.32 concentra este e outros tipos de argumentos de pior caso comuns em um único enunciado que facilita a aplicação nos casos de interesse.

O Teorema 3.32 e os resultados apresentados em [5] apresentam todos os casos possíveis para um sistema chaveado planar a dois subsistemas satisfazendo (H1) e (H2). Nesta apresentação, porém, há um grande número de casos possíveis, o que pode dificultar a sua aplicação prática. Pensando nisto, [6] apresenta um resultado mais concentrado, em que as possibilidades para um sistema chaveado planar a dois subsistemas são agrupadas em apenas quatro casos. O ponto de vista de [6] é combinar métodos variacionais com funções de Lyapunov para obter resultados mais diretos em alguns casos. Assim, os quatro casos de [6] são os seguintes.

- (S1). Corresponde à existência de uma CQLF para o sistema chaveado, que implica assim a estabilidade exponencial.
- (S2). Corresponde à existência de $\nu \in (0, 1)$ tal que $\nu A_1 + (1 - \nu)A_2$ possui um autovalor real positivo, caso em que o sistema é instável.
- (S3). Corresponde à existência de uma função de Lyapunov não-estrita para o sistema, isto é, que decresce ao longo das trajetórias, mas não estritamente. Neste caso, mostra-se que o sistema é estável, mas não assintoticamente.
- (S4). Finalmente, os casos restantes são tratados através de uma análise de “pior trajetória”, e o cálculo de uma determinada quantidade relacionada a esta trajetória permite determinar a estabilidade do sistema.

Para enunciar precisamente o resultado de [6], definimos o *discriminante* de uma matriz $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ por

$$\delta_X = \text{Tr}(X)^2 - 4 \det(X).$$

Dadas duas matrizes, $X, Y \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, definimos

$$\Gamma(X, Y) = \frac{1}{2} (\text{Tr}(X) \text{Tr}(Y) - \text{Tr}(XY)).$$

Consideremos então o sistema (3.26), que retomamos aqui:

$$\dot{x}(t) = u(t)A_1x(t) + (1 - u(t))A_2x(t), \quad u \in \mathcal{U}, \quad (3.28)$$

com \mathcal{U} a classe das funções mensuráveis a valores em $[0, 1]$ e $x \in \mathbb{R}^2$. Para as matrizes A_1 e A_2 do

sistema (3.28), definimos as quantidades

$$\tau_i = \begin{cases} \frac{\text{Tr}(A_i)}{\sqrt{|\delta_{A_i}|}} & \text{se } \delta_{A_1} \neq 0, \delta_{A_2} \neq 0, \\ \frac{\text{Tr}(A_i)}{\sqrt{|\delta_{A_j}|}} & \text{se } \delta_{A_1} \delta_{A_2} = 0 \text{ mas } \delta_{A_j} \neq 0, \\ \frac{\text{Tr}(A_i)}{2} & \text{se } \delta_{A_1} = \delta_{A_2} = 0, \end{cases} \quad i = 1, 2,$$

$$k = \frac{2\tau_1 \tau_2}{\text{Tr}(A_1) \text{Tr}(A_2)} (\text{Tr}(A_1 A_2) - 1/2 \text{Tr}(A_1) \text{Tr}(A_2)),$$

$$\Delta = 4 (\Gamma(A_1, A_2)^2 - \Gamma(A_1, A_1) \Gamma(A_2, A_2)),$$

$$t_i = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{\text{Tr}(A_1) \text{Tr}(A_2) (k\tau_i + \tau_{3-i})}{2\tau_1 \tau_2 \sqrt{\Delta}} \right) & \text{se } \delta_{A_i} < 0, \\ \text{arctanh} \left(\frac{2\tau_1 \tau_2 \sqrt{\Delta}}{\text{Tr}(A_1) \text{Tr}(A_2) (k\tau_i - \tau_{3-i})} \right) & \text{se } \delta_{A_i} > 0, \\ \frac{2\sqrt{\Delta}}{(\text{Tr}(A_1 A_2) - 1/2 \text{Tr}(A_1) \text{Tr}(A_2)) \tau_i} & \text{se } \delta_{A_i} = 0, \end{cases} \quad i = 1, 2,$$

$$\mathcal{R} = \frac{2\Gamma(A_1, A_2) + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\det(A_1) \det(A_2)}} e^{\tau_1 t_1 + \tau_2 t_2}.$$

Estes valores permitem determinar a estabilidade do sistema (3.28).

Teorema 3.34. *A estabilidade do sistema (3.28) pode ser estudada segundo os quatro casos a seguir.*

(S1). *Se $\Gamma(A_1, A_2) > -\sqrt{\det(A_1) \det(A_2)}$ e $\text{Tr}(A_1 A_2) > -2\sqrt{\det(A_1) \det(A_2)}$, então o sistema (3.28) admite uma CQLF e é portanto GUES. Nota-se que, se $-\sqrt{\det(A_1) \det(A_2)} < \Gamma(A_1, A_2) \leq \sqrt{\det(A_1) \det(A_2)}$, então a condição $\text{Tr}(A_1 A_2) > -2\sqrt{\det(A_1) \det(A_2)}$ está automaticamente satisfeita.*

(S2). *Se $\Gamma(A_1, A_2) < -\sqrt{\det(A_1) \det(A_2)}$, então o sistema (3.28) é instável.*

(S3). *Se $\Gamma(A_1, A_2) = -\sqrt{\det(A_1) \det(A_2)}$, então o sistema (3.28) é estável, mas não assintoticamente.*

(S4). *Se $\Gamma(A_1, A_2) > \sqrt{\det(A_1) \det(A_2)}$ e $\text{Tr}(A_1 A_2) \leq -2\sqrt{\det(A_1) \det(A_2)}$, então o sistema (3.28) é GUES se $\mathcal{R} < 1$, estável mas não assintoticamente se $\mathcal{R} = 1$ e instável se $\mathcal{R} > 1$.*

O Teorema 3.34 sintetiza assim o estudo da estabilidade de sistemas chaveados planares com dois subsistemas, de forma mais simples que o Teorema 3.32. Esta maior simplicidade do Teorema 3.34 vem do fato de sua demonstração utilizar diversas técnicas; assim, para (S1), por exemplo, a demonstração utiliza a existência de uma CQLF, retomando os métodos da Seção 3.2, e funções de Lyapunov também são utilizadas para se mostrar (S3), enquanto que a demonstração de (S4) passa pelos métodos variacionais discutidos nesta seção, mostrando assim a sua importância para completar o Teorema 3.34.

Os resultados discutidos neste capítulo são importantes para o estudo da estabilidade de sistemas chaveados a chaveamento arbitrário. Além de sua utilidade prática para a determinação da estabilidade, estes resultados evidenciam as principais técnicas utilizadas no domínio dos sistemas chaveados e os resultados que podem ser obtidos por elas. Apesar do grande desenvolvimento que este estudo de estabilidade tem tido nos últimos anos, muitas questões permanecem em aberto, e os resultados ainda são em geral escassos para o caso de sistemas não-lineares.

Capítulo 4

Análise da estabilidade sob chaveamento restrito

O objetivo deste capítulo é estudar o sistema chaveado

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f_{\sigma(t)}(x(t)), \\ \sigma(t) &= \varphi(t, \sigma(t^-), x(t)), \quad \varphi \in \mathcal{G}, \\ x(t) &\in \mathbb{R}^d, \quad \sigma(t) \in \mathcal{J}, \quad t \in \mathbb{R}_+\end{aligned}\tag{4.1}$$

em que, diferentemente do Capítulo 3, o sinal $\sigma(t)$ não é mais um sinal de chaveamento qualquer a valores em \mathcal{J} , mas apresenta alguma restrição, representada por uma determinada escolha da classe \mathcal{G} em que se tomam os sinais φ . Similarmente, consideramos o sistema chaveado a tempo discreto

$$\begin{aligned}x[j+1] &= f_{\sigma[j]}(x[j]), \\ \sigma[j+1] &= \varphi(j, \sigma[j], x[j]), \quad \varphi \in \mathcal{G}, \\ x[j] &\in \mathbb{R}^d, \quad \sigma[j] \in \mathcal{J}, \quad j \in \mathbb{N}\end{aligned}\tag{4.2}$$

Novamente, o interesse principal deste capítulo serão os sistemas chaveados lineares, cuja equação de estado é dada por

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)\tag{4.3}$$

no caso de tempo contínuo, ou por

$$x[j+1] = A_{\sigma[j]}x[j]\tag{4.4}$$

no caso discreto. Igualmente, supomos, exceto onde mencionado o contrário, que o conjunto de índices \mathcal{J} é finito e escrevemos $\mathcal{J} = \{1, \dots, N\}$.

Lembramos que o ponto de vista no estudo de sistemas chaveado é priorizar a dinâmica f da variável contínua x , ignorando os detalhes da dinâmica φ da variável discreta σ . Assim, o estudo realizado no Capítulo 3 consiste em ignorar ao máximo a dinâmica de σ , admitindo que qualquer sinal de chaveamento σ (constante por partes e com um número finito de descontinuidades em todo intervalo de tempo limitado) pode guiar a dinâmica da variável contínua x . Esta abstração total da di-

nâmica da variável discreta resulta em critérios robustos de estabilidade com relação ao chaveamento: quando se lida com um sistema exponencialmente estável sob chaveamento arbitrário, pode-se abstrair completamente a dinâmica do chaveamento sem que isto cause um prejuízo para a estabilidade do sistema. Isto possui diversas aplicações práticas em situações em que a lógica de chaveamento é completamente desconhecida ou então muito complicada para ser utilizada na análise.

Em muitos casos, porém, estão disponíveis informações sobre a lógica de chaveamento que podem ajudar na análise do sistema chaveado, permitindo obter critérios de estabilidade mais finos. Além disto, um determinado sistema chaveado pode ser instável com relação a um chaveamento arbitrário, mas pode recuperar sua estabilidade sob certas restrições ao seu sinal de chaveamento, e, assim, em certos casos, a análise levando em consideração estas restrições é necessária. As restrições ao sinal de chaveamento podem aparecer naturalmente na modelagem do problema devido a restrições físicas ou a informações sobre a lógica de chaveamento. Em sistemas de controle, pode-se também considerar o caso em que múltiplos controladores são projetados para uma única planta a fim de se melhorar as características de controle, e uma lógica de chaveamento é implementada para selecionar um controlador segundo certas informações do estado da planta; neste caso, a lógica de chaveamento é projetada e, portanto, conhecida, e levá-la em consideração na análise do problema pode garantir melhores resultados de controle.

Neste capítulo, interessamo-nos a dois tipos de restrição aos sinais de chaveamento, as restrições pelo tempo e pelo estado. No caso de chaveamento restrito pelo tempo, os modelos (4.1) e (4.2) podem ser escritos, como no caso do Capítulo 3, sob a forma

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)), \quad \sigma \in \mathcal{G}, \quad (4.5)$$

com

$$\mathcal{G} \subset \{ \sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{I} \text{ mensurável} \mid \sigma \text{ é constante por partes e possui um número finito de descontinuidades em todo intervalo de tempo limitado} \}$$

no caso contínuo e

$$x[j+1] = f_{\sigma[j]}(x[j]), \quad \sigma \in \mathcal{G}, \quad (4.6)$$

com $\mathcal{G} \subset \{ \sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{I} \}$ no caso discreto. Notemos que esta escrita é a mesma que a utilizada no Capítulo 3, a menos do fato de a classe \mathcal{G} não ser mais a classe de todos os sinais de chaveamento possíveis, mas sim uma subclasse desta. Algumas subclasses apresentam interesse particular, como é o caso da classe dos *sinais de chaveamento lentos*, em que o tempo que separa dois chaveamentos consecutivos é uniformemente minorado, e também da classe dos *sinais de chaveamento a excitação persistente*, em que o sinal de chaveamento deve satisfazer uma determinada condição de excitação persistente para, por exemplo, evitar os modos instáveis.

No caso de chaveamento restrito pelo estado, os modelos (4.1) e (4.2) podem ser escritos como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_{\sigma(t)}(x(t)), \\ \sigma(t) &= \varphi(x(t)) \end{aligned} \quad (4.7)$$

no caso contínuo e

$$\begin{aligned} x[j+1] &= f_{\sigma[j]}(x[j]), \\ \sigma[j] &= \varphi(x[j]) \end{aligned} \quad (4.8)$$

no caso discreto. A função φ representa assim a lógica de chaveamento e particiona o espaço de estados \mathbb{R}^d em regiões Ω_k , $k \in \mathcal{J}$, com $\Omega_k = \varphi^{-1}(k)$. Este tipo de caso ocorre com frequência em problemas de controle em que vários controladores são projetados para uma mesma planta e a escolha de um controlador específico depende do estado da planta. O chaveamento restrito pelo estado também aparece na prática quando um sistema cujo comportamento pode ser complicado é dividido em diversas regiões de operação e, em cada região de operação, um modelo mais simples é utilizado.

Um outro problema de interesse é a estabilização de um sistema através do chaveamento. Neste caso, o chaveamento é um parâmetro de projeto e deve ser escolhido de forma a garantir a estabilidade do sistema chaveado que dele decorre. Este problema é encontrado na prática ao se projetarem múltiplos controladores para uma mesma planta.

No caso dos sistemas sob chaveamento arbitrário no Capítulo 3, utilizamos com frequência o fato de as noções de estabilidade assintótica e estabilidade exponencial serem equivalentes para sistemas chaveados lineares sob chaveamento arbitrário. Uma observação importante feita em [29] é que esta equivalência é mantida sob chaveamento restrito controlado pelo tempo, mas não é mais válida para chaveamento restrito controlado pelo estado.

4.1 Chaveamento restrito pelo tempo

Nesta seção, desejamos estudar os sistemas (4.5) e (4.6) para determinadas classes de sinais de chaveamento \mathcal{G} . Na maioria dos casos, interessar-nos-emos pelos sistemas lineares

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \quad \sigma \in \mathcal{G}, \quad (4.9)$$

no caso contínuo, e

$$x[j+1] = A_{\sigma[j]}x[j], \quad \sigma \in \mathcal{G}, \quad (4.10)$$

no caso discreto, com $A_k \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $k \in \mathcal{J}$.

4.1.1 Tempo de permanência

O Exemplo 1.1 mostrou o caso de um sistema chaveado instável com dois subsistemas estáveis. Analisando o exemplo, nota-se que a instabilidade ocorre devido ao sobressinal: apesar de cada subsistema ser estável, a norma da solução de um subsistema $\dot{x} = A_k x$ cresce instantaneamente antes de começar a decrescer e tender à origem, causando assim um sobressinal com relação à condição inicial. Assim, se o chaveamento for escolhido de tal forma a ocorrer durante o sobressinal, os sobressinais dos dois sistemas se acumulam, causando assim a instabilidade observada na Figura 1.2. Uma forma possível de evitar este fenômeno é então impedir a ocorrência de chaveamento enquanto houver o sobressinal, isto é, a cada vez que se chavear para um subsistema, deve-se permanecer nele um tempo suficientemente grande a fim de evitar chaveamentos durante o sobressinal, garantindo

assim a estabilidade. É esta ideia que motiva a definição de *tempo de permanência* de um sinal de chaveamento.

Definição 4.1. Dizemos que $\tau_p \in \mathbb{R}$ é um *tempo de permanência* do sinal de chaveamento σ se o intervalo de tempo entre dois chaveamentos consecutivos de σ é maior ou igual a τ_p . Notamos por $\mathcal{S}(\tau_p)$ a classe dos sinais de chaveamento a tempo contínuo com tempo de permanência τ_p .

Um primeiro resultado importante, mostrado em [39], mostra a estabilidade exponencial para o caso em que o tempo de permanência é suficientemente grande e cada subsistema é exponencialmente estável.

Teorema 4.2. *Seja o sistema chaveado linear (4.9) com $\mathcal{G} = \mathcal{S}(\tau_p)$ definido por uma família compacta (possivelmente infinita) de matrizes $\{A_k, k \in \mathcal{J}\}$ de $\mathbb{R}^{d \times d}$. Para todo $k \in \mathcal{J}$, suponhamos A_k Hurwitz e tomemos constantes $a_k \geq 0$, $\lambda_k > 0$ tais que $\|e^{A_k t}\| \leq e^{a_k - \lambda_k t}$ para todo $t \geq 0$. Seja*

$$\tau_p^* = \sup_{k \in \mathcal{J}} \frac{a_k}{\lambda_k}$$

e suponhamos τ_p^ finito. Então, se $\tau_p > \tau_p^*$, o sistema chaveado (4.9) é exponencialmente estável.*

Como caso particular importante, notemos que, quando a família $\{A_k, k \in \mathcal{J}\}$ é finita, τ_p^* é automaticamente finito, e assim, para toda família finita de matrizes, o sistema chaveado linear é exponencialmente estável para um tempo de permanência suficientemente grande desde que cada subsistema o seja.

A exigência de se ter um limite inferior uniforme para o tempo de permanência pode ser relaxada: se um chaveamento ocorre em um tempo inferior a τ_p desde o último chaveamento, pode-se imaginar que isto não é muito grave desde que os chaveamentos seguintes compensem este chaveamento rápido, e estes chaveamentos mais rápidos não sejam tão frequentes. Em outras palavras, não é necessário que o tempo entre dois chaveamentos quaisquer seja superior a τ_p , mas apenas que este tempo seja superior a τ_p em média. Esta é a ideia da definição de *tempo de permanência médio*.

Definição 4.3. Dizemos que $\tau_m \in \mathbb{R}$ é um *tempo de permanência médio* do sinal de chaveamento σ se o número de chaveamentos $N_\sigma(t, \tau)$ de σ entre dois instantes τ e t com $t \geq \tau \geq 0$ satisfizer

$$N_\sigma(t, \tau) \leq N_0 + \frac{t - \tau}{\tau_m} \quad (4.11)$$

para uma certa constante $N_0 \geq 0$, chamada de *limite de vibração* (do inglês “chatter bound”). Notamos por $\mathcal{S}_m(\tau_m)$ a classe dos sinais de chaveamento a tempo contínuo com tempo de permanência médio τ_m .

Notemos que, no caso em que $N_\sigma(t, \tau) - N_0 > 0$, (4.11) pode ser reescrita como

$$\frac{t - \tau}{N_\sigma(t, \tau) - N_0} \geq \tau_m,$$

e $\frac{t - \tau}{N_\sigma(t, \tau) - N_0}$ fornece uma medida do tempo médio que se passa entre dois chaveamentos consecutivos do sinal.

Foi demonstrado em [25] que a existência de um tempo de permanência médio garante a estabilidade exponencial de uma família de matrizes segundo o teorema a seguir.

Teorema 4.4. *Seja o sistema chaveado linear (4.9) com $\mathcal{G} = \mathcal{S}_m(\tau_m)$ definido por uma família compacta (possivelmente infinita) de matrizes $\{A_k, k \in \mathcal{J}\}$ de $\mathbb{R}^{d \times d}$ e suponhamos que exista $\lambda_0 > 0$ tal que $A_k + \lambda_0 I$ é Hurwitz para todo $k \in \mathcal{J}$. Então existe uma constante τ_m^* tal que o sistema (4.9) é exponencialmente estável se $\tau_m > \tau_m^*$.*

Como um tempo de permanência é, em particular, um tempo de permanência médio, o Teorema 4.4 contém o Teorema 4.2 como caso particular. Notamos também que, no caso de uma família finita de matrizes, a existência da constante λ_0 enunciada no teorema é automática. O artigo [25] também apresenta uma generalização do Teorema 4.4 ao caso de sistemas chaveados não-lineares.

Teorema 4.5. *Seja o sistema chaveado (4.5) com $\mathcal{G} = \mathcal{S}_m(\tau_m)$ definido por uma família (possivelmente infinita) de aplicações $\{f_k, k \in \mathcal{J}\}$ de \mathbb{R}^d em \mathbb{R}^d tais que $f_k(0) = 0$ para todo $k \in \mathcal{J}$. Suponhamos que existam aplicações $V_k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ para todo $k \in \mathcal{J}$, constantes positivas λ_0 e μ e funções $\alpha, \beta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ estritamente crescentes, contínuas, não-limitadas e com $\alpha(0) = \beta(0) = 0$, tais que*

$$\frac{\partial V_k}{\partial x}(x) f_k(x) \leq -\lambda_0 V_k(x), \quad (4.12a)$$

$$\alpha(\|x\|) \leq V_k(x) \leq \beta(\|x\|), \quad (4.12b)$$

$$V_k(x) \leq \mu V_m(x), \quad (4.12c)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$ e $k, m \in \mathcal{J}$. Então existe uma constante τ_m^* tal que o sistema chaveado (4.5) é assintoticamente estável se $\tau_m > \tau_m^*$.

As condições (4.12) impostas sobre os campos de vetores f_k são o análogo da exigência de as matrizes A_k serem Hurwitz; assim, exigimos que os f_k possuam cada um uma função de Lyapunov, que é o expresso nas condições (4.12a) e (4.12b), e estas funções de Lyapunov ainda devem satisfazer a relação (4.12c), que pode restringir a aplicabilidade do Teorema 4.5. Pode-se mostrar que, no caso linear, funções de Lyapunov satisfazendo (4.12) sempre existem sob as hipóteses do Teorema 4.4.

Os Teoremas 4.2 e 4.4 também possuem análogos no caso do sistema chaveado discreto (4.10), conforme apresentado em [46]. A definição do *tempo de permanência médio* para sinais de chaveamento a tempo discreto utilizada em [46] é análoga ao caso contínuo.

Definição 4.6. Dizemos que $\tau_m \in \mathbb{R}$ é um *tempo de permanência médio* do sinal de chaveamento σ a tempo discreto se o número de chaveamentos $N_\sigma[j]$ de σ no intervalo $\llbracket 0, j \rrbracket$ satisfizer

$$N_\sigma[j] \leq N_0 + \frac{j}{\tau_m}$$

para uma certa constante $N_0 \geq 0$, chamada de *limite de vibração* (do inglês “chatter bound”). Notamos por $\mathcal{S}_m^d[\tau_m]$ a classe dos sinais de chaveamento a tempo discreto com tempo de permanência médio τ_m .

O teorema de estabilidade correspondente é então o seguinte.

Teorema 4.7. *Seja o sistema chaveado linear (4.10) com $\mathcal{G} = \mathcal{S}_m^d[\tau_m]$ definido pela família de matrizes $\{A_k, k \in \mathcal{J}\}$ de $\mathbb{R}^{d \times d}$ com $\mathcal{J} = \{1, \dots, N\}$ e suponhamos que os subsistemas deste sistema chaveado sejam todos exponencialmente estáveis. Então existe uma constante τ_m^* tal que o sistema (4.10) é exponencialmente estável se $\tau_m > \tau_m^*$.*

A versão deste teorema apresentada em [46] é mais geral que a apresentada acima, permitindo que algumas das matrizes A_k sejam instáveis e restringindo o sinal de chaveamento para que o sistema não passe muito tempo nos modos instáveis, garantindo assim a estabilidade do sistema chaveado.

É também de interesse a seguinte questão: dado um sistema chaveado linear (4.9) ou (4.10), qual o menor valor de τ_p ou de τ_m que garanta a estabilidade exponencial do sistema chaveado para chaveamentos na classe $\mathcal{S}(\tau_p)$, $\mathcal{S}_m(\tau_m)$ ou $\mathcal{S}_m^d[\tau_m]$? O Teorema 4.2 fornece uma estimativa para o valor de τ_p , e estimativas para τ_m também podem ser obtidas ao se analisar as demonstrações dos Teoremas 4.4 e 4.7. Porém, como nota [43], estas estimativas são, em geral, muito conservadoras. No Teorema 4.2, por exemplo, o valor de τ_p^* pode ser grande mesmo para uma família de matrizes que comutam, mas, neste caso, sabe-se pelo Teorema 3.3 que a estabilidade ocorre para sinais de chaveamento arbitrários e, portanto, ocorre estabilidade para sinais na classe $\mathcal{S}(\tau_p)$ para todo $\tau_p \geq 0$, o que mostra que a estimativa dada por τ_p^* pode ser muito conservadora. O problema de encontrar melhores estimativas para o tempo de permanência e o tempo de permanência médio é ainda um problema em aberto.

4.1.2 Funções de Lyapunov múltiplas

Uma possibilidade de análise de sistemas chaveados com chaveamento restrito no tempo é através do uso de funções de Lyapunov múltiplas. Considerando, assim, o sistema chaveado (4.5) com subsistemas exponencialmente estáveis, o fato de cada subsistema ser exponencialmente estável garante a existência de uma função de Lyapunov V_k para o subsistema $\dot{x} = f_k(x)$. Pode-se, assim, utilizar estas funções de Lyapunov para se obter restrições no tempo que devem satisfazer os sinais de chaveamento a fim de se garantir a estabilidade exponencial. Uma condição possível, seria, por exemplo, de exigir que um chaveamento de um estado k para um estado m só pode ser realizado quando $V_m(x(t)) \leq V_k(x(t))$, o que garante assim a estabilidade exponencial do sistema chaveado. Esta condição é relativamente conservadora, e resultados menos conservadores podem ser obtidos, como o seguinte, apresentado em [43].

Teorema 4.8. *Seja o sistema chaveado (4.5) definido pelos campos de vetores f_k , $k \in \mathcal{J} = \{1, \dots, N\}$ que possuem, cada um, uma função de Lyapunov $V_k(x)$. Para um sinal de chaveamento σ , definimos a sequência de chaveamentos $(k_i)_{i \geq 0}$ e a sequência de instantes de chaveamento $(t_i)_{i \geq 1}$ de forma que, em t_i , o sistema chaveia do modo k_{i-1} para o modo $k_i \neq k_{i-1}$. Se, para todo $m \in \mathcal{J}$ e, para todo t_i tal que $k_i = m$, tivermos*

$$V_m(x(t_i)) \leq V_m(x(t_j)) \quad (4.13)$$

em que $j = \sup\{\tilde{j} < i \mid k_{\tilde{j}-1} = m\}$ é tal que t_j é o último instante em que se chaveou saindo do modo m , então o sistema chaveado (4.5) é assintoticamente estável.

O Teorema 4.8 fornece assim um critério que devem satisfazer os sinais de chaveamento para que o sistema chaveado correspondente seja assintoticamente estável. A condição (4.13) exige assim que, ao se entrar em um modo m , o valor da função de Lyapunov V_m deve ser inferior ao valor que ela possuía quando o sistema saiu do modo m pela última vez. Uma representação gráfica disto para 3 subsistemas está dada na Figura 4.1.

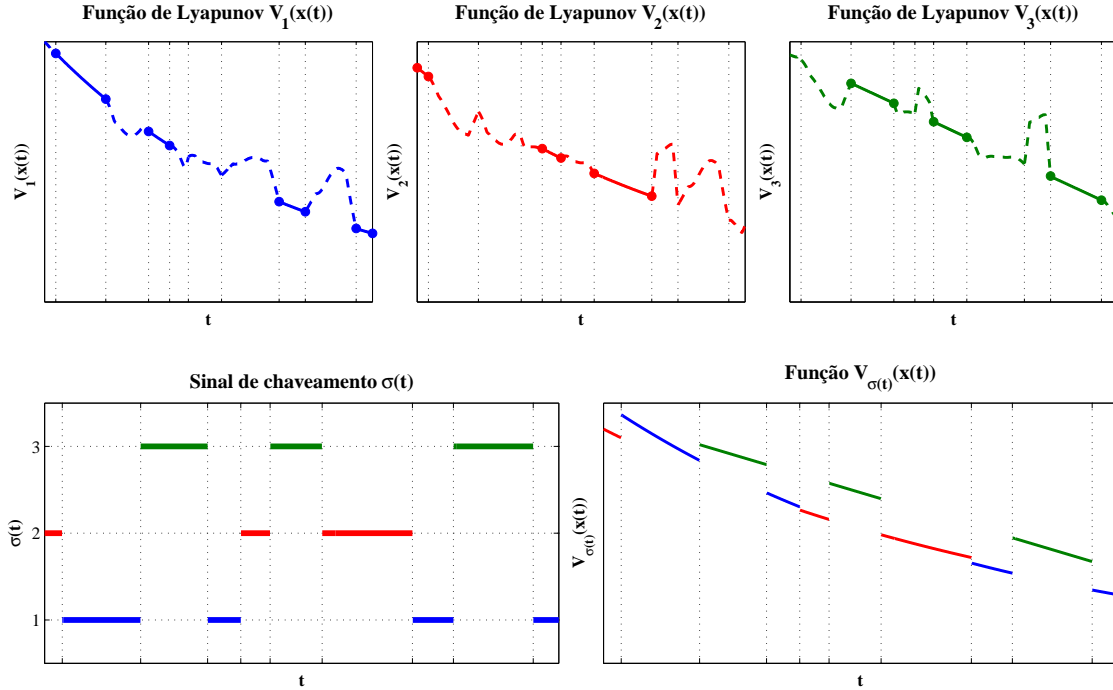


FIGURA 4.1: Representação das condições do Teorema 4.8 para um sistema chaveado com 3 subsistemas. Estão representadas as funções $V_k(x(t))$, $k \in \{1, 2, 3\}$, em linha contínua quando o subsistema k está ativo e em tracejado senão. Verifica-se que a função $V_{\sigma(t)}(x(t))$ não é decrescente, mas o critério do Teorema 4.8 está satisfeito: a cada vez que se entra no subsistema k , o valor de $V_k(x(t))$ é inferior ao valor desta função quando se saiu do subsistema k pela última vez.

Variantes do Teorema 4.8 podem ser feitas para se obter critérios com menos restrições. Assim, [29] afirma que é possível, por exemplo, relaxar a exigência (4.13), exigindo que o valor de $V_k(x(t))$ no instante de *saída* do subsistema k seja inferior ao seu valor no instante de saída anterior, ou seja, que a sequência dos valores de $V_k(x(t))$ nos instantes de saída do subsistema k seja uma sequência decrescente. Uma variante desta condição é exigir que a sequência dos valores de $V_k(x(t))$ nos instantes de *entrada* no subsistema k seja uma sequência decrescente. Vários outros critérios podem ser estabelecidos de forma a, assim como o Teorema 4.8, garantir a estabilidade do sistema chaveado sob chaveamento restrito.

Segundo [29], a teoria das funções de Lyapunov múltiplas é uma das mais estudadas na área de sistemas chaveados. A principal vantagem deste método, segundo [43], está em sua facilidade, uma vez que, dadas as funções de Lyapunov V_k , basta verificar quando $V_k(x(t))$ cai abaixo do valor que esta função possuía quando saiu do subsistema k para poder autorizar um novo chaveamento de volta a k .

Isto faz com que o método possa ser facilmente utilizado nas aplicações, além de possuir as vantagens de não estar restrito ao caso linear nem depender de um tipo particular de função de Lyapunov. Porém, a escolha das funções de Lyapunov é uma das dificuldades do método, uma vez que não há nenhum critério conhecido para isto que garanta resultados melhores, e uma escolha ruim poderia levar a sinais de chaveamento muito conservadores. Este procedimento de escolha das funções de Lyapunov que garantem critérios menos conservadores para o sinal de chaveamento é um dos problemas abertos importantes da teoria de funções de Lyapunov múltiplas.

Assim como existem teoremas recíprocos que garantem a existência de uma função de Lyapunov no caso do chaveamento arbitrário, vistos na Seção 3.4, existem também teoremas deste tipo para sistemas com chaveamento restrito apresentando um tempo de permanência [43]. Deve-se notar que não se pode esperar encontrar, em geral, uma função de Lyapunov independente do tempo neste caso, pois, se fosse o caso, o sistema seria exponencialmente estável sob chaveamento arbitrário, o que não é o caso geral de interesse quando se trabalha com chaveamento restrito. Assim, a ideia é procurar uma função de Lyapunov múltipla, construída a partir de funções de Lyapunov para cada subsistema k . O Teorema 4.9 mostra uma classe de funções de Lyapunov cuja existência é equivalente à estabilidade exponencial no caso linear a chaveamento restrito com tempo de permanência.

Teorema 4.9. *Seja o sistema chaveado linear (4.9) com $\mathcal{G} = \mathcal{S}(\tau_p)$ definido pela família de matrizes $\{A_k, k \in \mathcal{J}\}$ de $\mathbb{R}^{d \times d}$, com $\mathcal{J} = \{1, \dots, N\}$. Este sistema é exponencialmente estável se e somente se existirem normas v_1, \dots, v_N em \mathbb{R}^d e uma constante $\beta > 0$ tais que, para todo $k \in \mathcal{J}$,*

$$v_k(e^{A_k t}) \leq e^{-\beta t}, \quad \forall t \geq 0,$$

e, para todos $k, m \in \mathcal{J}$,

$$v_m(e^{A_m t} x) \leq e^{-\beta t} v_k(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t \geq \tau_p.$$

Neste caso, $V(t, x) = v_{\sigma(t)}(x)$ é uma função de Lyapunov do sistema estritamente decrescente ao longo das trajetórias.

No Teorema 4.9, a norma de matriz induzida por v_k foi notada igualmente por v_k . O teorema fornece assim a existência de uma função de Lyapunov múltipla estritamente decrescente ao longo das trajetórias. Na prática, obter uma tal função pode ser complicado, o que motiva a procura por funções de Lyapunov satisfazendo a critérios menos restritivos, como no Teorema 4.8.

4.1.3 Estabilização de sistemas com tempo de permanência

A existência de um tempo de permanência finito também permite obter resultados de estabilização para o sistema de controle

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t), \quad \sigma \in \mathcal{G}, x(t) \in \mathbb{R}^d, y(t) \in \mathbb{R}^m \quad (4.14)$$

O problema da estabilização consiste em escolher uma realimentação de estado $u(t) = K(t)x(t)$ de tal forma que o sistema

$$\dot{x}(t) = (A_{\sigma(t)} + B_{\sigma(t)}K(t))x(t), \quad \sigma \in \mathcal{G} \quad (4.15)$$

seja exponencialmente estável. Uma solução para este problema em termos da *frequência de chaveamento* é proposta em [13].

Definição 4.10. Seja um sinal de chaveamento $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{J}$. Definimos a *frequência de chaveamento* f de σ por

$$f = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{N_\sigma(t, 0)}{t}$$

em que, como na Definição 4.3, $N_\sigma(t, \tau)$ é o número de chaveamentos de σ no intervalo $[\tau, t]$ para $t \geq \tau \geq 0$.

Um primeiro resultado de [13] é quando tanto o sinal de chaveamento σ quanto um limitante α para a sua frequência de chaveamento f são dados, e, assim, pode-se construir a realimentação de estado em termos de um ganho de realimentação $K(t)$ dependente de σ e α .

Teorema 4.11. *Seja o sistema de controle chaveado (4.14) definido por $(A_1, B_1), \dots, (A_N, B_N) \in \mathbb{R}^{d \times d} \times \mathbb{R}^{d \times m}$ e suponhamos que cada par (A_k, B_k) é controlável. Seja $\alpha > 0$. Então existem matrizes de ganho K_k , $k \in \{1, \dots, N\}$, tais que, para todo sinal de chaveamento σ com frequência de chaveamento $f \leq \alpha$, a realimentação de estado $u(t) = K_{\sigma(t)}x(t)$ estabiliza exponencialmente o sistema (4.15).*

Este resultado não é tão surpreendente. De fato, dada uma frequência de chaveamento f finita, o tempo entre dois chaveamentos consecutivos pode ser minorado por um certo τ_p . Como cada subsistema (A_k, B_k) é controlável, o Teorema de Alocação de Polos permite escolher uma matriz K_k de forma que $A_k + B_k K_k$ seja estável com uma velocidade exponencial de convergência arbitrária, e assim a ideia seria escolher K_k com um ganho suficientemente grande para que, após um intervalo de tempo τ_p , o fenômeno de sobressinal devido à dinâmica de $A_k + B_k K_k$ já tenha passado, prevalecendo então a convergência exponencial. O fato de existir uma escolha de K_k que garanta que a estabilização exponencial predomine sobre o sobressinal após um tempo fixado τ_p é uma consequência de um resultado de [12]. Esta é, então, a ideia da demonstração do Teorema 4.11.

Em muitas situações de interesse, porém, não se conhece um limitante α da frequência de chaveamento f do sinal σ , sabendo apenas que σ tem uma frequência de chaveamento finita. Neste caso, um segundo teorema de [13] garante que a estabilização ainda é possível.

Teorema 4.12. *Seja o sistema de controle chaveado (4.14) definido por $(A_1, B_1), \dots, (A_N, B_N) \in \mathbb{R}^{d \times d} \times \mathbb{R}^{d \times m}$ e suponhamos que cada par (A_k, B_k) é controlável. Então, para todo sinal de chaveamento σ com frequência de chaveamento finita (desconhecida) f , existe uma realimentação de estado $u(t) = K(t)x(t)$ que estabiliza exponencialmente o sistema (4.15).*

Com relação ao Teorema 4.11, a dificuldade na demonstração do Teorema 4.12 é o fato de que a frequência de chaveamento f não é conhecida e, assim, não se pode utilizar a mesma ideia de demonstração do Teorema 4.11 por não se ter um limitante inferior conhecido τ_p para o intervalo de tempo entre dois chaveamentos. Porém, apesar de este limitante não ser conhecido, ele existe, e pode-se assim utilizar o sinal σ para se construir um estimador $\hat{\tau}_p$ de τ_p . As matrizes K_k do Teorema 4.11 são assim atualizadas junto com a estimativa $\hat{\tau}_p$, e pode-se mostrar que a realimentação de estado definida por estas matrizes estabiliza exponencialmente o sistema.

Tanto no Teorema 4.11 quanto no Teorema 4.12, o conhecimento do sinal $\sigma(t)$ é necessário para a construção da realimentação. Em muitos casos, porém, este sinal não é conhecido. Assim, [13] apresenta um resultado de estabilização válido também para este caso; porém, é necessário agora conhecer um tempo de permanência para σ .

Teorema 4.13. *Seja o sistema de controle chaveado (4.14) definido por $(A_1, B_1), \dots, (A_N, B_N) \in \mathbb{R}^{d \times d} \times \mathbb{R}^{d \times m}$ e suponhamos que cada par (A_k, B_k) é controlável. Então, dado um tempo de permanência $\tau_p > 0$, existe uma realimentação de estado $u(t) = K(t)x(t)$ que estabiliza exponencialmente o sistema (4.15) para todo sinal de chaveamento σ com tempo de permanência τ_p .*

Para se demonstrar o Teorema 4.13, busca-se estimar o sinal de chaveamento σ . Assim, constrói-se um estimador $\hat{\sigma}$ de σ , e, utilizando matrizes K_k construídas como no Teorema 4.11 e esta estimativa $\hat{\sigma}$, constrói-se uma realimentação linear de estado que estabiliza exponencialmente o sistema.

Os Teoremas 4.11, 4.12 e 4.13 são assim importantes em sistemas de controle para estabilizar sistemas chaveados. Se os resultados dados aqui fornecem apenas a existência de uma realimentação de estado estabilizante, as demonstrações apresentadas em [13] fornecem uma ideia de como pode ser feita uma implementação prática destes resultados através da construção do ganho $K(t)$.

4.1.4 Sinais de chaveamento a excitação persistente

Consideremos o sistema de controle chaveado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sigma(t)Bu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^d, u(t) \in \mathbb{R}^m, \sigma(t) \in \{0, 1\}, \quad (4.16)$$

em que σ é um sinal de chaveamento entre o sistema não-controlado $\dot{x} = Ax$ e o sistema controlado $\dot{x} = Ax + Bu$. Embora o chaveamento entre o sistema controlado e o sistema não-controlado possa ocorrer em algumas situações práticas, o maior interesse do estudo de (4.16) está no estudo do sistema convexificado correspondente,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sigma(t)Bu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^d, u(t) \in \mathbb{R}^m, \sigma(t) \in [0, 1]. \quad (4.17)$$

Este sistema, ou sistemas análogos a este, aparecem em algumas situações práticas de interesse. Por exemplo, [30] cita o caso do sistema não-linear

$$\dot{\omega} = S(\omega)\omega + g(t)u, \quad \omega \in \mathbb{R}^3,$$

em que $S(\omega) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é uma matriz dependente de ω e $g(t)$ é uma matriz dependente do tempo tal que posto $g(t) < 3$ para todo t . Este sistema é utilizado no controle de naves espaciais com atuadores magnéticos e pode ser visto como uma generalização de (4.17). Outro exemplo citado em [30] é o controle do sistema

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u$$

com $g(t, x)$ uma matriz invertível para todo (t, x) . Este sistema aparece naturalmente em diversas aplicações de controle de sistemas mecânicos devido à forma das equações lagrangianas. Deve-se

lembrar, também, que um sistema como (4.17), o sistema (3.23), foi utilizado na Seção 3.5.1 para mostrar a solução apresentada em [32] ao problema da estabilidade absoluta para as dimensões 2 e 3. Em [32], o problema da estabilidade absoluta é reformulado de forma a levar a um sistema de controle do tipo (3.23). Isto motiva, assim, o estudo do sistema (4.17).

O problema de interesse no estudo do sistema (4.17) é a sua estabilização através de uma realimentação de estado linear $u = -Kx$ independente do sinal de chaveamento σ , isto é, desejamos obter K independente de σ tal que

$$\dot{x} = (A - \sigma(t)BK)x$$

seja exponencialmente estável para todo sinal de chaveamento σ em uma determinada classe \mathcal{G} . A escolha $\mathcal{G} = L^\infty(\mathbb{R}^+, [0, 1])$ não é interessante, pois estamos interessados no caso geral em que A não é necessariamente estável, e esta classe contém sinais em que o controle $u = -Kx$ não está ativo o suficiente, como é o caso de $\sigma(t) = 0$ para todo t ou $\sigma(t) = 0$ a partir de um certo t_0 . Assim, é necessário garantir que o sinal de chaveamento σ ative o suficiente o controle u . Para isto, [11] propõe o uso de sinais a *excitação persistente*.

Definição 4.14. Sejam T, μ duas constantes positivas com $T \geq \mu$. Dizemos que uma função mensurável $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ é um *sinal* (T, μ) se, para todo $t \in \mathbb{R}_+$, tivermos

$$\int_t^{t+T} \sigma(s) ds \geq \mu. \quad (4.18)$$

O conjunto de sinais (T, μ) é notado por $\mathcal{G}(T, \mu)$. Dizemos que uma função mensurável $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ é um *sinal a excitação persistente* (ou simplesmente *sinal PE*) se for um sinal (T, μ) para certas constantes positivas T e μ com $T \geq \mu$.

A condição de excitação persistente, que aparece naturalmente em certos contextos de identificação e controle adaptativo, garante assim que, para cada janela de tempo T , o sinal σ “ativa” o controle u em uma quantidade uniformemente minorada. Assim, o sistema de interesse é

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sigma(t)Bu(t), \quad \sigma \in \mathcal{G}(T, \mu), \quad (4.19)$$

que é às vezes chamado de *sistema a excitação persistente* ou *sistema PE*.

Em [11], foi obtido um resultado de estabilização de (4.19) para o caso em que a matriz A é neutramente estável, isto é, todos os autovalores de A possuem parte real negativa ou nula e os de parte real nula possuem multiplicidade geométrica igual à multiplicidade algébrica, ou seja, o bloco de Jordan associado é trivial; isto é equivalente ao fato de o sistema $\dot{x} = Ax$ ser estável.

Teorema 4.15. Suponhamos que o par (A, B) seja estabilizável e que a matriz A seja neutramente estável. Então existe uma matriz $K \in \mathbb{R}^{m \times d}$ tal que, para todo $T \geq \mu > 0$, a realimentação de estado $u = -Kx$ estabiliza exponencialmente o sistema (4.19).

Lembremos que o par (A, B) é chamado de estabilizável se existir $K \in \mathbb{R}^{m \times d}$ tal que $A + BK$ seja Hurwitz. Como o sinal σ constante igual a 1 para todo t está na classe $\mathcal{G}(T, \mu)$, a estabilizabilidade de (A, B) é evidentemente uma condição necessária de estabilização do sistema (4.19).

O Teorema 4.15 mostra assim que a estabilização do sistema (4.19) por uma realimentação de estado independente do sinal σ é possível e que a matriz K desta realimentação independe das constantes T e μ de excitação persistente do sinal σ . O caso considerado de sistema neutramente estável é importante na prática, aparecendo naturalmente em vários modelos físicos em que ocorre a conservação da energia em ao menos uma parte do sistema e não há injeção de energia no sistema.

É de interesse, porém, generalizar o resultado do Teorema 4.15 a casos mais gerais de matriz A . Um primeiro resultado neste sentido foi apresentado em [11], em que mostrou-se que o sistema (4.19) pode ser estabilizado por uma realimentação de estado $u = -Kx$ quando (A, B) é o duplo integrador, isto é, quando

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Este resultado foi em seguida generalizado em [15] para o caso em que A possui todos os seus autovalores com parte real negativa ou nula. Assim, com relação ao Teorema 4.15, a generalização está no fato de permitir que os autovalores de parte real nula de A tenham blocos de Jordan não-triviais, o que corresponde assim a uma possível instabilidade com divergência polinomial do sistema não-controlado $\dot{x} = Ax$. O resultado de [15] considera o sistema (4.19) com uma entrada escalar, isto é, a matriz B é simplesmente um vetor coluna $b \in \mathbb{R}^d$.

Teorema 4.16. *Seja $(A, b) \in \mathbb{R}^{d \times d} \times \mathbb{R}^d$ um par controlável e suponha que os autovalores de A possuem parte real negativa ou nula. Então, para todos T, μ com $T \geq \mu > 0$, existe $K \in \mathbb{R}^d$ tal que a realimentação de estado $u = -K^T x$ estabiliza exponencialmente o sistema (4.19).*

É interessante analisar a estratégia de demonstração do Teorema 4.16, que pode ser ilustrada através do caso do duplo integrador, isto é, com

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, o sistema (4.19) se escreve

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \sigma(t)u. \end{cases}, \quad \sigma \in \mathcal{G}(T, \mu). \quad (4.20)$$

A demonstração neste caso baseia-se no seguinte fato: para todo $v > 0$, $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}$ é um ganho de realimentação de estado que estabiliza (4.20) com relação à classe $\mathcal{G}(T, \mu)$ se e somente se $\begin{pmatrix} v^2 k_1 & v k_2 \end{pmatrix}$ for um ganho de realimentação de estado que estabiliza (4.20) com relação à classe $\mathcal{G}(T/v, \mu/v)$, o que pode ser visto considerando a equação satisfeita por

$$x_v(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} x(vt).$$

A ideia da demonstração é assim construir um ganho $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}$ que estabilize (4.20) com relação à classe $\mathcal{G}(T/v, \mu/v)$ para um certo v grande o suficiente, e assim o ganho de estabilização procu-

rado com relação à classe $\mathcal{G}(T, \mu)$ é $(k_1/v^2 \quad k_2/v)$. A construção de um tal K é baseada em um procedimento de limite: dada uma sequência de sinais $\sigma_n \in \mathcal{G}(T/v_n, \mu/v_n)$ com $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, por compacidade fraco- \star de $L^\infty(\mathbb{R}_+, [0, 1])$, existe uma subsequência de (σ_n) fraco- \star convergente em $L^\infty(\mathbb{R}_+, [0, 1])$ para um certo limite σ_\star , e pode-se mostrar que $\sigma_\star(t) \geq \frac{\mu}{T}$ para quase todo t . Pode-se assim utilizar o sistema limite

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \sigma_\star(t)u, \end{cases} \quad \sigma_\star(t) \geq \frac{\mu}{T}, \quad (4.21)$$

para se obter propriedades do sistema (4.20) através de um processo limite. A ideia geral é portanto acelerar a dinâmica de (4.20) por um fator v . Esta aceleração reduz a importância dos intervalos em que σ é pequeno pois, no limite, $\sigma_\star(t) \geq \frac{\mu}{T}$ para quase todo t , facilitando assim o estudo do comportamento do sistema. Construímos assim um ganho de realimentação $K = (k_1 \quad k_2)$ para um sistema para o qual a escala de aceleração v é grande o suficiente, e finalmente pode-se estabilizar o sistema original por um ganho $(k_1/v^2 \quad k_2/v)$. Deve-se notar que, para v grande, este ganho é pequeno, e a técnica de estabilização utilizada para se demonstrar o Teorema 4.16 é assim chamada de técnica de ganho pequeno.

Apesar de generalizar o Teorema 4.15, o Teorema 4.16 ainda só é aplicável a matrizes A cujos autovalores têm parte real negativa ou nula, e não foi obtido em [15] nenhum resultado relativo ao caso geral de uma matriz A podendo possuir autovalores de parte real positiva. Este problema pode, entretanto, ser reformulado em termos de um problema de taxa de convergência arbitrária.

Definição 4.17. Para o sistema (4.19) com realimentação de estado $u = -Kx$ e uma classe $\mathcal{G}(T, \mu)$, notando por $x(t; x_0, \sigma)$ a solução de (4.19) com condição inicial $x(0; x_0) = x_0$ para um sinal $\sigma \in \mathcal{G}(T, \mu)$, pode-se definir o *expoente de Lyapunov máximo* $\lambda^+(\sigma, K)$ por

$$\lambda^+(\sigma, K) = \sup_{\|x_0\|=1} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log \|x(t; x_0, \sigma)\|}{t}.$$

A *taxa de convergência* associada ao sistema (4.19) para um ganho de realimentação K é então

$$\text{rcg}(T, \mu, K) = - \sup_{\sigma \in \mathcal{G}(T, \mu)} \lambda^+(\sigma, K),$$

e define-se assim a *máxima taxa de convergência* do sistema (4.19) como

$$\text{RCg}(T, \mu) = \sup_{K \in \mathbb{R}^{m \times d}} \text{rcg}(T, \mu, K).$$

O sistema (4.19) pode assim ser estabilizado com uma taxa de convergência arbitrária se e somente se $\text{RCg}(T, \mu) = +\infty$.

Suponhamos que fosse possível estabelecer, no Teorema 4.16, que o ganho K pode ser escolhido para se obter uma taxa de convergência arbitrária para qualquer par controlável $(A, b) \in \mathbb{R}^{d \times d} \times \mathbb{R}^d$. Então, tomando um par controlável $(A', b) \in \mathbb{R}^{d \times d} \times \mathbb{R}^d$ qualquer, pode-se escolher λ_0 suficientemente grande de forma que $(A' - \lambda_0 I, b)$ satisfaça as hipóteses do Teorema 4.16. Se fosse possível obter uma

taxa de convergência arbitrária neste teorema, poder-se ia então escolher um ganho K tal que o sistema definido por $(A' - \lambda_0 I, b)$ convergisse com uma taxa de convergência superior a λ_0 . Mas verifica-se facilmente que as soluções de

$$\dot{x} = (A - bK)x \quad (4.22)$$

e de

$$\dot{y} = (A - \lambda_0 I - bK)y \quad (4.23)$$

estão relacionadas por $x(t) = e^{\lambda_0 t} y(t)$ e, assim, estabilizar (4.23) com uma taxa de convergência superior a λ_0 corresponde assim a estabilizar exponencialmente (4.22). Logo, mostrar o Teorema 4.16 com uma taxa de convergência arbitrária implica mostrar o Teorema 4.16 para um par controlável $(A, b) \in \mathbb{R}^{d \times d} \times \mathbb{R}^d$ qualquer. A implicação inversa pode ser obtida por argumentos similares, e, assim, generalizar o Teorema 4.16 a um par controlável $(A, b) \in \mathbb{R}^{d \times d} \times \mathbb{R}^d$ qualquer é um problema equivalente a estabelecer a taxa de convergência arbitrária no Teorema 4.16.

Por este motivo, [15] interessa-se ao problema de estabilização de (4.19) a uma taxa de convergência arbitrária. Dois resultados foram obtidos neste sentido.

Teorema 4.18. *Seja d um inteiro positivo. Existe $\rho^* \in (0, 1)$ tal que, para todo par controlável $(A, b) \in \mathbb{R}^{d \times d} \times \mathbb{R}^d$ e todos T, μ positivos satisfazendo $\rho^* < \frac{\mu}{T} \leq 1$, temos $RC_{\mathcal{G}}(T, \mu) = +\infty$.*

Isto quer dizer que, ao menos para $\frac{\mu}{T}$ grande o suficiente, a estabilização a uma taxa arbitrária de convergência é possível para o sistema (4.19) com um par (A, b) controlável. Assim, para $\rho^* < \frac{\mu}{T} \leq 1$, o resultado do Teorema 4.16 é válido para todo par controlável $(A, b) \in \mathbb{R}^{d \times d} \times \mathbb{R}^d$. Entretanto, [15] também mostra que o resultado é falso para $\frac{\mu}{T}$ pequeno, ao menos em dimensão 2.

Teorema 4.19. *Existe $\rho_* \in (0, 1)$ tal que, para todo par controlável $(A, b) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^2$ e todos T, μ positivos satisfazendo $0 < \frac{\mu}{T} < \rho_*$, temos $RC_{\mathcal{G}}(T, \mu) < +\infty$.*

Dizer que $RC_{\mathcal{G}}(T, \mu) < +\infty$ significa que existe $C > 0$ tal que, para todo $K^T \in \mathbb{R}^2$, tem-se $rc_{\mathcal{G}}(T, \mu, K) \leq C$, e portanto que existe $\sigma \in \mathcal{G}(T, \mu)$ tal que $\lambda^+(\sigma, K) \geq -C$. A demonstração do Teorema 4.19 dada em [15] constrói explicitamente um tal σ para todo $K^T \in \mathbb{R}^2$. Em particular, a construção mostra que, conforme $\|K\|$ aumenta, o sinal desestabilizante σ construído oscila cada vez mais rápido entre 0 e 1. Como observado em [15], pode-se interpretar esta construção dizendo que o tempo que σ passa em 1 é curto o suficiente de forma a que o efeito estabilizante da dinâmica do sistema $\dot{x} = (A - bK)x$ seja compensado pelo efeito de sobressinal que ocorre em pequenos intervalos de tempo, e é este efeito de sobressinal que impede que o sistema seja estabilizado a uma taxa arbitrária. Isto só é possível devido ao fato de σ oscilar rapidamente entre 1 e 0, e, assim, uma questão levantada em [15] ao final do artigo é de procurar uma subclasse de $\mathcal{G}(T, \mu)$ para a qual um resultado de estabilização a velocidade arbitrária seja válido. Esta classe deve impedir as oscilações rápidas de σ e, assim, [15] sugere a classe de sinais a excitação persistente lipschitzianos com constante de Lipschitz limitada por um certo M .

Definição 4.20. *Sejam T, μ e M constantes positivas com $T \geq \mu$. Dizemos que uma função mensurável $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ é um *signal* (T, μ, M) se for um sinal (T, μ) e além disso for globalmente*

M -lipschitziana, isto é, para todo $t, s \in \mathbb{R}_+$,

$$|\sigma(t) - \sigma(s)| \leq M|t - s|.$$

O conjunto dos sinais (T, μ, M) é notado por $\mathcal{D}(T, \mu, M)$. Dizemos que uma função mensurável $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ é um *sinal lipschitziano a excitação persistente* (ou simplesmente *sinal PEL*) se for um sinal (T, μ, M) para certas constantes positivas T, μ e M com $T \geq \mu$.

Assim, o sistema de interesse é

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sigma(t)Bu(t), \quad \sigma \in \mathcal{D}(T, \mu, M), \quad (4.24)$$

que é às vezes chamado de *sistema a excitação persistente lipschitziano* ou *sistema PEL*. De forma análoga à Definição 4.17, podemos definir a *taxa de convergência* e a *máxima taxa de convergência* para o sistema (4.24).

Definição 4.21. Para o sistema (4.24) com realimentação de estado $u = -Kx$ e uma classe $\mathcal{D}(T, \mu, M)$, notando por $x(t; x_0, \sigma)$ a solução de (4.24) com condição inicial $x(0; x_0) = x_0$ para um sinal $\sigma \in \mathcal{D}(T, \mu, M)$, pode-se definir o *expoente de Lyapunov máximo* $\lambda^+(\sigma, K)$ por

$$\lambda^+(\sigma, K) = \sup_{\|x_0\|=1} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log \|x(t; x_0, \sigma)\|}{t}.$$

A *taxa de convergência* associada ao sistema (4.24) para um ganho de realimentação K é então

$$\text{rc}_{\mathcal{D}}(T, \mu, M, K) = - \sup_{\sigma \in \mathcal{D}(T, \mu, M)} \lambda^+(\sigma, K),$$

e define-se assim a *máxima taxa de convergência* do sistema (4.24) como

$$\text{RC}_{\mathcal{D}}(T, \mu, M) = \sup_{K \in \mathbb{R}^{m \times d}} \text{rc}_{\mathcal{D}}(T, \mu, M, K).$$

Assim, para $\sigma \in \mathcal{D}(T, \mu, M)$, o fenômeno de oscilação rápida que resulta no Teorema 4.19 não é possível, pois, se, por exemplo, σ assumir um certo valor positivo ρ em um instante t , o intervalo de tempo próximo a t em que σ é maior do que $\rho/2$ não pode ser arbitrariamente pequeno, e espera-se assim que o fenômeno de sobressinal de $\dot{x} = (A - \rho bK)x$ possa ser compensado pelo efeito estabilizante para K suficientemente grande em norma. Em outras palavras, o argumento utilizando na demonstração do Teorema 4.19 não se aplica a um sinal em $\mathcal{D}(T, \mu, M)$, e pode-se assim esperar que o resultado $\text{RC}_{\mathcal{D}}(T, \mu, M) = +\infty$ seja válido.

A busca deste resultado foi a parte central do estágio de pesquisa [35] realizado pelo aluno no CMAP - Centre de Mathématiques Appliquées da École Polytechnique, Palaiseau, França, e que foi prolongado pelo presente trabalho de conclusão de curso na Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil. O resultado foi obtido em [35] para o caso do duplo integrador em dimensão 2, e uma generalização imediata aos sistemas planares controláveis foi feita em [14]. O resultado final obtido é portanto o seguinte.

Teorema 4.22. *Seja o sistema (4.24) com $(A, b) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^2$ controlável. Sejam T, μ e M constantes positivas com $T \geq \mu$. Então, para este sistema, tem-se $RC_{\mathcal{D}}(T, \mu, M) = +\infty$, isto é, para toda constante λ , existe $K^T \in \mathbb{R}^2$ tal que, para todo $\sigma \in \mathcal{D}(T, \mu, M)$, tem-se $\lambda^+(\sigma, K) \leq -\lambda$.*

A técnica utilizada na demonstração do Teorema 4.16 não foi útil neste caso: o estudo do sistema limite (4.21) parte de uma técnica de aceleração da dinâmica do sistema, o que quer dizer que a aplicação desta técnica no caso da classe $\mathcal{D}(T, \mu, M)$ levaria a considerar um sinal $\sigma \in \mathcal{D}(T/\nu, \mu/\nu, \nu M)$ para uma constante ν grande e, portanto, no limite $\nu \rightarrow +\infty$, o fato de σ ser νM -lipschitziano não traria nenhuma informação adicional para a função limite fraco- \star σ_* . Ademais, mesmo se, por uma mudança de variáveis, a lipschitzianidade de σ pudesse ser levada em conta, o procedimento de aceleração da dinâmica fornece um ganho baixo K que estabiliza o sistema devagar. Por estes motivos, a procura por uma demonstração do Teorema 4.22 usando um sistema limite não apresenta aplicação direta neste caso.

Para demonstrar o Teorema 4.22, foi utilizada uma técnica diferente. Primeiramente, escolheram-se uma forma particular de K e uma mudança de variáveis que concentra a informação de convergência do sistema, de tal forma que é necessário apenas limitar a taxa de divergência da solução do sistema na nova variável y a fim de se concluir a convergência da variável original x . Na nova variável y , pode-se mostrar que o sistema gira em torno da origem, e pode-se assim decompor o tempo em intervalos nos quais a solução completa meia volta em torno da origem. Segundo o comportamento de σ em cada um destes intervalos, pode-se estimar a taxa de divergência de y , e estas estimativas fornecem uma taxa de divergência menor que a taxa de convergência dada pela mudança de variáveis de x para y , o que implica a convergência de x a uma taxa arbitrária.

A demonstração completa do Teorema 4.22 é assunto do Capítulo 5.

4.2 Chaveamento restrito pelo estado

Nesta seção, desejamos estudar os sistemas (4.7) e (4.8). Na maioria dos casos, interessar-nos-emos pelos sistemas lineares

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_{\sigma(t)}x(t), \\ \sigma(t) &= \varphi(x(t))\end{aligned}\tag{4.25}$$

no caso contínuo e

$$\begin{aligned}x[j+1] &= A_{\sigma[j]}x[j], \\ \sigma[j] &= \varphi(x[j])\end{aligned}\tag{4.26}$$

no caso discreto, com $A_k \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $k \in \mathcal{J}$.

4.2.1 Funções de Lyapunov quadráticas por partes

Assim como, na Seção 4.1.2, foram utilizadas funções de Lyapunov múltiplas para se obter critérios sobre o sinal de chaveamento no tempo que garantem a estabilidade do sistema chaveado correspondente, este tipo de função também pode ser utilizado para analisar a estabilidade de sistemas chaveados com chaveamento restrito pelo estado.

Notemos, inicialmente, que o sistema (4.25) pode ser escrito sob a forma

$$\dot{x} = A_k x, \quad \text{se } x \in \Omega_k,$$

em que $\Omega_k = \varphi^{-1}(k)$. Isto é, φ determina uma partição do espaço de estados, $\mathbb{R}^d = \bigcup_{k=1}^N \Omega_k$, com $\Omega_k \cap \Omega_m = \emptyset$ se $k \neq m$, de tal forma que, sobre Ω_k , age o sistema definido por A_k . Em muitos casos, porém, Ω_k pode não ser conhecido com precisão, ou ainda pode ser interessante aproximar Ω_k em vez de utilizar sua expressão exata, como será visto mais adiante. Assim, é interessante considerar na prática não uma partição de \mathbb{R}^d definida por uma única lógica de chaveamento φ , mas sim uma decomposição $\mathbb{R}^d = \bigcup_{k=1}^N \Omega_k$ em que os conjuntos Ω_k podem se interceptar, e o chaveamento de k a m ocorre na região $\Omega_k \cap \Omega_m$. Assim, várias lógicas de chaveamento podem ser representadas por uma mesma decomposição $\mathbb{R}^d = \bigcup_{k=1}^N \Omega_k$. Um exemplo de uma tal decomposição está representado na Figura 4.2.

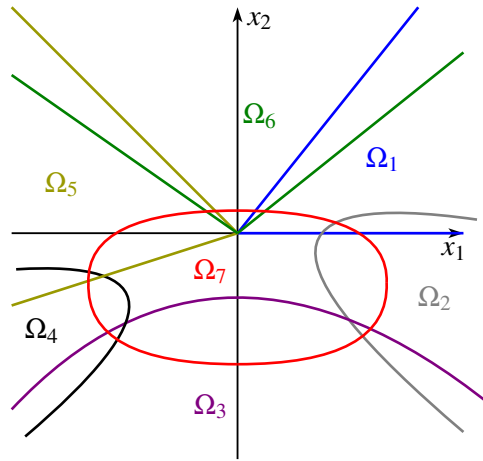


FIGURA 4.2: Representação de uma partição do espaço de estados \mathbb{R}^2 em 7 regiões Ω_k . O chaveamento de k a m só pode ocorrer na região $\Omega_k \cap \Omega_m$.

Consideremos, assim, o sistema

$$\dot{x} = A_k x, \quad \text{se } x \in \Omega_k, \quad (4.27)$$

definido por uma família finita de matrizes $\{A_k, k \in \mathcal{J}\}$ com $\mathcal{J} = \{1, \dots, N\}$ e pela decomposição de \mathbb{R}^d em regiões $\Omega_1, \dots, \Omega_N$. O objetivo é construir funções do tipo de Lyapunov $V_k(x) = x^T P_k x$ para cada região Ω_k a fim de construir uma função de Lyapunov quadrática por partes $V_{\sigma(t)}(x)$ a partir das múltiplas funções V_k . Quando isto for possível, obtém-se assim a função de Lyapunov desejada, que garante a estabilidade exponencial do sistema (4.25). A apresentação deste resultado dada aqui é a de [29].

Impomos condições sobre V_k a fim de facilitar a sua procura. Assim, supomos que cada V_k , $k \in \{1, \dots, N\}$, é da forma

$$V_k(x) = x^T P_k x, \quad x \in \Omega_k \quad (4.28)$$

para uma certa matriz simétrica P_k (que não necessariamente é definida positiva, mas que deve sa-

tisfazer $x^T P_k x > 0$ para todo $x \in \Omega_k$, $x \neq 0$, condição que é implicada por (4.29) abaixo). Supomos também que existem escalares $\beta_k \geq \alpha_k > 0$ tais que

$$\alpha_k \|x\|^2 \leq V_k(x) \leq \beta_k \|x\|^2, \quad \text{para todo } x \in \Omega_k. \quad (4.29)$$

A condição (4.29) é assim equivalente a exigir que

$$\begin{cases} x^T (\alpha_k I - P_k) x \leq 0, \\ x^T (P_k - \beta_k I) x \leq 0, \end{cases} \quad \text{para todo } x \in \Omega_k.$$

Exigimos também que, para todo $x \in \Omega_k$, $x \neq 0$, a função de Lyapunov V_k seja estritamente decrescente ao longo de uma trajetória passando por x , isto é, que $\frac{\partial V_k}{\partial x}(x) A_k x < 0$ para todo $x \in \Omega_k$. Calculando $\frac{\partial V_k}{\partial x}$, isto fornece a condição

$$x^T (A_k^T P_k + P_k A_k) x < 0, \quad \text{para todo } x \in \Omega_k. \quad (4.30)$$

Finalmente, exigimos que, em um chaveamento, o valor de $V_{\sigma(t)}(x)$ diminua. Assim, notando por $\Omega_{k,m} \subset \Omega_k \cap \Omega_m$ a região em que o sistema pode chavear de k para m , esta exigência pode ser traduzida por

$$x^T P_m x \leq x^T P_k x, \quad \text{para todo } x \in \Omega_{k,m}. \quad (4.31)$$

Procuramos assim por funções do tipo de Lyapunov da forma (4.28) satisfazendo as condições (4.29), (4.30) e (4.31). A existência de funções deste tipo permite construir uma função de Lyapunov quadrática por partes $V_{\sigma(t)}(x)$ que garante a estabilidade exponencial do sistema (4.27), e, assim, o objetivo é criar métodos de procura de tais funções. Notemos que as condições (4.29), (4.30) e (4.31) correspondem a desigualdades que estão restritas a certas regiões, Ω_k ou $\Omega_{k,m}$. O fato de as desigualdades estarem restritas a regiões dificulta a procura por funções de Lyapunov satisfazendo-as, principalmente de um ponto de vista numérico, e, assim, é interessante ter um procedimento que converta estas desigualdades restritas a regiões em desigualdades matriciais. Existe, para isto, uma técnica chamada *procedimento S* (ver referências em [29]) que permite substituir as desigualdades restritas a regiões por desigualdades matriciais, desde que as regiões em questão sejam caracterizadas por uma forma quadrática, isto é, desde que

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x^T Q_k x \geq 0\}, \quad \Omega_{k,m} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x^T Q_{k,m} x \geq 0\} \quad (4.32)$$

para certas matrizes Q_k , $Q_{k,m}$. Evidentemente, isto pode não ser o caso para as regiões Ω_k e $\Omega_{k,m}$ dadas; porém, notemos que, se Ω_k estiver contida em uma outra região Ω'_k que pode ser caracterizada por uma forma quadrática, e similarmente para $\Omega_{k,m} \subset \Omega'_{k,m}$, então todo sinal de chaveamento possível para o sistema (4.27) com as regiões Ω_k e $\Omega_{k,m}$ é também um sinal de chaveamento possível para o sistema (4.27) com as regiões Ω'_k e $\Omega'_{k,m}$, e, assim, a estabilidade exponencial do sistema (4.27) com as regiões Ω'_k e $\Omega'_{k,m}$ implica a estabilidade exponencial do sistema (4.27) com as regiões Ω_k e $\Omega_{k,m}$. Logo, basta aproximar Ω_k e $\Omega_{k,m}$ por fora por regiões caracterizadas por formas quadráticas, o que, segundo [29], é sempre possível.

Podemos assim supor que as regiões Ω_k e $\Omega_{k,m}$ são dadas por (4.32) para certas matrizes Q_k e $Q_{k,m}$. Estas matrizes são parâmetros do sistema, conhecidas, e desejamos assim determinar matrizes P_k tais que as funções de Lyapunov correspondentes V_k dadas por (4.28) satisfaçam as condições (4.29), (4.30) e (4.31). Através da aplicação do procedimento \mathcal{S} a estas condições restritas a regiões, pode-se obter um critério de estabilidade exponencial de (4.27), dado no teorema a seguir [29].

Teorema 4.23. *O sistema (4.27) é exponencialmente estável se existirem matrizes simétricas P_k , $k \in \{1, \dots, N\}$ e escalares $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\mu_k \geq 0$, $\nu_k \geq 0$, $\vartheta_k \geq 0$ e $\eta_{k,m} \geq 0$, $k, m \in \{1, \dots, N\}$, tais que*

$$\begin{cases} \alpha I + \mu_k Q_k \preceq P_k \preceq \beta I - \nu_k Q_k, \\ A_k^T P_k + P_k A_k + \vartheta_k Q_k \preceq -I, \\ P_m + \eta_{k,m} Q_{k,m} \preceq P_k, \end{cases} \quad \text{para todos } k, m \in \{1, \dots, N\}.$$

Neste caso, temos a estimativa

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\beta/\alpha} e^{-\frac{1}{2\beta}t} \|x_0\|$$

em que $x(t)$ é uma trajetória de (4.27) com condição inicial x_0 .

O Teorema 4.23 fornece assim condições suficientes para garantir a estabilidade do sistema chaveado (4.27). Um análogo a tempo discreto deste resultado é fornecido em [20], em que se considera o sistema chaveado linear a tempo discreto

$$x[j+1] = A_k x[j], \quad \text{se } x \in \Omega_k, \quad k \in \{1, \dots, N\}, \quad (4.33)$$

em que se supõe que Ω_k é um polítopo de \mathbb{R}^d e $\mathbb{R}^d = \bigcup_{k=1}^N \Omega_k$. Por ser definido por um polítopo, Ω_k pode ser escrito na forma

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (E_k x)_i \geq 0 \text{ para todo } i\} \quad (4.34)$$

para uma certa matriz E_k . O artigo [20] segue então os mesmos procedimentos utilizados para a obtenção do Teorema 4.23, obtendo condições sobre funções de Lyapunov quadráticas por partes, análogas a (4.29), (4.30) e (4.31), que garantam a estabilidade do sistema, e, em seguida, traduzindo estas condições restritas a certas regiões do espaço em termos de desigualdades matriciais através do procedimento \mathcal{S} . Notando por

$$L = \{(k, m) \mid \text{existe uma trajetória } x \text{ com } x[j] \in \Omega_k, x[j+1] \in \Omega_m\}$$

o conjunto de todas as transições de estado possíveis, o resultado obtido em [20] é o apresentado a seguir.

Teorema 4.24. *O sistema (4.33) com Ω_k dado por (4.34) é exponencialmente estável se existirem matrizes simétricas P_k , $k \in \{1, \dots, N\}$, e matrizes simétricas U_k , W_k , $k \in \{1, \dots, N\}$ e $Q_{k,m}$, $(k, m) \in L$,*

com U_k , W_k e $Q_{m,k}$ possuindo entradas positivas ou nulas, tais que

$$\begin{cases} P_k - E_k^T U_k E_k \succ 0, & \text{para todo } k \in \{1, \dots, N\}, \\ A_k^T P_k A_k - P_k + E_k^T W_k E_k \prec 0, & \text{para todo } k \in \{1, \dots, N\}, \\ A_k^T P_m A_k - P_k + E_k^T Q_{k,m} E_k \prec 0, & \text{para todo } (k, m) \in L. \end{cases}$$

O Teorema 4.24 é um caso particular de um teorema mais geral de [20], que se refere aos sistemas afins, isto é, sistemas do tipo $x[j+1] = A_k x[j] + a_k$ com $A_k \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $a_k \in \mathbb{R}^d$; neste caso um outro conjunto de desigualdades matriciais permite obter uma condição suficiente de estabilidade exponencial do sistema chaveado.

Os Teoremas 4.23 e 4.24 fornecem assim condições suficientes para a estabilidade exponencial de (4.27) e (4.33). Estas condições, porém, podem por vezes ser muito conservadoras, uma vez que se partiu de uma forma muito particular de função de Lyapunov V_k para cada subsistema (4.28) e outras condições, (4.29), (4.30) e (4.31), foram impostas sobre cada V_k a fim de garantir a estabilidade exponencial, sem serem, porém, necessárias para a estabilidade. Pode-se assim imaginar que existam escolhas de V_k e condições menos conservadoras que ainda garantam a estabilidade exponencial. Algumas pesquisas foram feitas neste sentido e [29] menciona o caso do uso de funções de Lyapunov polinomiais por partes. O uso deste tipo de função permite obter critérios menos conservadores que podem ser utilizados em aplicações práticas. Além disto, outros métodos de análise de estabilidade de sistemas com chaveamento restrito pelo estado existem; para mais detalhes, ver [29] e suas referências.

4.3 Estabilização pelo chaveamento

As Seções 4.1 e 4.2 interessaram-se pelo problema de analisar um sistema chaveado dado, com uma certa lógica de chaveamento sobre a qual se tem algumas informações, buscando obter informações de estabilidade sobre o sistema chaveado. Em vários casos práticos, porém, a lógica de chaveamento faz parte do projeto do sistema. É o caso, por exemplo, de sistemas de controle com múltiplos controladores para uma única planta, em que a seleção de um controlador em um determinado instante faz parte do projeto do sistema de controle. Assim, o problema da estabilização pelo chaveamento é: dada uma família de sistemas a tempo contínuo

$$\dot{x}(t) = A_k x(t), \quad k \in \mathcal{J} \quad (4.35)$$

ou a tempo discreto

$$x[j+1] = A_k x[j], \quad k \in \mathcal{J}, \quad (4.36)$$

projetar uma lógica de chaveamento φ tal que o sistema chaveado composto por (4.35) ou (4.36) e a lógica φ seja exponencialmente estável. Note que alguns dos subsistemas de (4.35) ou (4.36), ou mesmo todos, podem ser instáveis, e mesmo assim o problema da estabilização pelo chaveamento pode possuir uma solução, como mostra o Exemplo 1.2 do Capítulo 1.

4.3.1 Estabilização quadrática

Uma técnica de estabilização da família de sistemas (4.35) é buscar garantir a existência de uma função de Lyapunov quadrática comum para a família, isto é, escolher uma lógica de chaveamento para a qual $V(x) = x^T P x$ seja uma CQLF para os sistemas de (4.35) para uma certa matriz P simétrica definida positiva. Neste caso, dizemos que a estabilização realizada é *quadrática*, e, quando uma tal estabilização é possível, dizemos que a família (4.35) é *quadraticamente estabilizável*.

Para duas matrizes A_1 e A_2 , um critério necessário e suficiente de existência de uma estabilização quadrática é apresentado em [29, 43].

Teorema 4.25. *Consideremos a família (4.35) com dois subsistemas definidos pelas matrizes A_1 e A_2 . Esta família é quadraticamente estabilizável se e somente se $\gamma(A_1, A_2)$ contiver uma matriz Hurwitz.*

Lembremos que $\gamma(A_1, A_2) = \text{co}\{A_1, A_2\} = \{\alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2 \mid \alpha \in [0, 1]\}$. Assim, a condição do Teorema 4.25 é que exista $\alpha \in [0, 1]$ tal que $A(\alpha) = \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2$ seja Hurwitz. A ideia da demonstração é então tomar P simétrica definida positiva tal que

$$A(\alpha)^T P + P A(\alpha) \prec 0,$$

isto é,

$$\alpha x^T (A_1^T P + P A_1) x + (1 - \alpha) x^T (A_2^T P + P A_2) x < 0 \quad (4.37)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$. Esta condição implica que $\mathbb{R}^d = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \{0\}$ com

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x^T (A_k^T P + P A_k) x < 0\}, \quad k \in \{1, 2\}$$

pois, se existisse $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$ tal que $x \notin \Omega_1$, $x \notin \Omega_2$, então teríamos $x^T (A_k^T P + P A_k) x \geq 0$ para $k \in \{1, 2\}$, o que contradiz (4.37). Definem-se então duas superfícies de chaveamento próximas às fronteiras de Ω_1 e Ω_2 de forma que o sistema chaveado resultante admita $V(x) = x^T P x$ como função de Lyapunov e, assim, seja exponencialmente estável. Este procedimento de construção da lógica de chaveamento garante que os sinais de chaveamento resultantes tenham apenas um número finito de chaveamentos em todo intervalo limitado de tempo; [43] observa que é possível definir outras lógicas de chaveamento em que esta condição não está satisfeita, mas, como foi observado no Exemplo 2.4, isto pode levar a um comportamento de Zenão, e, na prática, é desejável evitar este fenômeno.

O resultado do Teorema 4.25 pode ser generalizado a uma família finita de matrizes qualquer, mas a condição de estabilização quadrática passa a ser apenas suficiente e não mais necessária.

Teorema 4.26. *Consideremos a família (4.35) definida pelas matrizes $\{A_k, k \in \mathcal{I}\}$, $I = \{1, \dots, N\}$. Se existirem constantes $\alpha_k \in [0, 1]$, $k \in \mathcal{I}$, com $\sum_{k \in \mathcal{I}} \alpha_k = 1$ e tais que*

$$A(\alpha) = \sum_{k \in \mathcal{I}} \alpha_k A_k$$

seja Hurwitz, então (4.35) é quadraticamente estabilizável através do sinal de chaveamento

$$\sigma(t) = \underset{k \in \mathcal{I}}{\operatorname{argmin}} \{x(t)^T P A_k x(t)\}, \quad (4.38)$$

em que P é simétrica, definida positiva e satisfaz $A(\alpha)^T P + P A(\alpha) \prec 0$. Neste caso, $V(x) = x^T P x$ é uma função de Lyapunov quadrática para o sistema.

A lógica de chaveamento que define o sinal em (4.38) é chamada de *estratégia da projeção do mínimo* e foi proposta em [41], em que uma versão mais geral do Teorema 4.26 para sistemas não-lineares é apresentada. Notemos que $x^T P A_k x$ é o produto escalar de x com o campo de vetores $P A_k x$, e, assim, seu valor será tão menor quanto $P A_k x$ for próximo da direção de $-x$, isto é, quanto $P A_k x$ apontar para a origem. Assim, a estratégia é, a cada instante, selecionar o campo de vetores A_k que aponta o máximo possível para a origem (após a transformação por P , que vem do fato de a aproximação da origem que se deseja é tal que minimize $V(x) = x^T P x$). Um exemplo de aplicação do Teorema 4.26 é dado no Exemplo 4.27.

Exemplo 4.27. Consideremos a família de sistemas (4.35) com 3 subsistemas definidos pelas matrizes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 2 & -7 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Verifica-se que nenhuma das matrizes A_1 , A_2 e A_3 é Hurwitz. De fato, notando por $\lambda_i^{(k)}$ o i -ésimo autovalor da matriz A_k , temos

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(1)} &= -6, & \lambda_1^{(2)} &= -1 - \sqrt{6}, & \lambda_1^{(3)} &= -2 - \sqrt{7}, \\ \lambda_2^{(1)} &= 2 - \sqrt{2}, & \lambda_2^{(2)} &= 1, & \lambda_2^{(3)} &= 0, \\ \lambda_3^{(1)} &= 2 + \sqrt{2}, & \lambda_3^{(2)} &= \sqrt{6} - 1, & \lambda_3^{(3)} &= \sqrt{7} - 2. \end{aligned}$$

Tomando $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 2, 0, 3, 0, 5)$, verifica-se que a combinação convexa $A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3$ é Hurwitz. De fato,

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} -0,2 & -1,5 & -1,3 \\ -0,3 & -1,2 & 0 \\ -0,1 & -1,7 & -1,3 \end{pmatrix}$$

e seu polinômio característico é

$$p_{A(\alpha)}(\lambda) = \lambda^3 + 2,7\lambda^2 + 1,48\lambda + 0,234;$$

aplicando-se o critério de Routh-Hurwitz a este polinômio, conclui-se que todas as suas raízes têm parte real estritamente negativa, donde segue que $A(\alpha)$ é Hurwitz. Verifica-se que a matriz simétrica definida positiva

$$P = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -9 \\ 0 & 3 & -1 \\ -9 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

é tal que

$$A(\alpha)^T P + PA(\alpha) = \begin{pmatrix} -2,2 & -0,5 & -0,2 \\ -0,5 & -3,8 & -1 \\ -0,2 & -1 & -2,6 \end{pmatrix} \prec 0,$$

e, assim, as condições do Teorema 4.26 estão satisfeitas. Logo, o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\sigma(t)}x(t), \\ \sigma(t) &= \underset{k \in \{1,2,3\}}{\operatorname{argmin}} x(t)^T P A_k x(t) \end{aligned} \quad (4.39)$$

é exponencialmente estável.

Algumas trajetórias do sistema (4.39) estão representadas na Figura 4.3. Verifica-se o comportamento correspondente à estratégia da projeção do mínimo: cada solução segue um determinado campo de vetores A_k enquanto este for o que a aproxima o máximo possível da origem, no sentido da minimização de $x^T P A_k x$, chaveando entre os campos de vetores a fim de se aproximar da origem.

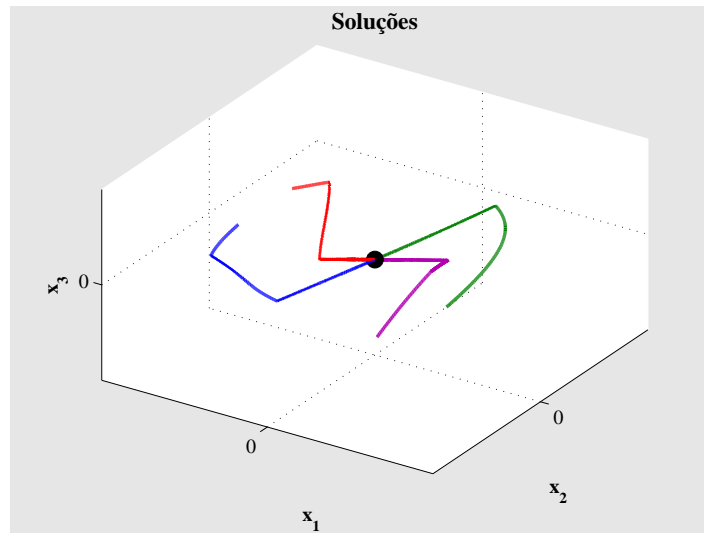


FIGURA 4.3: Representação de algumas trajetórias do sistema (4.39).

A Figura 4.4 apresenta o valor da função de Lyapunov $V(x) = x^T P x$ sobre as trajetórias representadas na Figura 4.3. Verifica-se assim que, como esperado, V decresce estritamente ao longo das trajetórias, sendo assum uma CQLF para o sistema (4.39).

□

Deve-se notar que a condição do Teorema 4.26 é suficiente para a estabilizabilidade quadrática de (4.35), mas não necessária: há exemplos de sistemas para os quais toda combinação convexa das matrizes A_k é instável, mas ainda assim o sistema é quadraticamente estabilizável [29]. É possível, porém, fornecer outro critério de estabilização quadrática que seja necessário e suficiente, apresentado em [44].

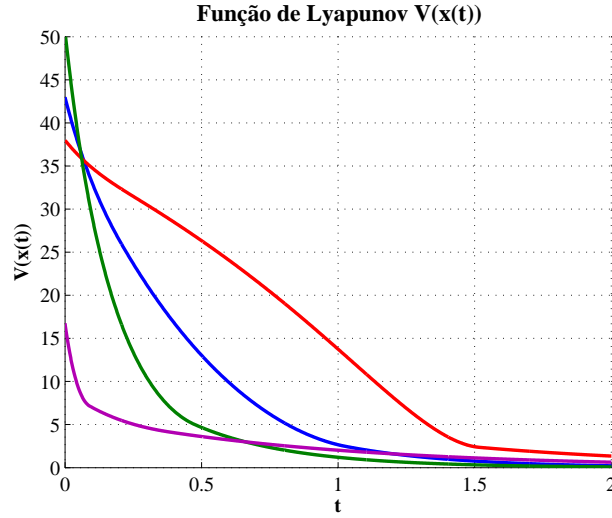


FIGURA 4.4: Função de Lyapunov $V(x) = x^T P x$ calculada sobre as trajetórias do sistema (4.39) representadas na Figura 4.3.

Teorema 4.28. A família (4.35) definida pelas matrizes $\{A_k, k \in \mathcal{J}\}$, $I = \{1, \dots, N\}$ é quadraticamente estabilizável se e somente se existir uma matriz P simétrica definida positiva tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$, exista $k \in \mathcal{J}$ tal que

$$x^T (A_k^T P + P A_k) x < 0.$$

Neste caso, o sinal de chaveamento σ definido por

$$\sigma(t) = \operatorname{argmin}_{k \in \mathcal{J}} \{x(t)^T (A_k^T P + P A_k) x(t)\}$$

estabiliza exponencialmente o sistema e $V(x) = x^T P x$ é uma CQLF do sistema chaveado correspondente.

O resultado do Teorema 4.28 não é surpreendente; de fato, basta notar que a derivada da função $V(x) = x^T P x$ ao longo das trajetórias do sistema chaveado (4.3) é

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = x^T \left(A_{\sigma(t)}^T P + P A_{\sigma(t)} \right) x$$

em todo intervalo em que $\sigma(t)$ é constante, e, assim, exigir que V seja estritamente decrescente fora da origem corresponde a exigir que, para todo $x \neq 0$, se possa encontrar um índice k tal que $x^T (A_k^T P + P A_k) x < 0$, e este índice k é então o selecionado quando se passa por x . Quando a família $\{B_k\}$ é tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$, existe k tal que $x^T B_k x < 0$, dizemos que a família $\{B_k\}$ é *estritamente completa*. Assim, a condição do Teorema 4.28 corresponde a exigir que a família $\{A_k^T P + P A_k\}$ seja estritamente completa.

O procedimento anterior também pode ser realizado com a diferença $V(x[j+1]) - V(x[j])$ no caso do sistema chaveado a tempo discreto (4.4), obtendo assim um teorema análogo ao Teorema 4.28.

Teorema 4.29. A família (4.36) definida pelas matrizes $\{A_k, k \in \mathcal{J}\}$, $I = \{1, \dots, N\}$ é quadrática-

mente estabilizável se e somente se existir uma matriz P simétrica definida positiva tal que a família $\{A_k^T P A_k - P\}$ seja estritamente completa. Neste caso, o sinal de chaveamento σ definido por

$$\sigma[j] = \operatorname{argmin}_{k \in \mathcal{J}} \{x[j]^T (A_k^T P A_k - P) x[j]\}$$

estabiliza exponencialmente o sistema e $V(x) = x^T P x$ é uma CQLF do sistema chaveado correspondente.

O problema dos Teoremas 4.28 e 4.29 é que verificar que uma família de matrizes é estritamente completa é um problema NP-difícil, e, assim, a sua implementação prática exige um tempo de cálculo elevado.

4.3.2 Estabilização quadrática por partes

O problema da estabilização quadrática é que a existência de uma CQLF para um sistema chaveado linear é uma condição suficiente mas não necessária de estabilidade exponencial. Assim, buscar a estabilização quadrática pode ser um método muito conservador em alguns casos e, para obter métodos mais gerais, é de interesse estudar condições mais gerais que ainda garantam a estabilidade exponencial do sistema chaveado.

Uma condição mais geral que a existência de uma CQLF e que garante a estabilidade exponencial é a do Teorema 4.23, que procura não uma CQLF mas uma função de Lyapunov quadrática por partes. O Teorema 4.23 é utilizado para a análise de um sistema chaveado do tipo (4.27) em que a decomposição de \mathbb{R}^d em regiões Ω_k é dada. Uma observação importante de [29] é que se pode, porém, considerar o mesmo problema do sistema (4.27), em que agora as matrizes $\{A_k, k \in \mathcal{J}\}$ são dadas mas as regiões Ω_k são parâmetros de projeto, a serem escolhidos de forma a estabilizar o sistema (4.27). Seguimos assim o procedimento de [29] para a estabilização através de funções de Lyapunov quadráticas por partes.

Consideremos assim o sistema

$$\dot{x} = A_k x, \quad \text{se } x \in \Omega_k \quad (4.40)$$

definido por uma família finita de matrizes $\{A_k, k \in \mathcal{J}\}$ com $\mathcal{J} = \{1, \dots, N\}$. Desejamos escolher Ω_k para que este sistema seja exponencialmente estável. Como no caso da Seção 4.2.1, é de interesse considerar o caso em que os conjuntos Ω_k são definidos por uma forma quadrática, e, assim, exigimos que Ω_k seja da forma

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x^T Q_k x \geq 0\} \quad (4.41)$$

para certas matrizes simétricas $Q_k \in \mathbb{R}^{d \times d}$. É importante que \mathbb{R}^d seja decomposto segundo os conjuntos Ω_k , isto é, que $\mathbb{R}^d = \bigcup_{k=1}^N \Omega_k$. Uma condição suficiente para que isto ocorra é que existam $\theta_k \geq 0$, $k \in \mathcal{J}$, tais que

$$\sum_{k=1}^N \theta_k x^T Q_k x \geq 0; \quad (4.42)$$

de fato, se os Ω_k não cobrirem \mathbb{R}^d , então existe $x \in \mathbb{R}^d$ tal que $x \notin \Omega_k$ para todo k , donde $x^T Q_k x < 0$

para todo k , e assim é impossível de se satisfazer (4.42).

A lei de chaveamento é escolhida como

$$\sigma(t) = \operatorname{argmax}_{k \in \mathcal{I}} \{x(t)^T Q_k x(t)\}; \quad (4.43)$$

esta é a *estratégia da maior função de região*, que garante assim que $x(t) \in \Omega_k$ se o sistema k estiver ativo. Desenvolvendo outras condições com a ajuda do procedimento \mathcal{S} , [29] apresenta assim o seguinte critério de estabilização.

Teorema 4.30. *O sistema (4.40) com as regiões Ω_k dadas por (4.41) é exponencialmente estabilizável se existirem matrizes simétricas P_k , Q_k , $k \in \mathcal{I}$, e escalares $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\mu_k \geq 0$, $\nu_k \geq 0$, $\theta_k \geq 0$, $\vartheta_k \geq 0$ e $\eta_{k,m}$, $k, m \in \mathcal{I}$, que sejam soluções do problema de otimização*

$$\begin{aligned} & \min \beta \\ & \text{tal que} \begin{cases} \alpha I + \mu_k Q_k \preceq P_k \preceq \beta I - \nu_k Q_k, \\ A_k^T P_k + P_k A_k + \vartheta_k Q_k \preceq -I, \\ P_k + \eta_{k,m}(Q_k - Q_m) = P_m, \\ \theta_1 Q_1 + \dots + \theta_N Q_n \succeq 0, \end{cases} \\ & \text{para todos } k, m \in \{1, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Neste caso, a estratégia da maior função de região (4.43) estabiliza exponencialmente o sistema com uma taxa de $\frac{1}{2\beta}$ e $V(t, x) = x^T P_{\sigma(t)} x$ é uma função de Lyapunov quadrática por partes do sistema.

Assim como o Teorema 4.23 possui seu análogo discreto, o Teorema 4.24, o Teorema 4.30 também pode ser formulado para sistemas a tempo discreto. Esta reformulação, porém, não é óbvia, pois os sistemas a tempo discreto apresentam a dificuldade de o chaveamento não ocorrer exatamente sobre uma superfície de chaveamento, mas em regiões próximas a uma tal superfície. Assim, traduzir condições sobre o chaveamento em desigualdades matriciais é mais complicado, o que leva a um critério de estabilização mais complicado que o Teorema 4.30. Para o sistema

$$x[j+1] = A_k x[j], \quad \text{se } x[j] \in \Omega_k \quad (4.44)$$

com as regiões Ω_k dadas em (4.41) e com a estratégia da maior função de região

$$\sigma[j] = \operatorname{argmax}_{k \in \mathcal{I}} \{x[j]^T Q_k x[j]\}, \quad (4.45)$$

as condições de estabilização estão dadas no seguinte teorema.

Teorema 4.31. *O sistema (4.44) com as regiões Ω_k dadas por (4.41) é exponencialmente estabilizável se existirem matrizes simétricas P_k , Q_k , $k \in \mathcal{I}$, matrizes F_k , G_k , $F_{k,m}$ e $Q_{k,m}$ e escalares $\nu > 0$, $\alpha_k > 0$, $\beta_k > 0$, $\eta_k \geq 0$, $\rho_k \geq 0$, $\mu_k \geq 0$, $\mu_{k,m} \geq 0$ e $\theta_k \geq 0$, $k, m \in \mathcal{I}$, que sejam soluções do problema de*

otimização

$$\begin{aligned}
 & \max v \\
 \text{tal que} & \begin{cases} \alpha_k I + \eta_k Q_k \preceq P_k \preceq \beta_k I - \rho_k Q_k, \\ \begin{pmatrix} A_k^T F_k^T + F_k A_k - P_k + \mu_k Q_k + vI & A_k^T G_k^T - F_k \\ G_k A_k - F_k^T & P_k - G_k - G_k^T \end{pmatrix} \preceq 0, \\ \begin{pmatrix} A_k^T F_{k,m}^T + F_{k,m} A_k - P_k + \mu_{k,m} Q_k & A_k^T G_{k,m}^T - F_{k,m} \\ G_{k,m} A_k - F_{k,m}^T & P_m - G_{k,m} - G_{k,m}^T + \mu_{k,m} Q_m \end{pmatrix} \preceq 0, \\ \theta_1 Q_1 + \dots + \theta_N Q_n \succeq 0, \end{cases} \\
 & \text{para todos } k, m \in \{1, \dots, N\}.
 \end{aligned}$$

Neste caso, a estratégia da maior função de região (4.45) estabiliza exponencialmente o sistema e $V(t, x) = x^T P_{\sigma(t)} x$ é uma função de Lyapunov quadrática por partes do sistema.

Os critérios de estabilização apresentados nos Teoremas 4.30 e 4.31 podem ser difíceis de se verificar na prática, mesmo numericamente, por se tratarem de desigualdades matriciais bilineares, uma vez que há produtos de incógnitas nas condições de estabilização. Assim, um problema típico da aplicação destes teoremas é o tempo de cálculo dos algoritmos que resolvem os problemas de otimização correspondentes.

Deve-se lembrar que os métodos de estabilização desenvolvidos nas Seções 4.3.1 e 4.3.2 não são os únicos possíveis para se obter critérios de estabilização pelo chaveamento. Outros resultados podem ser obtidos tendo por base análises que partam de outros princípios que não a construção de uma CQLF ou de uma função de Lyapunov quadrática por partes. Os resultados dessas seções, porém, são importantes não só pelos métodos e princípios que utilizam, mas também pelas suas aplicações práticas.

4.3.3 Estabilizabilidade pelo chaveamento

Os resultados das Seções 4.3.1 e 4.3.2 apresentam apenas condições suficientes de estabilizabilidade, mas a questão de condições necessárias e suficientes de estabilizabilidade das famílias (4.35) e (4.36) é também de interesse. Uma interessante condição necessária de estabilizabilidade é dada pelo seguinte critério, retirado de [29].

Teorema 4.32. *Considere a família (4.35) definida por matrizes $A_1, \dots, A_N \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Se existir um sinal de chaveamento σ que estabilize assintoticamente o sistema chaveado $\dot{x} = A_{\sigma(t)} x$, então existe um subsistema A_k tal que ao menos um dos autovalores de $A_k + A_k^T$ é real negativo.*

Este critério simples pode ser útil para determinar a impossibilidade da estabilização pelo chaveamento. Critérios mais elaborados que fornecem condições necessárias e suficientes de estabilizabilidade existem; para mais detalhes, ver [29]. Apesar de estes critérios mais elaborados fornecerem condições necessárias e suficientes, a verificação destas condições é um processo complicado, e a obtenção de critérios cuja verificação seja mais simples é um importante problema da questão de estabilizabilidade pelo chaveamento.

Capítulo 5

Estabilização de sistemas de controle lineares planares a excitação persistente com taxa de convergência arbitrária

Este capítulo dedica-se à demonstração do Teorema 4.22 apresentado na Seção 4.1.4. Este teorema foi originalmente demonstrado para o caso particular do duplo integrador no estágio de pesquisa [35] realizado pelo aluno e generalizado em seguida ao caso controlável em dimensão 2 [14].

O sistema de interesse neste capítulo é

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sigma(t)bu(t), \quad \sigma \in \mathcal{D}(T, \mu, M) \quad (5.1)$$

em que $\mathcal{D}(T, \mu, M)$ é a classe dos sinais lipschitzianos a excitação persistente definida pelas constantes $T \geq \mu > 0$ e $M > 0$ e $(A, b) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^2$ é um par controlável. Desejamos mostrar o seguinte enunciado.

Teorema 5.1. *Seja o sistema (5.1) com $(A, b) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^2$ controlável. Sejam T , μ e M constantes positivas com $T \geq \mu$. Então, para este sistema, tem-se $RC_{\mathcal{D}}(T, \mu, M) = +\infty$, isto é, para toda constante λ , existe $K^T \in \mathbb{R}^2$ tal que, para todo $\sigma \in \mathcal{D}(T, \mu, M)$, tem-se $\lambda^+(\sigma, K) \leq -\lambda$.*

Começamos fazendo uma transformação linear algébrica no sistema de controle. Como (A, b) é controlável, podemos, sem perda de generalidade, supor (A, b) na forma controlável, isto é,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -d & \text{Tr}(A) \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ademais, se A é substituído por $A - \text{Tr}(A)I$, então $RC_{\mathcal{D}}(T, \mu, M)$ é simplesmente transladado de $-\text{Tr}(A)$. Portanto, é suficiente demonstrar o Teorema 5.1 supondo $\text{Tr}(A) = 0$. O sistema pode assim ser escrito sob a forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -dx_1 + \sigma(t)u, \end{cases} \quad \sigma \in \mathcal{D}(T, \mu, M). \quad (5.2)$$

Supomos doravante que T , μ , M e λ estão fixados. Mostraremos o Teorema 5.1 construindo

explicitamente o ganho K que satisfaz $\lambda^+(\sigma, K) \leq -\lambda$ para todo $\sigma \in \mathcal{D}(T, \mu, M)$. Para fazê-lo, escrevemos $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}$ e, assim, a realimentação $u = -Kx$ leva ao sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(d + \sigma(t)k_1) & -\sigma(t)k_2 \end{pmatrix} x.$$

A variável x_1 satisfaz a equação escalar

$$\ddot{x}_1 + k_2 \sigma(t) \dot{x}_1 + (d + k_1 \sigma(t)) x_1 = 0$$

e temos $x_2 = \dot{x}_1$.

Notamos que o sinal σ constante e igual a 1 está em $\mathcal{D}(T, \mu, M)$, e, portanto, uma condição necessária para que a realimentação $u = -Kx$ estabilize o sistema (5.2) seja válido é que a matriz

$$A - bK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -d - k_1 & -k_2 \end{pmatrix}$$

seja Hurwitz, o que é o caso se e somente se $k_1 > -d$, $k_2 > 0$. No que segue, restringiremos a procura de K às matrizes da forma

$$K = \begin{pmatrix} k^2 & k \end{pmatrix}, \quad k > 0 \text{ e } k \text{ grande.} \quad (5.3)$$

A equação diferencial satisfeita por x_1 é então

$$\ddot{x}_1 + k \sigma(t) \dot{x}_1 + (d + k^2 \sigma(t)) x_1 = 0. \quad (5.4)$$

5.1 Estratégia da demonstração

Discutamos a estratégia a ser usada para demonstrar o Teorema 5.1. Começamos fazendo uma mudança de variáveis em (5.4) na Seção 5.2 que facilitará o estudo do sistema. Além de colocar o sistema em uma forma mais fácil de se estudar e adaptada aos métodos que serão aplicados na sequência, esta mudança de variáveis concentra as informações de convergência do sistema, uma vez que a variável original x e a nova variável y estão relacionadas por (5.6), que contém o termo exponencial $e^{-\frac{k}{2} \int_0^t \sigma(s) ds + t \sqrt{\frac{kM}{2} - d}}$, que converge para 0 quando $t \rightarrow +\infty$ uma vez que σ é um sinal de excitação persistente, e, assim, é suficiente mostrar que a taxa de crescimento exponencial de y é menor que a taxa de convergência dada pela mudança de variáveis.

Na Seção 5.3, interessamo-nos assim ao estudo do sistema satisfeito por y . Começamos escrevendo este sistema em coordenadas polares na Seção 5.3.1 e isso permitirá mostrar, na Seção 5.3.2, que a solução gira em torno da origem um número infinito de vezes, o que por sua vez permitirá decompor, na Seção 5.3.3, o tempo \mathbb{R}_+ nos intervalos “bons” de \mathcal{J}_+ , em que a função γ definida em (5.8) é limitada inferiormente por uma constante positiva (ver o Lema 5.4), e nos intervalos “ruins” de \mathcal{J}_0 , em que γ é pequena. A estimativa da taxa de crescimento de y nos intervalos de \mathcal{J}_+ está feita na Seção 5.3.4: utilizamos o fato de que o ângulo polar θ é uma função estritamente monótona do tempo para escrever a variável radial das coordenadas polares r em função de θ , e então uma integração

direta da equação diferencial satisfeita por $\ln r$ permite obter a estimativa desejada. Quando γ não é limitado inferiormente por uma constante, não é possível de se aplicar uma técnica similar, e, assim, na Seção 5.3.5, estudamos o comportamento de y nos intervalos de \mathcal{I}_0 usando a teoria do controle ótimo: procuramos por um sinal γ que leva à maior taxa de crescimento possível para y , e então, aplicando o Princípio do Máximo de Pontryagin, é possível caracterizar a solução y que corresponde à máxima taxa de crescimento e, finalmente, estimar esta quantidade. Basta então juntar as estimativas nos intervalos \mathcal{I}_0 e \mathcal{I}_+ e concluir o estudo de y , o que é feito na Seção 5.3.6.

Uma vez conhecidos o comportamento de y e sua taxa de convergência, basta voltar à mudança de variáveis para obter o resultado correspondente em x , e isto é feito na Seção 5.4. A estimativa obtida para x mostra que a sua taxa de convergência depende de k , e basta assim tomar k grande o suficiente para obter o resultado de convergência a taxa arbitrária desejado, concluindo assim a demonstração do Teorema 5.1.

5.2 Mudança de variáveis

Supomos doravante que a escolha de k será feita com $k \geq \frac{2d}{M}$. A fim de simplificar as notações, escrevemos $h = \sqrt{2kM - 4d}$. Consideramos o sistema em uma nova variável $y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}^T$ definida pelas relações

$$\begin{cases} y_1 = x_1 e^{\frac{k}{2} \int_0^t \sigma(s) ds - \frac{h}{2} t}, \\ y_2 = \dot{y}_1 = \left(x_2 + \left(\frac{k}{2} \sigma(t) - \frac{h}{2} \right) x_1 \right) e^{\frac{k}{2} \int_0^t \sigma(s) ds - \frac{h}{2} t}, \end{cases} \quad (5.5)$$

cujas escolhas será justificada no final desta seção. As variáveis x e y estão assim relacionadas por

$$y = e^{\frac{k}{2} \int_0^t \sigma(s) ds - \frac{h}{2} t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{k}{2} \sigma(t) - \frac{h}{2} & 1 \end{pmatrix} x, \quad x = e^{-\frac{k}{2} \int_0^t \sigma(s) ds + \frac{h}{2} t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{h}{2} - \frac{k}{2} \sigma(t) & 1 \end{pmatrix} y \quad (5.6)$$

e y_1 satisfaz a equação diferencial

$$\ddot{y}_1 + h\dot{y}_1 + k^2\gamma(t)y_1 = 0 \quad (5.7)$$

com

$$\gamma(t) = \beta(t) + \frac{M - \dot{\sigma}(t)}{2k}, \quad \beta(t) = \sigma(t) \left(1 - \frac{1}{4} \sigma(t) \right). \quad (5.8)$$

O sistema satisfeito por y é então

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2\gamma(t) & -h \end{pmatrix} y. \quad (5.9)$$

Como $\sigma(t) \in [0, 1]$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$, temos $\beta(t) \in [0, 3/4]$. Ademais, como σ é M -lipschitziana, β também é lipschitziana com a mesma constante de Lipschitz, pois

$$\begin{aligned} |\beta(t) - \beta(s)| &= \left| \sigma(t) - \sigma(s) - \frac{1}{4} (\sigma(t)^2 - \sigma(s)^2) \right| = |\sigma(t) - \sigma(s)| \left| 1 - \frac{\sigma(t) + \sigma(s)}{4} \right| \leq \\ &\leq |\sigma(t) - \sigma(s)| \leq M|t - s| \end{aligned}$$

para todos $t, s \in \mathbb{R}_+$. Como σ satisfaz a condição de excitação persistente (4.18), β satisfaz

$$\int_t^{t+T} \beta(s) ds \geq \frac{3}{4} \mu. \quad (5.10)$$

Como $|\dot{\sigma}(t)| \leq M$ para quase todo $t \in \mathbb{R}_+$, γ pode ser limitada por

$$0 \leq \gamma(t) \leq \frac{3}{4} + \frac{M}{k}$$

para quase todo $t \in \mathbb{R}_+$ e satisfaz também a condição de excitação persistente

$$\int_t^{t+T} \gamma(s) ds \geq \frac{3}{4} \mu. \quad (5.11)$$

Supomos, a partir de agora, que

$$k \geq K_1(M) = \max \left(4M, \frac{2|d|}{M} \right), \quad (5.12)$$

de forma que $h \leq 2\sqrt{kM}$ e, para quase todo $t \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leq \gamma(t) \leq 1.$$

Discutamos a mudança de variáveis (5.5). O termo $e^{\frac{k}{2} \int_0^t \sigma(s) ds}$ corresponde a uma mudança de variáveis clássica em equações escalares de segunda ordem (ver, por exemplo, [24]) que elimina o termo em \dot{x}_1 de (5.4), sendo substituído pelo novo termo $-\frac{1}{4}k^2\sigma(t)^2 - \frac{k}{2}\dot{\sigma}(t)$ multiplicando y_1 . Entretanto, se apenas esse termo fosse considerado na mudança de variáveis, a função γ resultante seria $\gamma(t) = \beta(t) + \frac{2d/k - \dot{\sigma}(t)}{2k}$, que pode ser negativa em alguns instantes t . Para aplicar as técnicas de controle ótimo da Seção 5.3.5, é importante manipular uma função positiva γ , e é por isto que o termo $e^{\frac{h}{2}t}$ é introduzido na mudança de variáveis.

Outra característica importante dessa mudança de variáveis é que a relação entre x e y , dada por (5.6), é tal que $x(t)$ se comporta como $e^{-\frac{k}{2} \int_0^t \sigma(s) ds + \frac{h}{2}t} y(t)$. Como $h \leq 2\sqrt{kM}$ e σ é a excitação persistente, este fator exponencial é limitado por $e^{-c_1 kt}$ para k grande, para uma certa constante $c_1 > 0$. Concentramos assim a informação de convergência na mudança de variáveis, e não é mais necessário demonstrar a convergência à origem do sistema nas variáveis y : basta mostrar que a taxa de crescimento exponencial de y é limitada por $e^{c_2 k^a t}$ para k grande, para certas constantes $c_2 > 0$ e $a < 1$.

Esta mudança de variáveis também justifica a escolha de K sob a forma (5.3). A equação (5.7) é uma equação diferencial escalar linear de segunda ordem e, no caso em que seus coeficientes são constantes, $h\dot{y}_1$ pode ser interpretado como um termo de amortecimento e $k^2\gamma y_1$ como um termo oscilatório. Um tal sistema gira em volta da origem se $4k^2\gamma \geq h^2 = 2kM - 4d$, que é o caso se k for suficientemente grande. No caso em que γ depende do tempo, a condição de excitação persistente (5.11) ainda garante um certo comportamento oscilatório para k grande o suficiente. Isto só é possível porque, para k grande o suficiente, o termo oscilatório em (5.7) é muito maior que o termo de amortecimento, o que é uma consequência da escolha de K sob a forma particular (5.3). É importante assim, na escolha (5.3), que k_1 seja muito maior que k_2 conforme k_2 aumenta; outros tipos de escolha de K

neste sentido seriam possíveis. É o comportamento oscilatório descrito acima que será explorado no que segue para se mostrar o Teorema 5.1.

5.3 Propriedades do sistema nas novas variáveis

5.3.1 Coordenadas polares

Desejamos agora estudar o sistema (5.9) e a equação diferencial correspondente (5.7). Para fazê-lo, escrevemos primeiramente este sistema em coordenadas polares no plano (y_1, \dot{y}_1) : definimos as variáveis $r \in \mathbb{R}_+$ e $\theta \in \mathbb{R}$ (ou $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, segundo o contexto) pelas relações

$$r^2 = y_1^2 + \dot{y}_1^2,$$

$$y_1 = r \cos \theta,$$

$$\dot{y}_1 = r \sin \theta,$$

que levam às equações

$$\dot{\theta} = -\sin^2 \theta - k^2 \gamma(t) \cos^2 \theta - h \sin \theta \cos \theta, \quad (5.13a)$$

$$\dot{r} = r \sin \theta \cos \theta (1 - k^2 \gamma(t)) - h r \sin^2 \theta. \quad (5.13b)$$

Como o sistema em questão é linear, a origem é uma solução de equilíbrio e, se considerarmos apenas as outras soluções do sistema, temos $r(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$, e podemos assim escrever (5.13b) como

$$\frac{d}{dt} \ln r = \sin \theta \cos \theta (1 - k^2 \gamma(t)) - h \sin^2 \theta. \quad (5.13c)$$

5.3.2 Rotações ao redor da origem

Consideremos a equação (5.13a). Se $\sin \theta \cos \theta \geq 0$, então $\dot{\theta} \leq 0$, sendo esta desigualdade estrita exceto quando $\sin \theta = 0$ e $\gamma(t) = 0$. Se $\sin \theta \cos \theta < 0$, ainda se espera que $\dot{\theta}$ seja “majoritariamente” negativa, no sentido em que, se tomarmos k grande o suficiente, fora de uma certa região do plano próxima da reta $\cos \theta = 0$, temos ainda $\dot{\theta} \leq 0$, e, como h é pequeno perto de k^2 para k suficientemente grande, espera-se que isto implique que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = -\infty$, mostrando assim que a solução y gira em sentido horário (na orientação usual dos eixos y_1 e y_2) ao redor da origem, mesmo se, em certos pontos, esta solução gire em sentido anti-horário por um curto período de tempo. Esta é a ideia por trás do resultado a seguir.

Lema 5.2. *Existe $K_2(T, \mu, M)$ tal que, para $k > K_2(T, \mu, M)$, a solução θ de (5.13a) satisfaz*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = -\infty.$$

Demonstração. Começamos fixando $t \in \mathbb{R}_+$ e o intervalo $I = [t, t + T]$. A equação (5.10) mostra que existe $t_* \in I$ tal que $\beta(t_*) \geq \frac{3\mu}{4T}$. Como β é M -lipschitziana, temos $\beta(s) \geq \frac{\mu}{2T}$ se $|s - t_*| \leq \frac{\mu}{4MT}$,

e, assim, como $\gamma(s) \geq \beta(s)$, temos $\gamma(s) \geq \frac{\mu}{2T}$ para $|s - t_*| \leq \frac{\mu}{4MT}$. Se tomarmos

$$k \geq \max \left\{ 1, \left(\frac{\mu}{2MT^2} \right)^4 \right\}, \quad (5.14)$$

temos $\frac{\mu}{4MTk^{1/4}} \leq \frac{\mu}{4MT}$ e $\frac{\mu}{4MTk^{1/4}} \leq T/2$, o que implica que ao menos um dentre os intervalos $\left[t_* - \frac{\mu}{4MTk^{1/4}}, t_* \right]$ e $\left[t_*, t_* + \frac{\mu}{4MTk^{1/4}} \right]$ está contido em I ; notemos J este intervalo e escrevamo-lo como $J = [s_0, s_1]$, de modo que $s_1 - s_0 = \frac{\mu}{4MTk^{1/4}}$ e $\gamma(s) \geq \frac{\mu}{2T}$ para $s \in J$.

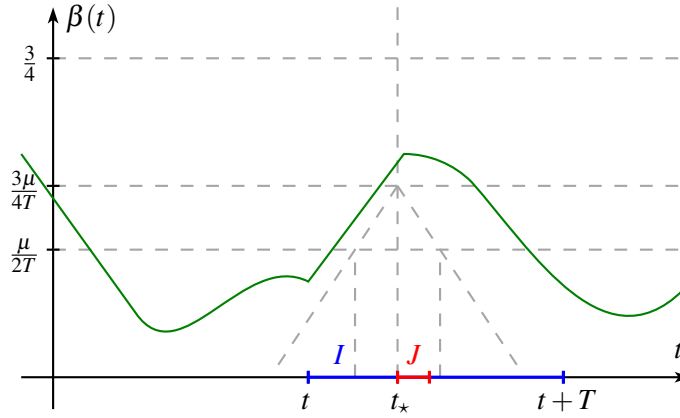


FIGURA 5.1: Uma função β , um intervalo I e o intervalo correspondente J . As propriedades de que precisamos são que $J \subset I$ e que $\gamma(s) \geq \frac{\mu}{2T}$ para $s \in J$. Neste caso, pode-se mostrar que a solução gira em sentido horário em volta da origem em J e que o número de voltas aumenta como $k^{3/4}$, enquanto que, no resto do intervalo I , o número de voltas ao redor da origem em sentido anti-horário é em $O(k^{1/2})$, o que implica que, para k grande o suficiente, $\theta(t+T) - \theta(t) \leq -2\pi$.

Se $s \in J$, podemos estimar $\dot{\theta}$ em (5.13a) por

$$\begin{aligned} -\dot{\theta}(s) &\geq \sin^2 \theta(s) + \frac{\mu k^2}{2T} \cos^2 \theta(s) + h \sin \theta(s) \cos \theta(s) = \\ &= \begin{pmatrix} \sin \theta(s) & \cos \theta(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} & \frac{\mu k^2}{2T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta(s) \\ \cos \theta(s) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Em particular, se

$$k > \frac{2MT}{\mu}, \quad (5.15)$$

então a matriz $\begin{pmatrix} 1 & \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} & \frac{\mu k^2}{2T} \end{pmatrix}$ é definida positiva e, portanto, $\dot{\theta}(s) < 0$ para todo $s \in J$. Logo, θ é estritamente decrescente em J e é uma bijeção entre J e a sua imagem $\theta(J)$. Pode-se assim escrever (5.13a) em J como

$$\frac{\dot{\theta}}{\sin^2 \theta + k^2 \gamma \cos^2 \theta + h \sin \theta \cos \theta} = -1 \quad (5.16)$$

e, integrando de s_0 a s_1 e usando a relação

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta + a \cos^2 \theta + b \sin \theta \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{4a - b^2}}, \quad a > 0, b^2 < 4a$$

(que pode ser calculada diretamente através da mudança de variáveis $\hat{t} = \tan \theta$), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{4MTk^{1/4}} = s_1 - s_0 &= - \int_{s_0}^{s_1} \frac{\dot{\theta}(s)}{\sin^2 \theta(s) + k^2 \gamma(s) \cos^2 \theta(s) + h \sin \theta(s) \cos \theta(s)} ds \leq \\ &\leq \int_{\theta(s_1)}^{\theta(s_0)} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta + \frac{k^2 \mu}{2T} \cos^2 \theta + h \sin \theta \cos \theta} \leq \\ &\leq \int_{\theta(s_1)}^{\theta(s_1) + \pi(N+1)} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta + \frac{k^2 \mu}{2T} \cos^2 \theta + h \sin \theta \cos \theta} = \\ &= \frac{2\pi(N+1)}{\sqrt{\frac{2k^2 \mu}{T} - h^2}} = \frac{2\pi(N+1)}{\sqrt{\frac{2\mu}{T} k^2 - 4Mk}}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

em que N é o número de voltas de ângulo π ao redor da origem feitas durante o intervalo J , isto é,

$$N = \left\lfloor \frac{\theta(s_0) - \theta(s_1)}{\pi} \right\rfloor;$$

lembramos que a notação $\lfloor x \rfloor$ é utilizada para denotar o maior inteiro menor ou igual a x . Assim,

$$\theta(s_0) - \theta(s_1) \geq \pi N \geq k^{3/4} \frac{\mu}{8MT} \sqrt{\frac{2\mu}{T} - \frac{4M}{k}} - \pi. \quad (5.18)$$

Por outro lado, pode-se estimar $\dot{\theta}$ em (5.13a) para todo $s \in I$ por

$$\dot{\theta}(s) \leq h,$$

de forma que

$$\theta(s_0) - \theta(t) \leq h(s_0 - t), \quad \theta(t + T) - \theta(s_1) \leq h(t + T - s_1). \quad (5.19)$$

Logo, por (5.18) e (5.19), obtemos

$$\theta(t + T) - \theta(t) \leq 2\sqrt{kMT} - k^{3/4} \frac{\mu}{8MT} \sqrt{\frac{2\mu}{T} - \frac{4M}{k}} + \pi.$$

A expressão à direita tende a $-\infty$ quando $k \rightarrow +\infty$ e os parâmetros T , μ e M estão fixados. Logo, existe $K_*(T, \mu, M)$ tal que, se

$$k \geq K_*(T, \mu, M), \quad (5.20)$$

então

$$2\sqrt{kMT} - k^{3/4} \frac{\mu}{8MT} \sqrt{\frac{2\mu}{T} - \frac{4M}{k}} + \pi \leq -2\pi$$

e, assim,

$$\theta(t+T) - \theta(t) \leq -2\pi.$$

Agrupamos as condições (5.14), (5.15) e (5.20) em uma única definindo

$$K_2(T, \mu, M) = \max \left\{ 1, \left(\frac{\mu}{2MT^2} \right)^4, \frac{2MT}{\mu}, K_*(T, \mu, M) \right\}$$

e exigindo que

$$k > K_2(T, \mu, M).$$

Sob esta condição, a solução realiza ao menos uma rotação completa no sentido horário ao final do intervalo $[t, t+T]$. Este resultado é válido para todo $t \in \mathbb{R}_+$ e, assim, uma recorrência imediata mostra que

$$\theta(t+nT) - \theta(t) \leq -2n\pi$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que, para todo $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\theta(t) = \theta(\{t/T\}T + \lfloor t/T \rfloor T) \leq \theta(\{t/T\}T) - 2\lfloor t/T \rfloor \pi \quad (5.21)$$

em que $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$. Como θ é limitado no intervalo $[0, T]$, a desigualdade (5.21) mostra que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = -\infty$, completando a demonstração. ■

5.3.3 Decomposição do tempo em intervalos \mathcal{J}_+ e \mathcal{J}_0

Usando o Lema 5.2, podemos decompor \mathbb{R}_+ em uma sequência de intervalos (dependente de σ) nos quais a solução gira de um ângulo π ao redor da origem. Mais precisamente, definimos a sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por recorrência como

$$\begin{aligned} t_0 &= \inf\{t \geq 0 \mid \frac{\theta(t)}{\pi} \in \mathbb{Z}\}, \\ t_n &= \inf\{t \geq t_{n-1} \mid \theta(t) = \theta(t_{n-1}) - \pi\}, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (5.22)$$

e a continuidade de θ e o Lema 5.2 mostram que esta sequência está bem definida. Definimos também a sequência de intervalos $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por $I_n = [t_{n-1}, t_n]$ para $n \geq 1$ e $I_0 = [0, t_0]$. Esta construção quer então dizer que esperamos que a solução passe pelo eixo y_1 pela primeira vez e, a partir deste momento, dividimos o tempo em intervalos nos quais a solução gira de um ângulo π ao redor da origem, voltando ao eixo y_1 .

Mostremos um primeiro resultado sobre o comportamento de θ nestes intervalos.

Lema 5.3. *Seja $n \geq 1$. Então, para todo $t \in I_n = [t_{n-1}, t_n]$, temos*

$$\theta(t_n) \leq \theta(t) \leq \theta(t_{n-1}). \quad (5.23)$$

Demonstração. A primeira desigualdade em (5.23) é uma consequência da definição de t_n : se existisse $t \in I_n$ com $\theta(t) < \theta(t_n)$, então, pela continuidade de θ , existiria $s \in (t_{n-1}, t)$ tal que

$\theta(s) = \theta(t_n) = \theta(t_{n-1}) - \pi$, e, assim, pela definição de t_n , teríamos $t_n \leq s < t < t_n$, o que é absurdo, e, portanto, temos $\theta(t) \geq \theta(t_n)$ para todo $t \in I_n$.

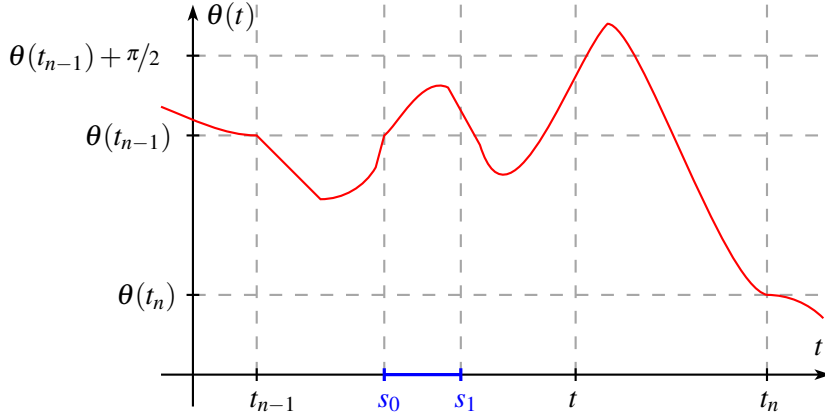


FIGURA 5.2: Argumento de contradição utilizado para mostrar a segunda desigualdade em (5.23). A existência de t tal que $\theta(t) > \theta(t_{n-1})$ permite construir um intervalo $[s_0, s_1]$ em que $\theta(s_1) > \theta(s_0)$ mas $\dot{\theta} \leq 0$, levando assim a um absurdo.

A segunda desigualdade de (5.23) pode ser igualmente mostrada por contradição. Supomos que exista $t \in I_n$ tal que $\theta(t) > \theta(t_{n-1})$. Então, pela continuidade de θ , existem $s_0, s_1 \in [t_{n-1}, t]$ tais que $\theta(s_0) = \theta(t_{n-1})$, $\theta(s_1) > \theta(t_{n-1})$ e $\theta(s) \in [\theta(t_{n-1}), \theta(t_{n-1}) + \pi/2]$ para todo $s \in [s_0, s_1]$. Mas $\theta(t_{n-1}) = 0 \pmod{\pi}$, de modo que $\sin \vartheta \cos \vartheta \geq 0$ para $\vartheta \in [\theta(t_{n-1}), \theta(t_{n-1}) + \pi/2]$, e, assim, por (5.13a), $\dot{\theta}(s) \leq 0$ para quase todo $s \in [s_0, s_1]$, o que contradiz o fato de termos $\theta(s_0) = \theta(t_{n-1})$ e $\theta(s_1) > \theta(t_{n-1})$ pois θ é absolutamente contínua. Assim, $\theta(t) \leq \theta(t_{n-1})$ para todo $t \in I_n$. ■

Separamos agora os intervalos da sequência $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ em duas classes, \mathcal{J}_+ e \mathcal{J}_0 , segundo o comportamento de β nesses intervalos. Definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_+ &= \{I_n \mid n \in \mathbb{N}^*, \exists t \in I_n \text{ tal que } \beta(t) \geq 2/\sqrt{k}\}, \\ \mathcal{J}_0 &= \{I_n \mid n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in I_n, \beta(t) < 2/\sqrt{k}\}. \end{aligned}$$

5.3.4 Estimativas em intervalos da família \mathcal{J}_+

Começamos estudando os intervalos da família \mathcal{J}_+ . Afirmamos que, para k grande o suficiente, temos $\gamma(t) \geq 1/\sqrt{k}$ para quase todo $t \in I$ e todo $I \in \mathcal{J}_+$.

Lema 5.4. *Existe $K_3(M)$ tal que, para $k > K_3(M)$ e para todo $I \in \mathcal{J}_+$, temos $\beta(t) \geq 1/\sqrt{k}$ para todo $t \in I$ e $\gamma(t) \geq 1/\sqrt{k}$ para quase todo $t \in I$.*

Demonstração. Fixamos um intervalo $I = [t_{n-1}, t_n] \in \mathcal{J}_+$ e notamos por $t_\star \in I$ um elemento de I tal que $\beta(t_\star) \geq 2/\sqrt{k}$. Como β é M -lipschitziana, para todo t tal que $|t - t_\star| \leq \frac{1}{M\sqrt{k}}$, temos $1/\sqrt{k} \leq \beta(t) \leq 3/\sqrt{k}$. Em particular, como $\gamma(t) \geq \beta(t)$ em \mathbb{R}_+ , temos $\gamma(t) \geq 1/\sqrt{k}$ para $|t - t_\star| \leq \frac{1}{M\sqrt{k}}$.

A ideia é mostrar que, para k grande o suficiente, devemos ter $I \subset \left[t_\star - \frac{1}{M\sqrt{k}}, t_\star + \frac{1}{M\sqrt{k}}\right]$, o que fazemos mostrando que, para k grande o suficiente, o número de rotações de ângulo π em volta da origem feito em cada um dos intervalos $\left[t_\star - \frac{1}{M\sqrt{k}}, t_\star\right]$ e $\left[t_\star, t_\star + \frac{1}{M\sqrt{k}}\right]$ é maior do que 1, que é o número de rotações de ângulo π em volta da origem feitas em I .

Tomamos $s_0, s_1 \in \left[t_\star - \frac{1}{M\sqrt{k}}, t_\star + \frac{1}{M\sqrt{k}} \right]$, $s_0 < s_1$. Para todo $s \in [s_0, s_1]$, temos

$$\begin{aligned} -\dot{\theta}(s) &\geq \sin^2 \theta(s) + k^{3/2} \cos^2 \theta(s) + h \sin \theta(s) \cos \theta(s) = \\ &= \begin{pmatrix} \sin \theta(s) & \cos \theta(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} & k^{3/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta(s) \\ \cos \theta(s) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e a matriz $\begin{pmatrix} 1 & \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} & k^{3/2} \end{pmatrix}$ é definida positiva se

$$k > M^2. \quad (5.24)$$

Tomamos k satisfazendo (5.24). Podemos assim escrever (5.13a) em $[s_0, s_1]$ como (5.16), e, integrando como em (5.17), obtemos

$$\begin{aligned} s_1 - s_0 &\leq \int_{\theta(s_1)}^{\theta(s_1) + \pi(N(s_0, s_1) + 1)} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta + k^{3/2} \cos^2 \theta + h \sin \theta \cos \theta} = \\ &= \frac{2\pi(N(s_0, s_1) + 1)}{\sqrt{4k^{3/2} - 4Mk}} = \frac{\pi(N(s_0, s_1) + 1)}{k^{3/4} \sqrt{1 - \frac{M}{k^{1/2}}}}, \end{aligned}$$

em que

$$N(s_0, s_1) = \left\lfloor \frac{\theta(s_0) - \theta(s_1)}{\pi} \right\rfloor$$

é o número de rotações de ângulo π em torno da origem feitas pela solução entre s_0 e s_1 . Assim,

$$N(s_0, s_1) \geq k^{3/4} \frac{(s_1 - s_0)}{\pi} \sqrt{1 - \frac{M}{k^{1/2}}} - 1,$$

e, em particular,

$$\begin{aligned} N\left(t_\star - \frac{1}{M\sqrt{k}}, t_\star\right) &\geq \frac{k^{1/4}}{M\pi} \sqrt{1 - \frac{M}{k^{1/2}}} - 1, \\ N\left(t_\star, t_\star + \frac{1}{M\sqrt{k}}\right) &\geq \frac{k^{1/4}}{M\pi} \sqrt{1 - \frac{M}{k^{1/2}}} - 1. \end{aligned}$$

Para M fixado, temos $\frac{k^{1/4}}{M\pi} \sqrt{1 - \frac{M}{k^{1/2}}} - 1 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$, e, portanto, existe $K_\star(M)$ tal que, para

$$k > K_\star(M), \quad (5.25)$$

temos

$$\frac{k^{1/4}}{M\pi} \sqrt{1 - \frac{M}{k^{1/2}}} - 1 > 1.$$

Logo,

$$N\left(t_\star - \frac{1}{M\sqrt{k}}, t_\star\right) > 1, \quad N\left(t_\star, t_\star + \frac{1}{M\sqrt{k}}\right) > 1,$$

e, assim,

$$\theta(t_*) - \theta\left(t_* + \frac{1}{M\sqrt{k}}\right) > \pi, \quad \theta\left(t_* - \frac{1}{M\sqrt{k}}\right) - \theta(t_*) > \pi. \quad (5.26)$$

Pela definição de I , temos $\theta(t_{n-1}) - \theta(t_n) = \pi$, e, pelo Lema 5.3, $\theta(t_n) \leq \theta(t) \leq \theta(t_{n-1})$ para todo $t \in I$; o fato de que $t_* \in I$ e (5.26) mostram que $t_* - \frac{1}{M\sqrt{k}} \notin I$, $t_* + \frac{1}{M\sqrt{k}} \notin I$, donde se conclui que

$$t_* - \frac{1}{M\sqrt{k}} < t_{n-1}, \quad t_* + \frac{1}{M\sqrt{k}} > t_n,$$

e, assim, $I \subset \left[t_* - \frac{1}{M\sqrt{k}}, t_* + \frac{1}{M\sqrt{k}}\right]$. Agrupamos (5.24) e (5.25) definindo

$$K_3(M) = \max \{M^2, K_*(M)\}$$

e exigindo que

$$k > K_3(M).$$

Sob esta hipótese, temos $I \subset \left[t_* - \frac{1}{M\sqrt{k}}, t_* + \frac{1}{M\sqrt{k}}\right]$ e, como $\beta(t) \geq 1/\sqrt{k}$ para todo t tal que $|t - t_*| \leq \frac{1}{M\sqrt{k}}$ e $\gamma(t) \geq 1/\sqrt{k}$ para quase todo t tal que $|t - t_*| \leq \frac{1}{M\sqrt{k}}$, obtemos o resultado desejado. ■

Utilizando este resultado, podemos estimar a taxa de divergência das soluções de (5.13c) nos intervalos pertencentes à família \mathcal{J}_+ .

Lema 5.5. *Existe $K_4(M)$ tal que, para todo $k > K_4(M)$ e todo $I = [t_{n-1}, t_n] \in \mathcal{J}_+$, a solução de (5.13c) satisfaz*

$$r(t_n) \leq r(t_{n-1})e^{4Mk^{1/2}(t_n - t_{n-1})}. \quad (5.27)$$

Demonstração. Tomamos

$$k > K_3(M) \quad (5.28)$$

de forma a poder aplicar o Lema 5.4 e obter que $\beta(t) \geq 1/\sqrt{k}$ para todo $t \in I$ e $\gamma(t) \geq 1/\sqrt{k}$ para quase todo $t \in I$. Temos assim, para $t \in I$,

$$\begin{aligned} -\dot{\theta}(t) &\geq \sin^2 \theta(t) + k^{3/2} \cos^2 \theta(t) + h \sin \theta(t) \cos \theta(t) = \\ &= \begin{pmatrix} \sin \theta(t) & \cos \theta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} & k^{3/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta(t) \\ \cos \theta(t) \end{pmatrix} > 0 \end{aligned}$$

pois, como $k > K_3(M)$, temos em particular (5.24) e, assim, a matriz acima é definida positiva. Logo, θ é uma função contínua estritamente decrescente em I , sendo portanto uma bijeção entre $I = [t_{n-1}, t_n]$ e a sua imagem $[\theta(t_n), \theta(t_{n-1})]$. Notamos por τ a inversa de θ , definida em $[\theta(t_n), \theta(t_{n-1})]$; τ satisfaz assim

$$\frac{d\tau}{d\vartheta}(\vartheta) = \frac{1}{\dot{\theta}(\tau(\vartheta))} = -\frac{1}{\sin^2 \vartheta + k^2 \gamma(\tau(\vartheta)) \cos^2 \vartheta + h \sin \vartheta \cos \vartheta}. \quad (5.29)$$

Escrevendo $\rho = r \circ \tau$ e usando (5.13c) e (5.29), obtemos

$$\frac{d}{d\vartheta} \ln \rho = -\frac{\sin \vartheta \cos \vartheta (1 - k^2 \gamma \circ \tau(\vartheta)) - h \sin^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta + k^2 \gamma \circ \tau(\vartheta) \cos^2 \vartheta + h \sin \vartheta \cos \vartheta}.$$

Podemos integrar esta expressão de $\theta(t_n)$ a $\theta(t_{n-1}) = \theta(t_n) + \pi$, obtendo

$$\ln \frac{r(t_n)}{r(t_{n-1})} = \int_{\theta(t_n)}^{\theta(t_n)+\pi} F(\vartheta, \gamma \circ \tau(\vartheta)) d\vartheta$$

com

$$F(\vartheta, \gamma) = \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta (1 - k^2 \gamma) - h \sin^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta + k^2 \gamma \cos^2 \vartheta + h \sin \vartheta \cos \vartheta}.$$

Afirmamos que, se $\gamma_0 \geq 1/\sqrt{k}$ é constante, então

$$\int_{\theta(t_n)}^{\theta(t_n)+\pi} F(\vartheta, \gamma_0) d\vartheta \leq 0; \quad (5.30)$$

de fato, basta notar que, como F é π -periódica na sua primeira variável ϑ , esta integral pode ser tomada em qualquer intervalo de comprimento π , donde $\int_{\theta(t_n)}^{\theta(t_n)+\pi} F(\vartheta, \gamma_0) d\vartheta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\vartheta, \gamma_0) d\vartheta$. Assim, fazendo a mudança de variáveis $\hat{t} = \tan \vartheta$, temos

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\vartheta, \gamma_0) d\vartheta &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - k^2 \gamma_0) \hat{t} - h \hat{t}^2}{(\hat{t}^2 + h \hat{t} + k^2 \gamma_0)(\hat{t}^2 + 1)} d\hat{t} \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - k^2 \gamma_0) \hat{t}}{(a_0 \hat{t}^2 + b_0)(\hat{t}^2 + 1)} d\hat{t} = 0, \end{aligned}$$

com $a_0 = \frac{k^2 \gamma_0 - h^2/4}{k^2 \gamma_0 + h^2/4}$ e $b_0 = \frac{k^2 \gamma_0}{2} - \frac{h^2}{8}$; a_0 e b_0 são ambos positivos, pois $\gamma_0 \geq 1/\sqrt{k}$ e k satisfaz (5.24), e são escolhidos de forma a que $\hat{t}^2 + h \hat{t} + k^2 \gamma_0 \geq a_0 \hat{t}^2 + b_0$ para todo $\hat{t} \in \mathbb{R}$.

Por (5.30), temos

$$\ln \frac{r(t_n)}{r(t_{n-1})} \leq \int_{\theta(t_n)}^{\theta(t_n)+\pi} [F(\vartheta, \gamma \circ \tau(\vartheta)) - F(\vartheta, \gamma_0)] d\vartheta. \quad (5.31)$$

Calculamos

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma}(\vartheta, \gamma) = -\frac{k^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{(\sin^2 \vartheta + k^2 \gamma \cos^2 \vartheta + h \sin \vartheta \cos \vartheta)^2},$$

e, portanto, para $t \in I$,

$$\left| \frac{\partial F}{\partial \gamma}(\vartheta, \gamma(t)) \right| \leq \frac{k^2 |\sin \vartheta| |\cos \vartheta|}{(\sin^2 \vartheta + k^{3/2} \cos^2 \vartheta + h \sin \vartheta \cos \vartheta)^2}.$$

Tomamos agora $\gamma_0 = \beta(t_{n-1})$ em (5.31), obtendo

$$\ln \frac{r(t_n)}{r(t_{n-1})} \leq \int_{\theta(t_n)}^{\theta(t_n)+\pi} \frac{k^2 |\sin \vartheta| |\cos \vartheta|}{(\sin^2 \vartheta + k^{3/2} \cos^2 \vartheta + h \sin \vartheta \cos \vartheta)^2} |\gamma \circ \tau(\vartheta) - \beta(t_{n-1})| d\vartheta. \quad (5.32)$$

Para quase todo $t \in I$, pode-se estimar

$$|\gamma(t) - \beta(t_{n-1})| \leq |\beta(t) - \beta(t_{n-1})| + \left| \frac{\dot{\sigma}(t)}{2k} \right| \leq M(t_n - t_{n-1}) + \frac{M}{2k}. \quad (5.33)$$

Tomamos k satisfazendo (5.12), o que quer dizer que $0 \leq \gamma(t) \leq 1$ para quase todo $t \in \mathbb{R}_+$, e,

portanto, integrando (5.16) de t_{n-1} a t_n , obtemos

$$\begin{aligned} t_n - t_{n-1} &= - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{\dot{\theta}(s)}{\sin^2 \theta(s) + k^2 \gamma(s) \cos^2 \theta(s) + h \sin \theta(s) \cos \theta(s)} ds \geq \\ &\geq \int_{\theta(t_n)}^{\theta(t_{n-1})+\pi} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta + k^2 \cos^2 \theta + h \sin \theta \cos \theta} = \frac{\pi}{k \sqrt{1 - \left(\frac{h}{2k}\right)^2}}, \end{aligned}$$

donde

$$\frac{1}{k} \leq \frac{t_n - t_{n-1}}{\pi}$$

e, assim, (5.33) se escreve

$$|\gamma(t) - \beta(t_{n-1})| \leq M \left(1 + \frac{1}{2\pi}\right) (t_n - t_{n-1}) < 2M(t_n - t_{n-1}).$$

Usamos esta estimativa em (5.32), o que leva a

$$\ln \frac{r(t_n)}{r(t_{n-1})} \leq 2k^2 M(t_n - t_{n-1}) \int_{\theta(t_n)}^{\theta(t_{n-1})+\pi} \frac{|\sin \vartheta| |\cos \vartheta|}{(\sin^2 \vartheta + k^{3/2} \cos^2 \vartheta + h \sin \vartheta \cos \vartheta)^2} d\vartheta. \quad (5.34)$$

Para calcular a integral em (5.34), usamos a π -periodicidade do integrando e que, para $a > 0$ e $b^2 < 4a$, temos

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{|\sin \vartheta| |\cos \vartheta|}{(\sin^2 \vartheta + a \cos^2 \vartheta + b \sin \vartheta \cos \vartheta)^2} d\vartheta = \frac{1}{A} + \frac{B}{A^{3/2}} \arctan(B/\sqrt{A}) \leq \frac{1}{A} \left(1 + \frac{\pi}{2} C\right)$$

com $A = a - b^2/4 > 0$, $B = b/2$ e $C = B/\sqrt{A} = \frac{b}{\sqrt{4a-b^2}}$. A aplicação disto a (5.34) fornece

$$\ln \frac{r(t_n)}{r(t_{n-1})} \leq \frac{2k^{1/2} M(t_n - t_{n-1})}{1 - \frac{M}{k^{1/2}}} \left(1 + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{kM}{2k^{3/2} - 2kM}}\right)$$

e, como $\frac{1}{1 - \frac{M}{k^{1/2}}} \left(1 + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{kM}{2k^{3/2} - 2kM}}\right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$, existe $K_*(M)$ tal que, se

$$k \geq K_*(M), \quad (5.35)$$

então $\frac{1}{1 - \frac{M}{k^{1/2}}} \left(1 + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{kM}{2k^{3/2} - 2kM}}\right) \leq 2$, e, portanto,

$$\ln \frac{r(t_n)}{r(t_{n-1})} \leq 4k^{1/2} M(t_n - t_{n-1}).$$

Agrupamos as hipóteses (5.12), (5.28) e (5.35) sobre k definindo

$$K_4(M) = \max \{K_1(M), K_3(M), K_*(M)\}$$

e exigindo que

$$k > K_4(M).$$

Sob estas hipóteses, obtemos, conforme desejado, que

$$r(t_n) \leq r(t_{n-1})e^{4Mk^{1/2}(t_n-t_{n-1})}.$$

■

5.3.5 Estimativas em intervalos da família \mathcal{J}_0

O Lema 5.5 permite estimar o crescimento da norma ao final de uma rotação de ângulo π em um intervalo da família \mathcal{J}_+ . Desejamos agora obter um resultado similar para intervalos da família \mathcal{J}_0 ; para fazê-lo, começamos caracterizando a duração desses intervalos e o comportamento de γ neles.

Lema 5.6. *Existe $K_5(T, \mu, M)$ tal que, se $k > K_5(T, \mu, M)$, então, para todo $I = [t_{n-1}, t_n] \in \mathcal{J}_0$, temos $\gamma(t) \leq 3/\sqrt{k}$ para quase todo $t \in I$ e*

$$\frac{\pi}{1+h+3k^{3/2}} \leq t_n - t_{n-1} < T.$$

Demonstração. Fixamos $I = [t_{n-1}, t_n] \in \mathcal{J}_0$. Se

$$k \geq M^2, \tag{5.36}$$

então $0 \leq \gamma(t) - \beta(t) \leq \frac{M}{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$, e, assim, $\gamma(t) \leq 3/\sqrt{k}$ em quase todo ponto de I . Além disto, se

$$k > \left(\frac{8T}{3\mu} \right)^2, \tag{5.37}$$

temos $\beta(t) < 2/\sqrt{k} < \frac{3\mu}{4T}$, e, assim, pela excitação persistente (5.10) de β , obtemos que $t_n - t_{n-1} < T$. Ademais, (5.13a) implica que $-\dot{\theta} \leq 1 + 3k^{3/2} + h$ em quase todo ponto de I , e então, integrando em I , obtemos $t_n - t_{n-1} \geq \frac{\pi}{1+h+3k^{3/2}}$. Assim, definindo

$$K_5(T, \mu, M) = \max \left\{ M^2, \left(\frac{8T}{3\mu} \right)^2 \right\},$$

as desigualdades (5.36) e (5.37) estão satisfeitas se

$$k > K_5(T, \mu, M),$$

fornecendo assim o resultado desejado. ■

Supomos a partir de agora que $k > K_5(T, \mu, M)$. Nosso objetivo é obter um resultado similar ao Lema 5.5 para o caso de um intervalo $I \in \mathcal{J}_0$. Começamos definindo a classe $\mathcal{D}(T, \mu, M, k)$ em que tomamos γ .

Definição 5.7. Definimos a classe $\mathfrak{D}(T, \mu, M, k)$ por

$$\mathfrak{D}(T, \mu, M, k) = \left\{ \sigma \left(1 - \frac{1}{4}\sigma \right) + \frac{M - \sigma}{2k}, \sigma \in \mathcal{D}(T, \mu, M) \right\}.$$

Fixamos $I = [t_{n-1}, t_n] \in \mathcal{I}_0$. Observamos que, se $\gamma \in \mathfrak{D}(T, \mu, M, k)$, então, para todo $t_0 \in \mathbb{R}_+$, a função $t \mapsto \gamma(t + t_0)$ está também em $\mathfrak{D}(T, \mu, M, k)$. A menos de uma translação no tempo, podemos então supor que $I = [0, \tau]$ com $\tau = t_n - t_{n-1} \in \left[\frac{\pi}{1+h+3k^{3/2}}, T \right)$. A solução $r(\tau)$ de (5.13c) no instante τ pode ser escrita como

$$r(\tau) = r(0)e^{\Lambda\tau}$$

para uma certa constante Λ . Sabemos, pela construção de I , que $r(0)$ está no eixo y_1 e portanto, como o sistema (5.9) é linear, conclui-se por homogeneidade que Λ não depende do valor particular de $r(0)$, dependendo apenas de τ e $r(\tau)$. Nosso objetivo é estimar Λ uniformemente com relação à classe dos sinais $\gamma \in \mathfrak{D}(T, \mu, M, k)$ e com relação aos intervalos $I \in \mathcal{I}_0$ para uma dada escolha de γ . Podemos assim estimar Λ pelo máximo valor de $\frac{1}{\tau} \ln \frac{\|y(\tau)\|}{\|y(0)\|}$ sobre todo $\tau \in \left[\frac{\pi}{1+h+3k^{3/2}}, T \right)$ e todo $\gamma \in \mathfrak{D}(T, \mu, M, k)$ com $\gamma(t) < 3/\sqrt{k}$, em que y é uma solução de (5.9) com $y(0)$ e $y(\tau)$ no eixo y_1 . Isto é, Λ é estimado pela solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \sup \frac{1}{\tau} \ln \frac{\|y(\tau)\|}{\|y(0)\|} \text{ com} \\ \tau \in \left[\frac{\pi}{1+h+3k^{3/2}}, T \right], \quad \gamma \in \mathfrak{D}(T, \mu, M, k), \quad \gamma(t) < 3/\sqrt{k} \text{ on } [0, \tau], \\ \dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2\gamma(t) & -h \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y(\tau) = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}, \\ y_1(0), \xi \in \mathbb{R}^*, \quad y_1(0)\xi < 0. \end{array} \right. \quad (5.38)$$

Podemos escolher $y_1(0) = -1$ sem perda de generalidade devido ao fato de a equação satisfeita por y ser linear. Também podemos ver que, ampliando a classe em que se toma γ e tomando $\gamma \in L^\infty([0, \tau], [0, 3/\sqrt{\gamma}])$, obtemos um problema cuja solução é maior que a de (5.38), e assim Λ pode também ser estimado pela solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \sup \frac{1}{\tau} \ln \|y(\tau)\| \text{ com} \\ \tau \in \left[\frac{\pi}{1+h+3k^{3/2}}, T \right], \quad I = [0, \tau], \quad \gamma \in L^\infty(I, [0, 1]), \\ \dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3k^{3/2}\gamma(t) & -h \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y(\tau) \in \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}, \xi \in \mathbb{R}_+ \right\}. \end{array} \right. \quad (5.39)$$

A discussão acima pode ser resumida no seguinte resultado.

Lema 5.8. *Seja $\Lambda(T, M, k)$ a solução do Problema (5.39) e seja $K_5(T, \mu, M)$ como no Lema 5.6. Se $k > K_5(T, \mu, M)$, então, para todo $\gamma \in \mathfrak{D}(T, \mu, M, k)$ e todo $I = [t_{n-1}, t_n] \in \mathcal{I}_0$, temos*

$$r(t_n) \leq r(t_{n-1})e^{\Lambda(T, M, k)(t_n - t_{n-1})}. \quad (5.40)$$

Demonstração. Fixemos $\gamma \in \mathcal{D}(T, \mu, M, k)$ e $I = [t_{n-1}, t_n] \in \mathcal{J}_0$. Tomamos $k > K_5(T, \mu, M)$ para aplicar o Lema 5.6. Definimos $\tau = t_n - t_{n-1}$, e, portanto, o Lema 5.6 mostra que $\tau \in \left[\frac{\pi}{1+h+3k^{3/2}}, T \right)$ e $\gamma(t) \leq 3/\sqrt{k}$ para quase todo $t \in I$.

Notamos $\bar{\gamma}(t) = \frac{\sqrt{k}}{3}\gamma(t+t_{n-1})$ para todo $t \in I$, e, assim, $\bar{\gamma} \in L^\infty(\bar{I}, [0, 1])$ com $\bar{I} = [0, \tau]$. Notamos por y uma solução de (5.9) com uma condição inicial não-nula e por z a função definida por $z(t) = -\frac{\text{sign}(y_1(t_{n-1}))}{\|y(t_{n-1})\|}y(t+t_{n-1})$. Vemos que z está bem definida, pois $\|y(t_{n-1})\| \neq 0$, e z satisfaz

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2\gamma(t+t_{n-1}) & -h \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3k^{3/2}\bar{\gamma}(t) & -h \end{pmatrix} z.$$

Pela definição de I , $y(t_{n-1})$ e $y(t_n)$ estão ambos no eixo y_1 , de lados opostos da origem, e, assim, $z(0)$ e $z(\tau)$ estão ambos no eixo z_1 de lados opostos da origem; pela definição de z , podemos assim escrever

$$z(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z(\tau) \in \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}, \xi \in \mathbb{R}_+^* \right\}.$$

Basta agora notar que, pela definição de $\mathbf{A}(T, M, k)$, temos

$$\frac{1}{\tau} \ln \|z(\tau)\| \leq \mathbf{A}(T, M, k),$$

e, assim,

$$\|z(\tau)\| \leq e^{\mathbf{A}(T, M, k)\tau}.$$

Pelas definições de z e τ , obtemos (5.40). ■

Podemos agora nos concentrar na resolução do problema (5.39). Começamos mostrando que o sup nesse problema é atingido.

Lema 5.9. *Seja $k > K_5(T, \mu, M)$ em que K_5 está definido como no Lema 5.6, e seja $\mathbf{A}(T, M, k)$ a solução do problema (5.39). Então existem $\tau_\star \in \left[\frac{\pi}{1+h+3k^{3/2}}, T \right]$ e $\gamma_\star \in L^\infty(I_\star, [0, 1])$, em que $I_\star = [0, \tau_\star]$, tais que, se y_\star é a solução de*

$$\dot{y}_\star = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3k^{3/2}\gamma_\star(t) & -h \end{pmatrix} y_\star, \quad y_\star(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

então

$$y_\star(\tau) \in \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}, \xi \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

e

$$\frac{1}{\tau_\star} \ln \|y_\star(\tau_\star)\| = \mathbf{A}(T, M, k).$$

Demonstração. Começamos tomando uma sequência $(\tau_n, \gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $\tau_n \in \left[\frac{\pi}{1+h+3k^{3/2}}, T \right]$, $I_n = [0, \tau_n]$ e $\gamma_n \in L^\infty(I_n, [0, 1])$, tal que, notando por y_n a solução de

$$\begin{cases} \dot{y}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3k^{3/2}\gamma_n(t) & -h \end{pmatrix} y_n, \\ y_n(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (5.41)$$

temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau_n} \ln \|y_n(\tau_n)\| = \Lambda(T, M, k);$$

uma tal sequência maximizante existe pela definição de sup. A menos de estender γ_n por 0 fora de I_n , podemos supor que $\gamma_n \in L^\infty(I, [0, 1])$ em que $I = [0, T]$ e assim, por compacidade fraco- \star deste espaço e pela compacidade de $\left[\frac{\pi}{1+h+3k^{3/2}}, T \right]$, podemos tomar uma subsequência de $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergindo fraco- \star para uma certa função $\gamma_\star \in L^\infty(I, [0, 1])$ e tal que a subsequência correspondente de $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $\tau_\star \in \left[\frac{\pi}{1+h+3k^{3/2}}, T \right]$; para simplificar a notação, escrevemos ainda $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para notar estas subsequências.

Observamos que γ_\star é igual a 0 em quase todo ponto fora de $I_\star = [0, \tau_\star]$ pois, para toda função $\varphi \in L^1([\tau_\star, T])$, temos

$$\int_{\tau_\star}^T \gamma_\star(t) \varphi(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\tau_\star}^T \gamma_n(t) \varphi(t) dt$$

e

$$\left| \int_{\tau_\star}^T \gamma_n(t) \varphi(t) dt \right| = \begin{cases} 0 & \text{se } \tau_n \leq \tau_\star, \\ \left| \int_{\tau_\star}^{\tau_n} \gamma_n(t) \varphi(t) dt \right| \leq \int_{\tau_\star}^{\tau_n} |\varphi(t)| dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 & \text{se } \tau_n > \tau_\star. \end{cases}$$

Assim, podemos considerar que $\gamma_\star \in L^\infty(I_\star, [0, 1])$. Notamos por y_\star a solução correspondente a γ_\star , isto é, a solução de

$$\begin{cases} \dot{y}_\star = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3k^{3/2}\gamma_\star(t) & -h \end{pmatrix} y_\star, \\ y_\star(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (5.42)$$

Definindo γ_n e γ_\star por 0 em $[0, T]$ fora dos seus respectivos intervalos de definição I_n e I_\star , podemos considerar as soluções y_n e y_\star de (5.41) e (5.42) como definidas em $[0, T]$ e, neste caso, a menos da extração de uma subsequência, temos $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y_\star$ uniformemente em $[0, T]$. De fato, notemos $e_n = y_n - y_\star$. Escrevemos

$$A_n(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3k^{3/2}\gamma_n(t) & -h \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3k^{3/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

A função e_n satisfaz

$$\begin{cases} \dot{e}_n(t) = A_n(t)e_n(t) + (\gamma_n(t) - \gamma_\star(t))By_\star(t), \\ e_n(0) = (0, 0)^T, \end{cases}$$

e, integrando esta equação, obtemos

$$e_n(t) = \int_0^t A_n(s)e_n(s)ds + h_n(t), \quad h_n(t) = \int_0^t (\gamma_n(s) - \gamma_*(s))By_*(s)ds. \quad (5.43)$$

Aplicamos então o Lema de Gronwall a $\|e_n(t)\|$, o que fornece

$$\|e_n(t)\| \leq \|h_n(t)\| + \int_0^t \|h_n(s)\| \|A_n(s)\| e^{\int_s^t \|A_n(s')\| ds'} ds. \quad (5.44)$$

Se t está fixado, a convergência fraco- \star de γ_n a γ_* mostra que $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t) = 0$ para todo $t \in [0, T]$ e, além disso, a sequência $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $[0, T]$, o que mostra, pelo Teorema da Convergência Dominada, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t \|h_n(s)\| \|A_n(s)\| e^{\int_s^t \|A_n(s')\| ds'} ds = 0$$

para todo $t \in [0, T]$, pois $(\|A_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ também é uniformemente limitada. Assim, $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n(t) = 0$ para todo $t \in [0, T]$. Como $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ também o é devido a (5.44), e (5.43) mostra que, para $t > t'$,

$$e_n(t) - e_n(t') = \int_{t'}^t A_n(s)e_n(s)ds + \int_{t'}^t (\gamma_n(s) - \gamma_*(s))By_*(s)ds,$$

o que, com a limitação uniforme de $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mostra que esta sequência é equicontínua. Logo, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, a menos da extração de uma subsequência, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente e, como esta sequência converge ponto a ponto para 0, seu limite uniforme é a função 0, o que mostra finalmente que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y_*$ uniformemente em $[0, T]$.

A convergência uniforme de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ permite mostrar a conclusão do lema. De fato, como $y_n(\tau_n) \in \left\{ \begin{pmatrix} \xi & 0 \end{pmatrix}^T, \xi \in \mathbb{R}_+ \right\}$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(\tau_n) = y_*(\tau_*)$, concluimos, pela convergência uniforme, que $y_*(\tau_*) \in \left\{ \begin{pmatrix} \xi & 0 \end{pmatrix}^T, \xi \in \mathbb{R}_+ \right\}$ uma vez que este conjunto é fechado. A convergência uniforme de y_n a y_* também mostra que

$$\frac{1}{\tau_*} \ln \|y_*(\tau_*)\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau_n} \ln \|y_n(\tau_n)\| = \Lambda(T, M, k),$$

o que completa a demonstração. ■

Como o sup no problema (5.39) é atingido, podemos usar o Princípio do Máximo de Pontryagin para caracterizar a trajetória y_* que maximiza (5.39). Usamos como referência o enunciado do Princípio do Máximo de Pontryagin dado no Teorema 7.3 de [10], que enunciamos aqui.

Teorema 5.10 (Princípio do Máximo de Pontryagin). *Considere o problema*

$$\max_{\gamma \in \mathcal{U}} \phi_0(\tau, y(\tau)) \quad (5.45a)$$

para o sistema descrito pela equações

$$\dot{y} = f(y(t), \gamma(t)), \quad y(0) = y_0, \quad \gamma(t) \in U \text{ em quase todo ponto}, \quad (5.45b)$$

em que o tempo terminal τ e o ponto terminal $y(\tau)$ estão sujeitos às restrições

$$\phi_i(\tau, y(\tau)) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.45c)$$

Supomos também que f é contínua em $\Omega \times U$, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ é aberto, que f é continuamente diferenciável com relação a y e que as funções ϕ_i , $i = 0, \dots, n$, são continuamente diferenciáveis. Sejam τ_* e $\gamma_* : [0, \tau_*] \rightarrow U$ maximizantes de (5.45a), com γ_* limitado, e seja y_* a trajetória correspondente, solução de (5.45b). Supomos que os vetores $\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t}, \frac{\partial \phi_i}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \phi_i}{\partial y_d} \right)$, $i = 1, \dots, n$, são linearmente independentes no ponto $(\tau_*, y_*(\tau_*))$. Então existe um vetor linha p não-trivial absolutamente contínuo tal que

$$\dot{p}(t) = -p(t) \cdot D_y f(y_*(t), \gamma_*(t)), \quad (5.46a)$$

$$p(t) \cdot f(y_*(t), \gamma_*(t)) = \max_{\omega \in U} \{p(t) \cdot f(y_*(t), \omega)\} \quad (5.46b)$$

para quase todo $t \in [0, \tau_*]$. Ademais, existem constantes $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ com $\lambda_0 \geq 0$ tais que

$$p(\tau_*) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \nabla \phi_i(\tau_*, y_*(\tau_*)) \neq 0, \quad (5.46c)$$

$$\max_{\omega \in U} \{p(\tau_*) \cdot f(y_*(\tau_*), \omega)\} = - \sum_{i=0}^n \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(\tau_*, y_*(\tau_*)) \quad (5.46d)$$

com $\nabla \phi_i = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t}, \dots, \frac{\partial \phi_i}{\partial y_d} \right)$. Finalmente, a função $t \mapsto p(t) \cdot f(y_*(t), \gamma_*(t))$ é constante em quase todo ponto.

O Teorema 5.10 pode ser aplicado ao problema (5.39). A função ϕ_0 do enunciado do teorema e a função f que define o sistema são

$$\phi_0(t, y) = \frac{1}{t} \ln \|y\|, \quad f(y, \gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3k^{3/2}\gamma & -h \end{pmatrix} y. \quad (5.47a)$$

Ainda nas notações do Teorema 5.10, temos

$$U = [0, 1], \quad \mathcal{U} = L^\infty([0, \tau], [0, 1]). \quad (5.47b)$$

A restrição no ponto final pode ser escrita como $\phi_1(\tau, y(\tau)) = 0$ com

$$\phi_1(t, y) = y_2, \quad (5.47c)$$

e, assim, $n = 1$. Observamos também que f , ϕ_0 e ϕ_1 satisfazem as hipóteses de regularidade enunciadas no teorema. Assim, dados τ_* e γ_* como no enunciado do Lema 5.9 e a solução correspondente y_* ,

as conclusões do Teorema 5.10 são válidas: existe um vetor p e constantes λ_0, λ_1 satisfazendo (5.46). Queremos agora obter, a partir destas conclusões, propriedades que permitirão caracterizar γ_* e y_* .

Lema 5.11. *Sejam τ_* , γ_* e y_* como no enunciado do Lema 5.9. Então, a menos de modificações em um conjunto de medida nula, γ_* é a valores em $\{0, 1\}$. Além disto, existem $s_1, s_2 \in (0, \tau_*)$ com $s_1 \leq s_2$ tais que $\gamma_*(t) = 1$ se $t \in [0, s_1) \cup (s_2, \tau_*]$ e $\gamma_*(t) = 0$ se $t \in (s_1, s_2)$. A solução y_* está inclusa no quadrante $Q_2 = \{(y_1, y_2) \mid y_1 \leq 0, y_2 \geq 0\}$ durante o intervalo $[0, s_1]$ e no quadrante $Q_1 = \{(y_1, y_2) \mid y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\}$ durante $[s_2, \tau_*]$.*

Demonstração. Em primeiro lugar, escrevamos explicitamente as conclusões do Teorema 5.10 no caso de (5.47). Notamos por p o vetor linha cuja existência é dada pelo Teorema 5.10; a equação (5.46a) satisfeita por p é

$$\dot{p} = -p \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3k^{3/2}\gamma_*(t) & -h \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = 3k^{3/2}\gamma_*(t)p_2(t), \\ \dot{p}_2(t) = hp_2(t) - p_1(t). \end{cases} \quad (5.48)$$

Temos

$$p \cdot f(y_*, \omega) = p_1 y_{2*} - 3k^{3/2} \omega p_2 y_{1*} - h p_2 y_{2*},$$

e, assim, a condição de maximização (5.46b) é

$$\gamma_*(t) p_2(t) y_{1*}(t) = \min_{\omega \in [0, 1]} \omega p_2(t) y_{1*}(t). \quad (5.49)$$

Podemos agora mostrar que γ_* é a valores em $\{0, 1\}$, a menos de um conjunto de medida nula. Definimos a função de chaveamento Φ por

$$\Phi(t) = p_2(t) y_{1*}(t)$$

e assim, por (5.49), γ_* pode ser escrita em função de Φ , a menos de modificações em um conjunto de medida nula, como

$$\gamma_*(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } \Phi(t) > 0, \\ 1 & \text{se } \Phi(t) < 0. \end{cases} \quad (5.50)$$

Notamos que, se $\Phi(t) \neq 0$ em quase todo ponto de $[0, \tau_*]$, então a função γ_* está definida em quase todo ponto por (5.50), e, em particular, γ_* é a valores em $\{0, 1\}$. Observamos também que Φ é absolutamente contínua e

$$\dot{\Phi}(t) = h p_2(t) y_{1*}(t) - p_1(t) y_{1*}(t) + p_2(t) y_{2*}(t);$$

logo, $\dot{\Phi}$ também é absolutamente contínua, o que mostra que Φ é de classe \mathcal{C}^1 .

Mostramos em seguida que os zeros de Φ são isolados. De fato, considere $t \in [0, \tau_*]$ tal que $\Phi(t) = 0$. Este zero é evidentemente isolado se $\dot{\Phi}(t) \neq 0$. Consideramos então o caso em que

$\dot{\Phi}(t) = 0$. Como p é não-trivial e o sistema satisfeito por p é linear, $p(t)$ nunca é o vetor nulo; como

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) & p_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_{1*}(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) & p_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_{1*}(t) \\ y_{2*}(t) + hy_{1*}(t) \end{pmatrix},$$

as condições $\Phi(t) = 0$ e $\dot{\Phi}(t) = 0$ mostram assim que $(0, y_{1*}(t))^T$ e $(-y_{1*}(t), y_{2*}(t) + hy_{1*}(t))^T$ são ambos ortogonais a $p(t)^T$; estes vetores são assim paralelos, o que quer dizer que $y_{1*}(t) = 0$. Logo, um zero de Φ e $\dot{\Phi}$ deve ser um zero de y_{1*} . Como y_* não se anula e $\dot{y}_{1*} = y_{2*}$, os zeros de y_{1*} são isolados. Logo, Φ admite um número finito de zeros em $[0, \tau_*]$ e $\gamma_*(t)$ é constante por partes e a valores em $\{0, 1\}$.

Para concluir a demonstração do lema, isto é, determinar a regra de chaveamento entre 0 e 1 de γ_* , adaptamos as técnicas desenvolvidas em [9] para a análise de problemas de controle bidimensionais otimizados em tempo. Começamos definindo as matrizes

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -h \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

de tal forma que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3k^{3/2}\gamma & -h \end{pmatrix} y = Fy - 3k^{3/2}\gamma Gy.$$

A função de chaveamento Φ e sua derivada $\dot{\Phi}$ podem ser escritas como

$$\Phi(t) = p(t)Gy_*(t), \quad \dot{\Phi}(t) = p(t)[G, F]y_*(t)$$

em que $[G, F] = GF - FG$ é o comutador das matrizes G e F . Definimos as funções

$$\Delta_A(y) = \det(Fy, Gy) = \begin{vmatrix} y_2 & 0 \\ -hy_2 & y_1 \end{vmatrix} = y_1 y_2,$$

$$\Delta_B(y) = \det(Gy, [G, F]y) = \begin{vmatrix} 0 & -y_1 \\ y_1 & hy_1 + y_2 \end{vmatrix} = y_1^2.$$

O conjunto $\Delta_A^{-1}(0)$, correspondente aos eixos y_1 e y_2 , é o conjunto dos pontos em que os campos de vetores definidos por F e G são paralelos e o conjunto $\Delta_B^{-1}(0)$, correspondente ao eixo y_2 , é o conjunto dos pontos em que os campos de vetores definidos por G e $[G, F]$ são paralelos. Em particular, fora de $\Delta_A^{-1}(0)$, Fy e Gy são vetores linearmente independentes e constituem assim uma base de \mathbb{R}^2 ; logo, existem escalares $f_S(y)$ e $g_S(y)$ tais que $[G, F]y = f_S(y)Fy + g_S(y)Gy$ para todo $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta_A^{-1}(0)$. Temos $\Delta_B(y) = \det(Gy, [G, F]y) = f_S(y)\det(Gy, Fy) = -f_S(y)\Delta_A(y)$, o que mostra que

$$f_S(y) = -\frac{\Delta_B(y)}{\Delta_A(y)} = -\frac{y_1}{y_2}.$$

Desejamos agora caracterizar os chaveamentos de γ_* quando a trajetória está fora de $\Delta_A^{-1}(0) \cup$

$\Delta_B^{-1}(0)$, isto é, quando a trajetória não está em nenhum dos eixos. Tomamos um intervalo de tempo aberto J durante o qual y_* está fora dos eixos. Em particular, $f_S(y_*(t))$ e $g_S(y_*(t))$ estão definidos para todo $t \in J$. Se γ_* chaveia em $t_* \in J$, a equação (5.50) e a continuidade de Φ mostram que $\Phi(t_*) = 0$. Temos assim $p(t_*)Gy_*(t_*) = \Phi(t_*) = 0$ e, portanto,

$$\dot{\Phi}(t_*) = p(t_*)[G, F]y_*(t_*) = f_S(y_*(t_*))p(t_*)Fy_*(t_*). \quad (5.51)$$

O Teorema 5.10 mostra que $t \mapsto p(t) \cdot f(y_*(t), \gamma_*(t))$ é constante em quase todo ponto, isto é,

$$t \mapsto p(t)Fy_*(t) - 3k^{3/2}\gamma_*(t)p(t)Gy_*(t) \quad (5.52)$$

é constante em quase todo ponto; notemos C esta constante. As funções $t \mapsto p(t)Fy_*(t)$ e $t \mapsto p(t)Gy_*(t)$ são absolutamente contínuas, o que quer dizer que os únicos instantes em que (5.52) pode não ser igual a C é quando γ_* é descontínua, isto é, nos instantes de chaveamento. Em particular, tomando o limite quando t tende a um instante de chaveamento pelos pontos em que γ_* é zero, obtemos que $p(t)Fy_*(t) = C$ no instante de chaveamento, e, como $p(t)Gy_*(t) = \Phi(t) = 0$ neste instante, (5.52) é na verdade constante em todo t . Em particular, as equações (5.46b) e (5.46d) mostram que C vale

$$C = -\lambda_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial t}(\tau_*, y_*(\tau_*)) = \frac{\lambda_0}{\tau_*^2} \ln \|y_*(\tau_*)\|$$

e, assim, $C > 0$. Logo, $p(t_*)Fy_*(t_*) \geq 0$; mas $p(t_*)Gy_*(t_*) = 0$, $Fy_*(t_*)$ e $Gy_*(t_*)$ são linearmente independentes e $p(t_*) \neq 0$, o que mostra que $p(t_*)Fy_*(t_*) > 0$, e, assim, por (5.51), $\dot{\Phi}(t_*)$ e $f_S(y_*(t_*))$ possuem o mesmo sinal. A função $f_S(y_*(t))$ é diferente de 0 para todo $t \in J$, e, portanto, seu sinal é constante neste intervalo. Se $f_S(y_*(t)) > 0$, então $\dot{\Phi}(t) > 0$ para todo instante de chaveamento $t \in J$ de γ_* ; em particular, isto quer dizer que γ_* pode chavear apenas uma vez em J e que, se o chaveamento ocorrer, é necessariamente, por (5.50), de 1 a 0. Similarmente, se $f_S(y_*(t)) < 0$, então γ_* chaveia no máximo uma vez em J , e este chaveamento só pode ser de 0 a 1.

Podemos assim obter as propriedades desejadas de γ_* e y_* . Partindo de $y_*(0) = (-1, 0)^T$, podemos ficar parados neste ponto se $\gamma_*(t) = 0$, o que não maximiza ϕ_0 , ou sair deste ponto em direção ao interior de Q_2 se $\gamma_*(0) = 1$; é portanto a segunda alternativa que ocorre, e $\gamma_*(t) = 1$ em uma vizinhança à direita de 0. A solução y_* deve sair de Q_2 , uma vez que $y_*(\tau_*)$ está na parte positiva do eixo y_1 e este conjunto não pode ser alcançado em tempo finito sem sair de Q_2 , e as expressões dos campos de vetores nas fronteiras de Q_2 mostram que y_* sai pelo eixo y_2 e não pode voltar para o interior de Q_2 ; ademais, y_* não pode ficar parada sobre o eixo, e, portanto, existe um único s_* tal que $y_*(s_*)$ está no eixo y_2 .

Para $t \in (0, s_*)$, a solução está no interior de Q_2 , em que $f_S(y) > 0$, e podemos assim chavear no máximo uma vez de 1 a 0; notamos s_1 o instante em que este chaveamento ocorre, com a convenção que $s_1 = s_*$ se o chaveamento não ocorrer. A partir de s_* , a solução vai ao interior de Q_1 , até τ_* , instante em que atinge o eixo y_1 , e, portanto, no intervalo (s_*, τ_*) , y_* está no interior de Q_1 , em que $f_S(y) < 0$, e podemos portanto chavear no máximo uma vez de 0 a 1. Observamos

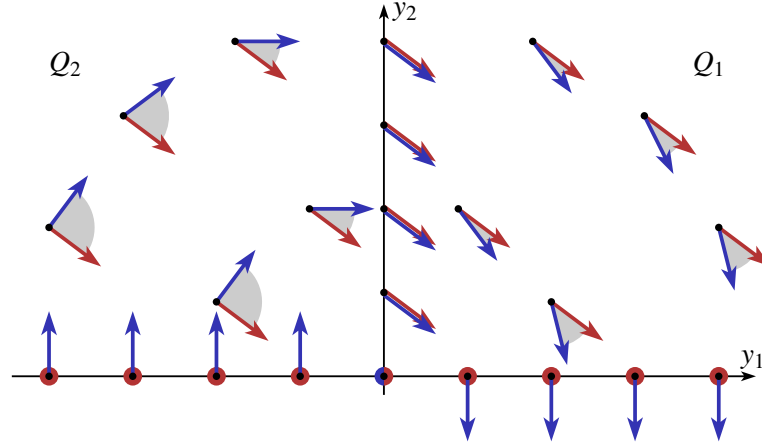


FIGURA 5.3: Campo de vetores f para $\gamma = 1$ (em azul) e $\gamma = 0$ (em vermelho). Todos os vetores representados estão normalizados. As conclusões do Princípio do Máximo de Pontryagin implicam que γ_* pode chavear no máximo uma vez no interior de cada quadrante Q_1 e Q_2 . Ademais, este chaveamento possível é de 1 a 0 em Q_2 e de 0 a 1 em Q_1 , pois $f_S(y) < 0$ no interior de Q_1 e $f_S(y) > 0$ no interior de Q_2 .

que, se a solução entrar em Q_1 com $\gamma_*(t) = 1$, então nenhum chaveamento é possível e teremos $\gamma_*(t) = 1$ até τ_* ; neste caso, escrevemos $s_2 = \tau_*$. Se, por outro lado, a solução entrar em Q_1 com $\gamma_*(t) = 0$, o chaveamento em um instante $s_2 \in (s_*, \tau_*)$ é obrigatório, pois, caso isto não ocorra, não é possível de se atingir o eixo y_1 em tempo finito.

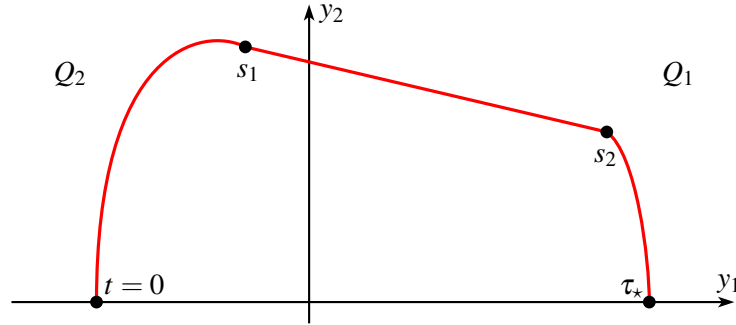


FIGURA 5.4: Representação da solução y_* . Como enunciado no Lema 5.11, y_* é uma solução de (5.42) com $\gamma_*(t) = 1$ em $[0, s_1]$, $\gamma_*(t) = 0$ em (s_1, s_2) e $\gamma_*(t) = 1$ em $(s_2, \tau_*]$. A solução $y_*(t)$ está em Q_2 para $t \in [0, s_1]$ e em Q_1 para $t \in [s_2, \tau_*]$.

Assim, por construção de s_1 e s_2 , estes valores satisfazem as propriedades enunciadas no lema. ■

Graças à caracterização de γ_* e y_* pelo Lema 5.11, o problema (5.39) pode ser resolvido mais facilmente. De fato, em vez de maximizar a função ϕ_0 de (5.47a) sobre todo o espaço de τ_* e γ_* possíveis, podemos ver que γ_* está completamente caracterizado pelos instantes s_1 e s_2 , e portanto devemos maximizar ϕ_0 sobre todo τ_* , s_1 e s_2 com a restrição $y_*(\tau_*) \in \left\{ \begin{pmatrix} \xi & 0 \end{pmatrix}^T, \xi \in \mathbb{R}_+ \right\}$, e, assim, o problema de calcular $\Lambda(T, M, k)$ se reduz a um problema de maximização em dimensão 2.

Lema 5.12. *Seja $K_5(T, \mu, M)$ como no Lema 5.6. Existe $K_6(M)$ tal que, se $k > K_5(T, \mu, M)$ e $k >$*

$K_6(M)$, então

$$\mathbf{\Lambda}(T, M, k) \leq \sqrt{3}k^{3/4}. \quad (5.53)$$

Demonstração. Supomos $k > K_5(T, \mu, T)$ e tomamos τ_* , γ_* e y_* como no Lema 5.9. Temos então

$$\mathbf{\Lambda}(T, M, k) = \frac{1}{\tau_*} \ln \|y_*(\tau_*)\|.$$

Utilizamos a caracterização de γ_* e y_* dadas no Lema 5.11 para estimar esta quantidade. Sejam s_1 e s_2 como no Lema 5.11. Então, no intervalo $[0, s_1]$, temos $\gamma_*(t) = 1$ e, assim, y_* satisfaz

$$\dot{y}_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3k^{3/2} & -h \end{pmatrix} y_*, \quad y_*(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.54)$$

Tomamos

$$k > \frac{M^2}{9}, \quad (5.55)$$

de modo que $3k^{3/2} > h^2/4$, e podemos assim definir a quantidade positiva $\omega = \sqrt{3k^{3/2} - h^2/4}$. Um cálculo direto mostra que a solução de (5.54) é

$$y_{1*}(t) = -e^{-\frac{h}{2}t} \left(\cos \omega t + \frac{h}{2\omega} \sin \omega t \right), \quad (5.56a)$$

$$y_{2*}(t) = \left(\omega + \frac{h^2}{4\omega} \right) e^{-\frac{h}{2}t} \sin \omega t. \quad (5.56b)$$

No intervalo $[s_1, s_2]$, temos $\gamma_*(t) = 0$ e, assim, y_* satisfaz

$$\dot{y}_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -h \end{pmatrix} y_*,$$

o que leva à solução

$$y_{1*}(t) = \frac{1}{h} \left(1 - e^{-h(t-s_1)} \right) y_{2*}(s_2) + y_{1*}(s_1), \quad (5.57a)$$

$$y_{2*}(t) = e^{-h(t-s_1)} y_{2*}(s_1). \quad (5.57b)$$

Finalmente, no intervalo $[s_2, \tau_*]$, temos $\gamma_*(t) = 1$ e, assim, a equação diferencial satisfeita por y_* é a mesma que em (5.54), mas consideramos agora a condição

$$y_*(\tau_*) = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}$$

com $\xi > 0$. Isto leva à solução

$$y_{1*}(t) = \xi e^{-\frac{h}{2}(t-\tau_*)} \left(\cos \omega(t-\tau_*) + \frac{h}{2\omega} \sin \omega(t-\tau_*) \right), \quad (5.58a)$$

$$y_{2*}(t) = -\xi \left(\omega + \frac{h^2}{4\omega} \right) e^{-\frac{h}{2}t} \sin \omega(t-\tau_*). \quad (5.58b)$$

Temos

$$\Lambda(T, M, k) = \frac{1}{\tau_*} \ln \xi. \quad (5.59)$$

Para simplificar a notação, escrevemos $\varsigma = s_2 - s_1$. Desejamos estimar (5.59) em função de s_1 e ς e, para fazê-lo, usamos as igualdades obtidas ao se impor que as soluções dadas em (5.57) e (5.58) coincidam no ponto s_2 . Estas igualdades fornecem

$$\xi e^{\frac{h}{2}(\tau_*-s_2)} \sin \omega(\tau_* - s_2) = \frac{e^{-h\varsigma}}{\omega + \frac{h^2}{4\omega}} y_{2*}(s_1), \quad (5.60a)$$

$$\xi e^{\frac{h}{2}(\tau_*-s_2)} \cos \omega(\tau_* - s_2) = y_{1*}(s_1) + y_{2*}(s_1) \left[\frac{1}{h} (1 - e^{-h\varsigma}) + \frac{he^{-h\varsigma}}{2\omega^2 + h^2/4} \right], \quad (5.60b)$$

e podemos assim escrever ξ em função de s_1 , ς e τ_* , e, substituindo em (5.59), obtemos

$$\Lambda(T, M, k) = \frac{-h(\tau_*-s_2) + \ln \left[\left(y_{1*}(s_1) + y_{2*}(s_1) \left[\frac{1}{h} (1 - e^{-h\varsigma}) + \frac{he^{-h\varsigma}}{2\omega^2 + h^2/4} \right] \right)^2 + \left(\frac{e^{-h\varsigma} y_{2*}(s_1)}{\omega + \frac{h^2}{4\omega}} \right)^2 \right]}{2[s_1 + \varsigma + (\tau_* - s_2)]}. \quad (5.61)$$

Para limitar esta expressão, usamos primeiramente que $-h(\tau_* - s_2) \leq 0$ e $\tau - s_2 \geq 0$. Pela expressão (5.56b) de y_{2*} em $[0, s_1]$, obtemos

$$\frac{e^{-h\varsigma} y_{2*}(s_1)}{\omega + \frac{h^2}{4\omega}} \leq \sin \omega s_1;$$

lembramos que $y_{2*}(t) \geq 0$, o que mostra em particular por (5.56b) que $\sin \omega s_1 \geq 0$, justificando essa estimativa. Temos também que $y_{1*}(s_2) \geq 0$ e $y_{2*}(s_2) \geq 0$, e, assim, (5.58) implica que $\sin \omega(\tau_* - s_2) \geq 0$ e $\cos \omega(\tau_* - s_2) \geq 0$. Logo, (5.60b) mostra que

$$y_{1*}(s_1) + y_{2*}(s_1) \left[\frac{1}{h} (1 - e^{-h\varsigma}) + \frac{he^{-h\varsigma}}{2\omega^2 + h^2/4} \right] \geq 0;$$

podemos então estimar esta expressão em (5.61) usando que $y_{1*}(s_1) \leq 0$, que é uma conclusão do Lema 5.11. Temos também que $\frac{1}{h}(1 - e^{-h\varsigma}) \leq \varsigma$ e, por (5.56b), obtemos

$$y_{2*}(s_1) \frac{he^{-h\varsigma}}{2\omega^2 + h^2/4} \leq \frac{h}{2\omega} \sin \omega s_1.$$

Podemos estimar $y_{2*}(s_1)$ por $\left(\omega + \frac{h^2}{4\omega}\right) \sin \omega s_1$ e, combinando estas estimativas, obtemos

$$\Lambda(T, M, k) \leq \frac{\ln(\sin^2 \omega s_1) + \ln \left[1 + \left(\zeta \left(\omega + \frac{h^2}{4\omega} \right) + \frac{K}{2\omega} \right)^2 \right]}{2(s_1 + \zeta)}.$$

Por (5.55), temos que $\frac{h}{2\omega} \leq 1$ e $\omega + \frac{h^2}{4\omega} \leq 2\omega$, o que leva finalmente a

$$\Lambda(T, M, k) \leq \frac{\ln(\sin^2 \omega s_1) + \ln \left[1 + (2\omega\zeta + 1)^2 \right]}{2(s_1 + \zeta)}.$$

Definimos $s' = \omega s_1$, $\zeta' = \omega\zeta$, e, assim, temos

$$\Lambda(T, M, k) \leq \omega \frac{\ln(\sin^2 s') + \ln \left[1 + (2\zeta' + 1)^2 \right]}{2(s' + \zeta')}.$$

Um cálculo direto mostra que a função

$$(s', \zeta') \mapsto \frac{\ln(\sin^2 s') + \ln \left[1 + (2\zeta' + 1)^2 \right]}{2(s' + \zeta')}$$

é limitada superiormente em $(\mathbb{R}_+^*)^2$ por 1, e, limitando ω por $\sqrt{3}k^{3/4}$, obtemos a estimativa desejada (5.53) sob as hipóteses $k > K_5(T, \mu, M)$ e $k > K_6(M)$ com $K_6(M) = M^2/9$. ■

Combinando este resultado com o Lema 5.8, obtemos a estimativa desejada da taxa de crescimento de y .

Corolário 5.13. *Sejam $K_5(T, \mu, M)$ como no Lema 5.6 e $K_6(M)$ como no Lema 5.12. Se*

$$k > \max(K_5(T, \mu, M), K_6(M)),$$

então, para todo $\gamma \in \mathcal{D}(T, \mu, M, k)$ e todo $I = [t_{n-1}, t_n] \in \mathcal{I}_0$, a solução r de (5.13b) satisfaz

$$r(t_n) \leq r(t_{n-1})e^{\sqrt{3}k^{3/4}(t_n - t_{n-1})}.$$

5.3.6 Estimativa de y

Agora que o crescimento de y em intervalos das classes \mathcal{J}_+ e \mathcal{J}_0 foi estimado, basta agrupar estes resultados a fim de se obter uma estimativa do crescimento de y em todo intervalo $[0, t]$.

Lema 5.14. *Existe $K_7(T, \mu, M)$ tal que, para $k > K_7(T, \mu, M)$, existe uma constante C dependendo apenas de T , M e k tal que, para todo sinal $\sigma \in \mathcal{D}(T, \mu, M)$, todo $t \in \mathbb{R}_+$, e toda solução y de (5.9), temos*

$$\|y(t)\| \leq C \|y(0)\| e^{2k^{3/4}t}. \quad (5.62)$$

Demonstração. Supomos que $k > K_i$ para $i = 1, \dots, 6$ a fim de poder aplicar todos os resultados anteriores. Fixemos $\sigma \in \mathcal{D}(T, \mu, M)$ e $t \in \mathbb{R}_+$.

Como a sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida em (5.22) tende monotonicamente a $+\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $t \in [t_{N-1}, t_N)$ (com a convenção $t_{-1} = 0$). Podemos usar o Lema 5.5 e o Corolário 5.13 para estimar o crescimento de y em cada intervalo I_n , $n = 1, \dots, N-1$, mas estas estimativas não se aplicam a $I_0 = [0, t_0]$ e $[t_{N-1}, t]$. O comprimento destes dois intervalos é, entretanto, limitado por T , o que é uma consequência da demonstração do Lema 5.2: mostramos que $\theta(t+T) - \theta(t) \leq -2\pi$, e assim, em particular, o fato de ter $\theta(T) - \theta(0) \leq -2\pi$ e a definição de t_0 mostram que $t_0 \in [0, T)$; para o intervalo $[t_{N-1}, t]$, é o fato de que $\theta(t_{N-1}+T) - \theta(t_{N-1}) \leq -2\pi$ e a definição de N e t_N que mostram que $t_{N-1} \leq t < t_N < t_{N-1} + T$. Podemos assim utilizar uma estimativa mais grosseira do crescimento de y em $[0, t_0]$ e $[t_{N-1}, t]$: por (5.13c), temos $\frac{d}{dt} \ln r \leq k^2 + h + 1$, e, assim,

$$\begin{aligned} r(t_0) &\leq r(0)e^{T(k^2+h+1)}, \\ r(t) &\leq r(t_{N-1})e^{T(k^2+h+1)}. \end{aligned}$$

Combinamos então estes resultados com (5.27) e (5.53), o que leva a

$$\begin{aligned} r(t) &\leq e^{2T(k^2+h+1)} r(0) \left(\prod_{\substack{n=1 \\ I_n \in \mathcal{J}_+}}^{N-1} e^{4Mk^{1/2}(t_n-t_{n-1})} \right) \left(\prod_{\substack{n=1 \\ I_n \in \mathcal{J}_0}}^{N-1} e^{\sqrt{3}k^{3/4}(t_n-t_{n-1})} \right) \leq \\ &\leq Cr(0)e^{\sqrt{3}k^{3/4}t + 4Mk^{1/2}t} \end{aligned}$$

com $C = e^{2T(k^2+h+1)}$, que depende apenas de T , k e M (por h). Basta tomar k grande o suficiente, e mais precisamente $k \geq \left(\frac{4M}{2-\sqrt{3}}\right)^4$, para obter (5.62). Tomamos assim $K_7(T, \mu, M)$ como o máximo entre K_i , $i = 1, \dots, 6$, e $\left(\frac{4M}{2-\sqrt{3}}\right)^4$, concluindo assim a demonstração. ■

5.4 Demonstração do Teorema 5.1

Uma vez estudada em detalhes a taxa de crescimento de y , podemos mostrar o Teorema 5.1 combinando (5.62) e a relação (5.6) entre x e y .

Demonstração do Teorema 5.1. Seja λ uma constante real. Tomamos $k > K_7(T, \mu, M)$ e consideramos o ganho de realimentação $K = \begin{pmatrix} k^2 & k \end{pmatrix}$. Por (5.6), temos que, para todo $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\|x(t)\| \leq e^{-\frac{k}{2} \int_0^t \sigma(s) ds + \frac{h}{2} t} \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{k}{2} \right) \|y(t)\|$$

e

$$\|y(t)\| \leq e^{\frac{k}{2} \int_0^t \sigma(s) ds - \frac{h}{2} t} \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{k}{2} \right) \|x(t)\|,$$

e assim, em particular,

$$\|y(0)\| \leq \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{k}{2} \right) \|x(0)\|.$$

Logo, combinando estas desigualdades com (5.62), obtemos

$$\|x(t)\| \leq C' \|x(0)\| e^{-\frac{k}{2} \int_0^t \sigma(s) ds + \frac{h}{2}t + 2k^{3/4}t}$$

em que C' é uma constante que depende apenas de k , M e T . Usamos que

$$\int_0^t \sigma(s) ds \geq \int_0^{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor T} \sigma(s) ds \geq \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor \mu \geq \frac{\mu}{T}t - \mu$$

para obter

$$\|x(t)\| \leq \bar{C} \|x(0)\| e^{(-\frac{k}{2} \frac{\mu}{T} + \frac{h}{2} + 2k^{3/4})t}$$

para uma nova constante \bar{C} , que depende agora de k , M , T e μ . Como, para T , μ e M fixados, temos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(-\frac{k}{2} \frac{\mu}{T} + \frac{h}{2} + 2k^{3/4} \right) = -\infty,$$

existe $K(T, \mu, M, \lambda)$ tal que, para $k > K(T, \mu, M, \lambda)$, temos $-\frac{k}{2} \frac{\mu}{T} + \frac{h}{2} + 2k^{3/4} \leq -\lambda$, e, assim,

$$\|x(t)\| \leq \bar{C} \|x(0)\| e^{-\lambda t}.$$

Isto conclui a demonstração, pois, para um tal k , temos

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|x(t)\|}{t} \leq -\lambda.$$

■

Capítulo 6

Conclusões

O estudo realizado neste documento, apesar de não ter coberto todo o domínio de sistemas chaveados devido à amplitude deste, permitiu construir um panorama da questão de análise de estabilidade e estabilização de sistemas chaveados, mostrando os principais resultados de estabilidade conhecidos, os principais métodos e técnicas utilizados no domínio e as principais limitações dos resultados atuais, que levam aos problemas ainda em aberto no domínio e às principais linhas de pesquisa modernas adotadas na análise de sistemas chaveados.

No Capítulo 1, objetivou-se introduzir a noção de sistemas chaveados a partir de exemplos de situações práticas em que o seu uso é necessário. Os primeiros exemplos matemáticos tratados objetivaram mostrar que, apesar de ter uma descrição matemática simples, os sistemas chaveados podem apresentar um comportamento complicado, em que o comportamento do sistema global pode ser bem diferente do comportamento isolado de cada subsistema constituinte devido ao chaveamento. Em particular, os Exemplos 1.1 e 1.2 mostraram que se pode desestabilizar um par de sistemas estáveis ou estabilizar um par de sistemas instáveis através do chaveamento.

Para poder estudar estes sistemas de um ponto de vista matemático, o Capítulo 2 definiu precisamente as noções utilizadas ao longo deste documento. A definição formal de sistemas chaveados foi amplamente comentada; embora ela apresente possíveis generalizações, a definição dada ainda é suficientemente geral e permite tratar os principais casos de sistemas chaveados, como a sequência do documento o mostrou. As sutilidades que ocorrem devidas ao chaveamento foram vistas ao se estudar o conceito de solução de sistemas chaveados, uma vez que certos efeitos, como o comportamento de Zenão e o movimento escorregadio, em geral indesejados na prática, podem aparecer em alguns tipos de sistemas chaveados. Finalmente, o conceito de estabilidade e a sua análise por funções de Lyapunov foram as últimas definições importantes do capítulo, utilizadas ao longo de todo o documento.

Os Capítulos 3 e 4 constituíram a parte principal do documento, fornecendo os principais resultados de estabilidade e estabilização de sistemas chaveados. Sob chaveamento arbitrário, pôde-se perceber a grande utilidade das funções de Lyapunov na análise da estabilidade, fornecendo diversos critérios com base em várias classes de funções de Lyapunov, e, em particular, para as funções de Lyapunov quadráticas comuns. Também foi possível perceber a importância de outras formas de análise dos sistemas chaveados, obtendo, na Seção 3.5, critérios de estabilidade completos no caso

planar através dos chamados princípios variacionais. As funções de Lyapunov também foram muito úteis nas análises feitas no Capítulo 4, em que diversos tipos de restrições de chaveamento foram considerados.

O Capítulo 5 apresentou, por fim, a demonstração do principal resultado obtido no estágio de pesquisa [35] realizado pelo aluno no CMAP - Centre de Mathématiques Appliquées da École Polytechnique, Palaiseau, França, ao qual o presente trabalho de conclusão de curso dá sequência. Esta demonstração utiliza ideias e técnicas importantes, permitindo obter, através de diversas estimativas, o resultado de estabilização desejado.

O objetivo do presente trabalho de conclusão de curso foi assim atingido ao se produzir um documento que, ao mesmo tempo em que resume os principais resultados e métodos utilizados no domínio de sistemas chaveados, fornece as questões em aberto e as principais linhas de pesquisa seguidas atualmente na análise destes sistemas. A exposição da teoria de sistemas chaveados, combinada com a demonstração do resultado obtido no estágio de pesquisa [35], permite assim o aprofundamento nas questões inerentes aos sistemas chaveados.

Referências Bibliográficas

- [1] A. A. Agrachev e D. Liberzon: *Lie-algebraic stability criteria for switched systems*. SIAM J. Control Optim., 40(1):253–269, 2001, ISSN 0363-0129.
- [2] P. J. Antsaklis: *A Brief Introduction to the Theory and Applications of Hybrid Systems*. Introductory Article for the Special Issue on Hybrid Systems: Theory and Applications, Proceedings of the IEEE, 88(7):879–887, 2000.
- [3] P. J. Antsaklis e H. Lin: *Hybrid Dynamical Systems: Stability and Stabilization*. In W. S. Levine (ed.): *The Control Handbook: Control System Applications*. CRC Press, Boca Raton, Florida, 2nd ed., 2010.
- [4] E. Asarin, O. Bournez, T. Dang, O. Maler e A. Pnueli: *Effective synthesis of switching controllers for linear systems*. Proceedings of the IEEE, 88(7):1011–1025, 2000.
- [5] M. Balde e U. Boscain: *Stability of planar switched systems: the nondiagonalizable case*. Commun. Pure Appl. Anal., 7(1):1–21, 2008, ISSN 1534-0392.
- [6] M. Balde, U. Boscain e P. Mason: *A note on stability conditions for planar switched systems*. Internat. J. Control, 82(10):1882–1888, 2009, ISSN 0020-7179.
- [7] A. Balluchi, L. Benvenuti, M. Di Benedetto, C. Pinello e A. Sangiovanni-Vincentelli: *Automotive engine control and hybrid systems: Challenges and opportunities*. Proceedings of the IEEE, 88(7):888–912, 2000.
- [8] U. Boscain: *Stability of planar switched systems: the linear single input case*. SIAM J. Control Optim., 41(1):89–112, 2002, ISSN 0363-0129.
- [9] U. Boscain e B. Piccoli: *Optimal syntheses for control systems on 2-D manifolds*, vol. 43 de *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004, ISBN 3-540-20306-0.
- [10] A. Bressan e B. Piccoli: *Introduction to the Mathematical Theory of Control*. American Institute of Mathematical Sciences, Springfield, MO, 1ª ed., 2007.
- [11] A. Chaillet, Y. Chitour, A. Loria e M. Sigalotti: *Uniform stabilization for linear systems with persistency of excitation: the neutrally stable and the double integrator cases*. Math. Control Signals Systems, 20(2):135–156, 2008, ISSN 0932-4194.

- [12] D. Cheng, L. Guo, Y. Lin e Y. Wang: *A note on overshoot estimation in pole placements*. J. Control Theory Appl., 2(2):161–164, 2004, ISSN 1672-6340.
- [13] D. Cheng, L. Guo, Y. Lin e Y. Wang: *Stabilization of switched linear systems*. IEEE Trans. Automat. Control, 50(5):661–666, 2005, ISSN 0018-9286.
- [14] Y. Chitour, G. Mazanti e M. Sigalotti: *Stabilization of two-dimensional persistently excited linear control systems with arbitrary rate of convergence*. SIAM J. Control Optim. (submitted), 2011.
- [15] Y. Chitour e M. Sigalotti: *On the stabilization of persistently excited linear systems*. SIAM J. Control Optim., 48(6):4032–4055, 2010, ISSN 0363-0129.
- [16] W.P. Dayawansa e C.F. Martin: *A converse Lyapunov theorem for a class of dynamical systems which undergo switching*. IEEE Trans. Automat. Control, 44(4):751–760, 1999, ISSN 0018-9286.
- [17] R. DeCarlo, M. Branicky, S. Pettersson e B. Lennartson: *Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems*. Proceedings of the IEEE, 88(7):1069–1082, 2000.
- [18] L. Fang, H. Lin e P. Antsaklis: *Stabilization and performance analysis for a class of switched systems*. In *Decision and Control, 2004. CDC. 43rd IEEE Conference on*, vol. 3, pp. 3265–3270. IEEE, 2004.
- [19] L. Farina e S. Rinaldi: *Positive linear systems*. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience, New York, 2000, ISBN 0-471-38456-9. Theory and applications.
- [20] G. Feng: *Stability analysis of piecewise discrete-time linear systems*. IEEE Trans. Automat. Control, 47(7):1108–1112, 2002, ISSN 0018-9286.
- [21] A.F. Filippov: *Classical solutions of differential equations with multi-valued right-hand side*. SIAM J. Control, 5:609–621, 1967, ISSN 0363-0129.
- [22] A.F. Filippov: *Differential equations with discontinuous righthand sides*, vol. 18 de *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988, ISBN 90-277-2699-X. Translated from the Russian.
- [23] L. Gurvits, R. Shorten e O. Mason: *On the stability of switched positive linear systems*. IEEE Trans. Automat. Control, 52(6):1099–1103, 2007, ISSN 0018-9286.
- [24] P. Hartman: *Ordinary Differential Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 2^a ed., 2002.
- [25] J. Hespanha e A. Morse: *Stability of switched systems with average dwell-time*. In *Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on*, vol. 3, pp. 2655–2660. IEEE, 1999.

- [26] D. Liberzon: *Switching in systems and control*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2003, ISBN 0-8176-4297-8.
- [27] D. Liberzon, J. P. Hespanha e A. S. Morse: *Stability of switched systems: a Lie-algebraic condition*. Systems Control Lett., 37(3):117–122, 1999, ISSN 0167-6911.
- [28] D. Liberzon e R. Tempo: *Common Lyapunov functions and gradient algorithms*. IEEE Trans. Automat. Control, 49(6):990–994, 2004, ISSN 0018-9286.
- [29] H. Lin e P. J. Antsaklis: *Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results*. IEEE Trans. Automat. Control, 54(2):308–322, 2009, ISSN 0018-9286.
- [30] A. Loria, A. Chaillet, G. Besançon e Y. Chitour: *On the PE stabilization of time-varying systems: open questions and preliminary answers*. In *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on*, pp. 6847–6852. IEEE, 2005.
- [31] J. L. Mancilla-Aguilar, R. García, E. Sontag e Y. Wang: *Uniform stability properties of switched systems with switchings governed by digraphs*. Nonlinear Anal., 63(3):472–490, 2005, ISSN 0362-546X.
- [32] M. Margaliot: *Stability analysis of switched systems using variational principles: an introduction*. Automatica J. IFAC, 42(12):2059–2077, 2006, ISSN 0005-1098.
- [33] M. Margaliot e D. Liberzon: *Lie-algebraic stability conditions for nonlinear switched systems and differential inclusions*. Systems & control letters, 55(1):8–16, 2006.
- [34] P. Mason, U. Boscain e Y. Chitour: *Common polynomial Lyapunov functions for linear switched systems*. SIAM J. Control Optim., 45(1):226–245, 2006, ISSN 0363-0129.
- [35] G. Mazanti: *Stabilization des systèmes linéaires à excitation persistante*. Relatório de estágio de pesquisa, École Polytechnique, 2011.
- [36] A. P. Molchanov e Y. S. Pyatnitskiy: *Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory*. Systems Control Lett., 13(1):59–64, 1989, ISSN 0167-6911.
- [37] T. Monovich e M. Margaliot: *Analysis of discrete-time linear switched systems: a variational approach*. SIAM J. Control Optim., 49(2):808–829, 2011, ISSN 0363-0129.
- [38] A. P. Morgan e K. S. Narendra: *On the Stability of Nonautonomous Differential Equations $\dot{x} = [A + B(t)]x$ with Skew-Symmetric Matrix $B(t)$* . SIAM J. Control Optim., 15(1):163–176, 1977, ISSN 0363-0129.
- [39] A. S. Morse: *Supervisory control of families of linear set-point controllers. I. Exact matching*. IEEE Trans. Automat. Control, 41(10):1413–1431, 1996, ISSN 0018-9286.
- [40] S. Pettersson: *Synthesis of switched linear systems*. In *Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on*, vol. 5, pp. 5283–5288. IEEE, 2003.

- [41] S. Pettersson e B. Lennartson: *Stabilization of hybrid systems using a min-projection strategy*. In *American Control Conference, 2001. Proceedings of the 2001*, vol. 1, pp. 223–228. IEEE, 2001.
- [42] W. J. Rugh: *Linear System Theory*. Prentice Hall, New Jersey, 2^a ed., 1996.
- [43] R. Shorten, F. Wirth, O. Mason, K. Wulff e C. King: *Stability criteria for switched and hybrid systems*. *SIAM Rev.*, 49(4):545–592, 2007, ISSN 0036-1445.
- [44] E. Skafidas, R. J. Evans, A. V. Savkin e I. R. Petersen: *Stability results for switched controller systems*. *Automatica J. IFAC*, 35(4):553–564, 1999, ISSN 0005-1098.
- [45] Z. Sun e S. S. Ge: *Switched Linear Systems: Control and Design*. Communications and Control Engineering. Springer-Verlag, London, 2005, ISBN 1-85233-893-8.
- [46] G. Zhai, B. Hu, K. Yasuda e A. Michel: *Qualitative analysis of discrete-time switched systems*. In *American Control Conference, 2002. Proceedings of the 2002*, vol. 3, pp. 1880–1885. IEEE, 2002.