UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA FINANCEIRA

Estratégias de Risk Parity para Investimentos em ETFs na Bolsa Brasileira: Uma Análise Abrangente

Bruno Ferraz de Albuquerque

São Paulo, SP - Brasil
2025

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA FINANCEIRA

Estratégias de Risk Parity para Investimentos em ETFs na Bolsa Brasileira: Uma Análise Abrangente

Bruno Ferraz de Albuquerque

Monografia apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de pós-graduação do MBA de Engenharia Financeira

Orientador: Prof. Oswaldo Luiz do Valle Costa

CATALOGAÇÃO-NA-FONTE

A beleza da vida é que ela é constantemente
desafiada por novas questões, novas descobertas
e novas formas de entender o universo.

Richard Dawkins

RESUMO

Neste estudo abordamos o desenvolvimento de um algoritmo que adota a estratégia de alocação *Risk Parity* com o objetivo de criar uma carteira robusta de investimentos no mercado brasileiro. O modelo proposto utiliza uma abordagem de alocação de risco que busca distribuir o risco de maneira equânime ao longo de todos os ativos na carteira, a estratégia central consiste em balancear a contribuição de risco de cada ativo para a carteira. O estudo investiga a aplicação de diferentes estimadores de risco para a construção dessa carteira, incluindo métodos clássicos e modernos, como o Estimador de Variância-Covariância Simples, o *Rotational Invariant Estimator* (RIE), o EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*), e o *Shrinkage Estimator*. Esses estimadores são analisados quanto à sua capacidade de proporcionar estimativas mais precisas de risco, com o intuito de melhorar a alocação entre ativos e otimizar a diversificação da carteira. A pesquisa foca exclusivamente em ETFs (Exchange Traded Funds) disponíveis no mercado brasileiro, dado o crescente interesse por esse tipo de ativo, que oferece liquidez, diversificação e baixos custos operacionais. A análise inclui uma comparação do desempenho de cada abordagem, levando em consideração métricas de risco, como a volatilidade, o Drawdown máximo e os índices de Sharpe e Sortino, além de avaliar o impacto de cada estimador no risco total da carteira. Os resultados sugerem que, embora os métodos mais sofisticados, como o RIE, possam fornecer estimativas mais precisas de risco, modelos mais simples, como o Shrinkage e o EWMA, podem apresentar desempenho superior em cenários específicos de alta volatilidade, especialmente em períodos de estresse no mercado. A dissertação conclui que, para investidores no Brasil, uma combinação estratégica de diferentes estimadores de risco, com uma abordagem focada em Risk Parity, pode oferecer uma alternativa robusta para uma carteira equilibrada e bem diversificada.

ABSTRACT

This study explores the development of an algorithm that implements the Risk Parity allocation strategy with the objective of constructing a robust investment portfolio in the Brazilian market. The proposed model adopts a risk-based allocation approach that aims to evenly distribute risk across all assets in the portfolio. Its core strategy consists of balancing the individual risk contribution of each asset. The research investigates the application of various risk estimators for portfolio construction, encompassing both classical and modern techniques, such as the Simple Variance-Covariance Estimator, the Rotational Invariant Estimator (RIE), the Exponentially Weighted Moving Average (EWMA), and the Shrinkage Estimator. These estimators are assessed based on their ability to provide more accurate risk estimates, thereby enhancing asset allocation and improving portfolio diversification. The study focuses exclusively on Exchange Traded Funds (ETFs) available in the Brazilian market, given the growing interest in this asset class due to its liquidity, diversification benefits, and low operational costs. The analysis includes a performance comparison of each approach, considering risk metrics such as volatility, maximum drawdown, and the Sharpe and Sortino ratios, as well as evaluating the impact of each estimator on the total risk in portfolio. Results suggest that while sophisticated methods such as RIE may yield more precise risk estimates, simpler models like Shrinkage and EWMA may outperform in specific high-volatility scenarios, particularly during periods of market stress. The study concludes that, for investors in Brazil, a strategic combination of different risk estimators within a Risk Parity framework may offer a robust alternative for constructing a balanced and well-diversified portfolio.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A Teoria Moderna do Portfólio (TMP), inicialmente apresentada por Markowitz (1952) [1], foi capaz de revelar a importância da diversificação de ativos como meio de redução de riscos e otimização de retornos. Para Assaf Neto (2014) [2], a teoria mostra que o risco de um ativo deve ser analisado pela sua contribuição ao risco de um portfólio diversificado, orientando decisões de investimentos pelo impacto no risco e retorno global da carteira.

À medida que a teoria evoluiu, surgiram novas abordagens e modelos que ampliaram e refinaram os conceitos originais de Markowitz. Nos anos 60, o trabalho de William Sharpe introduziu o Modelo de *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), que expandiu a TMP ao integrar o conceito de prêmio de risco de mercado e o papel do beta na avaliação do risco sistemático dos ativos. Esta evolução forneceu uma maneira mais direta de estimar o retorno esperado de um ativo com base no seu risco relativo em comparação ao mercado como um todo.

Nos últimos anos, os modelos de *Risk Parity* (Paridade de Risco) emergiram como uma alternativa eficiente para a criação de portfólios diversificados. Estas estratégias buscam diversificar as fontes de risco. Cada fonte de risco carrega um prêmio de risco, que é uma potencial fonte de retorno. Para alcançar essa diversificação, essas estratégias pressupõem que as classes de ativos (como ações, *bonds,* etf's ou fiis) devem contribuir de maneira equânime para o nível de risco em um portfólio. Isso torna este tipo de modelo excepcional caso queira criar um portfólio com diferentes classes de ativos, expostas a diferentes riscos.

Neste estudo buscou-se aplicar a estratégia de Risk Parity a carteiras compostas por ETF's na bolsa brasileira oferecendo uma abordagem inovadora e potencialmente robusta para a gestão de investimentos. Hoje existem aproximadamente 91 ETF's na bolsa brasileira, que seguem diferentes índices de mercado, das mais variadas classes de ativos. O intuito é criar um portfólio com alta diversificação, investindo em diversas classes de ativos distintas, reduzindo a volatilidade geral do portfólio, proporcionando uma experiência de investimento mais estável para o investidor, o que é especialmente valioso em um mercado volátil como o brasileiro.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

A otimização de portfólio é um processo quantitativo que busca a alocação ideal de ativos para maximizar o retorno esperado e mitigar eventuais perdas, minimizando simultaneamente o risco. Dentro deste escopo, é possível citar as principais estratégias de alocação de portfólio e as principais métricas para avaliar a performance e o risco de um portfólio.

2.1 Modelos Quantitativos para Alocação de Ativos

Modelos quantitativos utilizam dados históricos, como a série de preços e retornos de um determinado ativo. Com base nestes dados, busca-se identificar um padrão, com o objetivo de prever retornos, ou reduzir riscos, estes modelos se concentram na criação de algoritmos que identifiquem estes padrões e executam as estratégias necessárias. A automação e a modelagem preditiva permitem decisões ágeis e eficientes, reduzindo a influência de emoções (vieses humanos) nas escolhas de investimento.

2.1.1 Otimização de Média Variância

Como já discutido anteriormente abordagem clássica de Markowitz (1952) [1], propõe a construção de um portfólio que maximize o retorno esperado para um determinado nível de risco, ou minimize o risco para um dado retorno esperado. Essa estratégia envolve a estimação das médias e variâncias/covariâncias dos retornos dos ativos.

2.1.2 Modelos Baseados em Fatores

Esses modelos, como o *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) e o *Arbitrage Pricing Theory* (APT) [3], buscam explicar os retornos dos ativos em função de fatores de risco sistemáticos (ou sistêmicos). A alocação de ativos é feita com base na exposição a esses fatores, otimizando a relação risco-retorno.

2.1.3 Otimização Robusta

Esta estratégia procura garantir que a alocação do portfólio seja robusta a incertezas nas estimativas dos parâmetros (como retornos e covariâncias).

Métodos de otimização robusta, como a programação robusta, são usados para mitigar o impacto de erros de estimativa [4].

2.1.4 Modelos Estocásticos

A otimização estocástica envolve a modelagem de incertezas nos retornos dos ativos como variáveis aleatórias. Essa abordagem permite simular diferentes cenários futuros e otimizar a alocação de ativos considerando essas incertezas [5].

2.1.5 Algoritmos Genéticos

Essas estratégias utilizam algoritmos inspirados na biologia, como algoritmos genéticos, para explorar o espaço de soluções de alocação de ativos. Essas técnicas são úteis em problemas complexos onde as abordagens tradicionais podem ser limitadas [6].

2.2 Métricas de Risco e Performance

Métricas de risco e performance são essenciais para avaliar portfólios de investimento. Entre as principais métricas de risco, destacam-se o desvio padrão, que mede a volatilidade dos retornos. Estas métricas em geral, são capazes de fornecer uma visão abrangente da eficiência de um portfólio, permitindo comparações e ajustes estratégicos para otimizar resultados.

2.2.1 Desvio Padrão

Assaf Neto [2] descreve que o desvio padrão é capaz de medir o grau de dispersão dos retornos em termos de valor esperado, e pode ser interpretado como o risco total do ativo. Ou seja, é uma medida estatística indica a dispersão dos retornos de um ativo em torno de sua média, é utilizada para quantificar a volatilidade de um ativo e está diretamente relacionada ao risco total associado.

Sendo assim, há maior incerteza quanto maior o desvio padrão, ou seja, maior o risco, porém podem possibilitar retornos elevados. Para um contexto de formação de portfólio, ativos que possuem um desvio padrão mais elevado são vistos como mais arriscados, pois seus retornos são mais imprevisíveis devido a maior volatilidade.

A fórmula matemática do desvio padrão de um ativo é dada por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Ri - \overline{R}\right)^2} \tag{2.1}$$

Onde:
Ri: Retorno esperado de um ativo
$\overline{R}$: Taxa livre de risco
N: Número total de retornos

2.2.2 Covariância e Correlação

As análises de covariância e de correlação entre os retornos dos ativos podem indicar o grau de dependência linear entre as variáveis observadas. Essa medida indica o grau em que duas variáveis variam juntas, conforme descrito por Malkiel (2019), a diversificação não é suficiente quando carteira é forma por ações com alta covariância, uma vez que covariâncias com valores positivos indicam que os retornos dos dois ativos tendem a se mover na mesma direção.

Por outro lado, essa medida quando apresenta valores negativos indica que os ativos se movem em direções opostas. Para valor zero, entende-se que não há relação linear entre os retornos dos ativos. Essa escala de unidades está relacionada com as variáveis envolvidas, o que significa que ela pode variar conforme o conjunto de ativos escolhidos.

A fórmula matemática da covariância é dada por:

$$Cov(X,Y) = \sum_{x=1}^{n}\frac{(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{n-1} \tag{2.2}$$

Onde:
$Cov(X,Y)$:Covariância entre X e Y
X_i: Valor individual da variável X na amostra i
Y_i: Valor individual da variável Y na amostra i
$\overline{X}$: Média aritmética dos valores de X
$\overline{Y}$: Média aritmética dos valores de Y
n: Número total de amostras

Uma outra maneira de compreender o risco entre ativos, é através da correlação, que é descrita por Hull (2018) como uma medida normalizada da covariância, que indica o grau de relacionamento linear entre as duas variáveis. Essa pode oferecer uma compreensão mais padronizada entre a relação entre as variáveis. A sua escala não é influenciada pelas escalas das variáveis envolvidas, diferente da covariância, possuindo valores podem variar entre -1 e +1, tornando-a uma métrica que permite maior comparabilidade entre os diferentes pares de ativos.

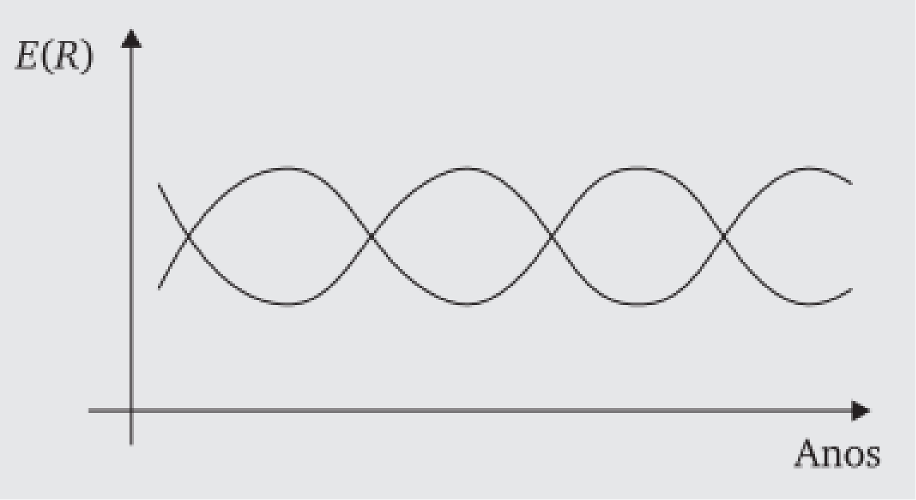
A fórmula matemática da correlação é dada por:

$$Cor(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma x * \sigma y} \quad (2.3)$$

Onde:
$Cor(X,Y)$: Coeficiente de correlação entre as variáveis X e Y
σx : Desvio padrão de X
σy : Desvio padrão de Y

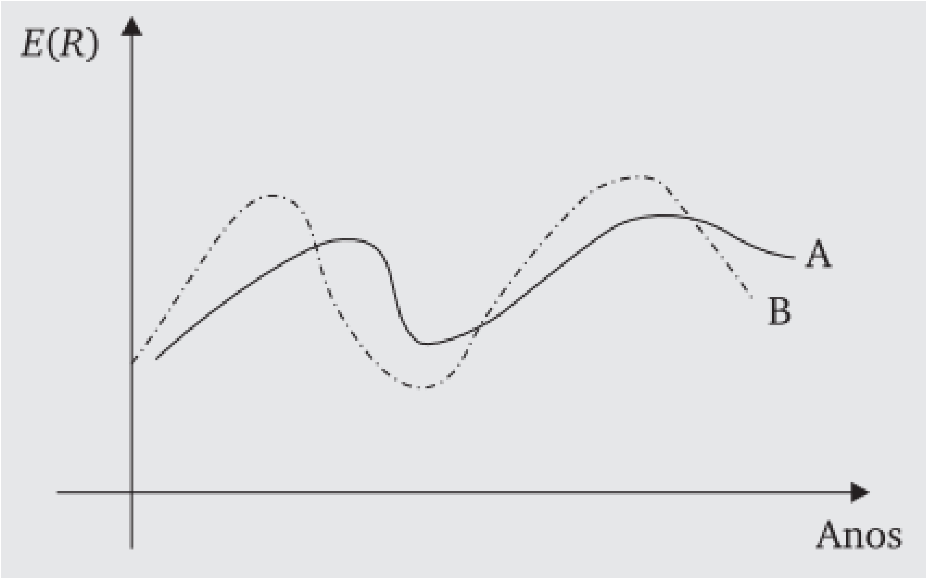
Entende-se que há benefícios em verificar a correlação entre os ativos escolhidos para a formação do portfólio, uma vez que permitem entender o comportamento de diferentes ativos em relação aos seus retornos. A relação entre os retornos de ativos com correlação perfeitamente negativa ou perfeitamente positiva são ilustrados na Figura 2 e 3, respectivamente.

Figura 1 – Investimentos com correlação negativa



Fonte: Assaf Neto (2014, p. 236)

Figura 2 – Investimentos com correlação positiva



Fonte: Assaf Neto (2014, p. 236)

2.2.3 Beta

O conceito de "beta" β no mercado financeiro é uma medida fundamental que indica a volatilidade ou o risco sistemático de um ativo ou portfolio em comparação ao mercado como um todo. O beta é utilizado principalmente na análise de ações e na avaliação de investimentos, ajudando investidores e gestores a entenderem como um ativo tende a se mover em relação ao mercado.

O beta é uma medida que quantifica a sensibilidade do retorno de um ativo em relação ao retorno do mercado. Um beta de 1 indica que o ativo tende a se mover em linha com o mercado; um beta maior que 1 indica que o ativo é mais volátil do que o mercado, enquanto um beta menor que 1 indica que o ativo é menos volátil. A equação padrão para o cálculo do beta é:

$$\beta = \frac{Cov(R_p , R_m)}{Var(R_m)} \tag{2.4}$$

Onde:
R_p : Retorno do portfólio;
R_m: Retorno do mercado;
Cov : Covariância entre os retornos do portfólio e mercado;
Var : Variância dos retornos do mercado.

O beta é uma ferramenta essencial para investidores que desejam avaliar o risco de um ativo em relação ao mercado. Um ativo com beta alto pode representar um risco maior, mas também a possibilidade de retornos mais elevados [7].

O beta é uma parte fundamental do Capital Asset Pricing Model (CAPM), que relaciona o risco sistemático de um ativo ao seu retorno esperado. A equação do CAPM é expressa como:

$$E(R_i) = R_f + \beta_i\big(E(R_m) - R_f\big) \tag{2.5}$$

Onde:
$E(R_i)$: Retorno esperado do portfólio;
R_f : Taxa livre de risco;
β : sensibilidade do portfólio em relação ao mercado (Beta);
$E(R_m) - R_f$: Prêmio de risco [8].

2.2.4 Alfa

O índice alfa (ou simplesmente "alfa") é uma métrica utilizada em finanças para avaliar a habilidade de um ativo ou de um gestor de investimentos em superar o mercado ou um benchmark. No geral, ele quantifica o retorno adicional de um investimento, ajustado ao risco, em relação a um índice de referência. A formulação clássica do alfa pode ser expressa como:

$$\alpha = R_p - \Big(R_f + \beta\big(R_m - R_f\big)\Big) \tag{2.6}$$

Onde:
R_p : Retorno do portfólio;
R_f : Taxa livre de risco;
β : sensibilidade do portfólio em relação ao mercado;
R_m: Retorno do mercado.

O alfa é uma ferramenta crucial para gestores de fundos e investidores, pois fornece uma medida clara do desempenho ajustado ao risco. Uma formulação mais simples do alfa é simplesmente considerar o retorno de mercado como a taxa livre de risco, desta maneira eliminamos o termo a direita da equação e temos simplesmente $\alpha = R_p - R_f$. Também há a possibilidade em casos específicos de substituir a risk free por um benchmark de preferência.

2.2.5 Índice de Sharpe

O índice de Sharpe compara o retorno de um investimento com seu risco. É uma expressão matemática da ideia de que retornos excessivos ao longo do tempo podem significar mais volatilidade e risco, em vez de habilidade de investimento.

O economista William F. Sharpe propôs o índice de Sharpe em 1964 [7], como um desdobramento de seu trabalho no modelo de precificação de ativos de capital (CAPM), chamando-o de razão de recompensa por variabilidade. Sharpe recebeu o Prêmio Nobel de Economia por seu trabalho no CAPM em 1990. O numerador do índice de Sharpe é a diferença ao longo do tempo entre os retornos realizados, ou esperados, e um benchmark, como a taxa de retorno livre de risco ou o desempenho de uma categoria específica de investimento. Seu denominador é o desvio padrão dos retornos ao longo do mesmo período, uma medida de volatilidade e risco.

Principais pontos:

- O índice de Sharpe divide os retornos excessivos de um portfólio por uma medida de sua volatilidade para avaliar o desempenho ajustado ao risco;
- Os retornos excessivos são aqueles que estão acima de um benchmark (índice de mercado) ou da taxa de retorno livre de risco;
- O cálculo pode ser baseado em retornos históricos ou previsões;
- Um índice de Sharpe mais alto é melhor ao comparar portfólios semelhantes (que apresentem volatilidades próximas);
- O índice de Sharpe tem fraquezas inerentes e pode ser exagerado para algumas estratégias de investimento.

A formulação matemática do índice de Sharpe pode ser expressa da seguinte forma:

$$I_s = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p} \tag{2.7}$$

Onde:
R_p : Retorno do portfólio;
R_f : Taxa livre de risco;

σ_p : Desvio padrão dos retornos do portfólio.

Existe uma variação do Sharpe conhecida como Índice de Sortino [9]. Porém, diferentemente do Sharpe no qual consideramos o desvio padrão do Portfólio levando em conta todos os retornos históricos. No Índice de Sortino consideramos apenas o semidesvio, ou seja, o desvio padrão somente dos retornos que são inferiores aos retornos do benchmark. Portanto consideramos somente a volatilidade de *downside*.

2.3 Modelos de Média Variância

Os modelos de média variância enfatizam a importância da diversificação, mostrando que combinar ativos com diferentes níveis de risco e correlação pode resultar em portfólios mais eficientes. Isso ajudou a popularizar a prática de diversificação na gestão de investimentos, reduzindo o risco sem comprometer significativamente os retornos.

Além disso, os modelos de média-variância estabeleceram as bases para o desenvolvimento de outras teorias e ferramentas financeiras, como o Capital Asset Pricing Model (CAPM) e o índice de Sharpe [7], que se tornaram essenciais na avaliação de risco e retorno.

O principal objetivo dos modelos de média variância de uma maneira simplista, consiste em minimizar o risco maximizando o retorno, é possível elaborar as formulações matemáticas para minimizar o risco e maximizar o retorno da seguinte maneira.

$$min\ \sigma_p \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}} \qquad (2.8)$$

Sujeito às restrições:

R_p = $\sum_{i=1}^{N} w_i \bar{R}_i$: retorno esperado da carteira

1 = $\sum_{i=1}^{N} w_i$: investimento de todo o capital disponível

0 ≤ w_i ≤ 1: sem alavancagem

$$max\ R_p \quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i \bar{R}_i \qquad (2.9)$$

Sujeito às restrições:

$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}}$: risco da carteira

$1 = \sum_{i=1}^{N} w_i$: investimento de todo o capital disponível

$0 \leq w_i \leq 1$: sem alavancagem

O modelo de média-variância é uma ferramenta que identifica carteiras eficientes com base na Fronteira Eficiente, visando encontrar a combinação ideal de ativos. Essa abordagem leva em conta o nível de risco e o retorno desejado pelo investidor. As estratégias típicas incluem maximizar o retorno dentro de um limite de risco ou minimizar o risco enquanto se garante um retorno mínimo. Neste estudo, são aplicados esses dois métodos, evitando práticas como venda a descoberto e aluguel de ativos sem risco. O risco associado à carteira é analisado por meio da matriz de covariância.

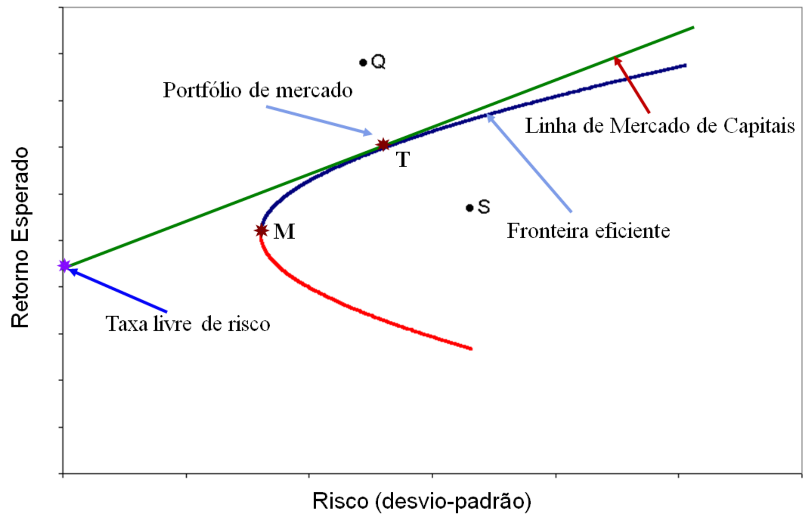
Markowitz fez contribuições significativas na formulação de técnicas analíticas voltadas para identificar a carteira mais adequada, de acordo com objetivos de retorno ajustados ao risco. Na visão de Ruppert [10], portfólios eficientes equilibram a relação entre risco e retorno dos ativos, garantindo um retorno esperado mais elevado para um determinado nível de risco ou o menor risco possível para um retorno específico. Assim, qualquer tentativa de aumentar o retorno esperado resultará em um aumento do risco, enquanto a redução do risco resultará em um menor retorno esperado.

Essa teoria revolucionou a forma como se investe ao integrar princípios de diversificação, otimização da relação risco-retorno e análise de correlação entre ativos na formação de carteiras consideradas ótimas.

2.3.1 Fronteira Eficiente

A Fronteira Eficiente é um conceito central na Teoria Moderna de Portfólio, desenvolvido por Harry Markowitz na década de 1950 [1]. Essa teoria estabelece que os investidores podem construir carteiras de ativos que maximizam o retorno esperado para um dado nível de risco ou minimizam o risco para um retorno esperado específico. A Fronteira Eficiente é representada graficamente como a curva que delimita o conjunto de carteiras eficientes, onde cada ponto na curva corresponde a uma carteira com a melhor relação risco-retorno.

Figura 3 – Fronteira Eficiente



De acordo com Bodie, Kane e Marcus (2014) [11], a Fronteira Eficiente é composta por portfólios que não podem ser superados por outros em termos de retorno ajustado ao risco. Os investidores, ao se situarem nesta fronteira, podem otimizar suas escolhas com base em suas preferências individuais em relação ao risco. Essa abordagem foi uma inovação que permitiu a análise quantitativa na alocação de ativos, transformando a gestão de portfólios.

Em seu livro "Investment Science", David G. Luenberger (1998) [12] discute como a Fronteira Eficiente resulta da combinação de ativos que apresentam diferentes níveis de risco e retorno, enfatizando a importância da diversificação. A escolha de ativos correlacionados negativamente pode ajudar a reduzir a volatilidade do portfólio, resultando em uma melhor performance em relação à fronteira.

Outro autor relevante é William F. Sharpe, que, em "Portfolio Theory and Capital Markets" (1970) [13], expande a discussão sobre a Fronteira Eficiente, conectando-a com o modelo de precificação de ativos de capital (CAPM). Sharpe destaca como a Fronteira Eficiente não apenas ajuda na seleção de portfólios, mas também fundamenta a análise do risco em relação ao retorno esperado no mercado.

A Fronteira Eficiente, portanto, não é apenas uma ferramenta teórica, mas uma abordagem prática que permite aos investidores tomarem decisões mais informadas sobre como alocar seus recursos de maneira a alcançar seus objetivos financeiros. A integração de conceitos de risco e retorno através da diversificação e análise de portfólios representa um marco na evolução da teoria financeira.

Um conceito central na Teoria Moderna de Portfólio é a Linha de Mercado de Capitais, ou Capital Market Line (CML), conceito este que estabelece a relação entre o risco e o retorno esperado de um portfólio de mercado eficiente. Representada graficamente, a CML é uma linha que parte da taxa livre de risco e se estende até o portfólio de mercado, que é uma combinação de todos os ativos disponíveis ponderados pelo seu valor de mercado. Essa linha indica o retorno esperado para cada nível de risco total, medido pelo desvio padrão. Ela pode ser expressa matematicamente como:

$$\mu_R = \mu_f + \frac{(\mu_M - \mu_f)}{\sigma_M} \sigma_R \tag{2.10}$$

Onde:

μ_{f} : Taxa livre de risco

σ_{R}, σ_{M}: Desvio padrão

$\mu_{\mathrm{M}} - \mu_{\mathrm{f}}$: Prêmio de risco do portfólio de mercado

Segundo Prasanna Chandra em "Investment Analysis and Portfolio Management" (2011) [14], a CML é uma representação visual que ajuda os investidores a entenderem a relação entre risco e retorno em portfólios eficientes. A inclinação da linha reflete o prêmio de risco do mercado, ou seja, a recompensa adicional esperada pelos investidores ao assumirem riscos além do ativo livre de risco.

Em "Modern Portfolio Theory and Investment Analysis," Edwin J. Elton e Martin J. Gruber (2014) [15], discutem como a CML permite que investidores decidam sobre a alocação entre ativos de risco e um ativo livre de risco, levando em consideração sua aversão ao risco. Os portfólios que se situam abaixo da CML são considerados ineficientes, pois não oferecem um retorno proporcional ao risco assumido.

Outro autor relevante é Richard A. Brealey e Stewart C. Myers, que em "Principles of Corporate Finance" (2016) [16], abordam a CML em relação à avaliação de ativos e à formação de portfólios. Eles enfatizam que a CML fornece uma abordagem clara para investidores que buscam maximizar seus retornos, ajustando o risco de acordo com suas preferências individuais.

Portanto, a Capital Market Line é uma ferramenta vital para a construção de portfólios eficientes, servindo como um guia que fundamenta a análise do risco e retorno no mercado financeiro. A intersecção entre o portfólio de mercado e a taxa livre de risco representa um marco significativo na teoria de investimentos, possibilitando uma gestão de portfólios mais eficaz.

2.3.2 Carteira de Mínima Variância

A carteira de mínima variância, introduzida por Harry Markowitz, é uma abordagem que busca a combinação de ativos que minimiza o risco total para um determinado nível de retorno esperado. Esse conceito é uma aplicação prática da Teoria Moderna de Portfólio, que enfatiza a diversificação e a análise da correlação entre os ativos. A função de otimização linear do portfólio de mínima variância pode ser representada como:

$$\min_{w} \quad w^T \sum w \tag{2.11}$$

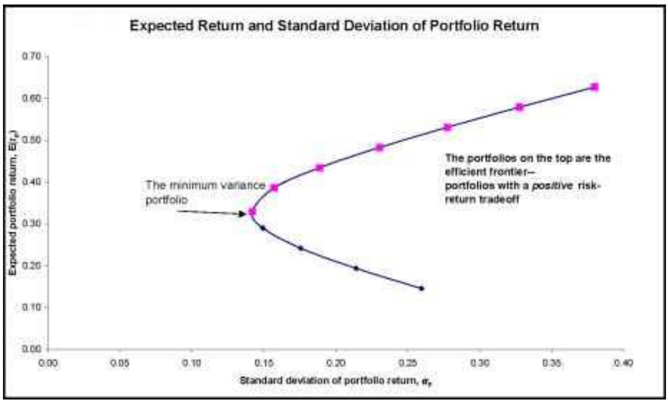
Sujeito às restrições:

$$w^T \mu \ \geq \ \beta$$

$1^T w$ = 1; w ≥ 0

De acordo com Richard Grinold e Ronald Kahn em "Active Portfolio Management" (2000) [17], a carteira de mínima variância é construída de maneira a ter a menor volatilidade possível. Essa característica é especialmente valiosa em momentos de incerteza no mercado, pois proporciona aos investidores uma camada adicional de proteção contra perdas significativas.

Figura 4 – Localização da carteira de mínima variância na Fronteira Eficiente



Um dos principais benefícios da carteira de mínima variância é sua habilidade de reduzir a volatilidade sem comprometer drasticamente o retorno esperado. Essa abordagem é particularmente atraente para investidores avessos ao risco, pois permite a maximização da estabilidade dos retornos. Em "Portfolio Construction and Risk Management" (2018) [18], o autor David M. Smith destaca que a diversificação eficiente pode ser alcançada ao combinar ativos que apresentam baixa correlação, resultando em um portfólio que se comporta de maneira mais previsível.

Entretanto, existem também limitações associadas a essa estratégia. Conforme mencionado por Michael C. Jensen em "The Performance of Mutual

Funds in the Period 1945-1964" (1968) [8], uma desvantagem da carteira de mínima variância é a possibilidade de concentração excessiva em certos ativos, o que pode aumentar o risco específico de setores ou empresas. Além disso, a dependência de dados históricos para estimar variâncias e correlações pode resultar em decisões inadequadas se as condições de mercado mudarem, como observado por John C. Hull em "Options, Futures, and Other Derivatives" (2017) [19].

A construção de uma carteira de mínima variância requer, portanto, uma análise cuidadosa das características dos ativos e suas inter-relações. Em "Investment Analysis" (2013) [20], o autor Frank K. Reilly afirma que, enquanto essa estratégia pode oferecer proteção contra a volatilidade, os investidores devem estar cientes das dinâmicas do mercado e de como elas podem afetar o desempenho do portfólio ao longo do tempo. A carteira de mínima variância é uma estratégia importante na gestão de portfólios, equilibrando a busca por retornos com a necessidade de minimizar riscos.

2.3.3 Carteira igualmente ponderada

A carteira igualmente ponderada é uma estratégia de investimento em que todos os ativos são alocados com a mesma proporção no portfólio, independentemente de seu risco ou retorno esperado. Essa abordagem é simples de implementar e oferece uma maneira prática de diversificar os investimentos.

Para Frank K. Reilly e Keith C. Brown em "Investment Analysis and Portfolio Management" (2012) [20], a carteira igualmente ponderada é frequentemente utilizada por investidores que desejam evitar a complexidade de calcular alocações ótimas baseadas em modelos de risco e retorno. Essa simplicidade a torna acessível, especialmente para investidores iniciantes ou aqueles que preferem uma abordagem menos técnica.

Um dos principais benefícios dessa estratégia é a diversificação natural que ela proporciona. Ao distribuir o capital igualmente entre diferentes ativos, o investidor pode reduzir o risco específico de cada ativo individual. Em "Modern Portfolio Theory and Investment Analysis" (2014) [15], Edwin J. Elton e Martin J. Gruber destacam que, embora a carteira igualmente ponderada possa não ser a mais eficiente em termos de risco-retorno, ela oferece uma abordagem prática que pode ser vantajosa em certos contextos de mercado.

No entanto, a carteira igualmente ponderada também apresenta desvantagens. Uma crítica comum é que essa estratégia não leva em consideração a volatilidade ou correlação dos ativos. Como mencionado por William F. Sharpe em "Portfolio Theory and Capital Markets" (1970) [13], alocações iguais podem resultar em uma maior exposição ao risco total do portfólio, especialmente se os ativos incluídos tiverem diferentes perfis de risco.

Outra limitação é a falta de adaptação às condições de mercado. Conforme discutido por Robert C. Merton em "Continuous-Time Finance" (1990) [21], uma carteira igualmente ponderada pode não responder adequadamente a mudanças nas condições econômicas ou nos mercados, pois não ajusta as alocações em função do desempenho relativo dos ativos.

É possível dizer que a carteira igualmente ponderada é uma estratégia de investimento que combina simplicidade e diversificação, mas pode não ser a mais eficiente em termos de gestão de risco.

2.4 O Modelo de Paridade de Riscos (Risk Parity)

O modelo de paridade de riscos, ou risk parity, é uma abordagem de alocação de ativos que visa distribuir o risco de forma equitativa entre diferentes classes de ativos, em vez de simplesmente alocar capital de maneira igual. Esse conceito busca criar um portfólio onde cada ativo contribui de forma semelhante ao risco total, permitindo uma diversificação mais eficaz e uma gestão mais equilibrada do risco.

De acordo com o autor Aswath Damodaran em "Applied Corporate Finance" (2014) [22], a paridade de riscos se baseia na ideia de que os investidores devem considerar a volatilidade e a correlação dos ativos ao construir portfólios. Ao equilibrar o risco entre as classes de ativos, os investidores podem potencialmente melhorar o desempenho ajustado ao risco, tornando o portfólio mais robusto frente a flutuações de mercado.

Uma das principais vantagens do modelo de paridade de riscos é sua capacidade de mitigar a volatilidade do portfólio. Em "Risk Parity: A New Approach to Asset Allocation" (2011), os autores de um estudo na *Journal of Portfolio Management* destacam que a abordagem permite que os investidores evitem uma concentração excessiva de risco em qualquer ativo ou classe de ativos específica. Isso pode resultar em uma performance mais estável ao longo do tempo, especialmente em ambientes de mercado voláteis.

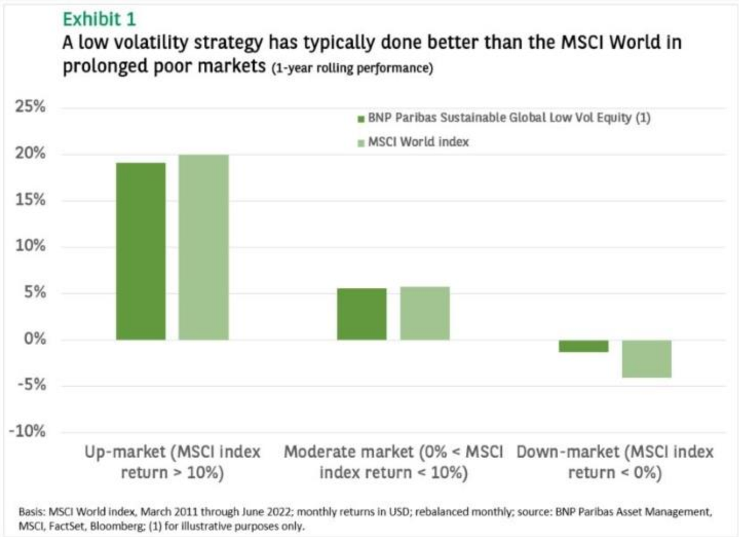
No entanto, o modelo de paridade de riscos também possui desvantagens. Conforme mencionado por G. Michael Phillips e H. Kent Baker em "Risk Management and Derivatives" (2009) [23], a implementação do risk parity pode exigir um reequilíbrio frequente do portfólio, o que pode gerar custos de transação. Além disso, a estratégia pode levar a uma superexposição a ativos com baixa correlação, o que pode não ser ideal em certas condições de mercado.

Outro ponto a ser considerado é a dependência de dados históricos para estimar a volatilidade e a correlação, conforme discutido por James P. O'Shaughnessy em "What Works on Wall Street" (2005) [24]. Se as condições de mercado mudarem, as estimativas baseadas em dados passados podem não se concretizar, resultando em um desempenho aquém do que foi predito no modelo.

Uma questão muito importante que faz com que portfólios de Risk Parity se torne bastante atrativos é a anomalia de baixa volatilidade. A anomalia de baixa volatilidade é um fenômeno observado nos mercados financeiros onde ativos de menor volatilidade tendem a oferecer retornos superiores em comparação com ativos mais voláteis, desafiando as expectativas tradicionais da teoria financeira, que sugere que maior risco deve ser acompanhado por maior retorno. Essa anomalia sugere que os investidores podem obter melhores retornos ajustados ao risco investindo em ativos menos voláteis.

Em "The Low-Volatility Anomaly: A Decomposition Analysis" (2014) [25], Martin Lettau e Sidney Viswanathan analisam como ações com baixa volatilidade tendem a superar suas contrapartes mais voláteis ao longo do tempo. A pesquisa mostra que essa tendência não pode ser completamente explicada por riscos sistemáticos ou por prêmios de risco tradicionais, o que a torna uma anomalia intrigante para acadêmicos e investidores.

Figura 5: Estudo de estratégias de baixa volatilidade do BNP Paribas



Fonte: [Exploiting the low volatility anomaly in practice]

Uma das possíveis explicações para a anomalia de baixa volatilidade é a aversão ao risco dos investidores. Para Baker e Wurgler (2006), os investidores tendem a superestimar o risco associado a ativos mais voláteis, levando a uma demanda excessiva por estes ativos, o que resulta em preços inflacionados e retornos futuros mais baixos. Por outro lado, ativos que assumam volatilidades menores podem ser subestimados, resultando em oportunidades de retorno.

Outro fator que pode contribuir para essa anomalia é a tendência dos investidores de seguir modas ou ciclos de mercado, conforme discutido por Cliff Asness et al. (2013) [27]. Quando o mercado está em alta, investidores podem ser atraídos por ações de maior volatilidade na esperança de obter ganhos rápidos, enquanto ações de menor volatilidade são ignoradas, o que pode levar a uma inversão de expectativas e a retornos superiores para as ações menos voláteis.

Apesar de seus retornos superiores, a anomalia de baixa volatilidade também apresenta desafios. Como observado por Robert Novy-Marx (2013) [28], a seleção de ações de baixa volatilidade pode não ser tão simples, pois essas ações podem não performar bem em todos os ciclos de mercado. Assim, a anomalia pode ser menos previsível do que parece.

2.5 Estimadores de Risco

Estimadores de risco (volatilidade) tem grande importância no contexto dos mercados mobiliários, não se restringindo apenas a avaliar a volatidade, mas também a tomar decisões com base na rentabilidade esperada e estruturação de estratégias quantitativas para precificação dos ativos. Estimar o risco permite que eventuais rebalanceamentos na carteira sejam executados, assim como ativo possam ser integrados ou retirados da carteira.

De acordo com diversos artigos, a capacidade de antecipar mudanças na volatilidade e compreender sua dinâmica é fundamental para a criação e implementação de estratégias mais robustas para gestão da carteira (Poon & Granger, 2003) [29].

2.5.1 O Modelo EWMA

O modelo Exponential Weighted Moving Average (EWMA) se destaca por ser uma das abordagens mais populares para estimar a volatilidade de ativos financeiros. Sua principal característica reside em atribuir pesos decrescentes aos retornos passados e pesos maiores aos retornos mais recentes, sendo mais eficiente em prever mudanças comportamentais recentes na volatilidade. Este modelo é amplamente utilizado no mercado financeiro devido à sua simplicidade e capacidade de responder rapidamente a mudanças nos padrões de volatilidade, uma característica importante para modelar ativos, devido a dinâmica dos mercados.

A ideia por trás do EWMA consiste no fato de que a volatilidade do mercado não é constante (heterocedasticidade) e tende a mudar ao longo do tempo. Portanto, o modelo atribui maior relevância para as observações mais recentes, com o objetivo de capturar a volatilidade condicional — a ideia de que a volatilidade futura depende não apenas dos retornos passados, mas também de como esses retornos evoluíram recentemente. Esse comportamento é essencial em mercados financeiros, onde a volatilidade pode mudar rapidamente devido a eventos inesperados ou informações novas (Danielsson, 2011) [30].

O modelo EWMA pode ser formalizado pela seguinte equação:

$$\sigma_t^2 = \lambda\sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)r_{t-1}^2 \quad (2.12)$$

Onde:
- σ_t^2: estimativa de variância condicional no tempo t,
- λ: parâmetro de suavização que controla a magnitude do peso atribuído ao valor mais recente,
- r_{t-1}^2: retorno quadrático no período t-1.

A constante λ geralmente é escolhida de maneira a suavizar entre os dados mais antigos e os mais recentes, sendo um valor entre 0 e 1. Se λ for próximo de 1, o modelo atribui maior peso aos dados passados, enquanto valores de λ mais baixos atribuem maior peso aos dados mais recentes. Geralmente os valores mais aceitos para

A principal vantagem do modelo EWMA consiste em sua flexibilidade e eficiência computacional. Ao contrário de modelos mais complexos, o EWMA não requer a estimação de múltiplos parâmetros nem o uso de métodos iterativos pesados, tornando-o atrativo para aplicações em tempo real ou em mercados com grande volume de dados. Além disso, o EWMA é particularmente crucial para captar a persistência de volatilidade em mercados financeiros, onde intervalos de alta volatilidade frequentemente seguem outros intervalos de alta volatilidade, e vice-versa.

Uma das principais críticas ao modelo EWMA, no entanto, é a sua simplicidade excessiva. Embora o modelo seja eficiente em termos computacionais, ele não leva em consideração a possibilidade de efeitos não-lineares ou a heterocedasticidade mais complexa que pode existir em alguns mercados. Modelos mais avançados, como o GARCH, tentam capturar essas nuances, mas o EWMA ainda se mantém como uma ferramenta importante devido à sua capacidade de ajustar rapidamente a volatilidade na medida que os dados mais recentes ocorrem.

O uso do modelo EWMA é amplamente reconhecido em diversas áreas do mercado financeiro. Por exemplo, no gerenciamento de risco de carteiras o modelo é comumente utilizado para calcular as variâncias e covariâncias dos ativos, que são fundamentais na alocação eficiente de capital. Também é utilizado na avaliação de Value at Risk (VaR), que é uma medida do risco de perda em uma carteira de ativos financeiros. A sua simplicidade e capacidade de adaptação rápida a mudanças tornam o modelo uma escolha popular para a estimativa da volatilidade em condições de mercado que apresentam maior instabilidade.

2.5.2 O Modelo GARCH

Os modelos autorregressivos são ferramentas amplamente utilizadas em séries temporais. O modelo GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*), proposto por Tim Bollerslev em 1986 [31], é uma extensão do modelo ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*), desenvolvido por Robert Engle em 1982 [32]. O GARCH é amplamente utilizado no mercado financeiro para modelar a volatilidade condicional. Os modelos se baseiam no princípio de heterocedasticidade, onde assume-se que a variância não é constante, mas sim variável.

O modelo GARCH(1,1) é uma versão simples, mas eficiente, do modelo GARCH, onde a volatilidade condicional depende de um termo autoregressivo e de um termo de média móvel. A equação de retorno r_t para um ativo em um modelo GARCH (1,1) é dada por:

$$\mathrm{r_t} = \mu + \epsilon_t \qquad (2.13)$$

Onde:

- r_t: retorno no tempo t;
- μ: média do retorno;
- ϵ_t: erro no tempo t, dado por $\epsilon_t = \sigma_t z_t$
- $z_t \approx N(0,1)$: é um ruído branco (*white noise),* com média 0 e variância 1.

A variância condicional σ_t^2 é modelada como uma função dos erros e da variância passada, dada pela fórmula:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \tag{2.14}$$

Onde:

- σ_t^2: é a variância condicional (volatilidade) no tempo t;
- α_0: constante;
- α_1: é o coeficiente que mede o efeito dos choques passados ϵ_{t-1}^2;
- β_1: é o coeficiente que mede o efeito da volatilidade passada σ_{t-1}^2.

A eficiência do modelo GARCH também pode ser avaliada pela sua estabilidade e pela capacidade de capturar dinâmicas complexas, com isso podemos introduzir o modelo utilizado neste estudo, o modelo GARCH DCC.

2.5.2.1 GARCH DCC

O modelo GARCH-DCC (*Dynamic Conditional Correlation*) é uma extensão do modelo GARCH. O modelo GARCH-DCC combina a estrutura GARCH para modelar a volatilidade e uma abordagem dinâmica para modelar a correlação entre os ativos ao longo do tempo. Esse modelo é especialmente útil em carteiras de ativos onde se deseja avaliar como as correlações entre os ativos variam com o tempo. O GARCH-DCC é um modelo bivariado (ou multivariado) que descreve as correlações dinâmicas entre os retornos de diferentes ativos ao longo do tempo [33]. Ele é formulado em duas etapas principais:

A primeira etapa envolve a modelagem da volatilidade condicional dos ativos individuais, de forma semelhante ao modelo GARCH(1,1) tradicional. Para cada ativo i (onde i=1,…,N), temos o modelo GARCH:

$$r_{it} = \mu + \epsilon_{it} \qquad (2.15)$$

Já para o erro condicional (resíduo) temos $\epsilon_{\mathrm{it}} = \sigma_{it} z_{it}$. Portanto, a variância condicional para o modelo GARCH-DCC ganha a seguinte característica.

$$\sigma_{\mathrm{it}}^2 = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}\epsilon_{i,t-1}^2 + \beta_{i1}\sigma_{i,t-1}^2 \qquad (2.16)$$

Esta etapa envolve a modelagem da correlação condicional entre os ativos, ou seja, como as correlações entre os resíduos ϵ_{it}. dos ativos variam ao longo do tempo. Para isso, o modelo DCC utiliza uma matriz de correlação dinâmica. A ideia é modelar as correlações entre os resíduos ϵ_{it} ajustados pelas volatilidades $\sigma_{i,t}$. Primeiro, calcula-se os resíduos normalizados para cada ativo, dado por:

$$\hat{\epsilon}_{it} = \frac{\epsilon_{it}}{\sigma_{it}} \qquad (2.17)$$

A matriz de covariância condicional de N ativos é dada por:

$$Q_t = (1 - \alpha - \beta)\bar{Q} + \alpha\hat{\epsilon}_{t-1}\widehat{\epsilon'}_{t-1} + \beta Q_{t-1} \qquad (2.18)$$

Onde:

- Q_t: matriz de covariância condicional no tempo t;
- $\bar{Q}$: matriz de covariância condicional de longo prazo (estimada a partir dos retornos históricos);
- α & β: parâmetros que controlam a resposta da matriz de covariância aos choques passados e à persistência da volatilidade passada, respectivamente.

Da mesma maneira a matriz de correlação dinâmica R_t pode ser obtida normalizando-se Q_t como:

$$R_t = \frac{1}{\sqrt{D_t}} Q_t D_t^{-\frac{1}{2}} \tag{2.19}$$

onde D_t é uma matriz diagonal contendo as variâncias σ_{it}^2 de cada ativo. A matriz R_t fornece as correlações dinâmicas entre os ativos ao longo do tempo.

2.5.3 Encolhimento Matricial (*Shrinkage*)

A técnica de encolhimento matricial, ou *shrinkage*, é um método utilizado na otimização de portfólios com o objetivo de melhorar a estimativa das matrizes de covariância dos ativos. Em termos simples, a ideia é "encolher" as estimativas das variâncias e covariâncias dos ativos. Na ideia do encolhimento, partimos da premissa que nem toda informação advinda da matriz é proveitosa pra construção de modelo e que muitos dos dados possam ser ruídos brancos (*white noise*), com isso eliminando parte dos dados conseguiríamos eliminar mais informações inúteis ao modelo.

Na otimização clássica de portfólios, uma das etapas centrais é a estimativa das covariâncias entre os ativos. No entanto, as estimativas a partir de dados históricos podem ser muito sensíveis a variações nos dados de entrada, especialmente quando o número de ativos é grande em relação ao número de observações históricas. Isso pode gerar matrizes de covariância com alta variabilidade, que podem resultar em portfólios subótimos, com ativos muito correlacionados ou com estimativas de risco imprecisas [34].

A técnica funciona de maneira que a matriz de covariância original é combinada com uma matriz de covariância "encolhida" (normalmente, uma matriz de covariância baseada em um modelo mais simplificado). O parâmetro de *shrinkage* controla o quanto de "encolhimento" é aplicado, equilibrando entre as estimativas baseadas nos dados históricos e a matriz de covariância mais simples. Formalmente, a matriz de covariância ajustada $\Sigma_{shrinked}$ é dada por:

$$\Sigma_{shrinked} = \lambda\, \Sigma_{empirical} + (1 - \lambda)\Sigma_{prior} \tag{2.20}$$

Onde:

- $\Sigma_{shrinked}$: matriz de covariância encolhida;

-$\Sigma_{empirical}$: matriz de covariância empírica calculada a partir dos dados históricos

-Σ_{prior}: matriz de covariância empírica calculada a partir dos dados históricos

- λ: é o parâmetro de *shrinkage*, controlando o grau de encolhimento [35].

Ao suavizar as estimativas extremas das covariâncias, a técnica ajuda a reduzir o risco de construir um portfólio baseado em relações espúrias entre os ativos, ou seja, reduz consideravelmente o risco de *overfitting* [36]. Em muitas situações práticas, portfólios otimizados com *shrinkage* podem apresentar um desempenho superior em comparação com a otimização tradicional, especialmente quando se trabalha com grandes quantidades de ativos ou amostras históricas pequenas [35].

2.5.4 Estimador Invariante a Rotação (RIE)

O *Rotational Invariant Estimator* (RIE) possui como principal característica, ser invariável a rotações, ou seja, ele não é afetado por transformações ortogonais nos dados. Isso é importante quando se trabalha com dados de alta dimensionalidade, onde a estrutura de correlação entre os ativos pode ser complexa. O RIE foi desenvolvido para melhorar a robustez das estimativas de covariância, especialmente quando as amostras de dados são limitadas ou quando as matrizes de covariância empíricas são instáveis [37].

O RIE é baseado na ideia de que, ao aplicar uma rotação ortogonal do tipo $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}^{\mathrm{N\,x\,N}}$ (uma matriz com a propriedade $\mathbb{Q}^{\mathrm{T}}\mathbb{Q} = \mathrm{I}$, onde I é a matriz identidade), a estrutura da matriz de covariância deve permanecer inalterada. A ideia é projetar um estimador de covariância que seja invariante a essas rotações. O método pode ser entendido como uma regularização da matriz de covariância empírica, que visa melhorar a estabilidade das estimativas.

O RIE pode ser formulado de forma que a matriz de covariância estimada $\hat{\Sigma}_{RIE}$ seja uma média ponderada entre a matriz de covariância empírica $\hat{\Sigma}_{EMP}$ e uma matriz de covariância prior $\hat{\Sigma}_{prior}$, que pode ser uma matriz simples, como a identidade:

$$\hat{\Sigma}_{RIE} = \lambda\, \Sigma_{empirical} + (1-\lambda)\Sigma_{prior} \qquad (2.21)$$

Onde λ é um parâmetro de regularização que controla a quantidade de suavização aplicada. Para garantir a invariância à rotação, o RIE pode ser aplicado ajustando a forma da matriz de covariância de maneira que o impacto de transformações ortogonais nos dados seja minimizado [37].

Em suma, a principal vantagem do RIE é sua invariância a rotações. Isso significa que o estimador não é influenciado por transformações ortogonais nos dados, o que é uma característica desejável quando se lida com ativos financeiros que podem ter variações complexas de correlação. Em termos matemáticos, se aplicarmos uma rotação R aos dados de entrada X, então a estimativa de covariância não deve mudar:

$$\hat{\Sigma}_{RIE}(\mathrm{RX}) = R\hat{\Sigma}_{RIE}(X)R^T \qquad (2.22)$$

Isso garante que a matriz de covariância estimada não seja afetada por rotações nos dados [37].

3. METODOLOGIA

3.1 Função Objetiva e Otimização

Dentro do contexto de um algoritmo de Risk Parity. A função objetiva do busca minimizar a diferença entre a contribuição de risco de cada ativo no portfólio e a contribuição de risco desejada (*rb*). Analisando detalhadamente. Analisando a função objetiva, disposta no Apêndice B.

Figura 6: Algoritmo de função objetiva desenvolvido em Python.

```
obj_fun = lambda x, p_cov, rb: np.sum((x*np.dot(p_cov,
x)/np.dot(x.transpose(), np.dot(p_cov, x))-rb)**2)
```

Elucidando acerca de cada termo.

x: Representa o vetor de pesos dos ativos no portfólio;

p_cov: Matriz de covariância (indicando o risco e as correlações entre os ativos).

rb: O *Target* (valor alvo) para a contribuição de risco de cada ativo, que que é igual para todos os ativos (para o objetivo de "equal risk contribution", o que implica que todos os ativos devem ter a mesma contribuição de risco total).

O que a função faz é calcular a diferença entre a contribuição de risco de cada ativo (dada por x * np.dot(p_cov, x) / np.dot(x.transpose(), np.dot(p_cov, x))) e a contribuição de risco alvo rb, e depois soma o quadrado dessas diferenças para minimizar essa discrepância. Em outras palavras, o algoritmo busca ajustar os pesos dos ativos de forma que cada um tenha uma contribuição de risco semelhante a rb.

Também foram impostas condições de contorno (restrições). Na qual o termo *cons_sum_weight* impõe uma restrição que o peso total do portfólio seja 1, ou seja, o portfólio permanece *long only* 100% comprado em 100% do tempo. Já a outra condição de contorno *cons_long_only_weight*, impõe uma restrição de que todo percentual alocado em algum ativo deve ser positivo, ou seja, não podemos ficar vendidos em algum ativo.

3.2 Estratégias e Modelagem dos Dados

O objetivo deste estudo, consistiu em aplicar o modelo de Risk Parity aplicado na bolsa brasileira. Para isso adotamos a estratégia de investir em ETF’s que também tenham exposição cambial e no mercado estrangeiro como um todo, a fim de buscar maior diversificação da carteira. Estudos, como os de Barber e Odean (2000) [38], demonstram que investidores amadores frequentemente performam abaixo do mercado, por tentarem escolher ações específicas, enquanto pesquisas de Fama e French (1992) [39], comprovam que a diversificação e estratégias passivas tendem a superar muitas tentativas de stock picking. A gestão passiva de um ETF também reduz os custos associados à negociação ativa, como as comissões de corretagem, tornando-a uma alternativa mais acessível e rentável.

Neste contexto foi feito uma lista de ETF’s negociados na bolsa brasileira, que tivessem pelo menos 4 anos de negociação, com isto chegamos na lista dos seguintes ETF’s.

Tabela 1: ETFs da B3 selecionados

Ticker	Indices
XINA11.SA	Índice MSCI China
GOLD11.SA	Índice de Preço do Ouro (Spot Gold)
XFIX11.SA	Índice de Fundos Imobiliários (IFIX)
ACWI11.SA	Índice MSCI All Country World Index (ACWI)
BOVA11.SA	Índice Bovespa (IBOV)
BBSD11.SA	Índice Small Cap Brasil (SMLL)
ESGB11.SA	Índice S&P ESG Brasil
HASH11.SA	Índice Blockchain (Hashdex)
DIVO11.SA	Índice de Dividendos (IDIV)
IVVB11.SA	Índice S&P 500 (EUA)
MATB11.SA	Índice de Materiais Básicos (IMAT)
SMAL11.SA	Índice Small Cap Brasil (SMLL)
PIBB11.SA	Índice Brasil 50 (IBrX-50)
FIXA11.SA	Índice de Renda Fixa (CDI)
IMAB11.SA	Índice de Mercado de Renda Fixa (IMA-B)
B5MB11.SA	Índice MSCI Small Cap Brasil
B5P211.SA	Índice MSCI Small Cap Brasil (Microcaps)

Com estes índices foi adotada a seguinte estratégia. Foi criado um conjunto *in sample* que foi utilizado para simular as matrizes de covariâncias e correlações, utilizando a série histórica de retornos dos ETF’s.

Para isto foi utilizada a série histórica de retornos desde 01-04-2021 (primeiro de abril de 2021), até 01-04-2022 (primeiro de abril de 2021). Totalizando 1 ano de retornos, idealmente seria preferível utilizar uma série mais longa de dados. Porém, o mercado brasileiro ainda é muito jovem e fundos passivos de índice é algo recente na nossa bolsa. Portanto, existem poucos fundos de índice com um período relativamente longo para que simulações mais robustas possam ser utilizadas.

Com a série de retornos obtida, foram utilizados grupos de estimadores de risco, como objetivo de criar a matriz de covariância mais robusta afim de obtermos o melhor processo de análise para alocação da carteira. Foram utilizados os modelos descritos na fundamentação teórica. RIE, EWMA, Encolhimento de matrizes e EWMA com encolhimento. Também foi adotado a matriz de covariâncias simples, sem utilizar nenhum estimador de risco. O modelo GARCH não foi utilizado na avaliação dos resultados por não ter apresentado um resultado satisfatório.

Este projeto foi desenvolvido na linguagem de programação Python, foram utilizadas tanto bibliotecas já amplamente utilizadas para fins acadêmicos e profissionais, como também foram implementas bibliotecas proprietárias, cujos códigos implementados serão fornecidos via apêndice.

Após importar as principais bibliotecas foi realizada uma consulta e um algoritmo foi desenvolvido para capturar todos os principais ETF’s de interesse.

Com os dados (série histórica de preços) capturadas. Obtemos os retornos e analisamos a volatilidade dos ativos. Como já supracitado anteriormente, os dados foram divididos em dois conjuntos. O primeiro onde seria utilizado para obter as matrizes de covariância e correlação utilizando os otimizadores e o segundo para efetivamente rodarmos o backtest. No primeiro conjunto de dados foram obtidos os seguintes padrões de volatilidade.

Tabela 2: Volatilidade do primeiro conjunto (01/04/2021 – 01/04/2022)

ETF	Volatilidade Anualizada (%)
HASH11.SA	67.01
XINA11.SA	33.65
MATB11.SA	26.60
SMAL11.SA	26.11
ESGB11.SA	22.90
ACWI11.SA	21.08
PIBB11.SA	20.05
BOVA11.SA	19.42
GOLD11.SA	18.94
DIVO11.SA	18.81
BBSD11.SA	17.48
IVVB11.SA	17.31
XFIX11.SA	10.87
B5MB11.SA	9.99
IMAB11.SA	9.02
FIXA11.SA	5.96
B5P211.SA	4.84

Tabela 3: Volatilidade do segundo conjunto (03/04/2022 – 31/12/2024)

ETF	Volatilidade Anualizada (%)
HASH11.SA	48.81
XINA11.SA	31.27
MATB11.SA	24.59
SMAL11.SA	20.99
ESGB11.SA	20.68
ACWI11.SA	17.81
PIBB11.SA	17.51
BOVA11.SA	17.20
GOLD11.SA	17.02
DIVO11.SA	16.45

BBSD11.SA	16.17
IVVB11.SA	14.91
XFIX11.SA	12.52
B5MB11.SA	8.33
IMAB11.SA	7.44
B5P211.SA	7.24
FIXA11.SA	2.99

Para realização do backtest foi utilizada a biblioteca **bt**. bt - Flexible Backtesting for Python — bt 0.2.10 documentation. Em conjunto com as bibliotecas proprietárias com o modelo de otimização por Risk Parity e os estimadores de risco.

A fim de ter um resultado mais coerente e satisfatório o portfólio foi rebalanceado mensalmente, também foi simulado os diferentes portfólios se comparados aos principais benchmarks de referência do país. O índice BOVESPA e o CDI.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Matrizes de Correlação

A análise foi iniciada avaliando a matriz de correlação para os diferentes estimadores de risco para o conjunto de testes.

Figura 6: Matriz de Correlação Simples

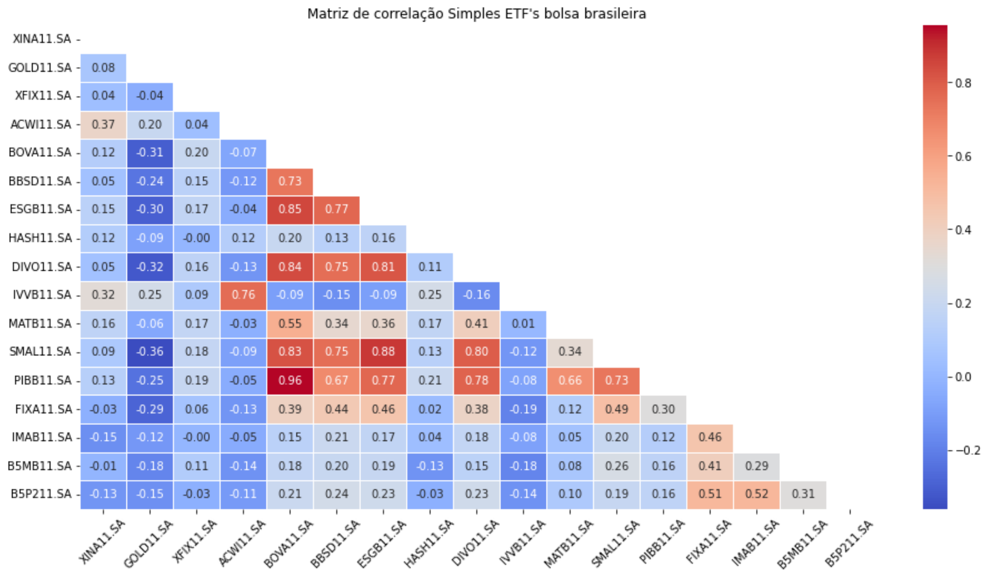


Figura 7: Matriz de Correlação RIE

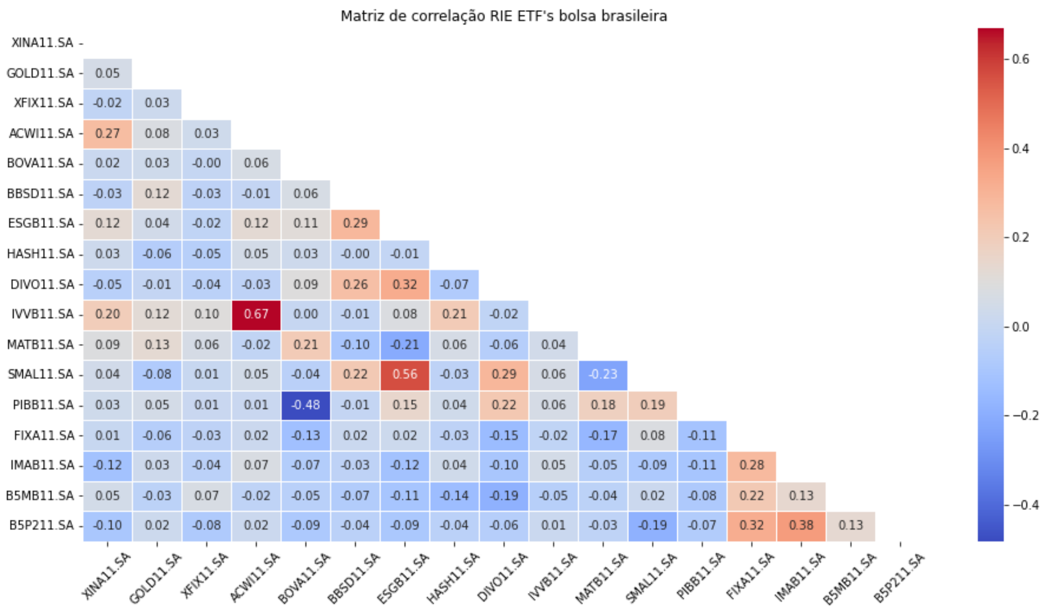


Figura 8: Matriz de Correlação EWMA

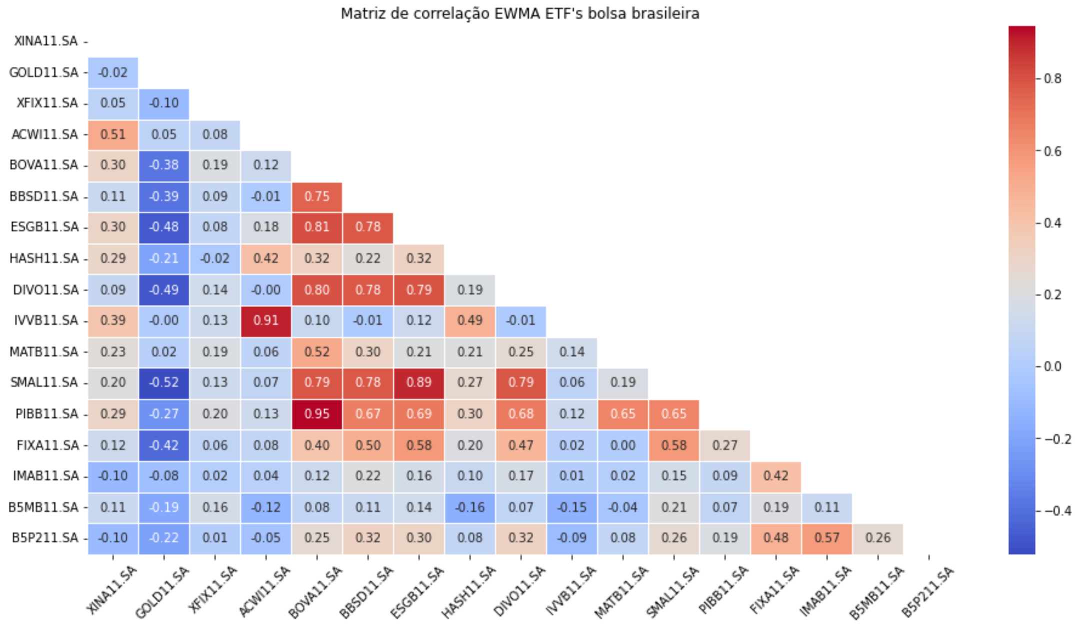


Figura 9: Matriz de Correlação com Encolhimento

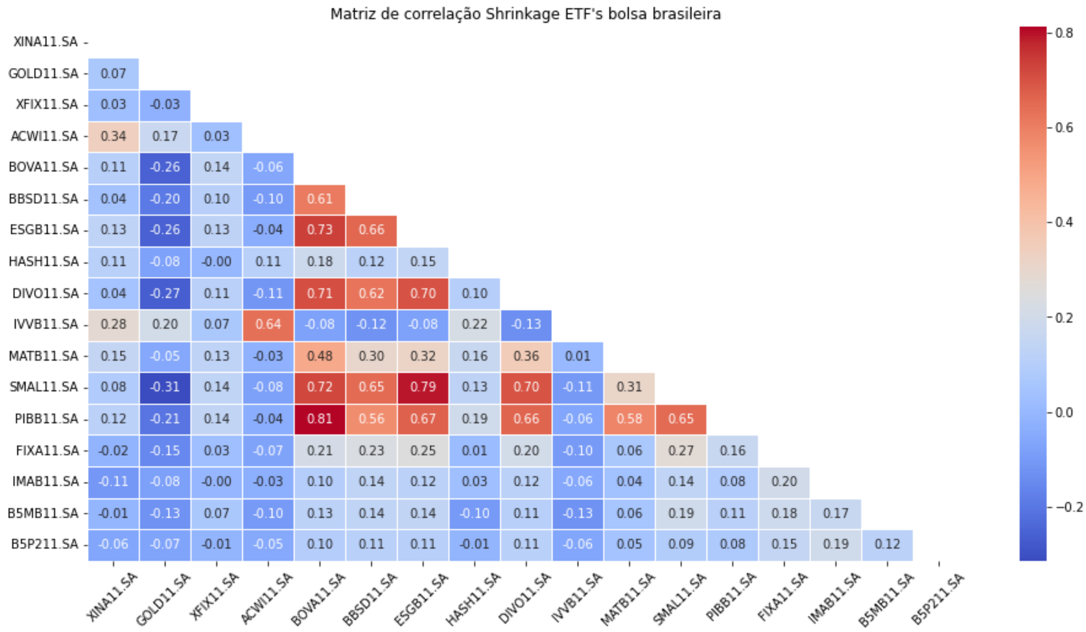
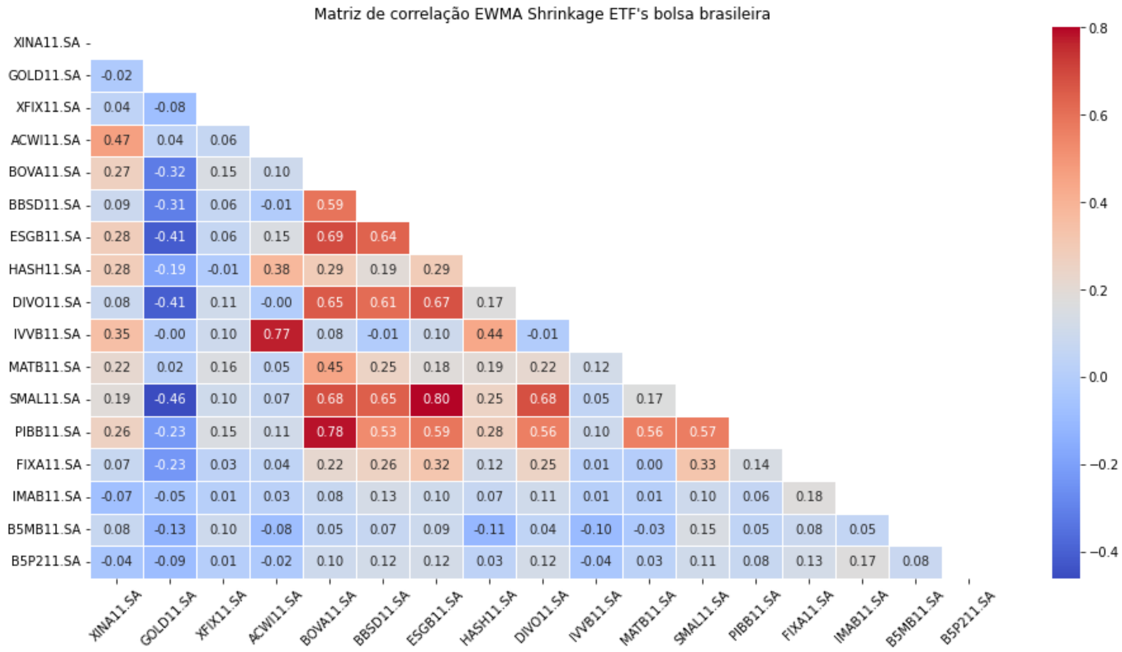


Figura 10: Matriz de Correlação EWMA com Encolhimento



Ao analisar as matrizes de correlação é possível observar que o estimador invariante a rotações apresentou dificuldades em encontrar correlações/descorrelações entre os ativos selecionados. O RIE pode apresentar dificuldades, especialmente em situações de alta dimensionalidade e em dados que apresentem muitos ruídos brancos. Talvez pelo tempo relativamente curto utilizado (1 ano). Com um período maior e um tratamento melhor dos dados é provável que o estimador apresente melhores resultados.

Por outro lado, conseguimos observar que modelos mais simples como o EWMA e o encolhimento, assim como o modelo sem a utilização de estimadores conseguiram identificar muito mais correlações entre os ativos. Lembrando que nem sempre essas correlações podem de fato significar que o modelo seja necessariamente robusto. Modelos mais complexos, como o RIE, podem se tornar muito sensíveis a variações pequenas nos dados, especialmente se o número de variáveis for grande ou se a amostra de dados for limitada. Isso pode resultar em *overfitting*, onde o modelo tenta ajustar demasiadamente os dados, criando um modelo que performa bem nos dados de treinamento, mas falha em capturar a correlação real em novos dados ou em dados com variações mais "naturais".

Os modelos mais simples são menos sensíveis ao ruído e têm maior estabilidade em cenários com amostras menores ou dados mais simples. Eles capturam bem as correlações lineares e não introduzem complexidade desnecessária.

4.2 Risco por Ativo e Risco Marginal

O risco marginal de um ativo refere-se à contribuição adicional para o risco total do portfólio ao adicionar ou alterar a quantidade desse ativo. Em outras palavras, é o risco adicional que um ativo marginal (ou seja, uma unidade adicional desse ativo) traz para o portfólio.

No contexto de Risk Parity, o risco marginal ajuda a determinar a quantidade ótima de alocação de cada ativo, de modo que a contribuição de risco de cada ativo seja proporcional. O modelo ajusta as alocações de forma que a contribuição marginal de risco de cada ativo seja igual, o que resulta em uma distribuição de pesos no portfólio que balanceia o risco total. Foram obtidos diferentes alocações para cada estimador de risco, mas com todos os estimadores respeitando o princípio primordial de um modelo de Risk Parity, distribuindo o risco de maneira equânime ao longo da carteira.

Figura 11: Contribuição Total para o Risco da Carteira sem Estimador

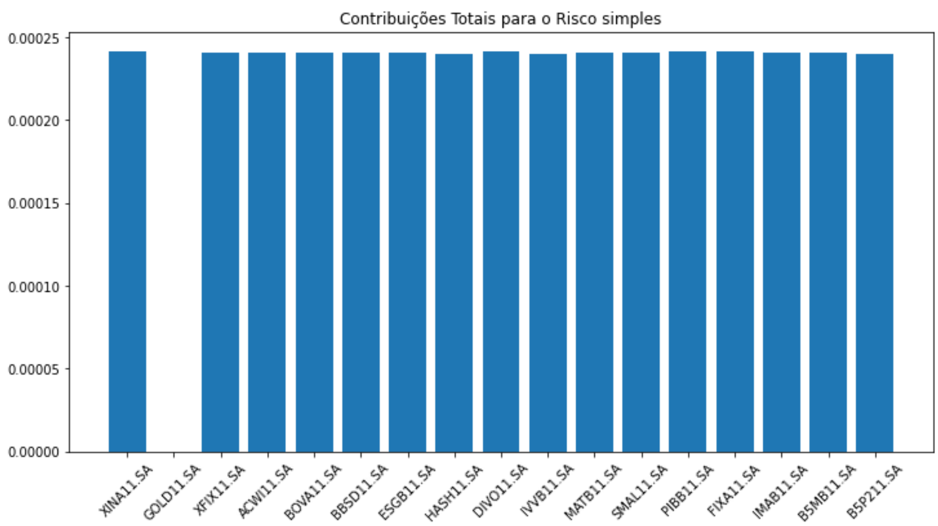


Figura 12: Contribuição Total para o Risco da Carteira RIE

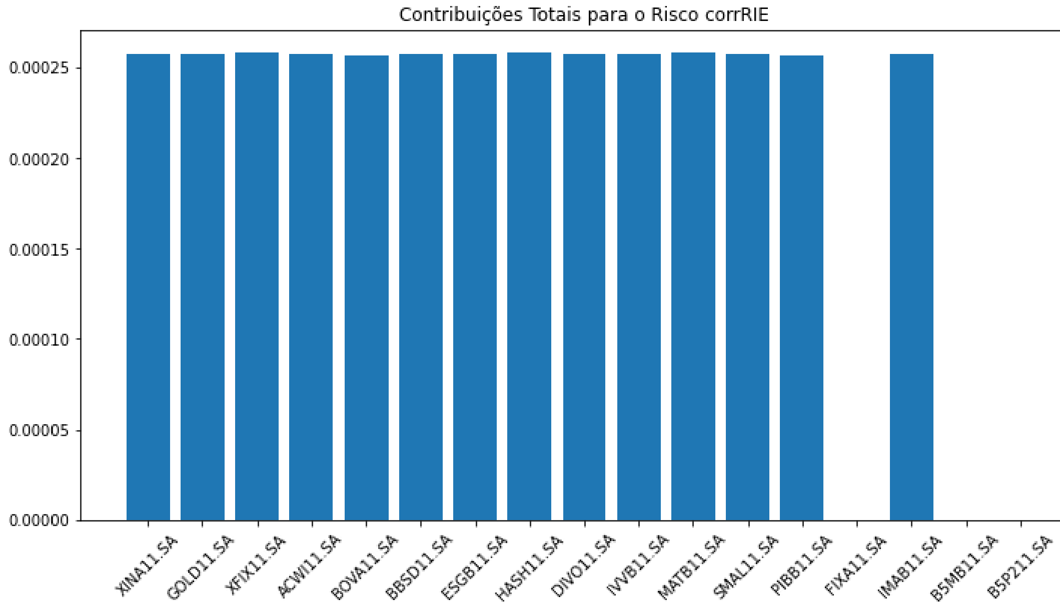


Figura 13: Contribuição Total para o Risco da Carteira EWMA

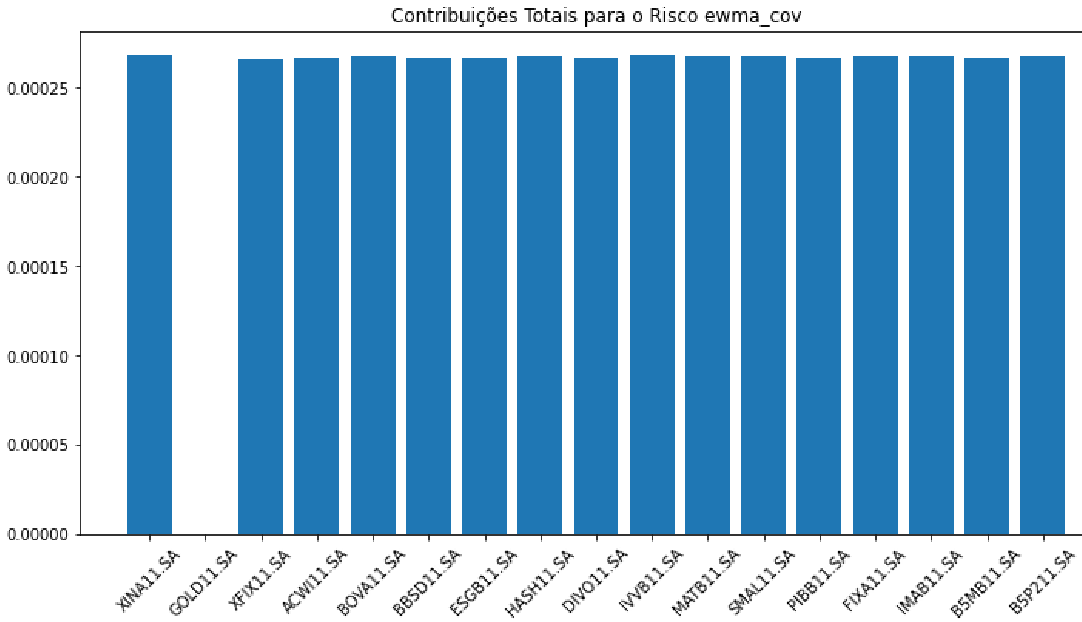


Figura 14: Contribuição Total para o Risco da Carteira com Encolhimento

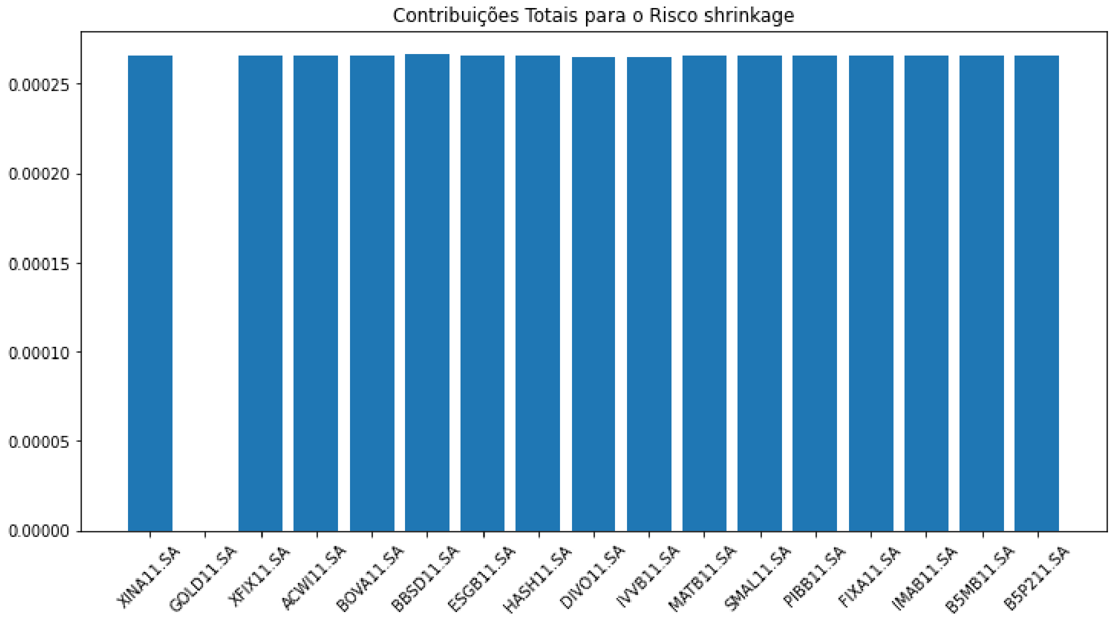


Figura 15: Contribuição Total para o Risco da Carteira EWMA com Encolhimento

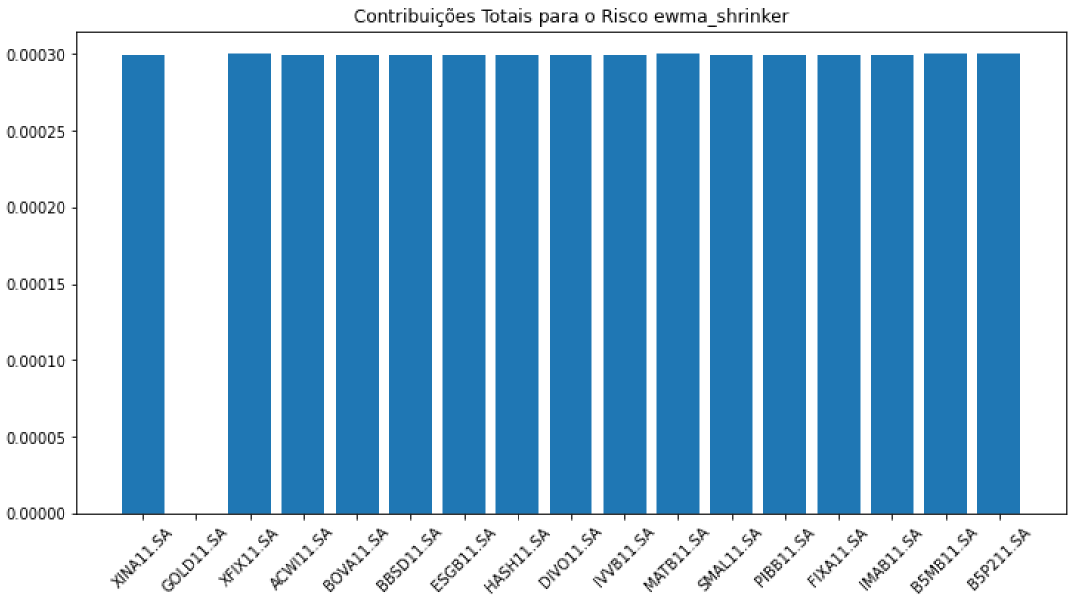


Tabela 4: Alocação dos Ativos

Ativos	Alocação Simples (%)	Alocação RIE (%)	Alocação EWMA (%)	Alocação Shrinkage (%)	Alocação EWMA Shrinkage (%)
XINA11.SA	3.16	3.78	1.81	3.59	2.13
GOLD11.SA	0.00	6.56	0.00	0.00	0.00
XFIX11.SA	10.03	14.19	8.02	10.00	8.70
ACWI11.SA	5.60	4.53	4.35	6.22	4.98
BOVA11.SA	2.68	8.28	2.82	3.16	3.38
BBSD11.SA	3.45	6.87	4.10	4.05	4.85
ESGB11.SA	2.33	4.07	2.31	2.78	2.81
HASH11.SA	1.60	2.12	1.35	1.86	1.61
DIVO11.SA	3.17	6.17	3.39	3.70	4.05
IVVB11.SA	7.10	5.00	4.90	7.54	5.47
MATB11.SA	2.87	5.21	3.35	3.34	3.90
SMAL11.SA	2.12	4.44	2.06	2.53	2.51
PIBB11.SA	2.70	7.34	2.93	3.16	3.48
FIXA11.SA	12.18	0.00	10.79	11.49	10.83
IMAB11.SA	10.65	21.43	12.30	10.90	12.23
B5MB11.SA	10.63	0.00	14.24	10.79	13.42
B5P211.SA	19.73	0.00	21.30	14.90	15.66

É notório observar que o algoritmo RIE evitou alocar na renda fixa e foi o único que alocou no etf de ouro, que é bastante descorrelacionado dos ativos de renda variável em geral, como demonstrado no capítulo 4.1.

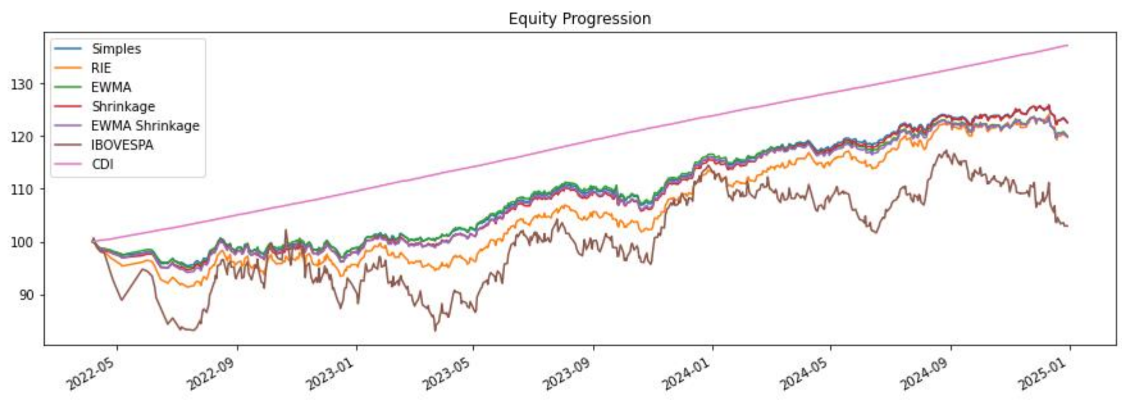
O RIE é projetado para ser robusto a diferentes padrões de dados, ajustando-se a uma maior diversidade de correlações entre os ativos. Ele não apenas considera a volatilidade de cada ativo, mas também as interações complexas entre eles, levando em conta a invariância rotacional. O modelo tem a capacidade de identificar e captar estruturas de risco mais complexas, o que pode ter levado à alocação no ouro, um ativo tradicionalmente visto como um refúgio em tempos de volatilidade ou crises econômicas.

Modelos mais simples, como o EWMA ou Shrinkage, não levam em consideração as interações mais complexas entre os ativos de maneira tão detalhada como o RIE. Não possuindo a mesma consideração para mudanças estruturais ou comportamentos mais dinâmicos no mercado. Eles podem ser mais inclinados a dar maior ênfase a ativos de risco tradicional (como a renda fixa) devido a um foco maior em estabilidade histórica e previsível, em vez de tentar identificar proteção contra eventos extremos ou correlações menos evidentes.

4.3 Backtest

Considerando que investiríamos 100 reais em cada portfólio teríamos o seguinte resultado.

Figura 19: Evolução das carteiras para diferentes estimadores de risco.



Embora as carteiras tenham apresentado um desempenho abaixo do CDI no período em questão, é importante destacar que o cenário macroeconômico esteve marcado por uma taxa de juros excepcionalmente elevada, refletindo o comportamento do CDI, que foi particularmente alto durante esse intervalo.

Por outro lado, as carteiras foram estruturadas para capturar retornos mais sustentáveis e diversificados no longo prazo, priorizando uma combinação entre diversos ETFs que, naturalmente, apresentam maior volatilidade e sensibilidade a flutuações de mercado. Em períodos de juros elevados, essas classes de ativos tendem a ter um desempenho relativo mais moderado, pois o custo de oportunidade de investir em ativos de renda fixa aumenta significativamente. Avaliando esta questão o benchmark escolhido para as carteiras foi o índice BOVESPA.

Tabela 5: Principais Métricas

Estatística	Simples	RIE	EWMA	Shrinkage	EWMA Shrinkage	IBOVESPA	CDI
Retorno Total	22.69%	19.89%	20.04%	22.53%	19.84%	2.99%	37.21%
Sharpe Diário	1.58	0.96	1.37	1.44	1.24	0.16	23.26
Sortino Diário	2.69	1.63	2.30	2.44	2.09	0.28	N/C
CAGR	7.76%	6.86%	6.91%	7.71%	6.84%	1.08%	12.26%
MaxDrawdown	-4.61%	-8.64%	-4.91%	-5.42%	-5.84%	-18.77%	N/C
Calmar	1.69	0.79	1.41	1.42	1.17	0.06	N/C
Vol Diária Anualizada	5.55%	8.33%	5.76%	6.08%	6.30%	19.45%	0.57%
Melhor Dia	1.22%	2.12%	1.27%	1.33%	1.46%	6.59%	0.71%
Pior Dia	-1.69%	-2.05%	-2.01%	-1.75%	-1.98%	-4.22%	0.04%
Melhor Mês	4.54%	6.21%	4.60%	4.91%	5.02%	12.72%	1.28%
Pior Mês	-2.07%	-3.36%	-2.43%	-2.21%	-2.56%	-10.05%	0.79%
Sharpe Anualizado	1.40	1.31	0.98	1.43	1.00	0.29	7.43
Vol Anualizada	8.39%	9.29%	10.79%	8.45%	10.98%	24.30%	1.62%
Melhor Ano	17.64%	18.71%	18.26%	18.03%	18.75%	24.30%	13.16%
Pior Ano	5.78%	5.58%	2.99%	6.08%	3.22%	-10.06%	10.87%

O modelo RIE alocou recursos majoritariamente em renda variável, particularmente em ações como GOLD11.SA e IMAB11.SA, e não teve exposição significativa a renda fixa. Isso é um reflexo da forma como o RIE se comporta diante da dinâmica de correlação entre os ativos. Podemos inferir que em eventuais cenários de mercado de alta o algoritmo RIE pode performar de maneira superior aos demais modelos que tiveram uma alocação superior em ETF’s com perfil mais conservador.

5. CONCLUSÕES

Esse estudo se propôs a criar uma abordagem inovadora criando uma carteira balanceada e igualmente diversificada, mas não atribuindo os mesmos pesos a cada ativo e sim atribuindo o mesmo risco, de modo que cada ativo contribuísse de maneira equânime ao risco total do portfólio, mantendo a volatilidade controlada e rebalanceando as carteiras mensalmente.

Também existem estudos, como o caso da anomalia de baixa volatilidade e sobre como vários modelos falham ao tentar bater o mercado. Por isso este estudo buscou adotar a estratégia de investir em ETFs de modo que fosse possível buscar grande diversificação na carteira investindo em diferentes classes de ativos, desde ETFs de renda variável, fixa, inflação e fundos imobiliários. Um ponto de relevância é que devido ao mercado de ETFs ser bastante embrionário no Brasil, não foi possível avaliar um horizonte de longo prazo, permitindo com que os algoritmos e estimadores de risco conseguissem obter maior informação do mercado.

Um fator que pode explicar o modelo mais simples ter se sobressaído, é o fato de a matriz de covariância simples ser mais direta não realizando ajustes complexos, portanto pode ter se destacado devido à sua simplicidade. Em mercados mais estáveis ou com correlações mais constantes entre os ativos (como ETFs no Brasil, que podem ter comportamentos mais previsíveis), ele pode capturar bem o risco sem a necessidade de ajustes sofisticados. O encolhimento de matrizes ajusta a matriz de covariância para evitar estimativas extremas e melhorar a robustez, especialmente quando os dados históricos são limitados ou ruidosos. O encolhimento provavelmente se destacou porque pode ter suavizado os dados ruidosos do mercado brasileiro, levando a uma estimativa de risco mais estável e menos sensível a variações de curto prazo.

O EWMA dá mais peso aos dados mais recentes, o que pode ser útil em mercados voláteis, mas dado o intervalo de tempo analisado, não se mostrou efetivamente, pode ter sido realmente um efeito do período analisado e o estimador pode ter resultados melhores em outros períodos. Já o RIE é mais complexo e tenta lidar com a variabilidade de dados, mas pode ser menos eficaz quando a estrutura de risco é mais estável ou linear. O RIE pode ter introduzido um excesso de complexidade sem agregar valor substancial no seu backtest.

Um ponto bastante importante para trabalhos futuros é realizar este estudo, mas desta vez usando ETFs da bolsa americana e convertendo para Reais Brasileiros (BRL) utilizando a curva de dólar. Isso permitirá um horizonte de evento maior e testará com maior eficácia e eficiência a robustez do modelo.

No geral avaliando que enfrentamos um cenário muito forte de alta de juros, fica difícil que os modelos batam o CDI com um período de diversificação tão limitado, por outro lado, esses modelos são criados para ter grande resiliência no longo prazo e num período bastante desafiador os modelos conseguiram apresentar um alto nível de resiliência.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. The Journal of Finance, 7(1), 77-91.

[2] ASSAF NETO, Alexandre. Finanças Corporativas e Valor. 8ª ed. São Paulo. p. 81-294. Editora Atlas S.A. 2014.

[3] Fama, E. F., & French, K. R. (1993). Common risk factors in the returns on stocks and bonds. Journal of Financial Economics, 33(1), 3-56.

[4] Goldfarb, D., & Iyengar, G. (2003). Robust portfolio selection problems. Mathematical Finance, 13(4), 437-466.

[5] Dantzig, G. B., & Thapa, M. (2003). Linear Programming 2: Theory and Extensions. Springer.

[6] Goldberg, D. E. (1989). Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning. Addison-Wesley.

[7] Sharpe, W. F. (1964). "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk." *Journal of Finance*.

[8] Jensen, M. C. (1968). "The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-1964." *Journal of Finance*.

[9] Sortino, F. A. (1994). Better Analysis of Up and Down Markets. *The Journal of Portfolio Management*, 20(1), 56-64.

[10] Rupper, David. Matteson, David S.; Statistics and Data Analysis for Financial Engineering: With R Examples. 2nd Edition. Springer. 2015.

[11] Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. J. (2014). *Investments*. McGraw-Hill.

[12] Luenberger, D. G. (1998). *Investment Science*. Oxford University Press.

[13] Sharpe, W. F. (1970). *Portfolio Theory and Capital Markets*. McGraw-Hill.

[14] Chandra, P. (2011). *Investment Analysis and Portfolio Management*. McGraw-Hill.

[15] Elton, E. J., & Gruber, M. J. (2014). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. Wiley.

[16] Brealey, R. A., & Myers, S. C. (2016). *Principles of Corporate Finance*. McGraw-Hill.

[17] Grinold, R. C., & Kahn, R. D. (2000). *Active Portfolio Management*. McGraw-Hill.

[18] Smith, D. M. (2018). *Portfolio Construction and Risk Management*. Wiley.

[19] Hull, J. C. (2017). *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson.

[20] Reilly, F. K. (2013). *Investment Analysis*. Cengage Learning.

[21] Merton, R. C. (1990). *Continuous-Time Finance*. Blackwell.

[22] Damodaran, A. (2014). *Applied Corporate Finance*. Wiley.

[23] Phillips, G. M., & Baker, H. K. (2009). *Risk Management and Derivatives*. Wiley.

[24] O'Shaughnessy, J. P. (2005). *What Works on Wall Street*. McGraw-Hill.

[25] Lettau, M., & Viswanathan, S. (2014). "The Low-Volatility Anomaly: A Decomposition Analysis." *The Journal of Financial Economics*.

[26] Baker, M., & Wurgler, J. (2006). "Investor Sentiment and the Cross-Section of Stock Returns." *The Journal of Finance*, 61(4), 1645-1680.

[27] Asness, C., Frazzini, A., & Pedersen, L. H. (2013). "Low-Risk Stocks Outshine Higher-Risk Stocks." *AQR Capital Management*.

[28] Novy-Marx, R. (2013). "The Other Side of Value: The Gross Profitability Premium." *Journal of Financial Economics*.

[29] Poon, S. H., & Granger, C. W. J. (2003). "Forecasting volatility in financial markets: A review." Journal of Economic Literature.

[30] Danielsson, J. (2011). *Financial Risk Forecasting: The Theory and Practice of Forecasting Market Risk with Implementation in R*. Wiley.

[31] **Bollerslev, T. (1986).** Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. Journal of Econometrics, 31(3), 307-327.

[32] **Engle, R. F. (1982).** Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50(4), 987-1007.

[33] **Engle, R. F. (2002).** "Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate GARCH Models." *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(3), 339-350.

[34] **Ledoit, O., & Wolf, M. (2004).** *Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix*. Journal of Portfolio Management, 30(4), 110–119.

[35] Scherer, B. (2012). *Optimal Portfolio Choice and the Shrinkage Estimation of Covariance Matrices*. In *Financial Risk Forecasting*. Wiley.

[36] Jorion, P. (1986). *Bayes-Stein Estimators for Portfolio Analysis*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 21(3), 279–292.

[37] Dykstra, R. L., & Lytle, R. L. (1981). *A class of rotationally invariant estimators for covariance matrices*. Journal of the American Statistical Association, 76(375), 726–734.

[38] Barber, B. M., & Odean, T. (2000). *Trading is hazardous to your wealth: The common stock investment performance of individual investors*. Journal of Finance, 55(2), 773-806.

[39] Fama, E. F., & French, K. R. (1992). *The Cross-Section of Expected Stock Returns*. Journal of Finance, 47(2), 427-465.

APÊNDICE A – JUPYTER NOTEBOOK

```
import pandas as pd
import yfinance as yf
import numpy as np
import seaborn as sns
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
etfs_utilizados = ["XINA11.SA", "GOLD11.SA", "XFIX11.SA",
        "ACWI11.SA", "BOVA11.SA", "BBSD11.SA", "ESGB11.SA",
        "HASH11.SA","DIVO11.SA", "IVVB11.SA", "MATB11.SA",
"SMAL11.SA",    "PIBB11.SA", "FIXA11.SA", "IMAB11.SA",
"B5MB11.SA","B5P211.SA"]
```

```
# Lista de ETFs na B3
etfs_b3 = etfs_utilizados

# Período de interesse
start_date = "2021-04-01"
end_date = "2024-12-31"  # Data atual

# Função para obter histórico de preços de fechamento
def get_etf_close_prices(etfs, start, end):
    all_data = {}
    for etf in etfs:
        print(f"Baixando dados para {etf}...")
        ticker = yf.Ticker(etf)
        hist = ticker.history(start=start, end=end, auto_adjust =
False)
        if not hist.empty:
            all_data[etf] = hist["Adj Close"]  # Preço de fechamento
    return pd.DataFrame(all_data)

# Obter dados
df_prices = get_etf_close_prices(etfs_b3, start_date, end_date)
```

```
# Conjunto de treinamento
df = df_prices["2021-04-01":"2022-04-01"].bfill()
```

```
# Conjunto de testes
df2 = df_prices["2022-04-02":]
```

```
# Bibliotecas Proprietárias
import bt
import equalriskcontribution as erc
import ERC_functions as erc_fun
import aux_fun as ax
import portfolio_metrics as pm
import erc_mod as erc_m
import Risk_estimators as re
```

```
# Matrizes de Covariância e Correlação para todos os estimadores de 
risco

risk_estimators = {'simples' : re.shrinkage,
                   'corrRIE' : re.corrRIE,
                   'ewma_cov' : re.ewma_cov,
                   'shrinkage' : re.shrinkage,
                   'ewma_shrinker': re.shrinked_ewma}
```

```
cov_matrixes = []
corr_matrixes = []
for name, res in risk_estimators.items():
    print(f"Obtendo matriz de correlação para {name}")
    if name == "ewma_shrinker":
        df_cov = res(prices = df, alpha = .1, gamma = .98, norm = 
False)
    elif name == "simples":
        df_cov = res(prices = df, alpha = 0, norm = False)
    else:
        df_cov = res(prices = df)
    cov_matrixes.append(pd.DataFrame(df_cov, index = df.columns, col-
umns = df.columns))
    std_dev = np.sqrt(np.diag(df_cov))
    df_corr = df_cov / np.outer(std_dev, std_dev)
    corr_matrixes.append(pd.DataFrame(df_corr, index = df.columns, 
columns = df.columns))
```

```
lista_estimadores = ["Simples", "RIE", "EWMA", "Shrinkage", "EWMA 
Shrinkage"]

for i in range(5):
    mask = np.triu(np.ones_like(corr_matrixes[i], dtype=bool))
    plt.figure(figsize=(16, 8))
    sns.heatmap(corr_matrixes[i], mask=mask, annot=True, cmap="cool-
warm", fmt=".2f", linewidths=0.5)
    plt.title(f"Matriz de correlação {lista_estimadores[i]} ETF's 
bolsa brasileira")
    plt.xticks(rotation=45)  # Rotaciona rótulos do eixo X
    plt.yticks(rotation=0)   # Mantém rótulos do eixo Y na horizontal
    plt.show()
```

```
# Alocação Ativos
asset_allocation = []
for risk in risk_estimators.keys():
    if risk == "ewma_shrinker":
        allocation = erc_m.erc(prices = df, per = "months", estimator
= risk, alpha = .1, gamma = .98)
    elif name == "simples":
        allocation = erc_m.erc(prices = df, per = "months", estimator
= False)
    else:
        allocation = erc_m.erc(prices = df, per = "months", estimator
= risk)

    asset_allocation.append(allocation.x)
```

```
# Risco por Ativo e Risco Marginal
for i in range(len(cov_matrixes)):
    marginal_risk = erc_fun.mrc(cov_matrix = cov_matrixes[i], weights
= asset_allocation[i])
    print(erc_fun.trc(mrc = marginal_risk, weights = asset_alloca-
tion[i]))
    erc_fun.plot_total_risk(marginal_risk, prices = df, weights = as-
set_allocation[i], estimador = list(risk_estimators.keys())[i])
```

```
# Puxando CDI do Banco Central
# URL da API do Banco Central para o CDI diário (série 12)
url = "https://api.bcb.gov.br/dados/serie/bcdata.sgs.12/da-
dos?formato=json"

# Fazer a requisição e carregar os dados
response = requests.get(url)
if response.status_code == 200:
    cdi_data = response.json()
else:
    raise Exception(f"Erro ao acessar API do Banco Central. Código:
{response.status_code}")

# Converter para DataFrame
cdi_df = pd.DataFrame(cdi_data)

# Ajustar formato do DataFrame
cdi_df['data'] = pd.to_datetime(cdi_df['data'], format='%d/%m/%Y')  #
Converter a coluna 'data' para datetime
cdi_df['valor'] = cdi_df['valor'].astype(float) / 100  # Converter
'valor' para float e transformar em retorno percentual diário

# Ordenar por data (apenas por segurança)
cdi_df = cdi_df.sort_values('data').reset_index(drop=True)
```

```
cdi_df = cdi_df.rename({"data" : "Dates", "valor" : "CDI"}, axis =
1).set_index("Dates")
```

```
cdi_acc = (1+cdi_df).cumprod() - 1
df2.index = pd.to_datetime(df2.index.strftime("%Y-%m-%d"))
cdi_acc_mod = cdi_acc[cdi_acc.index.isin(df2.index)]
```

```
## Backtest
%matplotlib inline
class OrderedWeights(bt.Algo):
    def __init__(self, weights):
        self.target_weights = weights

    def __call__(self, target):
        target.temp['weights'] = dict(zip(target.temp['selected'],
self.target_weights))
        return True
```

```
s1 = bt.Strategy("Simples", [bt.algos.RunMonthly(),
                        bt.algos.SelectAll(),
                        OrderedWeights(asset_allocation[0]),
                        bt.algos.Rebalance()])
s2 = bt.Strategy("RIE", [bt.algos.RunMonthly(),
                        bt.algos.SelectAll(),
                        OrderedWeights(asset_allocation[1]),
                        bt.algos.Rebalance()])
s3 = bt.Strategy("EWMA", [bt.algos.RunMonthly(),
                        bt.algos.SelectAll(),
                        OrderedWeights(asset_allocation[2]),
                        bt.algos.Rebalance()])
s4 = bt.Strategy("Shrinkage", [bt.algos.RunMonthly(),
                        bt.algos.SelectAll(),
                        OrderedWeights(asset_allocation[3]),
                        bt.algos.Rebalance()])
s5 = bt.Strategy("EWMA Shrinkage", [bt.algos.RunMonthly(),
                        bt.algos.SelectAll(),
                        OrderedWeights(asset_allocation[4]),
                        bt.algos.Rebalance()])
```

```
s6 = bt.Strategy("IBOVESPA", [bt.algos.RunOnce(),
                        bt.algos.SelectAll(),
                        bt.algos.WeighEqually(),
                        bt.algos.Rebalance()])

s7 = bt.Strategy("CDI", [bt.algos.RunOnce(),
                        bt.algos.SelectAll(),
                        bt.algos.WeighEqually(),
                        bt.algos.Rebalance()])
```

```
test = bt.Backtest(s1, df2.dropna())
test2 = bt.Backtest(s2, df2.dropna())
test3 = bt.Backtest(s3, df2.dropna())
test4 = bt.Backtest(s4, df2.dropna())
test5 = bt.Backtest(s5, df2.dropna())
test6 = bt.Backtest(s6, df2["BOVA11.SA"].to_frame())
test7 = bt.Backtest(s7, cdi_acc_mod/1e10)
```

```
results = bt.run(test, test2, test3, test4, test5, test6, test7)
```

```
results.plot()
```

```
results.display()
```

APÊNDICE B – BIBLIOTECAS PROPRIETÁRIAS

```
import aux_fun as ax
import mgarch
import pandas as pd
import numpy as np
import pyRMT
from pyRMT import optimalShrinkage

def ewma_cov(prices, alpha = .98,norm = False):
    if norm == True:
        ret = cross_section_standard(ax.get_returns(prices , log =
True))
    else:
        ret = ax.get_returns(prices , log = True)
    hlf = np.log(.5)/np.log(alpha)
    cov_ewma = ret.ewm(halflife=hlf).cov()[-len(prices.columns):].re-
set_index(level = 'Dates').drop(['Dates'] , axis =1)
    return cov_ewma


def garch_estimation(prices,per,norm = False):
    # Use qrt estimation
    if norm == True:
        ret = cross_section_standard(ax.get_returns(prices , log =
True))
    else:
        ret = ax.get_returns(prices , log = True)
    vol = mgarch.mgarch()
    vol.fit(ret)
    return vol.predict(per)['cov']

def shrinkage(prices, alpha = .1, norm = False):
    if norm == True:
        ret = cross_section_standard(ax.get_returns(prices , log =
True))
    else:
        ret = ax.get_returns(prices , log = True)

    cov_matrix = ret.cov()

    matrix_reduction = (1-alpha)*cov_matrix

    ev_shifter = (np.trace(cov_matrix)/cov_matrix.shape[1])*al-
pha*np.identity(cov_matrix.shape[1])

    shrinker = matrix_reduction + ev_shifter

    return shrinker

def shrinked_ewma(prices, alpha = None, gamma = .98, norm = False):
    if norm == True:
        ret = cross_section_standard(ax.get_returns(prices , log =
True))
    else:
        ret = ax.get_returns(prices , log = True)
```

```
    hlf = np.log(.5)/np.log(gamma)

    cov_ewma = ret.ewm(halflife = hlf).cov()[-len(prices.col-
umns):].reset_index(level = 'Dates').drop(['Dates'] , axis =1)

    cov_matrix = cov_ewma

    matrix_reduction = (1-alpha)*cov_matrix

    ev_shifter = (np.trace(cov_matrix)/cov_matrix.shape[1])*al-
pha*np.identity(cov_matrix.shape[1])

    ewma_shrinker = matrix_reduction + ev_shifter

    return ewma_shrinker

def parkinson(prices, id_matrix = False):

    open_prices = prices.filter(regex = "Open").dropna()
    low_prices = prices.filter(regex = "Low").dropna()
    high_prices = prices.filter(regex = "High").dropna()
    close_prices = prices.filter(regex = "Close").dropna()


    high_low=((high_prices.values / low_prices).apply(pd.to_nu-
meric)).apply(np.log)

    pk = (1/(4*np.log(2))) * (high_low)**2

    pk.columns = "pk_" + pk.columns.str.strip("Low")
    vol_estimator = (np.sum(pk)/pk.shape[0])**.5

    df_returns = np.log((close_prices/close_prices.shift(1))).dropna()

    vector = np.diag(vol_estimator)

    if id_matrix == True:
        identity = np.identity(vol_estimator.shape[0])
        return np.dot(vector, np.dot(identity, vector))

    else:
        return np.dot(vector, np.dot(np.array(df_returns.corr()), vec-
tor))

def garman_klass(prices, id_matrix = False):

    open_prices = prices.filter(regex = "Open").dropna()
    low_prices = prices.filter(regex = "Low").dropna()
    high_prices = prices.filter(regex = "High").dropna()
    close_prices = prices.filter(regex = "Close").dropna()

    high_low = ((high_prices.values / low_prices).apply(pd.to_nu-
meric)).apply(np.log)
    close_open = ((close_prices.values / open_prices).apply(pd.to_nu-
meric)).apply(np.log)
```

```
    gk = (0.5*(high_low**2)).values - ((2*np.log(2) -
1)*(close_open**2))
    gk.columns = "gk_" + gk.columns.str.strip("Open")
    vol_estimator = (np.sum(gk)/gk.shape[0])**.5

    df_returns = np.log((close_prices/close_prices.shift(1))).dropna()

    vector = np.diag(vol_estimator)

    if id_matrix == True:
        identity = np.identity(vol_estimator.shape[0])
        return np.dot(vector, np.dot(identity, vector))

    else:
        return np.dot(vector, np.dot(np.array(df_returns.corr()), vec-
tor))

def rogers_satchell(prices, id_matrix = False):

    open_prices = prices.filter(regex = "Open").dropna()
    low_prices = prices.filter(regex = "Low").dropna()
    high_prices = prices.filter(regex = "High").dropna()
    close_prices = prices.filter(regex = "Close").dropna()

    low_open = ((low_prices.values / open_prices).apply(pd.to_nu-
meric)).apply(np.log)
    high_close = ((high_prices.values / close_prices).apply(pd.to_nu-
meric)).apply(np.log)
    high_open = ((high_prices.values / open_prices).apply(pd.to_nu-
meric)).apply(np.log)
    low_close = ((low_prices.values / close_prices).apply(pd.to_nu-
meric)).apply(np.log)

    rs = ((high_close.values*high_open) + (low_close.values*low_open))
    rs.columns = "rs_" + rs.columns.str.strip("Open")

    vol_estimator = (np.sum(rs)/rs.shape[0])**.5

    df_returns = np.log((close_prices/close_prices.shift(1))).dropna()

    vector = np.diag(vol_estimator)

    if id_matrix == True:
        identity = np.identity(vol_estimator.shape[0])
        return np.dot(vector, np.dot(identity, vector))

    else:
        return np.dot(vector, np.dot(np.array(df_returns.corr()), vec-
tor))


def gkyz(prices, id_matrix = False):
    """
    Garman-Klass with Yang-Zhang overnight
    """

    open_prices = prices.filter(regex = "Open").dropna()
```

```
    low_prices = prices.filter(regex = "Low").dropna()
    high_prices = prices.filter(regex = "High").dropna()
    close_prices = prices.filter(regex = "Close").dropna()


    overnight_jump = ((open_prices.values / close_prices.shift(1)).ap-
ply(pd.to_numeric)).apply(np.log).dropna()
    high_low = ((high_prices.iloc[1:, :].values / low_prices.iloc[1:,
:]).apply(pd.to_numeric)).apply(np.log)
    close_open = ((close_prices.iloc[1:, :].values /
open_prices.iloc[1:, :]).apply(pd.to_numeric)).apply(np.log)

    garman_zhang = (0.5 * (overnight_jump**2)) +
(0.5*(high_low**2)).values - ((2*np.log(2) - 1)*(close_open**2)).val-
ues
    garman_zhang.columns = "gkyz_" + garman_zhang.col-
umns.str.strip("Close")
    vol_estimator = (np.sum(garman_zhang)/garman_zhang.shape[0])**.5

    df_returns = np.log((close_prices/close_prices.shift(1))).dropna()

    vector = np.diag(vol_estimator)

    if id_matrix == True:
        identity = np.identity(vol_estimator.shape[0])
        return np.dot(vector, np.dot(identity, vector))

    else:
        return np.dot(vector, np.dot(np.array(df_returns.corr()), vec-
tor))

def yang_zhang(prices, id_matrix = False, alpha = 0.34):

    """
    Yang-Zhang (https://portfolioslab.com/tools/yang-zhang)

    """

    open_prices = prices.filter(regex = "Open").dropna()
    low_prices = prices.filter(regex = "Low").dropna()
    high_prices = prices.filter(regex = "High").dropna()
    close_prices = prices.filter(regex = "Close").dropna()

    overnight_jump = ((open_prices.values / close_prices.shift(1)).ap-
ply(pd.to_numeric)).apply(np.log).dropna()
    high_low = ((high_prices.iloc[1:, :].values / low_prices.iloc[1:,
:]).apply(pd.to_numeric)).apply(np.log)
    close_open = ((close_prices.iloc[1:, :].values /
open_prices.iloc[1:, :]).apply(pd.to_numeric)).apply(np.log)
    low_open = ((low_prices.iloc[1:,:].values /
open_prices.iloc[1:,:]).apply(pd.to_numeric)).apply(np.log)
    high_close = ((high_prices.iloc[1:,:].values /
close_prices.iloc[1:,:]).apply(pd.to_numeric)).apply(np.log)
    high_open = ((high_prices.iloc[1:,:].values /
open_prices.iloc[1:,:]).apply(pd.to_numeric)).apply(np.log)
    low_close = ((low_prices.iloc[1:,:].values /
close_prices.iloc[1:,:]).apply(pd.to_numeric)).apply(np.log)
```

```
    k = (alpha - 1)/(alpha + ((prices.shape[0] + 1)/(prices.shape[0] -
1)))

    overnight_jump_norm = (np.sum(overnight_jump - over-
night_jump.mean()))/(prices.shape[0] - 1)
    log_co_norm = (np.sum(close_open -
close_open.mean()))/(prices.shape[0] - 1)

    rs = ((high_close.values*high_open) + (low_close.values*low_open))
    rogers_satchell = (np.sum(rs)/(prices.shape[0] - 1))

    yz = (overnight_jump_norm.values + k*log_co_norm +
           (1 - k)*rogers_satchell.values).rename({"Open IBOV":
"yz_IBOV", "Open SPX": "yz_SPX", "Open BLX": "yz_BLX"})

    vol_estimator = yz**.5

    df_returns = np.log((close_prices/close_prices.shift(1))).dropna()

    vector = np.diag(vol_estimator)

    if id_matrix == True:
        identity = np.identity(vol_estimator.shape[0])
        return np.dot(vector, np.dot(identity, vector))

    else:
        return np.dot(vector, np.dot(np.array(df_returns.corr()), vec-
tor))


def corrEigenClip(prices, norm = False):
    if norm == True:
        ret = cross_section_standard(ax.get_returns(prices , log =
True))

    else:
        ret = ax.get_returns(prices , log = True)

    return pyRMT.clipped(ret)


def corrRIE(prices,cov = True, norm = False):

    if norm == True:
        ret = cross_section_standard(ax.get_returns(prices , log =
True))
    else:
        ret =  ret = ax.get_returns(prices , log = True)

    return optimalShrinkage(ret, return_covariance=cov)

def std_cross(ret):

    return np.sqrt(np.std(ret.values ** 2))
```

```
def  cross_section_standard(ret):
    return ret - ret.mean() / ret.apply(std_cross)
```

```
###  This version is a modified version of equal_risk_estimation when
we choose the risk estimators to run the portfolio optimization ####

import pandas as pd
import numpy as np
from scipy.optimize import minimize
import aux_fun as ax
import Risk_estimators as re
from itertools import repeat
import pyRMT

def erc(prices, per, estimator = False, norm = False, alpha = None,
gamma = .98):
    """A modified function with parameters for risk estimation """

    period = ax.get_period(per)

    norm_value = norm

    alpha = alpha

    obj_fun = lambda x, p_cov, rb: np.sum((x*np.dot(p_cov,
x)/np.dot(x.transpose(), np.dot(p_cov, x))-rb)**2)

    cons_sum_weight = lambda x:np.sum(x) - 1.0

    cons_long_only_weight = lambda x: x

    if  estimator in ["pk_vol", "gk_vol", "rs_vol", "gkyz_vol",
"yz_vol"]:

        rb =[1/prices.filter(regex = 'Close').shape[1] for x in
(prices.filter(regex = 'Close')).columns]
    else:
        rb = [1/prices.shape[1] for x in prices.columns]


    def rb_p_weights(prices, rb):

        asset_rets = ax.get_returns(prices,log=True)


        if  estimator == 'corrEigenClip':
            p_cov = re.corrEigenClip(prices, norm = norm_value)

        elif  estimator == 'corrRIE':
            p_cov = re.corrRIE(prices, norm = norm_value )

        elif estimator == 'garch_dcc':
            p_cov =  re.garch_estimation(prices,period, norm =
norm_value)

        elif estimator ==  'ewma_cov':
```

```
            p_cov = re.ewma_cov(prices, alpha = .98,norm = norm_value)

        elif estimator ==  'shrinkage':
            p_cov = re.shrinkage(prices, alpha = .1,norm = norm_value)

        elif estimator == 'ewma_shrinker':
            p_cov = re.shrinked_ewma(prices, alpha = alpha, gamma =
.98, norm = norm_value)

#         elif estimator == 'ledoit_wolf':
#             risk_estimators = pl.estimators.RiskEstimators()
#             p_cov = risk_estimators.shrinked_covariance(prices,
price_data = True, shrinkage_type='lw')

        elif estimator == 'pk_vol':
            p_cov = re.parkinson(prices, id_matrix = False)

        elif estimator == 'gk_vol':
            p_cov = re.garman_klass(prices, id_matrix = False)

        elif estimator == 'rs_vol':
            p_cov = re.rogers_satchell(prices, id_matrix = False)

        elif estimator == 'gkyz_vol':
            p_cov = re.gkyz(prices, id_matrix = False)

        elif estimator == 'yz_vol':
            p_cov = re.yang_zhang(prices, id_matrix = False, alpha =
0.34)

        else:
            p_cov = asset_rets.cov()



        if estimator in ["pk_vol", "gk_vol", "rs_vol", "gkyz_vol",
"yz_vol"]:
            prices = prices.filter(regex = "Close")

        num_arp = len(prices.columns)

        w0 = 1.0 * np.ones((num_arp, 1)) / num_arp




        cons = ({'type':'eq','fun': cons_sum_weight},
                {'type': 'ineq','fun':cons_long_only_weight})

        return minimize(obj_fun, w0, args=(p_cov, rb),
                        method='SLSQP', constraints=cons,
                        bounds = list(repeat((0,1),len(prices.col-
umns))))
```

```
    return rb_p_weights(prices,rb)
```

```
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def calculate_risk_portfolio(cov_matrix,weights):

    return  np.sqrt( np.transpose(weights) * cov_matrix * weights )

def mrc(cov_matrix, weights):
    risk = np.sqrt(np.dot(weights.T, np.dot(cov_matrix, weights)))
    mrc = (np.dot(weights, cov_matrix))/risk
    return mrc

def trc(mrc, weights):
    trc = mrc*weights
    return trc

def random_assets_returns(mean_vec, cov_matrix, dimension, number_sam-
ples):
    """
    Computes random assets classes returns
    """
    np.random.seed(3003)

    n = number_samples

    d = dimension

    eig_values = np.linalg.eigvals(cov_matrix)

    if any(eig_values<0):
        raise Exception('Covariance Matrix is not valid')

    K = cov_matrix + 0.000001 * np.identity(d) # Need to stability of
Cholesky Decomposition

    L = np.linalg.cholesky(K)

    u = np.random.normal(loc=0, scale=1, size=d*n).reshape(d, n)

    assets = mean_vec + np.dot(L, u)

    return assets



def plot_marginal_risk(marginal_risk, prices):
    plt.figure(figsize=(12, 6))
    cols = prices.columns
    plt.bar(cols, marginal_risk)
    plt.title("Contribuições Marginais para o Risco")
    plt.xticks(rotation = 45)
```

```
    return plt.show()

def plot_total_risk(marginal_risk, prices, weights, estimador):
    total_risk = marginal_risk*weights
    plt.figure(figsize=(12, 6))
    cols = prices.columns
    plt.bar(cols, total_risk)
    plt.title("Contribuições Totais para o Risco " + str(estimador))
    plt.xticks(rotation = 45)
    return plt.show()
```