

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

**João Victor Domingues Rios**

**Comparativo entre Controladores Robusto  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para  
Sistemas Lineares com Incertezas Politópicas**

**São Carlos**

**2025**



**João Victor Domingues Rios**

**Comparativo entre Controladores Robusto  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para  
Sistemas Lineares com Incertezas Politópicas**

Monografia apresentada ao Curso de Curso de Engenharia Elétrica com Ênfase em Sistemas de Energia e Automação, da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheiro Eletricista.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Rogério Fernandes

**São Carlos  
2025**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,  
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS  
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da  
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

Rios, João Victor  
R586c      Comparativo entre Controladores Robusto H<sub>2</sub> e H<sub>inf</sub>  
para Sistemas Lineares com Incertezas Polítópicas /  
João Victor Rios; orientador Marcos Rogério Fernandes.  
São Carlos, 2025.

Monografia (Graduação em Engenharia Elétrica com  
ênfase em Sistemas de Energia e Automação) -- Escola de  
Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo,  
2025.

1. Controle ótimo. 2. Controle robusto. 3.  
Desigualdades matriciais lineares. 4. Estabilidade  
quadrática. 5. Estabilidade de Lyapunov. 6. Controle  
H<sub>2</sub>. 7. Controle H<sub>inf</sub>. I. Título.

# **FOLHA DE APROVAÇÃO**

**Nome: João Victor Domingues Rios**

**Título: “Comparativo entre Controladores Robusto  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_{\infty}$  para Sistemas Lineares com Incertezas Politópicas”**

**Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em  
03/12/2025,**

**com NOTA 9,0(nove, zero), pela Comissão Julgadora:**

**Prof. Dr. Marcos Rogério Fernandes - Orientador -  
SEL/EESC/USP**

**Dra. Andressa Moura de Souza - Pós-Doutoranda na Faculdade  
de Engenharia Mecânica da Unicamp - FEM/UNICAMP**

**Dr. Stefan Thiago Cury Alves dos Santos - Doutorado  
EESC/USP**

**Coordenador da CoC-Engenharia Elétrica - EESC/USP:  
Professor Associado José Carlos de Melo Vieira Júnior**



## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar agradeço aos meus pais, João Carlos e Maria Bárbara, por todo apoio, todo amor e toda luta por mim. Sem vocês seria impossível que chegasse onde cheguei.

Agradeço ao meu irmão também, por todo companheirismo e apoio quando necessário.

Agradeço imensamente ao meu orientador Marcos por todo o suporte, me ajudando muito com todos os experimentos e com esse trabalho no geral.

Por último, agradeço à toda a minha rede de apoio, em especial meus colegas da Cajuteria. Vocês me ajudaram muito nos momentos difíceis.



## RESUMO

RIOS, J. **Comparativo entre Controladores Robusto  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para Sistemas Lineares com Incertezas Politópicas.** 2025. 72 p. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2025.

Um grande desafio na área de controle é a incerteza e seus impactos no desempenho dos sistemas. Este trabalho teve como objetivo estudar métodos de análise de estabilidade e de síntese de ganho para sistemas LTI com incertezas modeladas por politopos, bem como as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  como critérios de desempenho, por meio da solução via Desigualdades Lineares Matriciais (LMIs). Para tal, foram conduzidos experimentos computacionais no MATLAB, usando Yalmip e SeDuMi para a solução das LMIs. No primeiro experimento, comparou-se o desempenho da síntese de ganho em dois cenários: estabilidade quadrática e uma condição de estabilidade afim menos conservadora, aplicando a desigualdade de Lyapunov. No segundo experimento, realizou-se a síntese de um controlador ótimo e robusto para um sistema massa-mola. Os resultados do primeiro estudo mostraram maior eficiência na redução do conservadorismo do problema. No segundo, a síntese de ganho foi bem-sucedida tanto para o controle  $\mathcal{H}_2$  quanto para o controle  $\mathcal{H}_\infty$ . Conclui-se que a desigualdade de Lyapunov é fundamental para problemas de análise de estabilidade e de síntese de ganho em sistemas com incertezas politópicas, e que estratégias baseadas em LMIs permitem a implementação de controladores robustos de forma eficiente.

**Palavras-chave:** Controle ótimo; Controle robusto; Desigualdades matriciais lineares; Estabilidade quadrática; Estabilidade de Lyapunov; Controle  $\mathcal{H}_2$ ; Controle  $\mathcal{H}_\infty$ .



## ABSTRACT

RIOS, J. **Comparison Between Robust  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  Controllers for Linear Systems With Polytopic Uncertainties.** 2025. 72 p. Monograph (Conclusion Course Paper) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2025.

A significant challenge in the control area is uncertainty and its impacts on system performance. This work aimed to study methods for stability analysis and gain synthesis for LTI systems (Linear Time-Invariant systems) with uncertainties modeled by polytopes, as well as the  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  norms as performance criteria, by means of a solution via Linear Matrix Inequalities (LMIs). To this end, computational experiments were conducted in MATLAB using Yalmip and SeDuMi to solve the LMIs. In the first experiment, the performance of gain synthesis was compared under two scenarios: quadratic stability and a less conservative affine stability condition, both using the Lyapunov inequality. In the second experiment, an optimal and robust controller was synthesized for a mass-spring system. The results of the first study showed greater efficiency in reducing the problem's conservatism. In the second, the gain synthesis was successful for both  $\mathcal{H}_2$  control and  $\mathcal{H}_\infty$  control. It is concluded that the Lyapunov inequality is fundamental for stability analysis and gain synthesis in systems with polytopic uncertainties, and that LMI-based strategies enable the efficient implementation of robust controllers.

**Keywords:** Optimal control. Robust control. Linear Matrix Inequality. Quadratic stability. Lyapunov stability.  $\mathcal{H}_2$  control.  $\mathcal{H}_\infty$  control.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Relógio de Ctecíbio . . . . .	23
Figura 2 – Diagrama de Blocos de um Sistema Genérico em Malha Aberta . . . . .	30
Figura 3 – Diagrama de Blocos de um Sistema Genérico em Malha Fechada . . . . .	31
Figura 4 – Representação de $A(\alpha)$ com 1 parâmetro incerto . . . . .	35
Figura 5 – Representação de $A(\alpha)$ com 4 vértices . . . . .	35
Figura 6 – Ilustração de um Simplex Unitário em $\alpha_1$ , $\alpha_2$ e $\alpha_3$ . . . . .	36
Figura 7 – Nuvem de Autovalores de Politopo Instável Hipotético . . . . .	37
Figura 8 – Norma $\mathcal{H}_\infty$ em um Sistema Siso - Exemplo Ilustrativo . . . . .	48
Figura 9 – Norma $\mathcal{H}_\infty$ em um Sistema com 2 Entradas e 2 Saídas - Exemplo Ilustrativo . . . . .	49
Figura 10 – Comparativo na Eficácia entre a Estabilidade Afim e a Quadrática . .	56
Figura 11 – Esquema Ilustrativo do Sistema Massa-Mola Amortecido . . . . .	57
Figura 12 – Nuvem de Autovalores do Sistema Massa-Mola Amortecido . . . . .	59
Figura 13 – Comparaçāo entre as Normas $\mathcal{H}_2$ Ótima, Robusta e Garantida . . . . .	61
Figura 14 – Resposta ao Impulso do Sistema Massa-Mola Amortecido com os Controladores $\mathcal{H}_2$ Ótimo e Robusto . . . . .	62
Figura 15 – Entrada Ruidosa $w(t)$ em Função do Tempo . . . . .	63
Figura 16 – Nuvem de Autovalores do Sistema Massa-Mola . . . . .	64
Figura 17 – Resposta ao Ruído $\mathcal{L}_2$ do Sistema Massa-Mola Amortecido com os Controladores $\mathcal{H}_\infty$ Ótimo e Robusto . . . . .	65



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

**EDOs** Equações diferenciais Ordinárias.

**LMI** Linear Matrix Inequality.

**LQR** Linear Quadratic Regulator.

**MATLAB** Matrix Laboratory.

**MIMO** Multiple-Input Multiple-Output.

**PID** Proporcional-Integral-Derivativo.

**SeDuMi** Self-Dual Minimization.

**SISO** Single-Input Single-Output.

**YALMIP** Yet Another LMI Parser.



## LISTA DE SÍMBOLOS

$A^\top$	Matriz transposta de $A$ .
$A^{-1}$	Matriz inversa de $A$ .
$A^\perp$	Base para o espaço nulo da matriz $A$ ( $AA^\perp = 0$ ).
$I$	Matriz Identidade $n \times n$ .
$\det(A)$	Determinante da matriz $A$ .
$\dot{x}$	Derivada temporal de $x$ .
$\lambda$	Autovalor.
$\mathbb{R}^n$	Espaço real $n$ -dimensional.
$\mathcal{L}_2$	Classe de Sinais de Energia Finita.
$\text{Tr}(A)$	Traço da matriz $A$ .

## SUMÁRIO

<b>Lista de Abreviaturas e Siglas</b>	13
<b>Lista de Símbolos</b>	15
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	19
<b>1.1 Objetivos</b>	20
1.1.1 Objetivo Geral	21
1.1.2 Objetivos Específicos	21
<b>1.2 Justificativa do trabalho</b>	21
<b>1.3 Estrutura do trabalho</b>	22
<b>2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS</b>	23
<b>2.1 Apresentação Histórica da Área de Sistemas de Controle</b>	23
<b>2.2 Definições Matemáticas</b>	26
2.2.1 Desigualdades Matriciais Lineares	26
2.2.2 Complemento de Schur	29
2.2.3 Lema da Projeção	29
<b>2.3 Noções Básicas de Sistemas de Controle</b>	29
2.3.1 Análise com Desigualdade de Lyapunov	31
2.3.2 Síntese com Desigualdade de Lyapunov	32
<b>2.4 Modelagem de Incertezas em Sistemas Dinâmicos</b>	33
2.4.1 Importância da Modelagem de Incertezas	33
2.4.2 Modelagem de Incertezas	33
<b>2.5 Controle Robusto via LMI</b>	36
2.5.1 Análise de Estabilidade Robusta via LMI	36
2.5.2 Estabilidade Quadrática	37
2.5.3 Síntese em Controle Robusto via LMI	38
2.5.4 Solvers Utilizados	42
<b>2.6 Controle Robusto <math>\mathcal{H}_2</math></b>	42
<b>2.7 Controle Robusto <math>\mathcal{H}_\infty</math></b>	47
<b>3 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS: ANÁLISE COMPUTACIONAL DOS MÉTODOS</b>	55
<b>3.1 Experimento 1: Redução do Conservadorismo</b>	55
3.1.1 Parâmetro $\gamma$	55
3.1.2 Função de Síntese do Ganho	56

3.1.3	Resultados da Simulação . . . . .	56
<b>3.2</b>	<b>Experimento 2: Sistema Massa-Mola . . . . .</b>	<b>57</b>
3.2.1	Formulação do Problema . . . . .	57
3.2.2	Síntese do Ganho - Controle $\mathcal{H}_2$ . . . . .	60
3.2.3	Síntese do Ganho - Controle $\mathcal{H}_{\infty}$ . . . . .	62
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>67</b>
<b>4.1</b>	<b>Conclusões Gerais . . . . .</b>	<b>67</b>
<b>4.2</b>	<b>Limitações, Desafios e Sugestões de Trabalhos Futuros . . . . .</b>	<b>68</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>71</b>



## 1 INTRODUÇÃO

A área de controle é de extrema importância na engenharia. Ela é responsável por regular processos industriais de diferentes naturezas e complexidades, garantindo estabilidade e eficiência em seus diversos tipos de sistemas. Em sua teoria, ela consegue representar, de forma matemática, sistemas ideais e estabilizá-los com controladores relativamente simples.

Uma das partes mais importantes na área de controle linear é determinar a estabilidade de um sistema. É possível avaliar essa característica por meio de sua matriz de transição de estados  $A$ , de modo que o sistema será estável se e somente se todos os autovalores dela tiverem parte real negativa.

Na prática, segundo [Yedavalli 2014], os sistemas podem funcionar de forma diferente, com incertezas nos parâmetros, não linearidades, dinâmicas não modeladas e ruídos ou imprecisões de medição, o que torna desafiador o projeto de um sistema de controle nesse cenário. É nesse contexto que surge o controle robusto, no qual se aplicam técnicas mais complexas, capazes de lidar com as imperfeições do sistema.

Um problema clássico de controle robusto é o da suspensão de um carro. Segundo [Ebihara, Peaucelle e Arzelier 2015], nesse problema, a matriz  $A$  do espaço de estados é composta por diversos parâmetros, como a massa  $m$  das rodas, a massa  $M$  do chassi, a constante elástica  $k$  da mola, a constante  $c$  do amortecedor, etc. Nesse exemplo, o parâmetro  $M$  é incerto, pois depende, por exemplo, do número de passageiros no carro. Esse problema pode ser solucionado por meio de um controle robusto, uma vez que a teoria tradicional de controle não abrange variações nos parâmetros do sistema.

Existem várias técnicas que podem resolver problemas de controle de sistemas com incertezas. Neste trabalho, as técnicas exploradas baseiam-se na desigualdade de Lyapunov. Essa desigualdade permite uma abordagem numérica do problema da estabilidade de sistemas em espaços de estados e permite trabalhar com incertezas de parâmetros, inerentes a sistemas reais.

Além disso, a própria desigualdade de Lyapunov tem uma importante limitação em sistemas com incertezas: ela exige que a solução seja uma matriz  $P(\alpha)$  com dimensão infinita, obrigando que sejam feitas construções conservadoras dessa matriz para que seja possível resolver a LMI. Dessa forma, ela nem sempre consegue fornecer um resultado definitivo tanto no problema da análise da estabilidade de um sistema, quanto na síntese do ganho em malha fechada.

Uma alternativa para atenuar esse problema, explorada ao longo desse trabalho, é reduzir o conservadorismo da matriz  $P(\alpha)$ . Teoricamente, para encontrar um ganho que

estabilize um sistema incerto, basta diminuir infinitamente o conservadorismo de  $P(\alpha)$  até que, em algum momento, ele convergirá para a matriz  $P(\alpha)$  de dimensão infinita. Porém, na prática, cada aumento do grau de liberdade aumenta significativamente a complexidade das LMIs utilizadas para resolver o sistema, além de aumentar a quantidade de poder computacional necessária.

Outro aspecto importante do trabalho é a utilização de normas para melhorar o desempenho dos controladores em diferentes aspectos. A primeira é a norma  $\mathcal{H}_2$ , relacionada à energia de um sistema sob uma perturbação muito rápida. A segunda é a norma  $\mathcal{H}_\infty$ , que indica a capacidade do sistema de atenuar a energia de um distúrbio de entrada. Dessa forma, um controlador  $\mathcal{H}_2$  tende a produzir respostas que estabilizam o sistema mais rapidamente, enquanto o  $\mathcal{H}_\infty$  produz respostas que tendem a ter menos efeitos de ruído.

Dessa forma, o objetivo deste trabalho é comparar diferentes abordagens de controle robusto em sistemas com incertezas. Para isso, realizou-se um conjunto de experimentos computacionais.

Para fins de comparação, foram utilizados controladores ótimos e robustos com base nas normas  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\mathcal{H}_2$ . Enquanto os controladores ótimos apresentam o menor valor possível de sua respectiva norma no sistema exato para o qual foram projetados, eles perdem desempenho em sistemas com incertezas. Enquanto isso, no mesmo sistema com incertezas, controladores robustos conseguem garantir um nível máximo do valor de suas respectivas normas.

O primeiro experimento computacional consistiu em testar o aumento da eficiência ao elevar o grau de liberdade da matriz  $P(\alpha)$ , buscando identificar um ganho de realimentação capaz de estabilizar sistemas politópicos gerados aleatoriamente. Para estar em conformidade com a teoria de controle robusto, a redução do conservadorismo da matriz deve aumentar o número de soluções em um problema de síntese de ganho.

O segundo experimento consistiu na comparação do desempenho de um sistema linear (massa-mola amortecido) com incertezas. Foi realizada a síntese do ganho ótimo e robusto, aplicando-o ao sistema nominal e comparando o valor resultante com suas normas. O método utilizado para isso foi também resolver a desigualdade de Lyapunov; porém, de forma alternativa, que minimiza as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  de um sistema.

## 1.1 Objetivos

A linha do projeto aqui proposto visa desenvolver um comparativo entre estratégias de controle robusto do tipo  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas lineares com incertezas politópicas, com os seguintes objetivos gerais e específicos:

---

### 1.1.1 Objetivo Geral

Desenvolver e avaliar um sistema de controle robusto aplicável a sistemas dinâmicos lineares com incertezas politópicas.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

- Realizar um estudo detalhado da teoria de controle robusto  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  por meio de LMIs;
- Implementar controladores robustos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  em ambiente de simulação usando *solvers* de LMI;
- Aplicar e validar o controlador robusto em modelos de sistemas dinâmicos lineares com incertezas politópicas por meio de simulações numéricas;
- Avaliar o desempenho entre controladores robustos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  implementados via LMIs, com o objetivo de identificar os cenários em que cada abordagem é mais adequada;
- Documentar os resultados e as conclusões obtidas.

## 1.2 Justificativa do trabalho

A relevância deste trabalho fundamenta-se na ampla gama de aplicações das teorias de controle robusto. Sistemas que representam problemas reais, em algum grau, sempre apresentam incertezas que influenciam fortemente o planejamento dos engenheiros que buscam soluções para esses problemas. Dessa maneira, o estudo de controladores que lidam com essas incertezas é crucial para toda a cadeia de produção industrial moderna e, por consequência, para toda a economia.

Dentro desse contexto, técnicas de controle robusto tipicamente apresentam conservadorismo em suas soluções. Assim, uma direção possível para as teorias de controle robusto é buscar soluções menos conservadoras, o que não é um processo trivial.

Adicionalmente, conforme discutido em [Skelton, Iwasaki e Grigoriadis 2013], embora os problemas de controle robusto sejam complexos e, teoricamente, possuam dimensões infinitas, podem ser simplificados por meio de relaxações e variáveis de folga. Assim, as técnicas de controle robusto tornam-se úteis para problemas com incertezas, transformando-os em problemas de álgebra linear, solucionáveis por meio de algoritmos numéricos.

Além disso, o foco principal deste trabalho reside na resolução de problemas de otimização convexa, os quais incorporam LMIs em sua formulação. Assim, os métodos empregados ao longo deste trabalho podem ser amplamente utilizados como base para

resolver problemas reais que visem não apenas projetar controladores estáveis, mas também construí-los para que apresentem o melhor desempenho global.

### **1.3 Estrutura do trabalho**

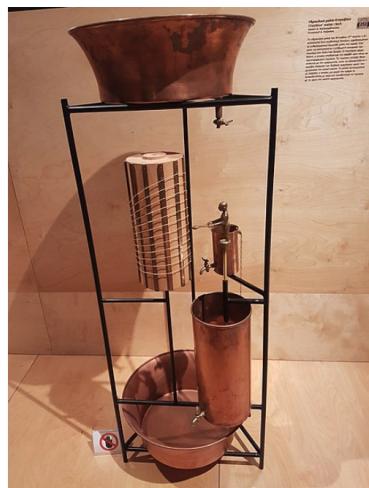
- Capítulo 1 - Introdução ao tema, contextualizando sua importância, apresentando a tese sobre a diminuição do conservadorismo, definindo brevemente as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , além de uma descrição dos objetivos deste trabalho.
- Capítulo 2 - Exposição de toda a parte teórica que serviu de alicerce para a realização dos experimentos computacionais deste trabalho. Assim, este capítulo foi dedicado a apresentar técnicas de análise e síntese robustas, assim como controladores que minimizam uma norma, tais como  $H_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ .
- Capítulo 3 - Apresentação dos experimentos computacionais, explicação dos pontos cruciais do código implementado e discussão dos resultados em termos de tempo de acomodação, sobressinal e normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ .
- Capítulo 4 - Conclusões finais dos resultados obtidos no trabalho. Apontam-se algumas limitações dos experimentos realizados, bem como se propõem direções para pesquisas futuras na área.

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.1 Apresentação Histórica da Área de Sistemas de Controle

Segundo [Ferguson 2015], sistemas de controle com realimentação já são conhecidos desde a antiguidade. Um dos primeiros registros foi o relógio de água de Ctecíbio, apresentado na Figura 1. Ele funcionava com base em um fluxo constante de gotas de um recipiente A para outro, B, de modo que a altura da coluna de água gotejada no B servia para medir o tempo. Com o tempo, a coluna de água do recipiente A diminuía, reduzindo também a velocidade do gotejamento e atrasando o relógio. Para resolver isso, a Ctecíbio implementou um sistema rudimentar de controle com realimentação: adicionou um recipiente C com muita água e conectou-o ao topo do recipiente B por meio de uma mangueira cheia de água, de modo que a água do recipiente C sugasse a do recipiente B à medida que este perdia água, mantendo o nível da água constante.

Figura 1 – Relógio de Ctecíbio



Fonte: [Wikipedia 2025].

Num período mais recente, segundo [Bennett 2002], a necessidade de controle decorreu do surgimento de máquinas na Revolução Industrial. Matthew Boulton, em uma carta de 1788, descreveu a James Watt um mecanismo rudimentar para controlar a distância entre as pedras de moagem em moinhos de vento e de água. Watt então percebeu que esse mesmo mecanismo poderia ser adaptado para o controle da velocidade de motores a vapor, em que um dispositivo mecânico controlava a entrada de calor na caldeira do motor, de modo a manter a velocidade constante. O grande problema desse governador é que ele só oferecia controle proporcional, o que fazia com que o sistema nunca se estabilizasse exatamente na velocidade desejada.

Ao mesmo tempo em que surgiam avanços práticos para esses governadores, também surgiam avanços teóricos. J.V. Poncelet e G.B. Airy, em diferentes ocasiões, conseguiram descrever o funcionamento do governador por meio de equações diferenciais, embora não conseguissem descrever adequadamente as condições de estabilidade do sistema em tempo contínuo. Na época, já se sabia que a estabilidade de um sistema era determinada pelo sinal da parte real das raízes do polinômio característico desse sistema; porém, uma grande dificuldade era determinar a parte real sem antes determinar a raiz complexa.

Em 1890, segundo [BOYD *et al.* 1994], Aleksandr Lyapunov publicou um trabalho sobre o que hoje dá origem à teoria de Lyapunov. Ele descreveu o que ficou conhecido como a Desigualdade de Lyapunov, a primeira [Linear Matrix Inequality \(LMI\)](#) que poderia ser usada para analisar a estabilidade de um sistema dinâmico. Além disso, essa [LMI](#) poderia ser resolvida explicitamente.

A partir do século XX, com o avanço tecnológico da eletricidade, surgiram mais aplicações da teoria de controle. Passou a ser aplicada também em controladores com realimentação de tensão e corrente, permitindo, assim, o controle de motores elétricos. Também foram aprimoradas as aplicações para variáveis já controladas, como temperatura, pressão, velocidade, vazão, etc. Apesar do aumento no número de aplicações do controle, ainda não havia um arcabouço teórico suficiente, além das equações diferenciais e do critério de Routh-Hurwitz, o que deixava muitos engenheiros da época confusos quanto a sistemas estáveis que se tornavam instáveis mesmo com pequenas alterações.

Em 1922, segundo [Bennett 1984], após observar timoneiros operando grandes embarcações, Nicholas Minorsky formulou uma extensa teoria de sistemas de controle posicionais, hoje conhecida como controle [Proporcional-Integral-Derivativo \(PID\)](#). Porém, essa análise acabou não sendo muito difundida na época, além de ainda não existirem amplificadores lineares e estáveis capazes de converter os sinais de baixa potência de sensores medidores em sinais de alta potência que possam operar controladores atuadores.

Ainda na década de 20, segundo [Bennett 2002], Harold Stephen Black, visando resolver alguns problemas nas linhas telefônicas da época, começou a trabalhar na melhoria dos amplificadores. Ele notou que, ao sacrificar uma parte da amplificação do sinal, de modo que uma parte da saída fosse realimentada na entrada, era possível reduzir o ruído no sinal amplificado. Em 1927, ele esboçou um circuito de realimentação negativa, que foi aprimorado até que, em 1931, já estava sendo utilizado pela AT&T. Durante esses anos, Black foi muito ajudado por Harry Nyquist, o mesmo que, mais tarde, escreveria o Teorema de Nyquist. Todos esses trabalhos possibilitaram uma compreensão muito maior sobre o uso da realimentação negativa e seus benefícios.

Um momento importante no desenvolvimento das teorias de controle ocorreu durante a Segunda Guerra Mundial. Nela, houve um esforço muito grande em uma tarefa bem específica relacionada à guerra, como o sistema de miras de baterias antiaéreas. O

manejo dessas armas exigiu grandes avanços na área, uma vez que envolvia a detecção da posição futura de um avião, a movimentação do armamento e o cálculo da trajetória da munição. Toda a operação envolvia até 14 pessoas que tinham de agir de forma coordenada para garantir o funcionamento adequado do sistema. Durante a guerra, ficou muito claro que esse sistema era muito lento e inadequado para a guerra, e que era necessário o máximo de automação possível, de modo que a arma estivesse conectada diretamente ao radar, exigindo apenas a atuação de um único operador para garantir o funcionamento do sistema.

No MIT, uma solução para esse problema foi o uso de diagramas de blocos para representar sistemas elétricos e mecânicos, utilizando, assim, o melhor da teoria de controle tanto no domínio do tempo quanto no da frequência. Em 1943, Albert C. Hall mostrou que, sendo esses blocos representações de funções de transferência, a resposta em frequência poderia ser esboçada e o critério de estabilidade de Nyquist poderia ser utilizado; além disso, o ganho e a defasagem poderiam ser calculados. Esses avanços permitiram a criação de novos radares e servomecanismos, que alcançaram altas taxas de sucesso na guerra.

Também na década de 40, Lur'e, Postnikov e outros cientistas da União Soviética buscavam aplicar as inequações de Lyapunov do final do século XIX a sistemas com não linearidades nos atuadores, obtendo certo sucesso em sistemas pequenos de segunda e terceira ordem. Devido às limitações de poder computacional da época, não foi possível testar esses métodos em sistemas maiores.

No início da década de 1960, houve mais um avanço nas aplicações das LMI. Kalman, Yakubovich e Popov conseguiram reduzir a solução do problema de Lur'e, na década de 40, a um critério gráfico, o que hoje é conhecido como Lema do Positivo-Real e todas as suas variações. Esse critério poderia ser utilizado para sistemas de ordem superior a 3, com a única limitação de que o sistema não pode conter mais de uma não linearidade.

As próximas etapas para o desenvolvimento das teorias sobre LMIs foram a sua formulação como problemas de otimização convexa, o que tornou possível o uso de computadores e algoritmos iterativos na sua resolução. Em um paper de 1976, Horisberger e Belanger mostraram que a existência de uma função quadrática de Lyapunov é um problema convexo que envolve LMIs. Em 1982, Pyatnitskii e Skorodinskii conseguiram reduzir o problema de Lur'e, mesmo em casos com mais de uma não-linearidade, a um problema de otimização convexa envolvendo LMIs, que eles resolveram utilizando o algoritmo de elipsoide.

Em 1984, segundo [BOYD *et al.* 1994], houve mais um grande avanço na resolução de LMIs, com a introdução, por N. Karmarkar, de métodos de pontos interiores. Inicialmente, Karmarkar visava à aplicação desses métodos à programação linear; apenas em 1988, com os estudos de Nesterov e Nemirovskii, esses métodos passaram a ter aplicações direcionadas à resolução de LMI.

## 2.2 Definições Matemáticas

### 2.2.1 Desigualdades Matriciais Lineares

Conforme apresentado em [Strang 2005], dada uma matriz quadrada  $A$ , os seus autovalores  $\lambda$  são os valores que satisfazem a equação:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Tal definição tem importância central na teoria de controle, uma vez que fundamenta uma série de outros conceitos-chave nessa mesma área.

Outra definição, especialmente importante nesse campo, refere-se ao problema da estabilidade. Segundo [Slotine, Li *et al.* 1991], dado um sistema contínuo modelado por  $\dot{x} = Ax$ , diz-se que  $x(t)$  converge para 0, isto é, o sistema será Hurwitz estável, ou apenas estável, se e somente se os autovalores da sua Matriz de Transição de Estados  $A$  têm parte real negativa.

Dado o conceito de autovalores, outro ponto crucial a ser introduzido é o das matrizes (semi)positivas ou (semi)negativas definidas.

Uma matriz  $A$  será  $A \succ 0$ , isto é, positiva definida, caso todos os seus autovalores tenham parte real positivas. Além disso, uma matriz  $A$  é  $A \prec 0$ , isto é, negativa definida, se  $-A$  for positiva definida, ou seja:

$$-A \succ 0.$$

Adicionalmente, uma matriz  $A$  é  $A \succeq 0$ , isto é, semipositiva definida, caso todos os seus autovalores tenham suas partes reais não negativas. Similarmente, uma matriz  $A$  é  $A \preceq 0$ , isto é, semidefinida negativa, se  $-A$  for semidefinida positiva, ou seja:

$$-A \succeq 0.$$

Esclarecidos esses conceitos, torna-se possível definir LMIs, que, segundo [BOYD *et al.* 1994] são expressões matriciais da seguinte forma:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^N F_i x_i \succ 0, \quad (2.1)$$

em que as matrizes  $F_i \in R^{n \times n}$  são simétricas e conhecidas, e  $x_i$  são as variáveis de decisão. Também é possível encontrar LMIs descritas como  $F(x) \succeq 0$ , e nelas as mesmas propriedades relacionadas à inequação (2.1) permanecerão válidas.

Com isso, é possível notar que uma LMI constitui, na verdade, uma forma genérica para uma inequação linear, que tem  $n = 1$ . Dessa forma, nota-se que resolver analiticamente

essas desigualdades no caso  $n > 1$  torna-se difícil, sendo necessária a utilização de métodos numéricos, comumente o método dos pontos interiores.

É importante notar também que LMIs são restrições convexas em  $x_i$ . O resultado disso é que problemas de otimização que utilizam esse tipo de expressão matemática sempre convergem para mínimos ou máximos globais.

Segundo [Oliveira e Peres 2005], é comum representar uma matriz  $M$  qualquer dependendo de forma afim de um número  $N_2$  de matrizes  $M_j$  com a estrutura

$$M(\alpha) = \sum_{j=1}^{N_2} \alpha_j M_j, \quad \text{sendo} \quad \sum_{j=1}^{N_2} \alpha_j = 1 \quad \text{e} \quad \alpha_j \geq 0, \quad (2.2)$$

em que  $\alpha_j$  são escalares desconhecidos. Essa estrutura será melhor definida ao longo de sessões subsequentes.

Além disso, será comum ao longo deste trabalho utilizar o caso particular da equação (2.1), em que há matrizes  $F_i$  e  $x_i$  dependendo de forma afim de  $N_2$  matrizes conhecidas  $F_{i,j}$  e de  $N_2$  variáveis de decisão  $x_{i,j}$ , respectivamente; ou seja:

$$F(x) = E + \sum_{i=1}^{r_1} F_i(\alpha) y_i + \sum_{i=1}^{r_2} G_i x_i(\alpha) \succ 0, \quad (2.3)$$

sendo  $G_i$  e  $E$  matrizes conhecidas,  $y_i$  variáveis de decisão e  $r_1$  e  $r_2$  o número de termos que contêm matrizes dependentes de matrizes conhecidas e o número de termos que contêm matrizes dependentes de variáveis de decisão, respectivamente. Utilizando a estrutura descrita pela equação (2.2) nas matrizes  $F_i(\alpha)$  e  $x_i(\alpha)$  da equação (2.3) resultando em:

$$F(x) = E + \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{N_2} \alpha_j F_{i,j} y_i + \sum_{i=1}^{r_2} G_i \sum_{j=1}^{N_2} \alpha_j x_{i,j} \succ 0,$$

que pode ser reorganizado em:

$$F(x) = E + \sum_{j=1}^{N_2} \alpha_j \left( \sum_{i=1}^{r_1} F_{i,j} y_i + \sum_{i=1}^{r_2} G_i x_{i,j} \right) \succ 0.$$

Como, por definição, a soma de todos os  $\alpha_j$  é 1, é possível passar  $E$  para dentro do somatório.

$$F(x) = \sum_{j=1}^{N_2} \alpha_j \left( E + \sum_{i=1}^{r_1} F_{i,j} y_i + \sum_{i=1}^{r_2} G_i x_{i,j} \right) \succ 0.$$

Se cada termo do somatório em  $j$  for positivo definido, então  $F(x)$  também será positivo definido. Dessa forma, o conjunto de desigualdades formado por:

$$\left\{ \alpha_j(E + \sum_{i=1}^{r_1} F_{i,j}y_i + \sum_{i=1}^{r_2} G_i x_{i,j}) \succ 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, N_2 \right. \quad (2.4)$$

é uma condição suficiente, mas não necessária e suficiente para  $F(x) \succ 0$ . Como  $\alpha_j \geq 0$ , então, para que a equação (2.4) seja atendida, basta que:

$$\left\{ E + \sum_{i=1}^{r_1} F_{i,j}y_i + \sum_{i=1}^{r_2} G_i x_{i,j} \succ 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, N_2, \right. \quad (2.5)$$

seja verdadeiro.

Sendo assim, dada uma expressão matricial construída conforme a equação (2.3), a equação (2.5) é uma condição suficiente para que  $F(x) \succ 0$ . Essa afirmação também abrange desigualdades do tipo  $F(x) \succeq 0$ ,  $F(x) \prec 0$  e  $F(x) \preceq 0$ , e será chamada, neste trabalho, de **teorema dos polinômios homogêneos**.

Na prática, esse teorema se aplica a situações em que uma matriz  $M(\alpha)$ , conforme a equação (2.2), aparece em uma desigualdade matricial sem ser multiplicada por outros termos dependentes de  $\alpha$ . Ao empregar o teorema dos polinômios homogêneos nessa desigualdade, obtém-se uma condição suficiente para sua resolução, expressa por um conjunto de  $N_2$  desigualdades, todas iguais, com  $M(\alpha)$  substituída pelas  $N_2$  matrizes conhecidas  $M_j$ .

Como essa é uma condição apenas suficiente, mas não necessária, para resolver  $F(x)$ , é possível afirmar que a solução apresenta conservadorismo, uma vez que é apenas um subconjunto da solução. Mesmo com essa limitação, esse teorema será de grande utilidade ao longo deste trabalho, pois servirá para transformar um problema de controle ótimo em um problema de controle robusto, que considera incertezas tanto na análise quanto na síntese.

Como exemplo simples da aplicação prática desse teorema, considere a desigualdade:

$$A(\alpha)y + yA(\alpha)^\top + Cx(\alpha) + D(\alpha) + E \prec 0,$$

com as matrizes dependentes de  $\alpha$  construídas conforme a equação (2.2).

Aplicando o teorema dos polinômios homogêneos nessa desigualdade, uma condição suficiente para resolvê-la é através das LMIs:

$$\left\{ A_j y + y A_j^\top + C x_j + D_j + E \prec 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, N_2 \right.$$

### 2.2.2 Complemento de Schur

Ao longo deste trabalho, haverá algumas situações em que a desigualdade que está sendo desenvolvida define um conjunto convexo, mas não é linear, por apresentar multiplicações entre suas variáveis de decisão. Em tais circunstâncias, uma ferramenta que permite linearizar esse problema é o complemento de Schur.

Segundo [Souza 2021], seja  $M$ :

$$M = \begin{bmatrix} \Psi & \Omega \\ \Omega^\top & \Phi \end{bmatrix}$$

As seguintes condições são equivalentes:

- i)  $M \succ 0$  se e somente se  $\Psi \succ 0$  e  $\Phi - \Omega^\top \Psi^{-1} \Omega \succ 0$ ;
- ii)  $M \succ 0$  se e somente se  $\Phi \succ 0$  e  $\Psi - \Omega \Phi^{-1} \Omega^\top \succ 0$ ;
- iii) Se  $\Psi \succ 0$ ,  $M \succeq 0$  se e somente se  $\Phi - \Omega^\top \Psi^{-1} \Omega \succeq 0$ ;
- iv) Se  $\Phi \succ 0$ ,  $M \succeq 0$  se e somente se  $\Psi - \Omega \Phi^{-1} \Omega^\top \succeq 0$ ;

Na prática, o complemento de Schur aumenta o número de linhas e colunas de uma desigualdade  $F(x) \succ 0$  de modo a eliminar multiplicações por variáveis de decisão desse problema.

### 2.2.3 Lema da Projeção

Outra ferramenta que permite eliminar a multiplicação de variáveis de decisão é o lema da projeção. Segundo [Peres e Oliveira 2024], sendo  $\Phi = \Phi^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\Omega \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $\Psi \in \mathbb{R}^{r \times n}$ , existe um  $X \in \mathbb{R}^{r \times m}$  tal que:

$$\Phi + \Omega^\top X^\top \Psi + \Psi^\top X \Omega \prec 0, \quad (2.6)$$

se e somente se:

$$\Omega^{\perp\top} \Phi \Omega^\perp \prec 0 \quad \text{e} \quad \Psi^{\perp\top} \Phi \Psi^\perp \prec 0, \quad \text{com} \quad \Omega \Omega^\perp = 0 \quad \text{e} \quad \Psi \Psi^\perp = 0,$$

## 2.3 Noções Básicas de Sistemas de Controle

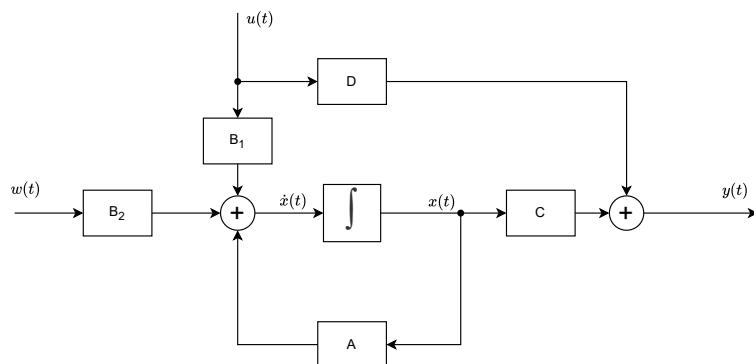
Uma enorme quantidade de sistemas é modelada por meio de [Equações diferenciais Ordinárias \(EDOs\)](#) lineares. Segundo [Skelton, Iwasaki e Grigoriadis 2013], é possível escrevê-los de forma genérica como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u(t) + B_2w(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (2.7)$$

Essa estrutura é chamada de representação em que  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados, sendo um estado uma variável dependente do tempo dentro da dinâmica do sistema,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor contendo usualmente as entradas de controle do sistema,  $w(t) \in \mathbb{R}^q$  também é um vetor contendo entradas, porém essas usualmente representam perturbações no sistema,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de saídas e  $A, B_1, B_2, C, D$  são matrizes que dependem dos parâmetros do sistema.

Dentro da representação em espaço de estados, é possível definir também os conceitos de malha aberta e de malha fechada. Um sistema em malha aberta é aquele definido apenas pela estrutura básica da equação (2.7), ou seja, sem que a entrada  $u$  dependa dos estados ou das saídas do sistema. É possível representar esse sistema a partir da Figura 2.

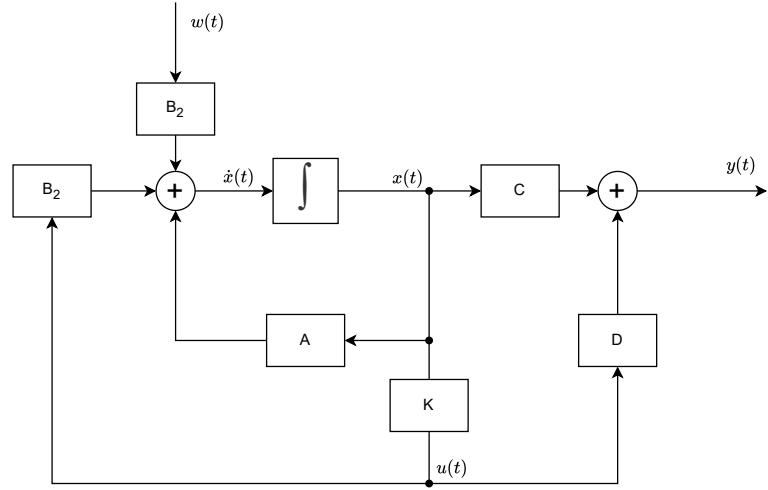
Figura 2 – Diagrama de Blocos de um Sistema Genérico em Malha Aberta



Fonte: Autoria Própria

Em contrapartida, um sistema em malha fechada é aquele em que a entrada de controle  $u$  do sistema, representada pela equação (2.7), é determinada em função dos estados ou da saída do próprio sistema. No presente trabalho, essa entrada de controle foi definida como  $u = Kx$ , em que  $K$  denomina-se ganho de realimentação de estados ou ganho em malha fechada. Este conceito será discutido com maior profundidade ao longo do trabalho. A representação em diagrama de blocos da equação (2.7) é apresentada pela Figura 3.

Figura 3 – Diagrama de Blocos de um Sistema Genérico em Malha Fechada



Fonte: Autoria Própria

### 2.3.1 Análise com Desigualdade de Lyapunov

Segundo [Khalil e Grizzle 2002], o teorema de Lyapunov diz que um sistema da forma:

$$\dot{x} = Ax,$$

Com  $x = 0$  sendo o seu ponto de equilíbrio, é assintoticamente estável se e somente se existir uma função  $V(x)$ , contínua e diferenciável, chamada de função de Lyapunov, tal que:

- i)  $V(0) = 0$ ;
- ii)  $V(x) > 0$ , para  $x \neq 0$ ;
- iii)  $\dot{V}(x) < 0$ , para  $x \neq 0$ .

Visando atender a essas condições, pode-se utilizar uma função de Lyapunov na forma quadrática, ou seja:

$$V(x) = x^\top Px, \quad (2.8)$$

sendo  $P = P^T \succ 0$  (segundo [Chen 1984], isso resulta em  $V(x) > 0$ ). Então, por construção, a primeira condição também é atendida. Para encontrar os requisitos que tornam a terceira condição válida, deve-se aplicar a equação (2.8) nela. Dessa forma:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^\top Px + x^\top P\dot{x}. \quad (2.9)$$

Dado que o sistema é definido por  $\dot{x} = Ax$ , então:

$$\dot{V}(x) = (Ax)^\top Px + x^\top PAx,$$

que pode ser reescrita como:

$$\dot{V}(x) = x^\top (A^\top P + PA)x < 0.$$

Com isso, para que a derivada da função de Lyapunov seja negativa, basta que o termo entre parênteses seja negativo. Ou seja:

$$A^\top P + PA \prec 0, \quad (2.10)$$

que é a desigualdade de Lyapunov. Dessa forma, um sistema  $\dot{x} = Ax$  será estável se e somente se existir uma matriz  $P = P^\top \succ 0$  que satisfaça a equação (2.10).

### 2.3.2 Síntese com Desigualdade de Lyapunov

Para um sistema controlado com realimentação de estados, é utilizado que  $u = Kx$ , então:

$$\dot{x} = Ax + BKx = (A + BK)x.$$

Aplicando essas condições na equação (2.10), o resultado é:

$$(A + BK)^\top P + P(A + BK) \prec 0.$$

Devido à presença de produtos entre as variáveis, a desigualdade em questão deixa de ser uma LMI. Segundo [Peres e Oliveira 2024], para contornar essa não linearidade, aplica-se a transformação de congruência:

$$P^{-1} \left( (A + BK)^\top P + P(A + BK) \right) P^{-1} \prec 0.$$

Omitindo alguns passos intermediários e aplicando as substituições  $W = P^{-1}$  e  $Z = KW$ , então, para que exista um  $K$  que resolva o problema da síntese do ganho dado um sistema em espaço de estados definido pelas matrizes  $A$  e  $B$ , basta que existam  $W = W^\top \succ 0$  e  $Z$  com:

$$\begin{aligned}
& AW + WA^\top + BZ + Z^\top B^\top \prec 0, \\
& \text{sendo} \\
& K = ZW^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

## 2.4 Modelagem de Incertezas em Sistemas Dinâmicos

### 2.4.1 Importância da Modelagem de Incertezas

Toda a teoria de controle apresentada até esse ponto do trabalho apresenta uma certa limitação: funciona apenas para sistemas exatos. No mundo real, dificilmente se trabalha com modelos 100% exatos. Sistemas costumam apresentar incertezas nos valores de seus parâmetros, o que faz com que seja sempre necessário aproximar as equações que os descrevem.

Em alguns casos, essas aproximações não geram diferenças significativas no funcionamento do modelo teórico em relação ao modelo real. Entretanto, em outros casos, essas incertezas podem alterar significativamente as respostas do sistema real, podendo até mesmo desestabilizá-lo.

Dada essa situação, os controladores projetados para sistemas com incertezas consideráveis devem ser capazes de manter o desempenho mesmo em casos de desvios mais acentuados dos parâmetros. Para isso, é essencial que haja uma modelagem das incertezas, de modo a permitir a síntese do ganho corretamente.

Esta seção tem como objetivo definir uma forma de modelar as imprecisões nos valores dos parâmetros.

### 2.4.2 Modelagem de Incertezas

O caso mais básico de incerteza é o intervalo em um escalar, no qual se sabe apenas o intervalo em que se encontra um valor de uma matriz  $A$  simétrica em relação à origem. Exemplo:

Dada uma matriz  $A$ :

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \theta & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

Sabe-se que o parâmetro  $\theta$  assume valores entre  $-50$  e  $+50$ , ou seja:

$$\theta = [-50, +50],$$

Então pode-se definir a matriz  $A_{max}$  e  $A_{min}$  como:

$$A_{max} = \begin{bmatrix} +50 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$A_{min} = \begin{bmatrix} -50 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

Dessa forma, é possível afirmar que a matriz A está entre as matrizes  $A_{max}$  e  $A_{min}$ .

Outro tipo de incerteza é a afim. Nesse caso, o parâmetro incerto não precisa ser simétrico em relação à origem. Exemplo:

Dada uma matriz  $A$ :

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \theta & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

Sabe-se que o parâmetro  $\theta$  assume valores entre 90 e 110, ou seja:

$$\theta = [90, 110].$$

Então pode-se definir a matriz  $A_{max}$  e  $A_{min}$  como:

$$A_{max} = \begin{bmatrix} 110 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$A_{min} = \begin{bmatrix} 90 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, é possível afirmar que a matriz A está compreendida entre as matrizes  $A_{max}$  e  $A_{min}$ .

Agora, para definir matematicamente essa situação, serão introduzidas as variáveis  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . Elas irão representar o quanto próximo o valor real da matriz A está do seu valor máximo ou mínimo. Além disso, todos os  $\alpha_n$  formam uma soma convexa, ou seja:

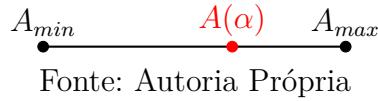
$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Então, a equação que representa a matriz A com incerteza afim é:

$$A(\alpha) = \alpha_1 A_{min} + \alpha_2 A_{max}.$$

Avançando um pouco nesse tópico, é possível definir incertezas politópicas ao voltar ao exemplo da incerteza afim. Quando se tem apenas um parâmetro variando, a matriz A do sistema pode ser representada por um segmento de reta:

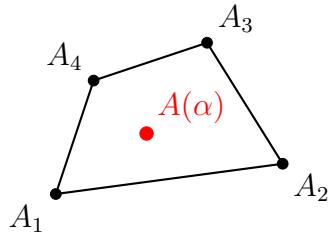
Figura 4 – Representação de  $A(\alpha)$  com 1 parâmetro incerto



Fonte: Autoria Própria

Esse segmento de reta é denominado politopo. Suas extremidades correspondem às matrizes A, com os valores máximos e mínimos do parâmetro de variância. Caso haja dois parâmetros variando, então a forma geométrica será um quadrilátero:

Figura 5 – Representação de  $A(\alpha)$  com 4 vértices



Fonte: Autoria Própria.

Em que cada vértice corresponde a uma combinação dos máximos e mínimos dos parâmetros, e a matriz  $A(\alpha)$  pode ser qualquer ponto dentro desse politopo. Esse exemplo com 2 parâmetros variando (4 vértices) pode ser representado pela equação:

$$A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4,$$

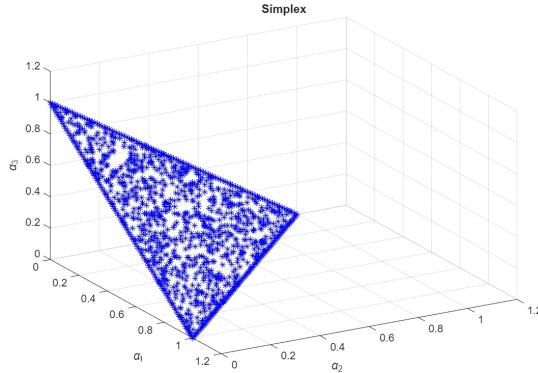
$$\text{sendo } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1.$$

Assim, a cada parâmetro com incerteza adicionado, o número de vértices do politopo gerado é multiplicado por 2.

Segundo [Ebihara, Peaucelle e Arzelier 2015], pode-se definir o domínio de incerteza através de um simplex na forma:

$$\Lambda_N = \left\{ \alpha_i \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \text{ e } \alpha_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, N \right\}.$$

Figura 6 – Ilustração de um Simplex Unitário em  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$



Fonte: Autoria Própria.

Sendo assim, um politopo é definido como o subespaço vetorial gerado pelos seus vértices, com  $\alpha_n \in \Lambda_N$ , podendo ser representado pelas equações:

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \quad (2.12)$$

sendo  $N$  é o número de vértices do polítopo. Além disso, a soma de todos os  $\alpha_i$  é 1.

É possível expandir essa visão para sistemas com incertezas nas matrizes  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C$  e  $D$ , que podem ser causadas por incertezas nos atuadores ou sensores, de forma semelhante à (2.12):

$$(A, B_1, B_2, C, D)(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (A_i, B_{1,i}, B_{2,i}, C_i, D_i). \quad (2.13)$$

## 2.5 Controle Robusto via LMI

### 2.5.1 Análise de Estabilidade Robusta via LMI

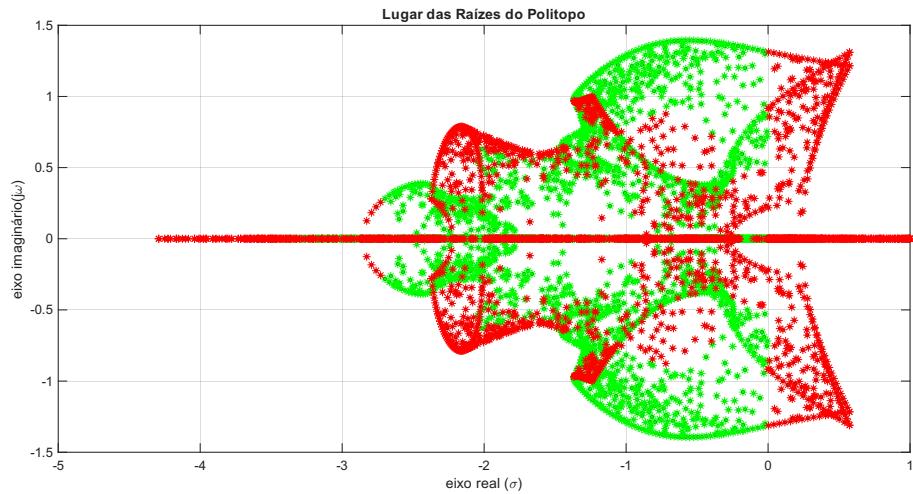
Segundo [BOYD *et al.* 1994], a análise de estabilidade em sistemas com incertezas modeladas por politopos, conforme a equação (2.12), difere da realizada em sistemas sem incertezas. Em sistemas onde a matriz  $A$  é modelada através de  $A(\alpha)$  a equação (2.10) não pode ser utilizada diretamente para essa análise. Nesse contexto, a desigualdade de Lyapunov assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} A(\alpha)^\top P + PA(\alpha) &\prec 0, \\ P &= P^\top \succ 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Assim, para que um sistema modelado por meio de  $A(\alpha)$  seja estável, a desigualdade (2.14) deve ser válida para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ , de modo que, em todos os pontos do

politopo, haja autovalores com parte real negativa. A figura 7 ilustra a nuvem de autovalores de um sistema modelado por meio de um politopo. Na figura, todos os autovalores são posicionados no plano- $s$ , sendo verdes os que, em um determinado ponto, têm parte real negativa. Caso pelo menos um deles tenha uma parte real positiva, o sistema é instável. Sendo assim, o sistema da figura 7 é instável.

Figura 7 – Nuvem de Autovalores de Politopo Instável Hipotético



Fonte: Autoria Própria.

Para encontrar uma solução para esse problema, é necessário e suficiente que, para cada valor de  $A(\alpha)$  dentro do polítopo, exista uma  $P$  diferente que resolva (2.14), ou seja, a matriz  $P$  também depende de parâmetros, ou seja,  $P(\alpha)$ . Assim, a LMI (2.14) pode ser formulada de forma genérica como:

$$\begin{aligned} A(\alpha)^T P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) &\prec 0, \\ P(\alpha) = P(\alpha)^T &\succ 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Como o polítopo  $A(\alpha)$  tem infinitos pontos, para que ele seja estável, é necessário e suficiente que também haja infinitos  $P(\alpha)$ , o que torna o problema impossível de resolver.

Para contornar essa questão, uma possível solução é flexibilizar o problema. Isso é feito definindo uma construção de  $P(\alpha)$  e testando se essa construção atende à desigualdade (2.15). Um problema para esse tipo de abordagem reside no fato de que, frequentemente, resulta no produto de variáveis de decisão no problema, o que exige algumas manipulações algébricas para contornar essa questão. Além disso, essa abordagem tende a gerar soluções apenas suficientes para o problema, mas não necessárias.

### 2.5.2 Estabilidade Quadrática

Diante desse contexto, uma possível construção para a matriz  $P(\alpha)$  consiste em adotar sua versão quadrática, ou seja,

$$P(\alpha) = P. \quad (2.16)$$

Nesse caso, assim como na equação (2.10), a matriz  $P$  é construída como uma matriz constante. Esse cenário com  $P$  constante é chamado de **Estabilidade Quadrática**

Dessa forma, substituindo as equações (2.16) e (2.12) nas LMIs (2.15), o resultado é:

$$\left( \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i^\top \right) P + P \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i \right) \prec 0.$$

Dada essa formulação para o problema, é possível aplicar o teorema dos polinômios homogêneos, resultando em:

$$\{ A_n^\top P + PA_n \prec 0, \quad \forall n = 1, 2, \dots, N, \quad (2.17)$$

Em que  $P$  é uma matriz simétrica e positiva definida, que deve ser encontrada como condição apenas suficiente, mas não necessária e suficiente, para que o politopo formado por todos os  $A_n$  seja estável para  $\alpha \in \Lambda_N$ .

### 2.5.3 Síntese em Controle Robusto via LMI

Para um sistema definido por:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du. \end{cases}$$

No qual  $A, B, C$  e  $D$  são polítopos de  $n$  vértices. Sendo  $u = Kx$ , esse sistema pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BK)x, \\ y = (C + DK)x. \end{cases}$$

O problema da síntese consiste em encontrar um ganho  $K$  que estabilize o sistema. Para isso, será substituída a equação (2.13) na equação (2.11), ou seja:

$$A(\alpha)W(\alpha) + W(\alpha)A(\alpha)^\top + B(\alpha)Z + Z^\top B(\alpha)^\top \prec 0.$$

De forma análoga ao problema da análise da estabilidade, o da síntese também exige uma matriz  $W(\alpha)$  de infinitos pontos como condição suficiente para a síntese do ganho. É importante ressaltar que, por ser uma variável de folga,  $Z$  depende de  $\alpha$ ; não é uma condição necessária para solucionar a desigualdade.

Além disso, a matriz de ganho é dada por  $K = ZW^{-1}$ , o que dificulta a construção de  $W(\alpha)$ . Assim, visando à simplificação do problema, a matriz  $W(\alpha)$  será definida como  $W$  constante. Caso  $W(\alpha)$  não fosse construída como uma matriz constante, seria necessário introduzir mais variáveis de folga, de modo que  $K$  dependesse apenas delas.

Então, utilizando o teorema dos polinômios homogêneos, o conjunto de LMIs que é suficiente para solucionar o problema da síntese é:

$$\left\{ A_i W + W A_i^\top + B_i Z + Z^\top B_i^\top \prec 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \right. \quad (2.18)$$

Sendo  $W$  e  $Z$  as variáveis,  $W$  simétrica e positivamente definida, e  $Z = KW$ . Dessa forma, o ganho  $K$  pode ser determinado por  $K = ZW^{-1}$ .

Um detalhe importante sobre as LMIs, tanto no problema de análise quanto no de síntese, é que, quando utilizadas, são suficientes para resolver o problema, mas não são necessárias. Ou seja, mesmo nos casos em que as LMIs não têm solução, o sistema não será necessariamente instável.

Segundo [Peres e Oliveira 2024], uma possível forma de lidar com isso é reduzir o conservadorismo das matrizes  $P(\alpha)$ . Uma forma de diminuir esse conservadorismo é considerando  $P(\alpha)$  como um somatório convexo de vários  $P_i$  na forma:

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i. \quad (2.19)$$

Essa construção para  $P(\alpha)$  é chamada de afim, e problemas de análise ou síntese que a utilizem são chamados de **problemas com estabilidade afim**.

Com isso, surgem duas questões: a primeira refere-se ao valor de ganho, que é obrigatoriamente constante e depende diretamente da matriz  $P(\alpha)$  ou de sua dual  $W(\alpha)$ . Ao construir  $P(\alpha)$  conforme a equação (2.19), para realizar a síntese do ganho é necessário introduzir variáveis de folga, de modo que o valor do ganho dependa apenas delas.

Além disso, ao definir  $P(\alpha)$  afim, passam a existir produtos de matrizes dependentes de  $\alpha$ , o que impossibilita a aplicação do teorema dos polinômios homogêneos. Para lidar com esse problema, será necessário reescrever a desigualdade de Lyapunov de modo que a matriz  $P(\alpha)$  não esteja em produto matricial com nenhuma das matrizes  $A(\alpha)$ ,  $B(\alpha)$ ,  $C(\alpha)$  ou  $D(\alpha)$ .

Para chegar a esta LMI, é necessário, primeiramente, utilizar uma versão dual da (2.10) em um sistema com realimentação de estados, ou seja,  $\tilde{A} = A + BK$ . Utilizando a seguinte transformação de congruência:

$$P^{-1}(\tilde{A}^\top P + P\tilde{A})P^{-1} \prec 0,$$

E depois aplicando a substituição  $W = P^{-1}$ :

$$\tilde{A}W + W\tilde{A}^\top \prec 0,$$

que pode ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} I \\ \tilde{A}^\top \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & W \\ W & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \tilde{A}^\top \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.20)$$

Além disso, a outra LMI da Desigualdade de Lyapunov refere-se à matriz  $W$ , que deve ser positiva definida, uma vez que essa matriz é definida como a matriz inversa de  $P$ , ou seja:

$$W \succ 0,$$

Que pode ser reescrita como:

$$-2\xi W \prec 0,$$

sendo  $\xi$  um escalar positivo com valor fixado. Com isso, é possível transformar essa desigualdade em:

$$\begin{bmatrix} \xi I \\ -I \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & W \\ W & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi I \\ -I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.21)$$

Com as equações (2.20) e (2.21) reescritas, é possível aplicar o Lema da Projeção. Para isso, as matrizes  $\Phi$ ,  $\Omega$  e  $\Psi$  são escritas como:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & W \\ W & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega = [\tilde{A}^\top \ -I], \quad \Psi = [I \ \xi I].$$

Substituindo na equação (2.6):

$$\begin{bmatrix} 0 & W \\ W & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ -I \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} I & \xi I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ \xi I \end{bmatrix} X^\top [\tilde{A}^\top \ -I] \prec 0.$$

Desenvolvendo essa equação:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}X + X^\top \tilde{A}^\top & \xi \tilde{A}X - X^\top + W \\ \xi X^\top \tilde{A}^\top - X + W & -\xi X - \xi X^\top \end{bmatrix} \prec 0.$$

É importante notar que atender a essa LMI é condição necessária e suficiente para solucionar o problema de análise de um sistema sem incertezas; ou seja, trata-se de outra

forma de expressar a desigualdade de Lyapunov. Agora, utilizando que  $\tilde{A} = A + BK$  e aplicando que  $Z = KX$ , de forma equivalente a (2.11), o problema da síntese em sistemas sem incertezas também pode ser solucionado através da LMI:

$$\begin{bmatrix} AX + X^\top A^\top + BZ + Z^\top B^\top & W - X^\top + \xi AX + \xi BZ \\ W - X + \xi X^\top A^\top + \xi Z^\top B^\top & -\xi X - \xi X^\top \end{bmatrix} \prec 0, \quad (2.22)$$

sendo  $K = ZX^{-1}$ .

Em um sistema com incertezas politópicas, as matrizes  $A$  e  $B$  podem ser modeladas pela equação (2.13). Substituindo-as na equação (2.22):

$$\begin{bmatrix} A(\alpha)X + X^\top A(\alpha)^\top + B(\alpha)Z + Z^\top B(\alpha)^\top & W - X^\top + \xi A(\alpha)X + \xi B(\alpha)Z \\ W - X + \xi X^\top A(\alpha)^\top + \xi Z^\top B(\alpha)^\top & -\xi X - \xi X^\top \end{bmatrix} \prec 0.$$

Utilizando o teorema dos polinômios homogêneos, o problema da síntese do ganho com estabilidade quadrática em sistemas com incertezas politópicas é resolvido de forma apenas suficiente pelas LMIs:

$$\begin{bmatrix} A_i X + X^\top A_i^\top + B_i Z + Z^\top B_i^\top & W - X^\top + \xi A_i X + \xi B_i Z \\ W - X + \xi X^\top A_i^\top + \xi Z^\top B_i^\top & -\xi X - \xi X^\top \end{bmatrix} \prec 0, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

sendo  $K = ZX^{-1}$ .

Conforme discutido anteriormente, é possível aumentar as chances de sucesso do problema de síntese ao reduzir o conservadorismo, ou seja, ao modelar  $W$  como uma soma convexa de  $N$  matrizes  $W_i$ . Na prática, em vez da matriz  $W$  procurada ser solução da LMI para todas as combinações convexas das matrizes  $A$  e  $B$ , agora cada combinação dessas matrizes terá um  $W$  diferente, gerado por uma combinação convexa de  $W_i$ .

Cabe ressaltar que, devido à introdução de variáveis de folga através do lema da projeção, agora o ganho não é dado pela multiplicação de  $W(\alpha)$  com outras matrizes, o que possibilita utilizar essa LMI para síntese com estabilidade afim.

Dessa forma, aplicando a equação (2.19) para  $W$  e a equação (2.13) para  $A$  e  $B$  na equação (2.22):

$$\begin{bmatrix} A(\alpha)X + X^\top A(\alpha)^\top + B(\alpha)Z + Z^\top B(\alpha)^\top & W(\alpha) - X^\top + \xi A(\alpha)X + \xi B(\alpha)Z \\ W(\alpha) - X + \xi X^\top A(\alpha)^\top + \xi Z^\top B(\alpha)^\top & -\xi X - \xi X^\top \end{bmatrix} \prec 0.$$

Utilizando o teorema dos polinômios homogêneos, o problema de síntese de controle robusto com estabilidade afim em sistemas com incertezas politópicas é resolvido de forma apenas suficiente pela LMI:

$$\begin{bmatrix} A_i X + X^\top A_i^\top + B_i Z + Z^\top B_i^\top & W_i - X^\top + \xi A_i X + \xi B_i Z \\ W_i - X + \xi X^\top A_i^\top + \xi Z^\top B_i^\top & -\xi X - \xi X^\top \end{bmatrix} \prec 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.23)$$

sendo  $K = ZX^{-1}$ .

#### 2.5.4 Solvers Utilizados

Para solucionar as LMIs ao longo desse trabalho, foram desenvolvidos códigos no software [Matrix Laboratory \(MATLAB\)](#). Além disso, esses códigos baseiam-se em 2 toolboxes: [Yet Another LMI Parser \(YALMIP\)](#) [Lofberg 2004] e [Self-Dual Minimization \(SeDuMi\)](#) [Sturm 1999]. O [YALMIP](#) tem funções que tratam as LMIs como variáveis, o que as declara da mesma forma como são escritas. Já o [SeDuMi](#) funciona complementando o [YALMIP](#), com funções que permitem resolver as LMIs escritas no formato do [YALMIP](#) utilizando o método dos pontos interiores.

## 2.6 Controle Robusto $\mathcal{H}_2$

Dado um sistema representado pelas equações de espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (2.24)$$

Segundo [Skelton, Iwasaki e Grigoriadis 2013], sua norma  $\mathcal{H}_2$  pode ser definida como a energia da sua resposta ao impulso, ou seja:

$$\|G\|_2^2 = \int_0^\infty \text{Tr}(g(t)^\top g(t)) dt, \quad (2.25)$$

sendo  $g(t)$  a resposta do sistema ao impulso.

Mas essa não é uma forma muito prática de calcular o valor dessa norma. Para obter um método mais conveniente, deve-se voltar à equação (2.24). A solução desse sistema é :

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^\infty e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Como se trata da resposta ao impulso unitário, as condições iniciais desse sistema são nulas, ou seja:

$$x(t) = \int_0^\infty e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Como  $u(t) = \delta(t)$  e  $\delta(t) = 0$  para  $t \geq 0$ , então:

$$x(t) = e^{At}B.$$

Voltando para a equação (2.24):

$$g(t) = y(t) = Cx(t) = Ce^{At}B, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.26)$$

Aplicando a equação (2.26) na equação (2.25), então outra definição possível para a norma  $\mathcal{H}_2$  é:

$$\|G\|_2^2 = \int_0^{+\infty} \text{Tr}\left(Ce^{At}BB^\top e^{A^\top t}C^\top\right) dt = \text{Tr}\left(C \int_0^{+\infty} e^{At}BB^\top e^{A^\top t} dt C^\top\right).$$

Como o Gramiano de Controlabilidade é dado por:

$$W_c = \int_0^{+\infty} e^{At}BB^\top e^{A^\top t} dt,$$

Então, é possível calcular a norma  $\mathcal{H}_2$  de um sistema através de:

$$\|G\|_2^2 = \text{Tr}\left(CW_cC^\top\right), \quad (2.27)$$

sendo que esse gramiano é a solução da equação matricial:

$$AW_c + W_c A^\top + BB^\top = 0.$$

É possível reescrever essa equação como um problema de otimização, ou seja:

$$\begin{aligned} & \min_{P=P^\top > 0} \quad \text{Tr}(CPC^\top), \\ & \text{sujeito a: } AP + PA^\top + BB^\top \preceq 0. \end{aligned}$$

Segundo [Axler 2024], utilizando a propriedade circular do traço, o problema fica:

$$\begin{aligned} & \min_{P=P^\top > 0} \quad \text{Tr}(C^\top PC), \\ & \text{sujeito a: } AP + PA^\top + BB^\top \preceq 0, \end{aligned}$$

podendo, assim, ser resolvido por meio de LMIs, sendo que, na solução ótima,  $P = W_c$  e  $\|G\|_2^2 = \text{Tr}(C^\top PC)$ .

Analogamente, pode-se calcular a norma  $\mathcal{H}_2$  também pelo Gramiano de Observabilidade através de:

$$\begin{aligned} & \min_{P=P^\top > 0} \text{Tr}(B^\top PB), \\ & \text{sujeito a: } A^\top P + PA + C^\top C \preceq 0, \end{aligned} \tag{2.28}$$

e na solução ótima  $P = W_o$  e  $\|G\|_2^2 = \text{Tr}(B^\top PB)$ .

Dada a definição da norma  $\mathcal{H}_2$ , uma maneira possível de interpretá-la é que comumente existe uma certa relação entre o tempo de estabilização do sistema ao impulso e o valor da norma  $\mathcal{H}_2$ , de modo que sistemas com maiores valores da norma  $\mathcal{H}_2$  tendem a demorar mais para atingirem o regime permanente. Dessa forma, projetar um controlador que busque minimizar a norma  $\mathcal{H}_2$  possivelmente reduzirá o tempo de convergência do sistema em malha fechada.

O controle  $\mathcal{H}_2$  é uma vertente do controle que busca minimizar a energia da saída de um sistema em resposta a um impulso, ou seja, a norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema. Isso é feito por meio da determinação de um ganho de realimentação que minimize a norma  $\mathcal{H}_2$ . O resultado disso é que um controlador  $\mathcal{H}_2$  tende a minimizar o tempo de estabilização da saída do sistema.

Para esse problema da síntese do ganho  $\mathcal{H}_2$  em um sistema conforme a equação (2.7), foi utilizado novamente que  $u = Kx$ , ou seja:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + B_1K)x + B_2w, \\ y(t) = (C + DK)x, \end{cases} \tag{2.29}$$

Sendo  $w$  uma entrada exógena do sistema, que, no contexto da síntese do ganho  $\mathcal{H}_2$ , foi adotada como uma função de impulso. Esse problema é muito semelhante ao da análise, porém, as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  se tornaram  $(A + B_1K)$ ,  $B_2$  e  $(C + DK)$ , respectivamente, ou seja:

$$\tilde{A} = A + B_1K, \quad \tilde{B} = B_2, \quad \tilde{C} = C + DK. \tag{2.30}$$

Substituindo essas equações na equação (2.28), então o novo problema de otimização foi formulado através de:

$$\min_{P=P^\top > 0} \text{Tr}(B_2^\top PB_2),$$

sujeito a:

$$(A + B_1K)^\top P + P(A + B_1K) + (C + DK)^\top (C + DK) \preceq 0.$$

A desigualdade matricial desse problema apresenta multiplicações de variáveis ( $K^\top P$ ,  $PK$ , etc.), portanto, não é mais um problema com LMIs. Dessa forma, segundo

[Peres e Oliveira 2024], é necessário reescrever esse problema com o Complemento de Schur utilizando:

$$\Psi = (A + B_1 K)^\top P + P(A + B_1 K), \quad \Omega = (C + D K)^\top, \quad \Phi = I.$$

Assim, com o item iv) do Complemento de Schur, o problema pode ser reescrito como:

$$\min_{P=P^\top > 0} \text{Tr}(B_2^\top P B_2),$$

sujeito a:

$$\begin{bmatrix} (A + B_1 K)^\top P + P(A + B_1 K) & (C + D K)^\top \\ (C + D K) & -I \end{bmatrix} \preceq 0,$$

que também não é um problema com LMIs devido novamente à existência de produto de variáveis ( $K^\top P$  e  $PK$ ). Por isso será utilizada a seguinte transformação de congruência:

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A + B_1 K)^\top P + P(A + B_1 K) & (C + D K)^\top \\ C + D K & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \preceq 0$$

Desenvolvendo todas as multiplicações e introduzindo as variáveis  $Z = KP^{-1}$  e  $W = P^{-1}$ , o problema de otimização pode ser escrito como:

$$\min_{W=W^\top > 0} \text{Tr}(B_2^\top W^{-1} B_2),$$

sujeito a:

$$\begin{bmatrix} WA^\top + AW + Z^\top B_1^\top + B_1 Z & WC^\top + Z^\top D^\top \\ CW + DZ & -I \end{bmatrix} \preceq 0.$$

Nessa formulação, há um problema: a matriz inversa de  $W$ . Essa matriz inversa é extremamente ineficaz no método para encontrar a solução desse problema. Para eliminá-la, será criada uma nova variável  $X$ :

$$X \succeq B_2^\top W^{-1} B_2,$$

que pode ser reorganizada como:

$$X - B_2^\top W^{-1} B_2 \succeq 0. \quad (2.31)$$

Assim, é possível reescrever esse problema em termos do complemento de Schur. Para isso, será utilizado que:

$$\Psi = X, \quad \Omega = B_2^\top, \quad \Phi = W.$$

Então, utilizando o item iv) do Complemento de Schur, a equação (2.31) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} X & B_2^\top \\ B_2 & W \end{bmatrix} \succeq 0.$$

Com isso, o problema da síntese do controle  $\mathcal{H}_2$  ótimo pode ser reescrito como:

$$\min \text{Tr}(X),$$

sujeito a:

$$X = X^\top, \quad Z, \quad W = W^\top \succ 0,$$

$$\begin{bmatrix} X & B_2^\top \\ B_2 & W \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{2.32}$$

$$\begin{bmatrix} AW + WA^\top + Z^\top B_1^\top + B_1 Z & WC^\top + Z^\top D^\top \\ CW + DZ & -I \end{bmatrix} \preceq 0,$$

$$\text{e, na solução ótima: } \|G\|_2^2 = \text{tr}[X], \quad K = ZW^{-1}.$$

É importante ressaltar que, dada a convexidade do problema, em que não há mínimos locais, é impossível haver outro ganho  $K$  que minimize ainda mais a norma  $\mathcal{H}_2$  para esse sistema especificamente; por isso, esse ganho é chamado de ganho ótimo. Como o ganho é ótimo apenas no sistema fixado, pode-se afirmar que o ganho ótimo de um sistema depende dos parâmetros desse sistema fixo.

Em sistemas com incertezas modeladas por meio de politopos, deve-se aplicar a equação (2.13). Nesse caso, a matriz  $W$  passa a depender de parâmetros, tornando-se então  $W(\alpha)$ . Assim, o problema pode ser reescrito como:

$$\min \text{Tr}(X),$$

sujeito a:

$$X = X^\top, \quad Z, \quad W(\alpha) = W(\alpha)^\top \succ 0,$$

$$\begin{bmatrix} X & B_2(\alpha)^\top \\ B_2(\alpha) & W(\alpha) \end{bmatrix} \succeq 0,$$

$$\begin{bmatrix} A(\alpha)W(\alpha) + W(\alpha)A(\alpha)^\top + Z^\top B_1(\alpha)^\top + B_1(\alpha)Z & W(\alpha)C(\alpha)^\top + Z^\top D(\alpha)^\top \\ C(\alpha)W(\alpha) + D(\alpha)Z & -I \end{bmatrix} \preceq 0.$$

Diante disso, o problema passa a ter dimensão infinita, em que cada um dos infinitos pontos do politopo possui sua própria matriz  $W(\alpha)$  que minimiza a norma  $\mathcal{H}_2$  nesse ponto. Como o ganho calculado deve ser constante e depende diretamente de  $W(\alpha)$ , adotou-se o caso de estabilidade quadrática, ou seja, com  $W(\alpha) = W$ .

Sendo assim, utilizando o teorema dos polinômios homogêneos, o problema de síntese de controle robusto com minimização da norma  $\mathcal{H}_2$  em sistemas com incertezas politópicas deve ser reescrito como:

$$\begin{aligned} & \min \text{Tr}(X), \\ & \text{sujeito a:} \\ & X = X^\top, \quad Z, \quad W = W^\top > 0, \\ & \begin{bmatrix} X & B_{2,i}^\top \\ B_{2,i} & W \end{bmatrix} \succeq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N, \\ & \begin{bmatrix} A_i W + B_{1,i} Z + W A_i^\top + Z^\top B_{1,i}^\top & W C_i^\top + Z^\top D_i^\top \\ C W + D Z & -I \end{bmatrix} \preceq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N, \\ & \text{e } \|G\|_2^2 \leq \text{tr}[X], \quad K = Z W^{-1}, \end{aligned} \tag{2.33}$$

sendo  $N$  o número de vértices do politopo.

É importante destacar que, como esse problema de otimização é suficiente apenas para a síntese do ganho robusto, o valor da norma  $\mathcal{H}_2$  passa a ser o custo garantido. Isso quer dizer que, em um sistema em malha fechada com um controlador robusto  $\mathcal{H}_2$ , sua norma  $\mathcal{H}_2$  será menor que a norma garantida em qualquer ponto do politopo.

De maneira análoga ao desenvolvido na subseção 2.5.3, é possível reduzir a norma garantida por meio da redução do conservadorismo do problema, adotando  $W(\alpha)$  com estabilidade afim. Para isso, seria necessário encontrar uma formulação equivalente à equação (2.33) que não dependa diretamente de  $W(\alpha)$ , mas apenas de variáveis de folga. Assim,  $W(\alpha)$  teria maior grau de liberdade e se aproximaria de  $W(\alpha)$  ótima, resultando em um ganho robusto mais próximo do ganho ótimo em todos os pontos do polítopo.

## 2.7 Controle Robusto $\mathcal{H}_\infty$

Dado um sistema representado pelas equações de espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_2 w, \\ y = Cx, \end{cases} \tag{2.34}$$

Sendo  $w$  uma entrada de perturbação. Segundo [Skelton, Iwasaki e Grigoriadis 2013], sua norma  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser definida como:

$$\|G\|_{\infty} = \max_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(G(j\omega)). \quad (2.35)$$

Ou seja, a norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  de um sistema é igual ao seu maior valor singular da função de transferência da entrada  $w$  para a saída  $y$ , e este é dado por:

$$\sigma_i(G(j\omega)) = \sqrt{\lambda_i(G(j\omega)^*G(j\omega))}.$$

Com isso, uma forma de visualizar o valor da norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  é por meio do seu diagrama de Bode. Para sistemas **Single-Input Single-Output (SISO)**, a sua norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  será simplesmente o valor pico do diagrama de Bode; para sistemas **Multiple-Input Multiple-Output (MIMO)**, a sua norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  será o maior valor pico entre todas as suas curvas de valores singulares. As Figuras 8 e 9 (sistema MIMO com 2 entradas e 2 saídas) exemplificam ilustrativamente essa definição.

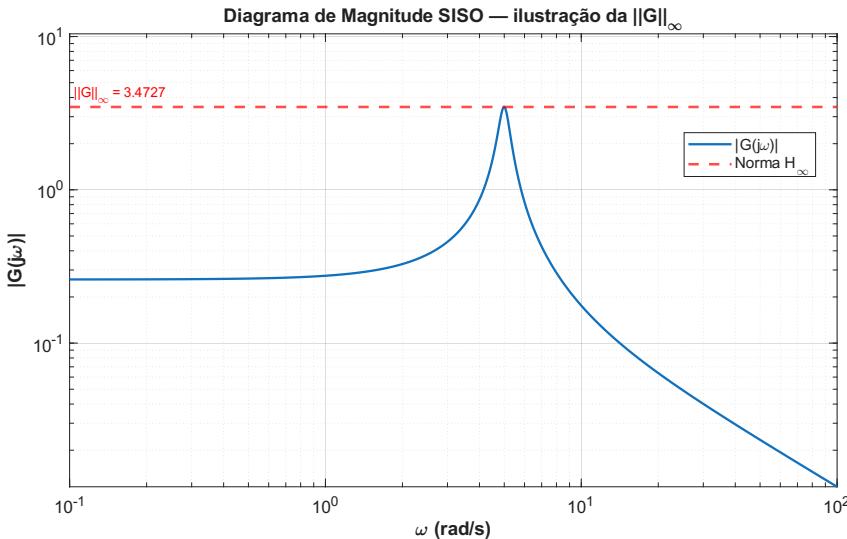


Figura 8 – Norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  em um Sistema Siso - Exemplo Ilustrativo

Nesse caso, a sua norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  é igual a 3,4727.

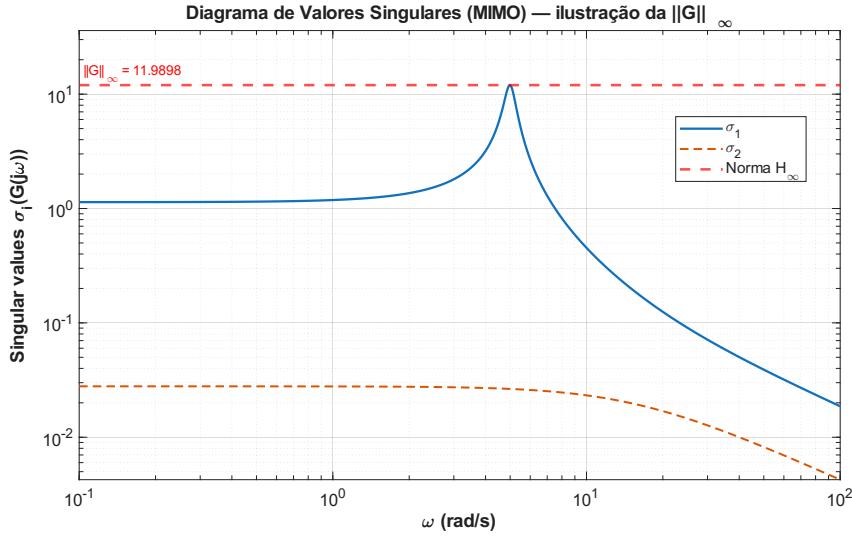


Figura 9 – Norma  $\mathcal{H}_\infty$  em um Sistema com 2 Entradas e 2 Saídas - Exemplo Ilustrativo

Nesse caso, a sua norma  $\mathcal{H}_\infty$  é igual a 11,9898.

Voltando à equação (2.24), no contexto da análise no controle  $\mathcal{H}_\infty$ , a entrada  $u$  será substituída por um ruído  $w \in \mathcal{L}_2$ , ou seja, com energia finita. Assim:

$$\|w\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)^\top w(t) dt < \infty.$$

Dada a definição da norma  $\mathcal{H}_\infty$  da equação (2.35), então também pode-se definir a norma  $\mathcal{H}_\infty$  como o menor valor de  $\gamma$  para o qual vale:

$$\|y(t)\|_2^2 < \gamma^2 \|w(t)\|_2^2,$$

que é equivalente a:

$$y(t)^\top y(t) - \gamma^2 w(t)^\top w(t) < 0.$$

Somando esta equação com a condição iii) do teorema de Lyapunov, o resultado é:

$$\dot{V} + y(t)^\top y(t) - \gamma^2 w(t)^\top w(t) < 0. \quad (2.36)$$

Essa desigualdade restringe ainda mais a matriz  $P$  da função de Lyapunov, uma vez que  $\dot{V}$  deve ser ainda mais negativa para minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema.

Substituindo a equação (2.9) na equação (2.36):

$$\dot{x}^\top P x + x^\top P \dot{x} + y(t)^\top y(t) - \gamma^2 w(t)^\top w(t) < 0,$$

que pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} A^\top P + PA + C^\top C & PB + C^\top D \\ B^\top P + D^\top C & D^\top D - \gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} < 0,$$

ou seja:

$$\begin{bmatrix} A^\top P + PA + C^\top C & PB + C^\top D \\ B^\top P + D^\top C & D^\top D - \gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0,$$

Sendo sua norma  $\mathcal{H}_\infty$  dada por  $\|G\|_\infty < \gamma$ .

Essa desigualdade ainda não é uma LMI: contém o termo  $\gamma^2$ . Para transformá-la em uma LMI, será utilizado que  $\mu = \gamma^2$ , ou seja:

$$\begin{bmatrix} A^\top P + PA & PB \\ B^\top P & -\mu I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^\top \\ D^\top \end{bmatrix} (-I) \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \prec 0.$$

Também será aplicado o Complemento de Schur, o que, segundo [Peres e Oliveira 2024], facilitará a obtenção da LMI do problema da síntese com minimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Então, a desigualdade pode ser reorganizada como:

$$\begin{bmatrix} A^\top P + PA & PB \\ B^\top P & -\mu I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^\top \\ D^\top \end{bmatrix} (-I) \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \prec 0.$$

Dessa forma:

$$\Psi = \begin{bmatrix} A^\top P + PA & PB \\ B^\top P & -\mu I \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} C^\top \\ D^\top \end{bmatrix}, \quad \Phi = -I.$$

Então, aplicando o Complemento de Schur:

$$\begin{bmatrix} A^\top P + PA & PB & C^\top \\ B^\top P & -\mu I & D^\top \\ C & D & -I \end{bmatrix} \prec 0,$$

sendo sua norma  $\mathcal{H}_\infty$  dada por  $\|G\|_\infty < \sqrt{\mu}$ .

Essa LMI pode ser reescrita como um problema de otimização que, no limite, acontecerá que  $\|G\|_\infty = \sqrt{\mu}$ , ou seja:

$$\begin{aligned}
& \min \mu, \\
& \text{sujeito a:} \\
& \mu, \quad P = P^\top \succ 0 \\
& \begin{bmatrix} A^\top P + PA & PB & C^\top \\ B^\top P & -\mu I & D^\top \\ C & D & -I \end{bmatrix} \prec 0 \tag{2.37} \\
& \text{e, na solução ótima } \|G\|_\infty = \sqrt{\mu}.
\end{aligned}$$

Agora, para o problema da síntese, de forma similar a como esse problema foi abordado com a norma  $\mathcal{H}_2$ , será utilizado um sistema conforme a representação em espaço de estados (2.29). Nessa situação, quando forem aplicadas as condições dadas por (2.30) no problema (2.37), ocorre multiplicação de variáveis. Com isso, a próxima etapa é realizar uma transformação de congruência para que, em passos futuros, haja a eliminação dessa bilinearidade, ou seja:

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}^\top P + P\tilde{A} & PB & \tilde{C}^\top \\ B^\top P & -\mu I & D^\top \\ \tilde{C} & D & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \prec 0,$$

A desigualdade final é expressa por:

$$\begin{bmatrix} P^{-1}\tilde{A}^\top + \tilde{A}P^{-1} & B & P^{-1}\tilde{C}^\top \\ B^\top & -\gamma^2 I & 0 \\ \tilde{C}P^{-1} & 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0.$$

Para finalmente transformar essa desigualdade em uma LMI, serão aplicadas as condições (2.30). Além disso, serão aplicadas as substituições  $W = P^{-1}$  e  $Z = KP^{-1}$ , ou seja:

$$\begin{bmatrix} WA^\top + AW + Z^\top B_1^\top + B_1 Z & B_2 & WC^\top + Z^\top D^\top \\ B_2^\top & -\mu I & 0 \\ CW + DZ & 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0.$$

Dessa forma, o problema da síntese com minimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$  é dado pelo problema de otimização:

$$\begin{aligned}
& \min \mu \\
& \text{sujeito a:} \\
& \mu, \quad Z \quad W = W^\top \succ 0 \\
& \begin{bmatrix} WA^\top + AW + Z^\top B_1^\top + B_1 Z & B_2 & WC^\top + Z^\top D^\top \\ B_2^\top & -\mu I & 0 \\ CW + DZ & 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0
\end{aligned} \tag{2.38}$$

e, na solução ótima  $\|G\|_\infty = \sqrt{\mu}$ ,  $K = ZW^{-1}$ .

Como o ganho é ótimo apenas no sistema fixado, então, de forma idêntica à equação (2.6), pode-se afirmar que o ganho ótimo de um sistema é dependente dos parâmetros desse sistema fixado.

E, novamente, em sistemas com incertezas modeladas por meio de politopos, deve ser aplicada a equação (2.13). Pelos mesmos argumentos desenvolvidos na seção 2.6, o problema pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
& \min \mu \\
& \text{sujeito a:} \\
& \mu, \quad Z, \quad W(\alpha) = W(\alpha)^\top \succ 0 \\
& \begin{bmatrix} W(\alpha)A(\alpha)^\top + A(\alpha)W(\alpha) + Z^\top B_1(\alpha)^\top + B_1(\alpha)Z & B_2(\alpha) & W(\alpha)C(\alpha)^\top + Z^\top D(\alpha)^\top \\ B_2(\alpha)^\top & -\mu I & 0 \\ C(\alpha)W(\alpha) + D(\alpha)Z & 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0.
\end{aligned}$$

Com isso, esse problema passa a ter dimensão infinita novamente, o que exige que a matriz  $W(\alpha)$  seja quadrática. Aplicando o teorema dos polinômios homogêneos, o problema de síntese de controle robusto com minimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$  em sistemas com incertezas politópicas deve ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
& \min \mu, \\
& \text{sujeito a:} \\
& \mu, \quad Z \quad W = W^\top \succ 0 \\
& \begin{bmatrix} WA_i^\top + A_i W + Z^\top B_{1,i}^\top + B_{1,i} Z & B_{2,i} & WC_i^\top + Z^\top D_i^\top \\ B_{2,i}^\top & -\mu I & 0 \\ C_i W + D_i Z & 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall i = 1, \dots, N,
\end{aligned} \tag{2.39}$$

e  $K = ZW^{-1}$ ,  $\|G\|_\infty \leq \sqrt{\mu}$ ,

Sendo  $N$  o número de vértices do politopo.

---

É importante destacar que, como esse problema de otimização é suficiente apenas para a síntese do ganho, o valor da norma  $\mathcal{H}_\infty$  passa a ser chamado de norma  $\mathcal{H}_\infty$  garantida. Isso quer dizer que, em um sistema em malha fechada com um controlador robusto  $\mathcal{H}_\infty$ , sua norma  $\mathcal{H}_\infty$  será menor que a norma garantida em qualquer ponto do politopo. Essa norma deixa de ser igual e passa a ser apenas menor ou igual a  $\sqrt{\mu}$ .

Além disso, visando reduzir a norma  $\mathcal{H}_\infty$ , tal como foi apresentada na seção 2.6, é necessário reduzir o conservadorismo por meio da adoção de  $W(\alpha)$  afim. Deve ser encontrada também uma forma equivalente da (2.39) cujo ganho não dependa diretamente de  $W(\alpha)$ , mas apenas de variáveis de folga.



### 3 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS: ANÁLISE COMPUTACIONAL DOS MÉTODOS

#### 3.1 Experimento 1: Redução do Conservadorismo

Conforme visto anteriormente, em sistemas sujeitos a incertezas politópicas, a desigualdade de Lyapunov e suas diversas formulações equivalentes representam condições apenas suficientes, mas não necessárias, para a síntese do ganho de realimentação de estados. Isso implica que, mesmo nos casos em que a síntese do ganho não é bem-sucedida, ainda pode existir um ganho capaz de estabilizar o sistema. Para encontrar esse ganho, reduzir o conservadorismo do problema e, mais especificamente, na matriz  $P$ , por meio da equação (2.19), pode ser possível estabilizar o sistema.

O primeiro experimento consiste em testar a tese de que reduzir o conservadorismo da matriz  $P$  na equação (2.18) aumenta as chances de as LMIs realizarem a síntese do ganho do sistema.

Primeiramente, foi implementada uma função em **MATLAB** que gera um politopo a partir de um valor de  $\gamma$ , parâmetro que representa o nível de instabilidade do sistema.

Depois, foi desenvolvido outro código que implementa as equações (2.18) e (2.23) utilizando as toolboxes **YALMIP** e **SeDuMi**, recebendo como entrada um politopo. O script avaliou se o problema pôde ser resolvido para cada politopo gerado e, com isso, calculou-se qual percentual desses politopos foi estabilizado. O percentual calculado referiu-se a diferentes níveis de instabilidade desse politopo, conforme a variação do parâmetro  $\gamma$ , que será explicado mais adiante nesta seção.

Para finalizar, os resultados da estabilidade quadrática foram comparados aos da estabilidade afim.

##### 3.1.1 Parâmetro $\gamma$

Ao gerar politopos aleatórios no **MATLAB**, a abordagem mais imediata é utilizar apenas o comando **randn()**. Entretanto, essa estratégia não se mostra adequada, uma vez que tal função gera números aleatórios segundo uma distribuição normal, resultando em perda de precisão quanto à distância da parte real de seus autovalores em relação à origem.

Visando atingir a precisão necessária para o experimento, foi definido o parâmetro  $\gamma$ . Durante a simulação, o valor de  $\gamma$  determinou a maior distância da origem da parte real dos autovalores de todas as matrizes  $A_n$  de um politopo.

Para utilizar esse parâmetro, inicialmente, foi gerado um politopo aleatório com o comando **randn()**, e, em seguida, empregou-se a função **eig()** em todas as matrizes

$A_n$  dos vértices do politopo. Depois, foi denotado por  $\beta$  o maior valor da parte real entre todos os autovalores dos vértices. Após essa etapa, realizou-se, em cada vértice, a operação

$$A_n = A_n^{inicial} + (\gamma - \beta)I, \quad (3.1)$$

de modo que a maior parte real de um autovalor do politopo passasse a valer  $\gamma$ . Ao longo da simulação,  $\gamma$  variou entre 0 e 0.2.

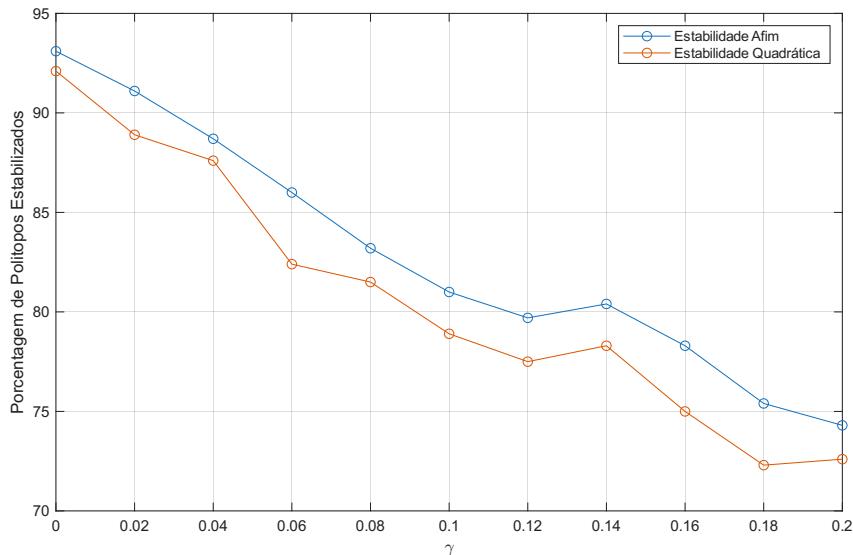
### 3.1.2 Função de Síntese do Ganhos

A implementação da rotina de síntese do ganho apresentou baixa complexidade, uma vez que as toolboxes **YALMIP** e **SeDuMi** tornam a formulação e a resolução das LMIs um processo bastante direto. Assim, a síntese do ganho foi realizada por meio da aplicação das equações (2.18) e (2.23), para  $P(\alpha)$  quadrática e  $W(\alpha)$  afim, nos politopos gerados pela equação (3.1).

### 3.1.3 Resultados da Simulação

Comparando os desempenhos das estabilidades quadrática e afim nos 1000 politopos avaliados:

Figura 10 – Comparativo na Eficácia entre a Estabilidade Afim e a Quadrática



Fonte: Autoria Própria

Ao analisar o gráfico gerado, é possível notar a melhora da eficácia da desigualdade de Lyapunov após a redução do conservadorismo do problema. Para todos os valores de  $\gamma$  a efetividade da equação (2.23) foi superior em relação à equação (2.18), conforme esperado.

Além disso, percebe-se que, para ambos os tipos de estabilidade, o percentual de sistemas estáveis diminui, mesmo com pequenas variações do valor de  $\gamma$ . Essa rápida queda

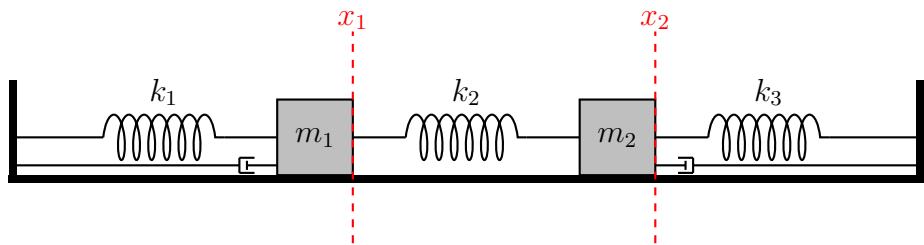
pode ter origem na estrutura das matrizes  $A_n$  e  $B_n$ , que têm todos os seus termos variando em todos os seus vértices.

### 3.2 Experimento 2: Sistema Massa-Mola

#### 3.2.1 Formulação do Problema

O segundo experimento teve como objetivo apresentar uma abordagem prática dos conceitos de normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . O problema escolhido para isso foi o sistema massa-mola amortecido, com 3 molas conectadas em 2 blocos e em 2 paredes, conforme o esquema a seguir:

Figura 11 – Esquema Ilustrativo do Sistema Massa-Mola Amortecido



Fonte: Autoria Própria

Esse sistema foi escolhido devido à sua tendência a se estabilizar, mesmo sem uma entrada de controle, uma vez que ele atende às 3 condições do teorema de Lyapunov. Nesse sistema, a força que a resistência do ar exerce nos blocos faz com que sempre haja dissipação da energia, de forma que ela sempre seja positiva e tenda a 0, além do problema ter, por construção, suas condições iniciais nulas. Assim, sendo o sistema intrinsecamente estável, há uma grande margem para minimizar sua norma  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$  com uma entrada de realimentação de estados.

Segundo [Ogata 2010], as equações que definem o sistema massa-mola amortecido são:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + u, \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_3 x_2 - k_2(x_2 - x_1) - b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1). \end{cases}$$

Sendo os estados  $x_1$  e  $x_2$  as distâncias dos blocos 1 e 2 até seus respectivos pontos de equilíbrio (m), a entrada  $u$  a força aplicada no bloco 1 (N),  $m_1$  e  $m_2$  as massas dos blocos (kg),  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  as constantes elásticas (N/m), e  $b$  o coeficiente de amortecimento viscoso (kg/s). Aplicando as substituições  $x_4 = \dot{x}_2$ ,  $x_3 = \dot{x}_1$  e reorganizando as equações, esse sistema pode ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(k_1+k_2)}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{b}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{(k_2+k_3)}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (3.2)$$

Além disso, foi modelado o valor da entrada exógena  $w$ , que representa um ruído na força aplicada ao bloco 2 e deve ser  $\mathcal{L}_2$ . A matriz  $B_2$ , que determina como essa entrada ruidosa vai afetar os estados do sistema, foi igual a matriz  $B_1$ , ou seja,  $B_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ . Então, as equações (3.2) podem ser reescritas como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(k_1+k_2)}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{b}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{(k_2+k_3)}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w. \quad (3.3)$$

Nesse experimento, a saída  $y$  são os próprios valores de  $x_1$  e  $x_2$ , ou seja:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x. \quad (3.4)$$

Uma grande limitação inerente à saída  $y$  refere-se à ausência de um termo de transmissão direta  $D$ . Como consequência, realizar a síntese de ganho com as matrizes da saída  $y$  não penalizará valores elevados na entrada de realimentação. Dessa forma, visando a um melhor condicionamento do problema, define-se a saída fictícia  $z$ , que possui a matriz  $D$ . Ela foi utilizada durante as sínteses dos ganhos que aconteceram ao longo do experimento computacional 2 substituindo a entrada  $y$  e foi dada por:

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (3.5)$$

Com isso, o sistema massa-mola amortecido simulado ao longo deste experimento computacional foi modelado por meio das equações (3.3) e (3.5).

O sistema utilizado neste experimento apresenta incertezas intervalares nas massas dos blocos. Assim, os valores dos parâmetros com incertezas são definidos como:

$$m_1 \in [0, 5, 1, 5] \quad e \quad m_2 \in [0, 5, 1, 5],$$

e os parâmetros sem incertezas foram definidos como:

Tabela 1 – Parâmetros do Sistema Massa-Mola Amortecido

Parâmetro	Valor	Unidade
Constante da Mola 1 ( $k_1$ )	10	N/m
Constante da Mola 2 ( $k_2$ )	10	N/m
Constante da Mola 3 ( $k_3$ )	10	N/m
Constante de amortecimento ( $b$ )	1	N · s/m

Fonte: Autoria própria.

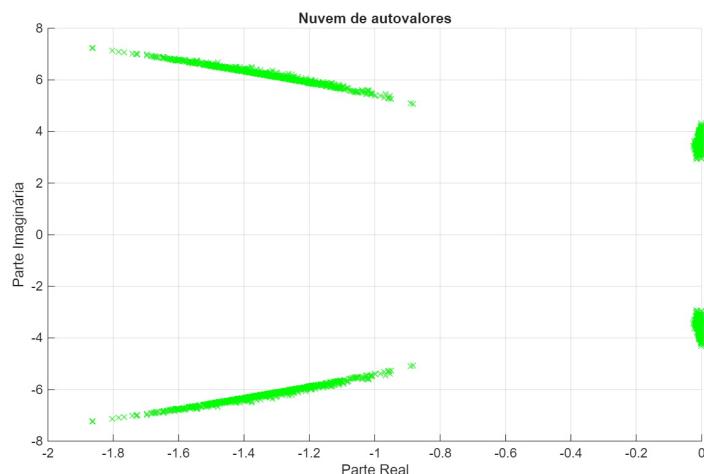
Como nesse sistema existem parâmetros com incertezas intervalares, a melhor forma de modelá-lo foi através de politopos. Sendo o número de parâmetros incertos igual a 2, então os politopos de cada matriz terão 4 vértices cada, ou seja:

$$\Sigma(m_1^{\max}, m_2^{\max}), \quad \Sigma(m_1^{\max}, m_2^{\min}), \quad \Sigma(m_1^{\min}, m_2^{\max}), \quad \text{e} \quad \Sigma(m_1^{\min}, m_2^{\min}), \quad (3.6)$$

no qual as matrizes que representam o sistema através das equações de espaços de estados foram definidas conforme a equação (2.13).

Diante dessa formulação dos vértices do politopo, pode-se realizar uma análise inicial da estabilidade. Para isso, foram sorteadas 1000 combinações de  $\alpha$ , gerando, assim, 1000 matrizes  $A$  diferentes. Após isso, foram obtidos e plotados, no plano  $s$ , os autovalores de cada uma dessas matrizes. Para as matrizes  $A$  que tem todos os autovalores com parte real negativa, ou seja, são estáveis, todos os seus autovalores foram plotados na cor verde, caso contrário, todos os autovalores da matriz  $A$  foram plotados em vermelho.

Figura 12 – Nuvem de Autovalores do Sistema Massa-Mola Amortecido



Fonte: Autoria Própria

Analisando a nuvem de autovalores do sistema sem controle de realimentação de estados, foi possível notar, pela ausência de autovalores em vermelho, que todas as combinações sorteadas de  $A(\alpha)$  foram estáveis, reforçando que o sistema massa-mola amortecido utilizado nesse experimento computacional é estável para qualquer combinação de seus vértices.

### 3.2.2 Síntese do Ganho - Controle $\mathcal{H}_2$

Após a formulação do problema, a etapa seguinte consistiu em análises do sistema com realimentação de estados por meio do software MATLAB, implementando códigos para a resolução de LMIs e a plotagem dos resultados. Essas LMIs realizam a síntese do ganho para o politopo minimizando uma norma  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$ . A síntese foi tanto para o caso robusto quanto para o caso ótimo, visando comparar os dois controladores.

Antes de realizar as simulações, foi necessário definir a função  $w$  empregada no modelo, que serviu como entrada do sistema em malha fechada. Como a norma  $\mathcal{H}_2$  refere-se a resposta do sistema ao impulso unitário, então a entrada  $w$  adotada foi justamente como a função impulso unitário.

Para começar, foi estabelecido um sistema de referência, chamado sistema nominal, construído pela aplicação dos valores médios de  $m_1$  e  $m_2$  e dos demais parâmetros fixos na equação (3.3). Utilizando esse sistema nominal, foi implementado um código em MATLAB que realizou a síntese do ganho do controlador ótimo  $\mathcal{H}_2$  por meio da equação (2.6), encontrando o ganho ótimo  $K_{opt} = [-5.589 \quad -0.597 \quad -4.100 \quad -0.186]$ .

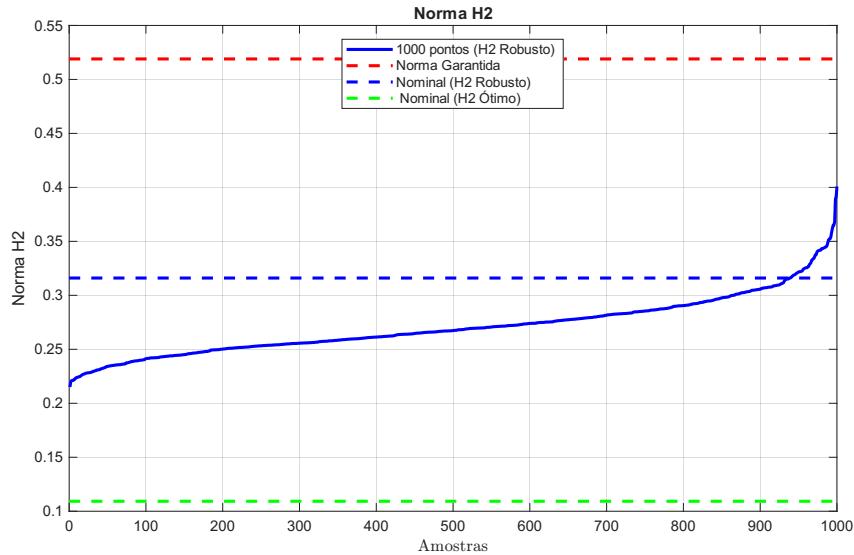
Depois, para o controle robusto  $\mathcal{H}_2$ , foi implementado no código em MATLAB o sistema dado por (3.6), aplicado à equação (2.33), com sua equação de saída sendo também a saída  $z$  e seus vértices em  $C$  e  $D$  constantes. A partir dessa equação, também foi obtido o valor da norma  $\mathcal{H}_2$  garantida. Esse valor é asseguradamente maior que o da norma  $\mathcal{H}_2$  para qualquer ponto dentro do politopo em malha fechada, com o ganho robusto. O ganho robusto encontrado foi  $K = [-20.420 \quad -8.989 \quad 29.756 \quad -4.162]$ .

Então, foram calculadas as normas ótima e robusta  $\mathcal{H}_2$  no sistema nominal em malha fechada com o valor do ganho obtido tanto no caso ótimo quanto no caso robusto. Para tal, utilizou-se a equação (2.28).

Além disso, para a avaliação do controlador robusto, foi calculada a norma  $\mathcal{H}_2$  para 1000 pontos do politopo também através da equação (2.28), correspondentes às combinações dos valores dos vértices definidos em (3.6), ou seja, para distintas combinações de  $m_1$  e  $m_2$ .

Plotando a norma  $\mathcal{H}_2$  garantida, a norma  $\mathcal{H}_2$  para o sistema nominal em malha fechada com os ganhos ótimo e robusto e a norma  $\mathcal{H}_2$  de 1000 combinações dentro do polítopo, o resultado foi:

Figura 13 – Comparaçāo entre as Normas  $\mathcal{H}_2$  Ótima, Robusta e Garantida



Fonte: Autoria Própria

Ao analisar o gráfico, observou-se que o valor da norma  $\mathcal{H}_2$  garantida foi o maior entre todos os sistemas, conforme o previsto. O valor da norma do controlador ótimo foi menor do que o da norma do controlador robusto para o sistema nominal, o que também está correto por conta do conservadorismo presente na equação (2.33), mais especificamente na construção da matriz  $W$ . Além disso, um controlador ótimo atuando no sistema exato para o qual ele foi projetado, por definição, sempre terá a solução com a menor norma possível. E por último, todas as normas dos 1000 sistemas sorteados estão menores que a norma garantida, de forma que todo o gráfico esteja em concordância com a teoria de controle.

O código também plota as saídas do sistema nominal, tanto para o controlador ótimo quanto para o robusto, para melhor visualização da diferença de desempenho. A resposta dos dois controladores ao impulso foi:

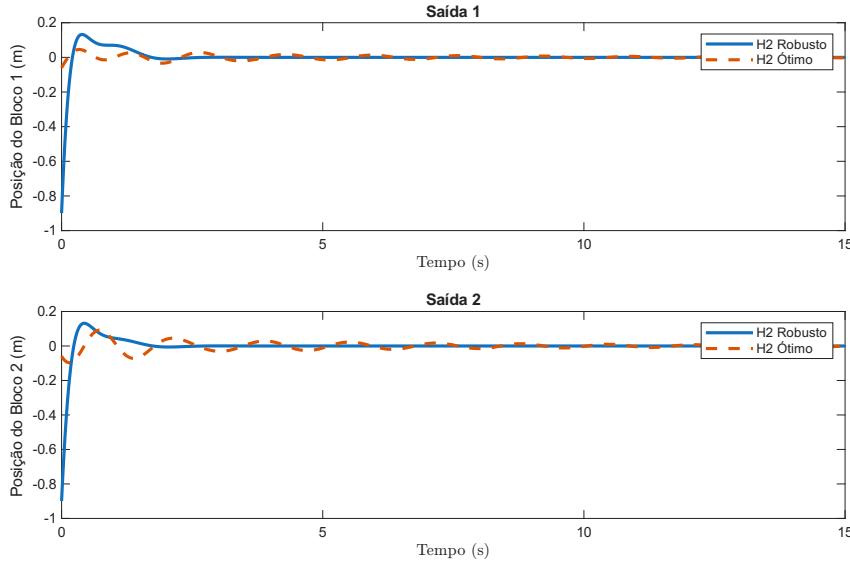


Figura 14 – Resposta ao Impulso do Sistema Massa-Mola Amortecido com os Controladores  $\mathcal{H}_2$  Ótimo e Robusto

Ao analisar visualmente o gráfico, é possível notar diferenças nas respostas de cada controlador. A primeira delas refere-se ao tempo de subida, que é maior para o controlador robusto do que para o ótimo, e a resposta ao impulso do sistema com o controlador ótimo ainda apresentou uma certa oscilação de baixa amplitude antes de convergir definitivamente. A segunda diferença refere-se ao sobressinal, que é muito maior no controlador robusto. Com isso, a norma  $\mathcal{H}_2$  do controlador ótimo apresenta valor menor em comparação à do controlador robusto, uma vez que a elevada intensidade do sobressinal deste último possui maior impacto sobre o valor da norma do que o maior tempo na convergência observada na resposta do controlador ótimo, resultando, em um desempenho globalmente mais favorável para este.

Essas diferenças no sobressinal das duas respostas podem ser justificadas pelos maiores valores na matriz de ganho robusto em relação ao ótimo, o que leva a valores mais elevados na entrada  $u$  do sistema, aumentando o sobressinal.

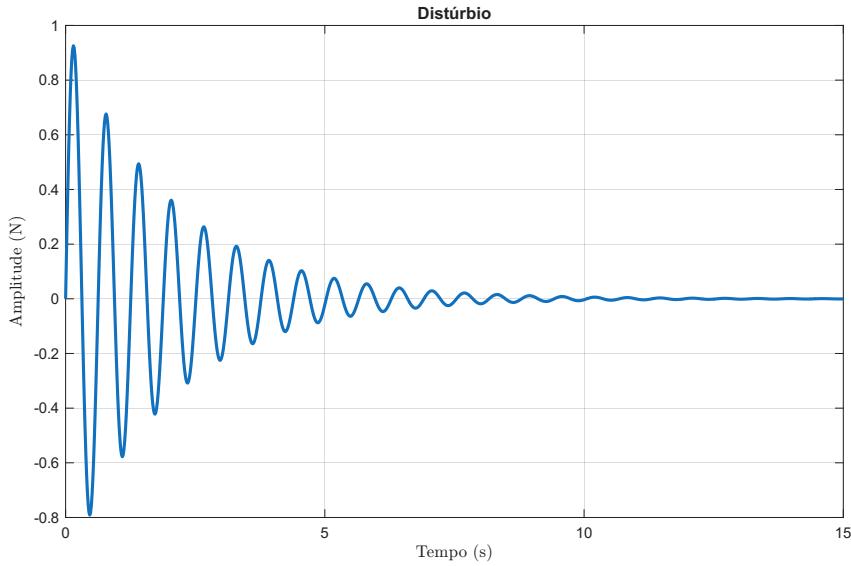
### 3.2.3 Síntese do Ganho - Controle $\mathcal{H}_\infty$

No caso do controle  $\mathcal{H}_\infty$ , os experimentos foram realizados novamente no **MATLAB** de forma análoga aos experimentos de controle  $\mathcal{H}_2$ , com algumas diferenças pontuais que serão explicadas ao longo desta subseção.

A primeira diferença foi quanto à entrada exógena  $w$  empregada no modelo. Para os experimentos com a norma  $\mathcal{H}_\infty$ , a entrada ruidosa precisou ser um sinal com energia finita, definida como:

$$w(t) = e^{-0,5t} \operatorname{sen}(10t). \quad (3.7)$$

Figura 15 – Entrada Ruidosa  $w(t)$  em Função do Tempo



Fonte: Autoria Própria

Para começar, novamente foi estabelecido um sistema chamado sistema nominal, cujos valores de  $m_1$  e  $m_2$  foram fixados nos seus valores médios e aplicados às equações (3.3) e (3.5). Para a realização da síntese do ganho desse sistema, o ganho ótimo foi utilizado a equação (2.38), encontrando  $K_{opt} = [5.13 \ -15.76 \ -22.84 \ -24.40]$ .

Depois, para o controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$ , foi implementado no código em MATLAB um sistema dado por (3.6), aplicado agora à equação (2.39). Devido à tendência de controladores robustos baseados na norma  $\mathcal{H}_\infty$  gerarem matrizes de ganho cujos elementos apresentam módulos muito elevados, foi adicionada a LMI  $\mu \geq 1$  para limitar os efeitos desse fenômeno (sem a utilização dessa limitação em  $\mu$ , o ganho encontrado foi  $K = [-2, 46e+09 \ -9, 20e+08 \ 2, 47e+09 \ -5, 24e+08]$ ). Através da resolução desse conjunto de LMIs foi obtido o ganho do controlador robusto  $K = [-74, 81 \ -17, 47 \ 104, 27 \ -14, 41]$ , além do valor da norma  $\mathcal{H}_\infty$  garantida.

Com o valor do ganho obtido tanto no caso ótimo quanto no caso robusto, utilizou-se, desta vez, a equação (2.37) para simular a diferença de desempenho, em termos da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , entre o controlador robusto e o ótimo no sistema real.

De forma semelhante aos experimentos com a norma  $\mathcal{H}_2$ , foi implementado no código o cálculo da norma  $\mathcal{H}_\infty$  para 1000 combinações distintas dos valores dos vértices definidos em (3.6).

Plotando a norma  $\mathcal{H}_\infty$  garantida, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  ótima, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  robusta para o sistema real e a norma  $\mathcal{H}_\infty$  dos 1000 sistemas simulados, o resultado foi:

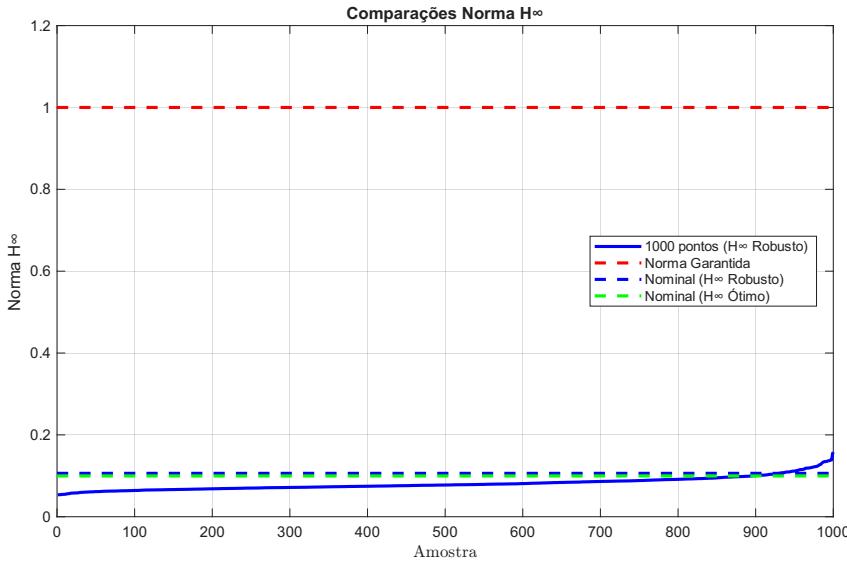
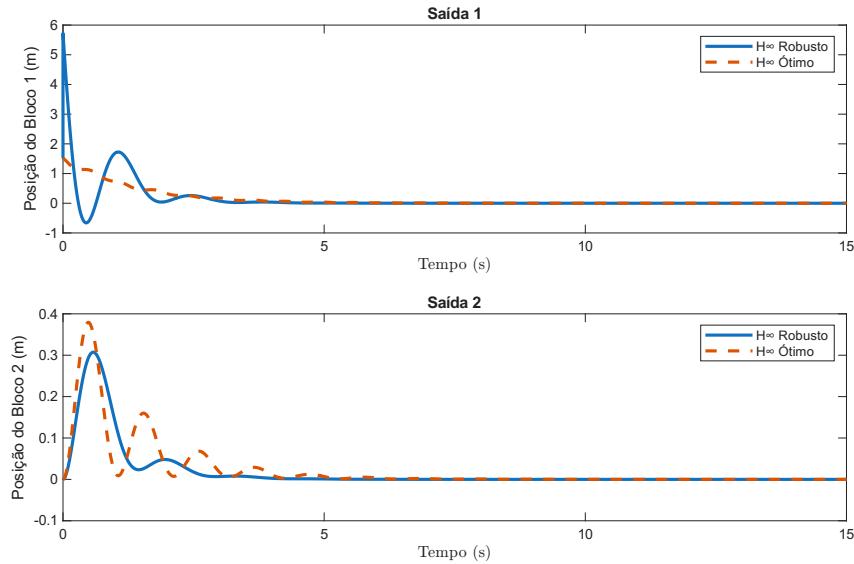


Figura 16 – Nuvem de Autovalores do Sistema Massa-Mola

Analizando o gráfico, é possível notar que o valor da norma  $\mathcal{H}_\infty$  garantida, limitada inferiormente, foi o maior entre todos os sistemas, conforme o previsto. O valor do controlador ótimo foi menor, mesmo que bem próximo, que o do controle robusto, o que também está correto por conta do conservadorismo presente na equação (2.33), mais especificamente na construção da matriz  $W$ . E por último, todas as normas dos 1000 sistemas sorteados estão menores que a norma garantida, de forma que todo o gráfico esteja em concordância com a teoria de controle.

O código em [MATLAB](#) também plotou as saídas do sistema nominal, tanto para o controlador ótimo quanto para o robusto, de modo a tornar mais visível a diferença de desempenho. A resposta dos dois controladores ao sinal representado pela equação (3.7) foi:

Figura 17 – Resposta ao Ruído  $\mathcal{L}_2$  do Sistema Massa-Mola Amortecido com os Controladores  $\mathcal{H}_\infty$  Ótimo e Robusto



Fonte: Autoria Própria

A plotagem das saídas corrobora os resultados apresentados no gráfico anterior, que indicam um melhor desempenho do controlador ótimo em relação ao robusto na malha fechada do sistema nominal, em termos da norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Para a saída 1, verificou-se um tempo de acomodação semelhante nos dois controladores; entretanto, o sobressinal do controlador robusto foi mais de 3 vezes maior do que o do controlador ótimo.

Já para a saída 2, o controlador ótimo apresentou desempenho pior do que o robusto, com um tempo de acomodação consideravelmente maior e um sobressinal cerca de 2 vezes mais acentuado. No agregado, o desempenho do controlador ótimo, visto a partir dos valores de sua saída, ainda foi melhor quando comparado ao controlador robusto.



## 4 CONCLUSÃO

### 4.1 Conclusões Gerais

O presente trabalho teve como objetivo explorar o uso de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) para a síntese e a análise de sistemas, com ou sem minimização de norma. Para isso, empregou-se o software [MATLAB](#) para implementar códigos que resolvessem essas LMIs.

Este Trabalho de Conclusão de Curso pode ser dividido em dois experimentos computacionais principais: o primeiro utilizou a desigualdade de Lyapunov para a estabilização de sistemas com incertezas modeladas por meio de politopos. Testou-se a tese de que diminuir o conservadorismo no problema, através da transformação da sua matriz  $P$  constante em  $W(\alpha) = \sum_{n=1}^N \alpha_n W_n$ , aumentaria as chances da desigualdade de Lyapunov realizar a síntese do ganho no sistema.

Essa proposição foi avaliada por meio da implementação de um código no [MATLAB](#) que testou qual o percentual de um conjunto de 1000 sistemas instáveis, modelados através de politopos nas suas matrizes  $A$  e  $B$ , que conseguiram ser estabilizados por meio da desigualdade de Lyapunov com  $P$  quadrático e com  $W(\alpha)$  afim, comparando a eficácia entre os tipos de estabilidade.

Conforme esperado, o percentual de sistemas estabilizados no caso de  $W$  afim foi sempre maior do que o de  $P$  quadrático. Além disso, à medida que o autovalor máximo dos vértices dos politopos aumentava, observava-se também uma queda no percentual de sistemas estabilizados.

A segunda parte dos experimentos computacionais envolvia a aplicação das desigualdades de Lyapunov ao estudo das normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  de forma prática. Diante disso, foi utilizado um sistema massa-mola amortecido com incertezas nos valores das massas dos blocos, visando à comparação entre os controladores ótimos e robustos.

Para as duas normas diferentes, foram fixados os valores das massas dos blocos, criando um sistema nominal que permitiu a síntese dos ganhos dos controladores  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  ótimos. Adicionalmente, por meio do sistema composto pelos 4 vértices do polítopo, foi realizada a síntese do ganho robusto, bem como a determinação dos valores das duas normas garantidas para os controladores  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ .

Além disso, calcularam-se os valores das normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para o mesmo sistema nominal fixado na síntese do controlador ótimo, mas em relação à saída fictícia  $z$ . Esse cálculo foi feito tanto para o ganho do controlador ótimo quanto para o ganho do controlador robusto, em ambos os tipos de norma.

Os valores dessas normas foram condizentes com a teoria de controle, uma vez que as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  garantidas foram as maiores; as normas dos controladores robustos vieram logo depois, e o menor valor foi o das normas dos controladores ótimos.

Além disso, foram sorteadas 1000 combinações diferentes dos vértices do politopo do sistema-massa mola, e para todas elas foram calculadas suas normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  quando aplicados o ganho ótimo e o ganho robusto. Para todos os pontos do politopo, a norma  $\mathcal{H}_2$  com o controlador robusto foi menor que a norma garantida.

## 4.2 Limitações, Desafios e Sugestões de Trabalhos Futuros

Devem ser mencionadas as limitações deste estudo, bem como sugestões para futuros estudos. No primeiro experimento computacional, foi avaliada apenas a síntese do sistema com incertezas politópicas, sem avaliar qualitativamente os controladores. Para dar continuidade aos tópicos levantados neste estudo, podem ser realizados novos experimentos computacionais em uma grande quantidade de politopos.

Nesse sentido, um possível trabalho pode ser feito por meio do sorteio de 1000 politopos já estáveis e da síntese de um controlador robusto, com minimização da norma  $\mathcal{H}_2$  e/ou  $\mathcal{H}_\infty$ , tanto para  $P$  quadrático quanto para  $P$  afim. Neste estudo, haveria também a comparação entre os valores médios das normas antes e depois da redução do conservadorismo do problema, mostrando que essa redução deve resultar em controladores com melhor desempenho em relação aos valores calculados pelas suas normas.

Ainda nessa mesma linha de pensamento, pode ser fixada a matriz  $B$ , e para a matriz  $A$ , o número de valores fixados, com todos os outros valores da matriz sendo aleatórios, aumenta de 0 até  $n \cdot n$ , com a matriz  $A$  tendo  $n$  linhas e colunas. Nesse cenário, pode-se calcular a eficiência da síntese em função do número de valores incertos na matriz  $A$ .

Tratando agora das limitações do Experimento Computacional 2, a primeira delas é que o sistema massa–mola considerado será sempre estável para quaisquer valores de seus parâmetros, o que favorece o controlador ótimo. Caso existissem pontos instáveis no politopo, o ganho obtido pelo controlador ótimo talvez não fosse suficiente para estabilizá-lo. Nesse sentido, seria interessante repetir todos os procedimentos do experimento 2, porém utilizando um sistema que não seja intrinsecamente estável.

Outra limitação deste trabalho, presente em ambos os experimentos computacionais, refere-se ao tipo de sistema adotado, que se limitou a sistemas LTI. Nesse sentido, para dar continuidade a este estudo, seria relevante repetir alguns dos procedimentos do trabalho em um sistema não linear, como, por exemplo, em um sistema de pêndulo invertido ou em um sistema com variação temporal de parâmetros, como no lançamento de foguete.

E, por fim, um estudo sobre problemas de rastreamento de referência, visando

minimizar uma norma, também pode gerar resultados enriquecedores. Este estudo poderia, inclusive, utilizar um sistema massa-mola amortecido para realizar procedimentos semelhantes aos que foram realizados neste trabalho.



## REFERÊNCIAS

- AXLER, S. **Linear algebra done right.** [S.l.: s.n.]: Springer Nature, 2024.
- BENNETT, S. Nicholas minorsky and the automatic steering of ships. **IEEE Control Systems Magazine**, IEEE, v. 4, n. 4, p. 10–15, 1984.
- BENNETT, S. A brief history of automatic control. **IEEE Control Systems Magazine**, IEEE, v. 16, n. 3, p. 17–25, 2002.
- BOYD, S. *et al.* **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory.** [S.l.: s.n.]: SIAM, 1994. 205 p.
- CHEN, C.-T. **Linear system theory and design.** [S.l.: s.n.]: Saunders college publishing, 1984.
- EBIHARA, Y.; PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D. **S-Variable Approach to LMI-Based Robust Control.** [S.l.: s.n.]: Springer, 2015. 260 p.
- FERGUSON, L. Control systems as used by the ancient world. 2015.
- KHALIL, H. K.; GRIZZLE, J. W. **Nonlinear systems.** [S.l.: s.n.]: Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2002. v. 3.
- LOFBERG, J. Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab. *In: IEEE. 2004 IEEE international conference on robotics and automation (IEEE Cat. No. 04CH37508).* [S.l.: s.n.], 2004. p. 284–289.
- OGATA, K. **Modern control engineering.** [S.l.: s.n.]: Prentice hall, 2010.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Stability of polytopes of matrices via affine parameter-dependent lyapunov functions: Asymptotically exact lmi conditions. **Linear Algebra and its Applications**, Elsevier, v. 405, p. 209–228, 2005.
- PERES, P. L. D.; OLIVEIRA, R. C. L. F. **Aula 1 - Complemento de Schur, Transformações de Congruência, LMIs e Estabilidade.** 2024. Notas de aula da disciplina IA892 - Análise e Controle de Sistemas Lineares por Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs), FEEC/UNICAMP. Acesso em: 05 nov. 2025. Disponível em: [https://ricfow.fee.unicamp.br/IA892/schur\\_lmi.pdf](https://ricfow.fee.unicamp.br/IA892/schur_lmi.pdf).
- PERES, P. L. D.; OLIVEIRA, R. C. L. F. **Aula 8 - Realimentação de Estados.** 2024. Notas de aula da disciplina IA892 - Análise e Controle de Sistemas Lineares por Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs), FEEC/UNICAMP. Acesso em: 05 nov. 2025. Disponível em: <https://ricfow.fee.unicamp.br/IA892/statefeedback.pdf>.
- SKELTON, R. E.; IWASAKI, T.; GRIGORIADIS, K. A unified algebraic approach to linear control design. **Abingdon, Reino Unido: Taylor & Francis**, 2013.
- SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. *et al.* **Applied nonlinear control.** [S.l.: s.n.]: Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991. v. 199.

SOUZA, A. M. de. **Uma Abordagem LMI para o Controle por Realimentação de Saída Baseado em Aproximação de Modelo.** 2021. Tese (Mestrado) — [sn], 2021.

STRANG, G. **Linear Algebra and Its Applications.** Fourth edition. Boston: Cengage Learning, 2005. ISBN 0-534-42200-4.

STURM, J. F. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization methods and software**, Taylor & Francis, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999.

Wikipedia. **Ctesíbio.** 2025. Acesso em: 09 nov. 2025. Disponível em: <https://ca.wikipedia.org/wiki/Ctesibi>.

YEDAVALLI, R. K. **Robust Control of Uncertain Dynamic Systems: A Linear State Space Approach.** [S.l.: s.n.]: Springer, 2014. 217 p.