

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO CONTINUADA**

**ESTIMADORES DE VOLATILIDADE APLICADOS À
BOVESPA**

Rodrigo de Lima Almeida

**São Paulo
2011**

RODRIGO DE LIMA ALMEIDA

**ESTIMADORES DE VOLATILIDADE APLICADOS À
BOVESPA**

Monografia apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
como parte dos requisitos para a
obtenção do título de MBA em Engenharia
Financeira

Orientador:

Prof. Rodrigo de Barros Nabholz
POLI-USP

**São Paulo
2011**

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela sabedoria e capacidade para realizar este trabalho. À minha esposa Juliana pelo apoio, paciência e companheirismo. Aos meus pais pela criação que me deram e que tem me ajudado muito. Aos meus irmãos pela amizade e incentivo. Aos demais familiares que sempre estiveram ao meu lado. Aos amigos do PG que sempre oraram por mim. Aos colegas de trabalho pelo companheirismo. A todos os professores por tudo que me ensinaram. A todos os colegas cujo convívio pude desfrutar ao longo deste curso. Ao meu orientador Rodrigo Barros pelos ensinamentos compartilhados, pela dedicação e paciência despendida durante a elaboração deste trabalho.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo avaliar e comparar modelos quantitativos para a previsão de volatilidade.

Foram explorados 4 modelos para a estimativa de volatilidade: Média Móvel Simples, *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA), *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (ARCH) e *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (GARCH).

Para a avaliação empírica destes modelos foi utilizada uma amostra histórica dos valores de fechamento dos papéis da Petrobras – PETR4 e Vale do Rio Doce – VALE4, além dos índices IBOVESPA e IBX.

A volatilidade estimada por estes modelos pôde ser avaliada pela métrica de risco de mercado denominada Valor em Risco (VaR).

Nesse sentido foi utilizado o teste de violação dos limites para um VaR de um dia, com intuito de comparar a eficiência dos modelos Média Movel Simples, EWMA (sugerido pelo Riskmetrics), ARCH e GARCH.

Para as simulações numéricas, cálculos dos parâmetros e comparação entre os modelos foram utilizados os softwares Excel e Stata.

Palavras-chave: Média Móvel, EWMA, ARCH, GARCH, Valor em Risco, RiskMetrics, volatilidade, PETR4, VALE5, IBOVESPA, IBX.

ABSTRACT

The present work aims to evaluate and compare quantitative models for forecasting volatility.

Four models were explored to estimation of volatility: Simple Moving Average, Exponentially Weighted Moving Average (EWMA), Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (ARCH) e Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (GARCH).

For the empirical evaluation o this models were used a historical sample closing value of Petrobras – PETR4 and Vale do Rio Doce – VALE4 stocks, plus IBOVESPA and IBRX indexes.

The volatility estimated by the models could be assessed by the market risk measure called Value at Risk - VaR.

In this sense test was used to breach the limits for a one-day VaR, in order to compare the efficiency of the models simple moving average, EWMA (suggested by RiskMetrics), ARCH and GARCH.

Numerical simulations were done using Microsoft Excel software for the simulation models and compare results.

For the numerical simulations, calculations of the parameters and compare the models were used the software's Excel and Stata.

Keywords: Moving Average, EWMA, ARCH, GARCH, Value at Risk, RiskMetrics, volatility PETR4, VALE5 IBOVESPA, IBX.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	10
2 MODELOS DE VOLATILIDADE	12
2.1 Método de Média Móvel Simples	12
2.2 Modelo EWMA (<i>Exponentially Weighted Moving Average</i>)	13
2.3 Modelo ARCH (<i>Autoregressive Conditional Heteroscedasticity</i>)	15
2.4 Modelo GARCH (<i>Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity</i>) ..	18
3 VALOR EM RISCO (VaR)	20
4 SIMULAÇÃO DOS MODELOS	23
4.1 Descrição dos dados	23
4.2 Modelos	23
5 BACKTESTING	25
5.1 PETR4	25
5.2 VALE5	29
5.3 IBOV	32
5.4 IBX.....	36
5.5 Resultados Finais	40
6 CONCLUSÃO	42
REFERÊNCIAS	44

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Parâmetros dos modelos ARCH (1)	24
Tabela 2: Parâmetros dos modelos GARCH (1,1)	24
Tabela 3: Percentual de Falhas - Comparativo entre os modelos	40

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: PETR4 – VaR calculado pela Média Móvel (7 dias)	26
Gráfico 2: PETR4 – VaR calculado pela Média Móvel (15 dias)	26
Gráfico 3: PETR4 – VaR calculado pela Média Móvel (30 dias)	27
Gráfico 4: PETR4 – VaR calculado pelo EWMA	27
Gráfico 5: PETR4 – VaR calculado pelo ARCH (1)	28
Gráfico 6: PETR4 – VaR calculado pelo GARCH (1,1)	28
Gráfico 7: VALE5 – VaR calculado pela Média Móvel (7 dias)	29
Gráfico 8: VALE5 – VaR calculado pela Média Móvel (15 dias)	30
Gráfico 9: VALE5 – VaR calculado pela Média Móvel (30 dias)	30
Gráfico 10: VALE5 – VaR calculado pelo EWMA.....	31
Gráfico 11: VALE5 – VaR calculado pelo ARCH (1)	31
Gráfico 12: VALE5 – VaR calculado pelo GARCH (1,1)	32
Gráfico 13: IBOVESPA – VaR calculado pela Média Móvel (7 dias)	33
Gráfico 14: IBOVESPA – VaR calculado pela Média Móvel (15 dias)	33
Gráfico 15: IBOVESPA – VaR calculado pela Média Móvel (30 dias)	34
Gráfico 16: IBOVESPA – VaR calculado pelo EWMA.....	34
Gráfico 17: IBOVESPA – VaR calculado pelo ARCH (1)	35
Gráfico 18: IBOVESPA – VaR calculado pelo GARCH(1,1).....	35
Gráfico 19: IBX – VaR calculado pela Média Móvel (7 dias)	37
Gráfico 20: IBX – VaR calculado pela Média Móvel (15 dias)	37
Gráfico 21: IBX – VaR calculado pela Média Móvel (30 dias)	38
Gráfico 22: IBX – VaR calculado pelo EWMA	38
Gráfico 23: IBX – VaR calculado pelo ARCH(1).....	39
Gráfico 24: IBX – VaR calculado pelo GARCH(1,1).....	39

1 INTRODUÇÃO

Harry Markowitz, com o trabalho *"Portfolio Selection"* em 1952, foi pioneiro na modelagem de risco financeiro através da variância dos retornos.

Sua teoria segue a premissa de que os investidores avaliam suas carteiras apenas com base no valor esperado e na variância das taxas de retorno no espaço de tempo considerado, sendo estas as únicas variáveis de decisão para a seleção dos ativos. Se tivesse que escolher entre duas carteiras de mesmo risco, os investidores sempre escolheriam a de maior retorno e, da mesma forma ocorreria, quando fosse entre duas carteiras de mesmo retorno, sempre escolheriam a de menor risco.

Volatilidade é um tema que está ganhando cada vez mais importância para os envolvidos no mercado financeiro.

Uma característica das séries financeiras é a presença da volatilidade, porém, ao contrário da rentabilidade, não se observa uma volatilidade sem recorrer à sua estimação.

A maioria dos modelos de previsão da volatilidade estatística se apóia nas variações passadas dos preços dos ativos.

Se definirmos P_t como o preço de um ativo no instante t , a variação de preços no instante $t-1$ e t é dada por $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$ e o retorno líquido deste ativo, no mesmo instante (MORETTIN, 2008, p.7):

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}}$$

Considerando $p_t = \log P_t$, definimos o chamado *log-retorno* como (Morettin, 2008, p.7):

$$r_t = \log \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}} = \log(1 + R) = p_t - p_{t-1}$$

O modelo clássico pode ser definido como o desvio padrão condicional do retorno de um ativo medido em taxas logarítmicas.

Como afirma Morettin:

Uma característica marcante das séries financeiras é que elas são, em geral, não serialmente correlacionadas, mas dependentes. Deste modo, modelos lineares como aqueles pertencentes à família ARMA (auto-regressivo e de média móvel), podem não ser apropriados para descrever tais séries. Modelos da família ARCH (de "autoregressive conditional heteroscedasticity"), ou modelos de volatilidade estocástica são mais adequados. Contudo, diversas séries apresentam alguma forma de autocorrelação, de modo que modelos ARMA podem ser inicialmente aplicados para remover esta correlação, antes de usar modelos heteroscedásticos. (MORETTIN, 2008, p.1)

Se este for o caso, teremos:

$$\phi(B)r_t = \theta_0 + \theta(B)a_t$$

Sendo que $a_t \sim ARCH(m)$ e supondo que para o r_t ou a série é não-correlacionada, ou então ela é o resíduo de aplicação de um modelo ARMA à série original.

Os modelos deste trabalho foram especificados e os parâmetros estimados utilizando uma longa série de retornos contínuos dos valores de fechamento dos papéis da Petrobras – PETR4 e Vale do Rio Doce – VALE4, além dos índices IBOVESPA e IBRX.

Este trabalho está dividido em seis capítulos, sendo o segundo uma revisão bibliográfica resumida dos modelos de volatilidades aplicados neste trabalho. O terceiro capítulo apresenta os principais conceitos do VaR (Value at Risk). No quarto consta a descrição dos dados dos modelos utilizados. O quinto capítulo compara a performance e os resultados das simulações feitas dos modelos e o sexto, as conclusões e aprendizados resultantes deste trabalho.

2 MODELOS DE VOLATILIDADE

Os modelos utilizados nas simulações empíricas são: média móvel simples, EWMA, ARCH e GARCH.

2.1 Método de Média Móvel Simples

Uma das alternativas mais antigas utilizadas para modelar a volatilidade é o método da Média Móvel Simples, que se baseia em uma “janela móvel” de extensão fixa, “k”, agregando a cada dia a informação do dia anterior e desconsiderando a de k + 1 dias atrás.

Considerando os retornos observados r_t nos últimos k dias, segue a equação do método de média móvel simples que estima a volatilidade:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k r_{t-j}^2$$

Como se demonstra abaixo, o estimador amostral mais comum utiliza $\frac{1}{k-1}$ pois quando a variância é calculada com “k” no denominador, a média de sua distribuição amostral não será igual à variância populacional, caracterizando um estimador tendencioso.

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^k r_{t-j}^2$$

Este método possui algumas desvantagens como deixar a escolha da “janela móvel” sem definição, a de ignorar a ordenação dinâmica das observações e distribuir o mesmo peso entre as informações mais recentes e as mais antigas, mesmo as mais recentes tendo provavelmente maior relevância.

2.2 Modelo EWMA (Exponentially Weighted Moving Average)

Enquanto no método de Médias Móveis são atribuídos os mesmos pesos para todas as observações da série história, o EWMA determina pesos maiores para as informações mais recentes, possibilitando detectar com maior rapidez variações na volatilidade.

O modelo EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) foi sugerido pelo banco JP Morgan no manual RiskMetrics de 1994.

O EWMA tem duas vantagens sobre o modelo de Média Móvel que possui pesos igualmente distribuídos ao longo da série. O primeiro é que a volatilidade reage mais rápida a choques no mercado e o segundo é que, após um choque de preços, a volatilidade declina exponencialmente, na medida em que o peso dessas observações é reduzido com o tempo. (RiskMetrics, 1996, tradução nossa)

A equação abaixo define o EWMA:

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2$$

Sendo:

σ_t^2 = a variância dos retornos no instante t

r_{t-1}^2 = o quadrado do retorno observado no instante $t-1$

λ = o fator de decaimento

Para:

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

Pode-se definir que o EWMA é composto por um termo autoregressivo que representa a dependência temporal da variância dos retornos e um termo que traz a contribuição do retorno mais recente.

Se houver um $\lambda = 1$ a função EWMA é equivalente ao desvio-padrão amostral dos retornos. Quanto maior o λ , menor é o peso dos dados mais recentes e isso implica em um comportamento mais conservador e suave da série, um λ menor implica em um peso maior dos dados mais recentes e em um comportamento mais agressivo e pequeno da série.

O documento técnico do RiskMetrics (1996) utiliza um fator de amortecimento de 0,97 para as suas previsões mensais e 0,94, para as suas previsões diárias.

Desta forma a equação ficaria:

$$\sigma_t^2 = 0,94\sigma_{t-1}^2 + 0,06r_{t-1}^2$$

Um critério para a escolha do λ de ótimo decaimento seria identificar o valor que minimize a variância dos erros de previsão a um passo a frente, a chamada função RMST (*root mean square error*):

$$RMST = \sqrt{\frac{1}{t} \sum_{i=1}^n (r_{t+1} + \sigma_{t+1|t}^2(\lambda))^2}$$

Sendo o erro da previsão dado por

$$\varepsilon_{t+1|t} = r_{t+1}^2 - \sigma_{t+1|t}^2$$

, que satisfaz $E(\varepsilon_{t+1|t}) = 0$.

Para determinar a volatilidade no dia t basta calcular o retorno em t e a volatilidade de $t-1$, de acordo com a fórmula abaixo:

$$\sigma_{t+1}^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_t^2$$

No modelo EWMA a volatilidade estimada reage mais rapidamente aos movimentos extremos dos mercados, uma vez que as observações mais recentes recebem maior peso. Após a ocorrência desses movimentos, a volatilidade diminui gradualmente à medida que os pesos atribuídos a esses movimentos decaem. (RiskMetrics, 1996, tradução nossa)

Duas importantes restrições do modelo é que diferentes valores de λ produzem diferentes previsões e que a soma dos termos da equação do EWMA é igual a um, indicando dependência entre a reação da volatilidade aos eventos do mercado e durabilidade desta reação.

Para maiores detalhes consulte RiskMetrics (1996).

2.3 Modelo ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity)

Ao modelar séries históricas do mercado financeiro encontramos períodos de grande volatilidade, com erros elevados, e períodos de baixa volatilidade, com erros pequenos, indicando um tipo particular de heterocedasticidade, onde a variância do erro da regressão depende da volatilidade dos erros no passado recente.

Robert Engle, em 1982, com o objetivo de estimar a variância da inflação, desenvolveu os modelos auto-regressivos com heteroscedasticidade condicional, conhecidos como ARCH.

O AR vem do fato de que esses modelos são autoregressivos de retornos quadráticos. O condicional vem do fato de que nestes modelos a volatilidade do próximo período é condicional à informação deste período. Heterocedasticidade significa sem volatilidade constante (Reider, 2009, tradução nossa).

Os modelos ARCH estimam a variância futura com base nas observações correntes. Ao invés de considerar pequenas ou grandes amostras de desvio padrão, o modelo propõe utilizar a média ponderada histórica dos erros quadráticos, um tipo de variância ponderada. Estes pesos podem dar maior influência para as informações recentes e menor influência para as antigas.

Segundo Engle, claramente o modelo ARCH é uma generalização simples da variância da amostra. O grande avanço foi o de estimar os pesos a partir dos dados históricos, apesar de a verdadeira volatilidade nunca ter sido observada. As previsões podem ser calculadas todos os dias ou a cada período. Examinando estas previsões com diferentes pesos, pode ser encontrado o conjunto de pesos que mais se aproxima da variância do próximo retorno. Este processo é baseado na Máxima Verossimilhança, proporcionando uma abordagem sistemática para a estimação do peso ideal. (ENGLE, 2004, tradução nossa)

Uma vez que os pesos são determinados, a dinâmica deste modelo pode ser usada para medir a volatilidade a qualquer tempo e prevê-la num futuro próximo ou distante, como afirmam Gabe e Portugal:

“Os modelos de variância condicional heteroscedástica, chamados também de modelos de volatilidade, são reconhecidamente interessantes para analisar o comportamento da volatilidade nas séries financeiras, pois possuem propriedades que procuram explicar alguns dos fatos estilizados de variáveis econômicas e financeiras: a) a distribuição não-condicional dos retornos possui caudas grossas em relação à distribuição Normal; b) variâncias que mudam a cada período de tempo; c) para alguns tipos de retornos, a volatilidade reage de maneira diferenciada se os preços estão aumentando ou declinando. Geralmente, as subidas são lentas e as quedas são abruptas – denotando uma volatilidade maior.” (Gabe; Portugal, p.11)

Em linhas gerais os modelos ARCH pressupõem que o choque ε_t de um retorno de ativo seja não-autocorrelacionado mas dependente, e que a dependência de ε_t seja descrita por uma função quadrática simples de seus valores.

Engle destaca vários benefícios de se formular um explícito modelo dinâmico de volatilidade:

- I. Os parâmetros ótimos podem ser estimados pela Máxima Verossimilhança;
- II. Os testes de adequação e precisão podem ser utilizados para validar os procedimentos;
- III. Previsões de um passo a frente ou diversos passos a frente podem ser construídas utilizando estes parâmetros determinados;

IV. As distribuições incondicionais podem ser estabelecidas matematicamente e são geralmente realistas;

V. Considerando as variáveis relevantes no modelo, pode-se testar modelos econômicos que vão buscar determinar as causas da volatilidade;

VI. Incorporando variáveis endógenas adicionais e equações pode-se igualmente testar modelos econômicos e identificar as consequências da volatilidade. (Engle, 2004, tradução nossa)

Um modelo ARCH(m) pode ser definido por:

$$r_t = \sqrt{\sigma_t} \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m r_{t-m}^2$$

Onde ε_t é uma sequência de variáveis independentes e identicamente distribuídas, com média nula e variância unitária, $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_m \geq 0$.

Segue abaixo a equação para as previsões futuras utilizando o modelo ARCH (m):

$$\hat{\sigma}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_t^2 + \dots + \alpha_m r_{t-m+1}^2$$

As previsões g passos a frente com origem em t, são dadas por:

$$\hat{\sigma}_t^2(g) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \hat{\sigma}_t(g-1)$$

Segundo Morettin:

“Uma desvantagem do modelo é que trata retornos positivos e negativos de forma similar, já que quadrados dos retornos entram na fórmula da

volatilidade. Na prática, sabe-se que a volatilidade reage de modo diferente a retornos positivos e negativos. Também, devido ao fato de termos retornos ao quadrado, alguns retornos grandes e isolados podem conduzir a super previsões.” (MORETTIN, 2008, p.124)

2.4 Modelo GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity)

Mesmo o modelo ARCH sendo considerado simples, frequentemente se faz necessário muitos parâmetros para descrever a volatilidade de um retorno.

Bollerslev sugeriu uma generalização dos modelos ARCH, o chamado modelo GARCH. “[...] o modelo GARCH pode ser usado para descrever a volatilidade com menos parâmetros do que um modelo ARCH.” (MORETTIN, 2008, p.131)

Neste modelo a variância condicional depende do quadrado dos retornos passados e do passado das próprias variâncias condicionais.

O modelo GARCH leva em consideração três importantes características de séries temporais proeminentemente financeiras: o excesso de curtose, descritas por distribuição de probabilidade mais achatadas que uma Normal Padronizada, o agrupamento da volatilidade (*Cluster*) e a alavancagem (BOLLERSLEV, 1986, tradução nossa).

O agrupamento (*clustering*) da volatilidade é uma característica exibida pelas séries de retornos nas quais uma grande oscilação tende a seguir grandes oscilações e pequenas oscilações tendem a seguir pequenas oscilações. Em ambos os casos, as mudanças de um período para o seguinte são tipicamente imprevisíveis. Deste modo, uma perturbação grande, positiva ou negativa, torna-se parte do conjunto de informações usadas para construir a previsão da variância para o próximo período perturbado (BOLLERSLEV, 1986, tradução nossa).

Um modelo GARCH(m,n) pode ser definido por:

$$r_t = \sqrt{\sigma_t} \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^n \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Onde ε_t são variáveis aleatórias, independentes e identicamente distribuídas, com média zero e variância unitária, $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, m-1, \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, n-1, \alpha_m > 0, \beta_n > 0, \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \beta_i) < 1, q = \max(m, n)$

Segue abaixo a equação para as previsões futuras utilizando o modelo GARCH (m):

$$\hat{\sigma}_t^2(1) = \alpha_0 + \alpha_1 r_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2$$

As previsões g passos a frente com origem em t, são definidas por:

$$\hat{\sigma}_t^2(g) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \hat{\sigma}_t^2(g-1), \quad g > 1$$

Como Morettin afirma:

“A identificação da ordem de um modelo GARCH a ser ajustado a uma série real usualmente é difícil. Recomenda-se o uso de modelos de ordem baixa, como (1,1), (1,2), (2,1) ou (2,2), e depois se escolha o modelo com base em vários critérios, como AIC ou BIC, valores de assimetria e curtose, log-verossimilhança e de alguma função perda [...]” (MORETTIN, 2008, p.134)

O modelo GARCH tem as mesmas desvantagens do modelo ARCH de responder de maneira igual a choques positivos e negativos.

3 VALOR EM RISCO (VaR)

As empresas em geral estão expostas aos riscos operacionais, estratégicos e financeiros. Os riscos financeiros podem ser de vários tipos, como operacional, de crédito, de liquidez, legal e de mercado. Este trabalho aborda somente os riscos financeiros de mercado, que estão atreladas às perdas potenciais associadas ao comportamento do mercado.

O Value at Risk (VaR) pode ser definido como a perda potencial máxima, em um dado intervalo de confiança, com uma probabilidade pré-determinada que a posição de um ativo ou portfólio pode provocar em um determinado horizonte de tempo. (RISKMETRICS, 1996, tradução nossa)

Value-at-Risk é um número que representa a variação potencial do valor futuro de um portfólio. Como esta alteração é definida depende do (1) horizonte sobre o qual a mudança da carteira de valor é medido e (2) o "grau de confiança" escolhido pelo gestor de risco. (RISKMETRICS, 1996, tradução nossa)

De forma simplificada, o Var mede o quanto se pode perder com probabilidade p , sobre um horizonte h fixado.

Define-se o VAR de uma posição comprada sobre o horizonte h com probabilidade p , $0 < p < 1$, por meio de:

$$P(h) = P(t + h) - P(t)$$

$$p = P(\Delta P(h) \leq VaR) = F_h(VaR)$$

Onde ΔP representa o ganho ou a perda da posição P , dada por $\Delta P_i = P_{t+i} - P_i$ e $F_h()$ é a função de distribuição acumulada de $\Delta P(h)$.

O VaR é dependente de h e p , ou seja, o valor em risco aumenta com p diminuindo ou h aumentando.

A definição mostra que o VaR é o p-quantil da distribuição $F_h()$, se fazendo necessário estimar este quantil utilizando, por exemplo, a distribuição empírica dos retornos. (MORETTIN, 2008, p.159)

No caso de uma posição vendida defini-se o VaR como:

$$p = P(\Delta P(h) \geq VaR) = 1 - F_h(VaR)$$

Sendo $\Delta P(h) > 0$ há perda, ou seja, o preço do ativo cresce e o VaR é positivo para o p pequeno.

A quantia de uma unidade monetária no cálculo do VaR é obtida multiplicando o valor da posição financeira, normalmente o valor do ativo marcado pelo mercado, pelo VaR do log-retorno.

Neste trabalho se pressupõe uma distribuição normal dos log-retornos, com média zero e variância σ_t^2 , ou seja:

$$r_t|F_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

Para o estimador de volatilidade utilizando o modelo EWMA, observa-se que:

$$VaR(r_{t+1}|F_t) = \sigma_{t+1}^2, i = 2, \dots, k$$

$$\sigma_t^2[k] = k\hat{\sigma}_t^2(1)$$

Com isso pode-se escrever que:

$$r_t[k]|F_t \sim N(0, k\sigma_t^2(1))$$

A variância condicional dos log-retornos de k períodos é proporcional ao horizonte k e o desvio padrão condicional de $r_t[k]$ é dado por $\sqrt{k\sigma_{t+1}}$, sendo $\sigma_{t+1} = \sqrt{\hat{\sigma}_t^2(1)}$.

Morettin (2008, p.161) exemplifica fixando a probabilidade $p = 5\%$ na equação $p = P(\Delta P(h) \leq VaR) = F_h(VaR)$, adotando o VaR utilizado pelo Riskmetrics de $-1,65\sigma_{t+1}$, que é o 0,05-quantil da normal com média zero e variância σ_t^2 . "Normalmente o sinal negativo, que significa perda, é ignorado [...]", sendo o VaR de k períodos a frente dado por:

$$VaR[k] = (\text{Valor da posição}) \times (1,65) \times \sqrt{k} \times \sigma_{t+1}$$

Ou seja:

$$VaR[k] = \sqrt{k}VaR$$

Para um modelo GARCH (m,n), selecionando uma distribuição normal $\varepsilon_t \sim N(0,1)$, tem-se:

$$r_{t+1}|F_t \sim N(\hat{r}_t(1), \hat{\sigma}_t^2(1))$$

Sendo $\hat{r}_t(1)$ as previsões um passo a frente e $\hat{\sigma}_t^2(1)$ a variância. Supondo um $p=0,05$:

$$VaR = \hat{r}_t(1) - 1,65\hat{\sigma}_t(1)$$

O VaR é uma medida de risco que é facilmente entendida, sem se saber de todas as estatísticas. É, no entanto, apenas um quantil da distribuição preditiva e, portanto, tem informações limitadas sobre as probabilidades de perda. (ENGLE, 2004, tradução nossa)

4 SIMULAÇÃO DOS MODELOS

4.1 Descrição dos dados

Para a simulação numérica destes modelos foram selecionados os preços de fechamento dos papéis VALE5, PETR4 e dos índices IBOV e IBX, do período de 01/01/2000 a 30/09/2010.

A escolha destes papéis e índices se deve a grande liquidez que possuem e a grande janela de dados disponível. Todos os dados foram extraídos do site da Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA), somando um total de 2.804 observações de cada item.

4.2 Modelos

Neste trabalho se pressupõe uma distribuição normal dos log-retornos, com média zero e variância σ_t^2 .

Para os modelos de Média Móvel foram aplicadas as defazagens de 7, 15 e 30 dias buscando maximizar o efeito de alisamento na previsão.

Na simulação do modelo EWMA foi considerado o fator de decaimento apontado pelo documento técnico do RiskMetrics (1996) para as previsões diárias, $\lambda = 0,94$, gerando a equação:

$$\sigma_t^2 = 0,94\sigma_{t-1}^2 + 0,06r_{t-1}^2$$

Para os modelos ARCH e GARCH optou-se por assumir a defasagem de um período utilizando o ARCH(1) e o GARCH (1,1).

Os parâmetros ótimos foram estimados pela Máxima Verossimilhança, ou seja, os valores que maximizam a função log-verossimilhança.

Para os parâmetros do modelo GARCH(1,1) foi utilizada a função SOLVER do EXCEL e para o ARCH(1) a função "arch", dentro do módulo de "Time Series", do software estatístico STATA.

Segue abaixo os parâmetros estimados:

Tabela 1: Parâmetros do modelo ARCH(1)

ARCH(1)		Papéis/Índices			
		PETR4	VALE5	IBOV	IBX
Parâmetros	α_0	0.000454	0.000453	0.000302	0.000246
	α_1	0.121848	0.170294	0.158447	0.197176

Tabela 2: Parâmetros do modelo GARCH(1,1)

GARCH(1,1)		Papéis/Índices			
		PETR4	VALE5	IBOV	IBX
Parâmetros	α_0	0.000013	0.000025	0.000009	0.000007
	α_1	0.070644	0.093269	0.068168	0.072217
	β_1	0.901212	0.860677	0.904587	0.901266

As restrições dos modelos foram atendidas pois as estimativas dos parâmetros são positivas e a soma menor que 1.

Para o cálculo do VaR foi considerado um nível de confiança de 95%.

5 BACKTESTING

Foi utilizado o teste de violações de limites de VaR para avaliar a eficiência dos modelos através dos testes de realizações passadas.

Este teste considera o valor do papel ou índice marcado a mercado, contando o número de vezes que os valores excederam o intervalo de confiança estipulado pelo VaR. Este número é dividido pelo tamanho da amostra, resultando na taxa ou percentual de falhas de ocorrência. Esse percentual é comparado ao nível de significância.

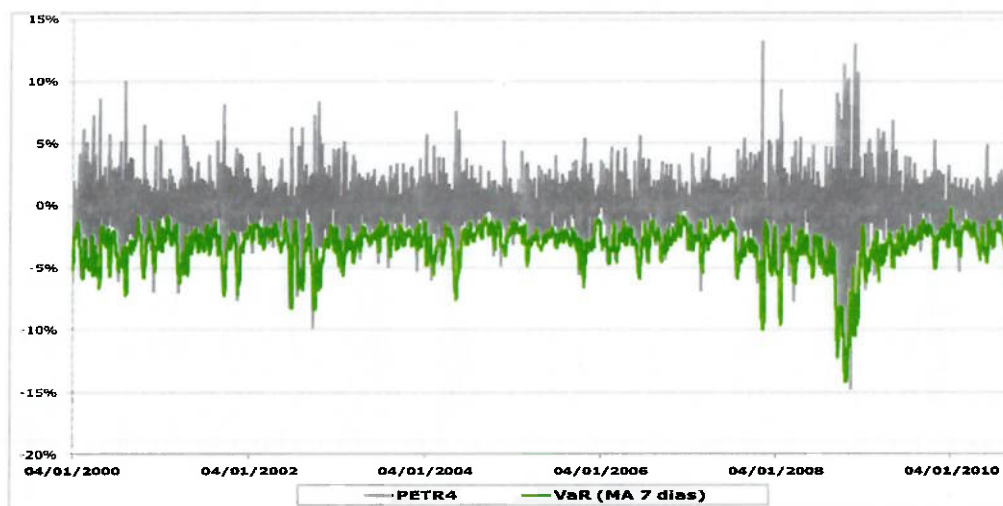
As violações podem ser divididas em limite superior, quando o retorno exceder o intervalo de confiança do lado direito da calda, e limite inferior, quando o retorno for menor que o retorno crítico determinado pelo VaR que foi o utilizado neste trabalho.

5.1 PETR4

Neste item considera-se o retorno logarítmico do preço de fechamento da ação PETR4 da Petrobras, negociada na Bovespa, para comparar os modelos selecionados.

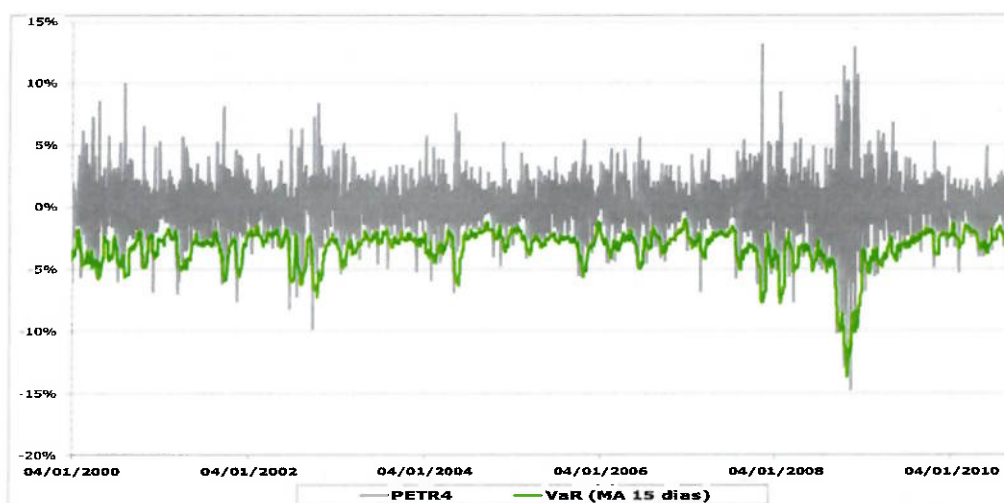
O gráfico 1 apresenta o VaR calculado pela Média Móvel Simples aplicando uma defasagem de 7 dias.

Gráfico 1: PETR4 – VaR calculado pela Média Móvel (7 dias)



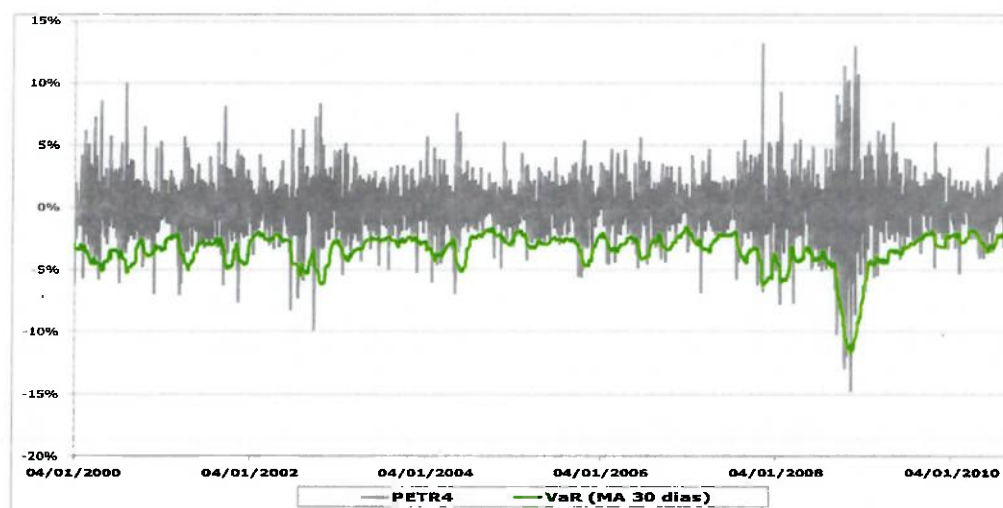
O gráfico 2 apresenta o VaR calculado pela Média Móvel Simples aplicando uma defasagem de 15 dias.

Gráfico 2: PETR4 – VaR calculado pela Média Móvel (15 dias)



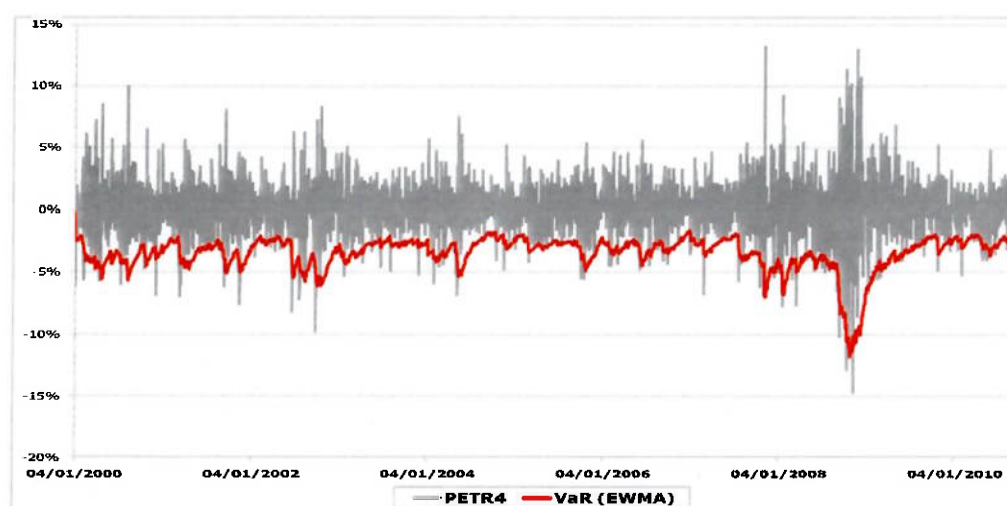
O gráfico 3 apresenta o VaR calculado pela Média Móvel Simples aplicando uma defasagem de 30 dias.

Gráfico 3: PETR4 – VaR calculado pela Média Móvel (30 dias)



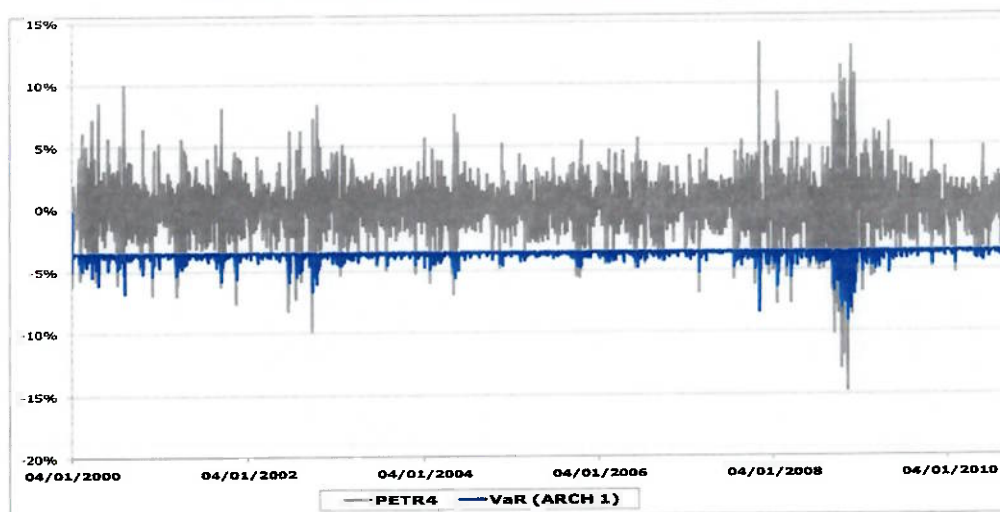
O gráfico 4 apresenta o VaR calculado pelo EWMA considerando o fator de decaimento de 0,94.

Gráfico 4: PETR4 – VaR calculado pelo EWMA



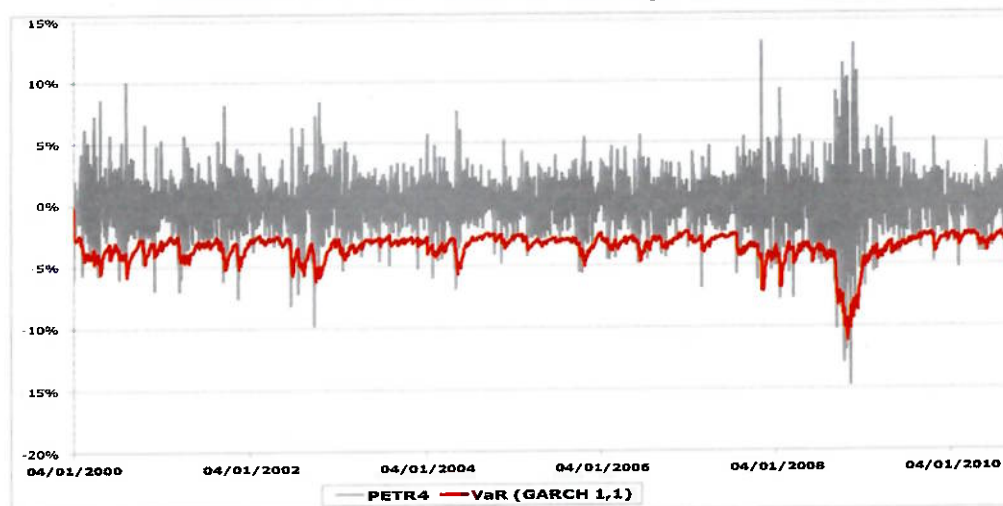
O gráfico 5 apresenta o VaR calculado pelo ARCH(1).

Gráfico 5: PETR4 – VaR calculado pelo ARCH(1)



O gráfico 6 apresenta o VaR calculado pelo GARCH(1,1).

Gráfico 6: PETR4 – VaR calculado pelo GARCH(1,1)



Os resultados dos testes de violação dos limites do VaR demonstraram que, utilizando o modelo de Média Móvel Simples com defasagem de 7 dias, em 6,95% das observações os retornos logarítmicos da ação da Petrobras excederam os limites do Var. Considerando a defasagem de 15 dias este número cai para 5,92% e com 30 dias para 5,88%.

Utilizando o modelo do Riskmetrics EWMA 5,49% das observações excederam o limite do VaR.

Simulando com os modelos ARCH(1) e GARCH(1,1) 4,46% e 4,85% das observações superaram o limite do VaR respectivamente.

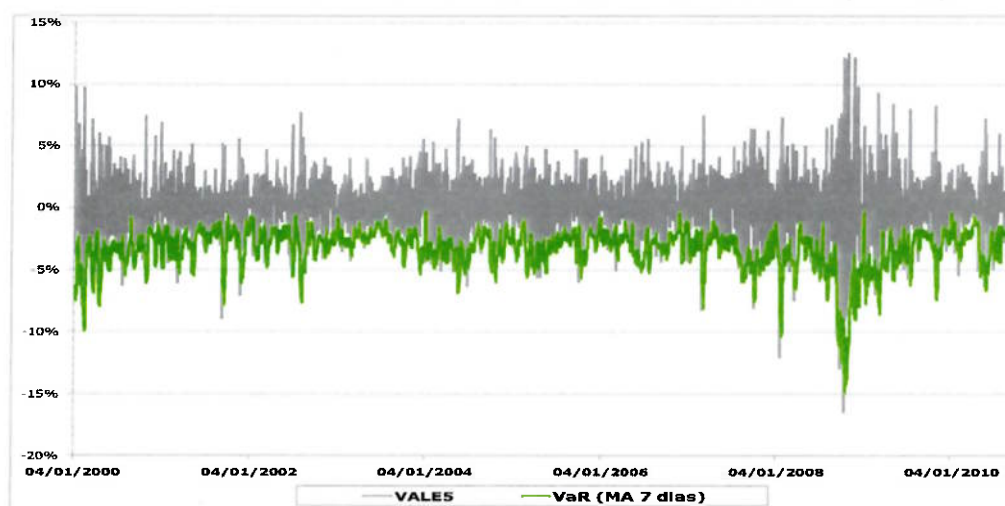
Com isso, observa-se que os modelos ARCH(1) e GARCH(1,1) foram os únicos que permaneceram dentro do nível de significância de 5% utilizado no VaR e foram os que tiveram menos violações entre os modelos simulados.

5.2 VALE5

Neste item considera-se o retorno logarítmico do preço de fechamento da ação da Cia Vale do Rio Doce VALE5 para comparar os modelos selecionados.

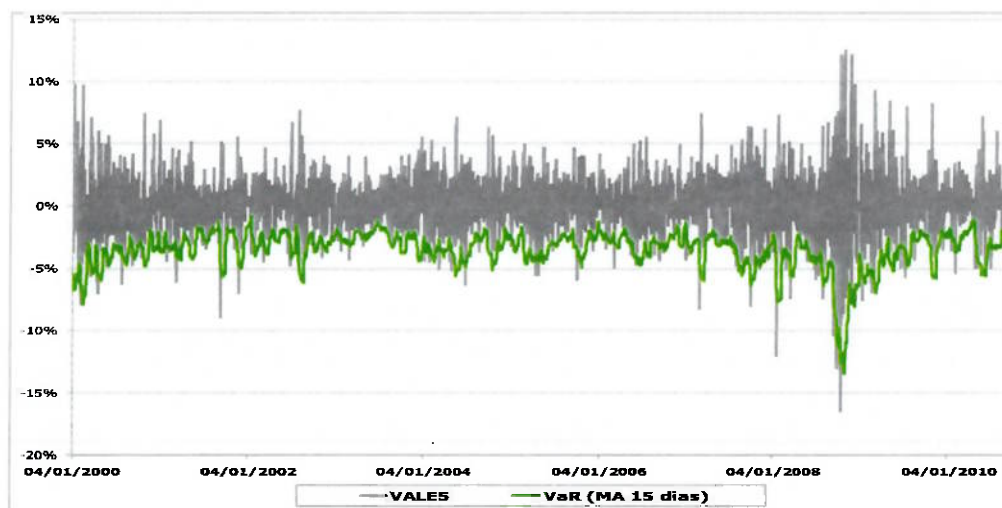
O gráfico 7 apresenta o VaR calculado pela Média Móvel Simples aplicando uma defasagem de 7 dias.

Gráfico 7: VALE5 – VaR calculado pela Média Móvel (7 dias)



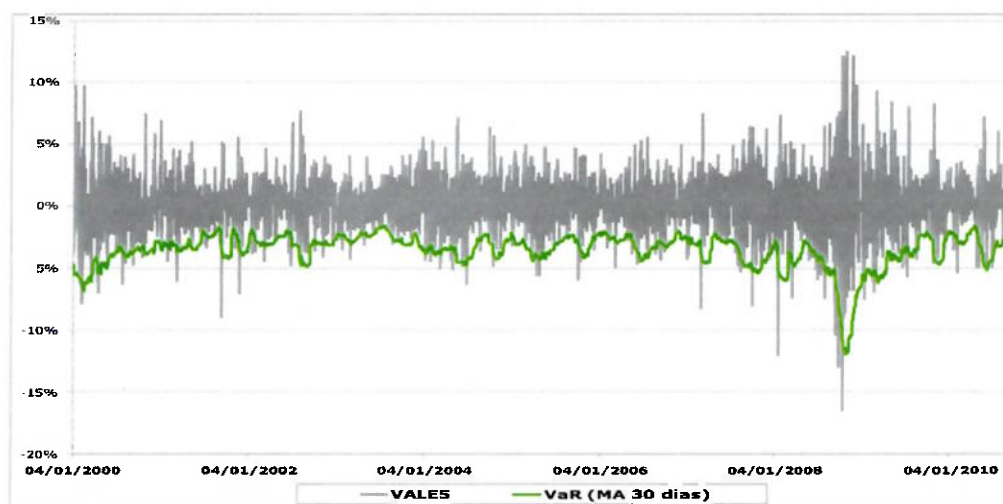
O gráfico 8 apresenta o VaR calculado pela Média Móvel Simples aplicando uma defasagem de 15 dias.

Gráfico 8: VALE5 – VaR calculado pela Média Móvel (15 dias)



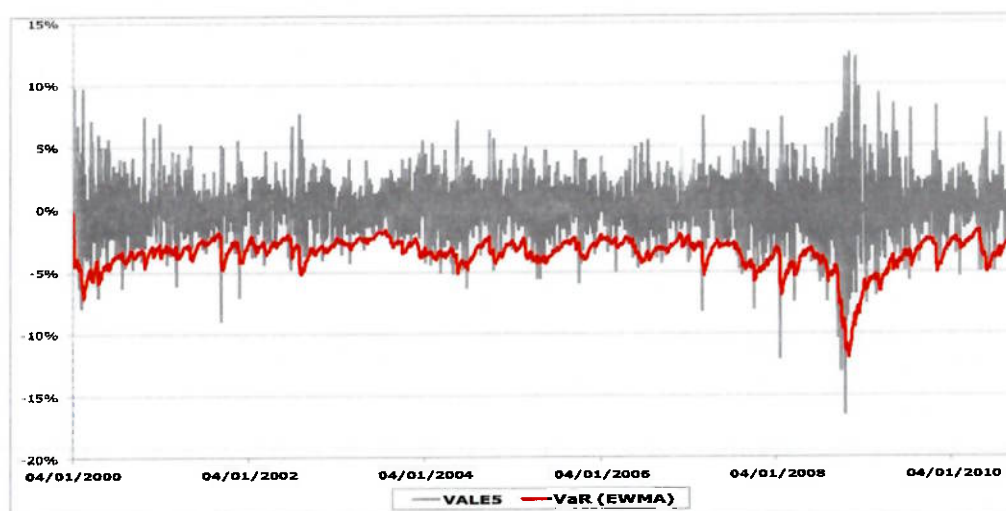
O Gráfico 9 apresenta o VaR calculado pela Média Móvel Simples aplicando uma defasagem de 30 dias.

Gráfico 9: VALE5 – VaR calculado pela Média Móvel (30 dias)



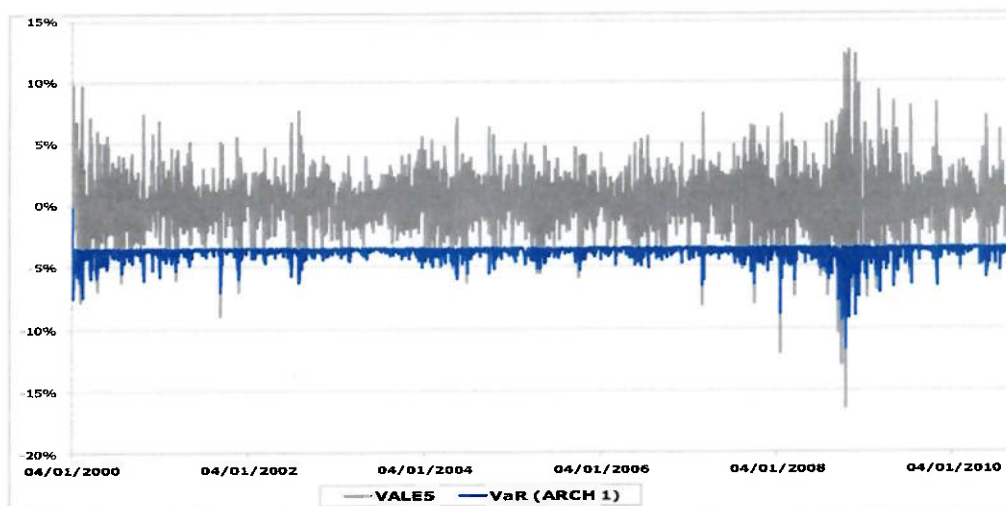
O gráfico 10 apresenta o VaR calculado pelo EWMA considerando o fator de decaimento de 0,94.

Gráfico 10: VALE5 – VaR calculado pelo EWMA



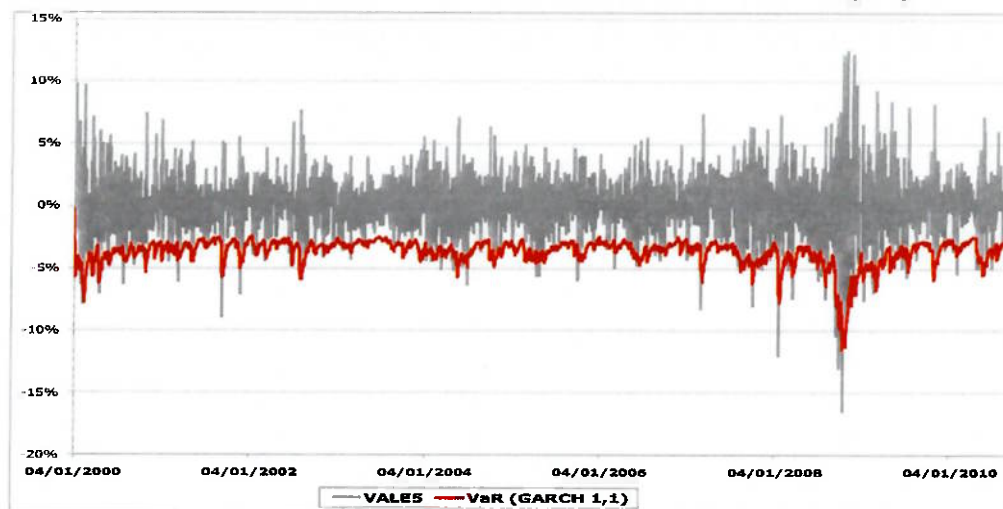
O gráfico 11 apresenta o VaR calculado pelo ARCH(1).

Gráfico 11: VALE – VaR calculado pelo ARCH(1)



O Gráfico 12 apresenta o VaR calculado pelo GARCH(1,1).

Gráfico 12: VALE5 – VaR calculado pelo GARCH(1,1)



Os resultados dos testes de violação dos limites do VaR demonstraram que, utilizando o modelo de Média Móvel Simples com defasagem de 7 dias, em 7,06% das observações os retornos da ação da Vale do Rio Doce excederam os limites do Var. Considerando a defasagem de 15 dias este número cai para 5,88% e com 30 dias para 5,14%.

Utilizando o modelo do Riskmetrics EWMA 5,10% das observações excederam o limite do VaR.

Simulando com os modelos ARCH(1) e GARCH(1,1) 4,92% e 4,39% das observações superaram o limite do VaR.

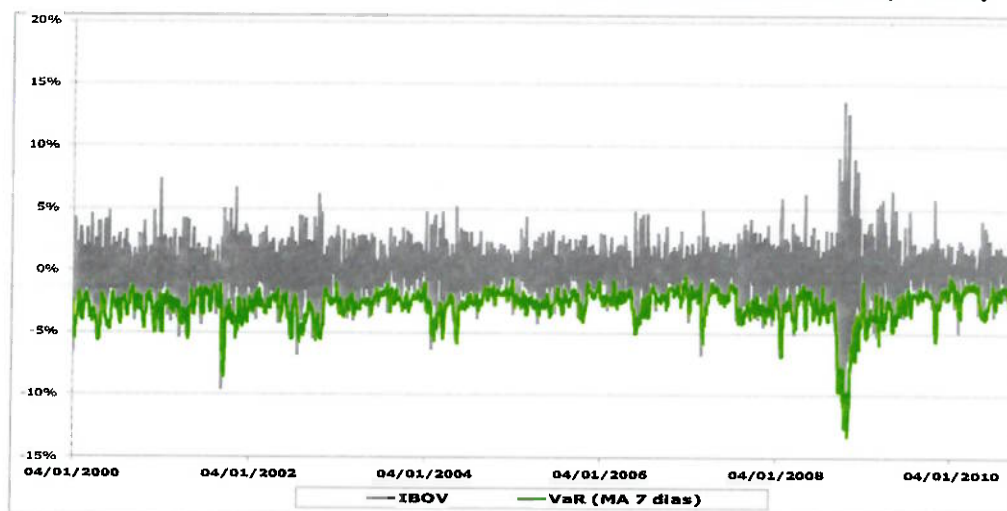
Com isso, observa-se que apenas os modelos ARCH(1) e GARCH(1,1) permaneceram dentro do nível de significância de 5% utilizado no VaR e foram os que tiveram menos violações entre os modelos simulados, seguido do EWMA do RiskMetrics.

5.3 IBOVESPA

Neste item, para comparar os modelos selecionados, considera-se o retorno logarítmico do fechamento do índice Ibovespa, que é formado pelas ações que, em conjunto, representam 80% no volume negociado na Bolsa de valores de São Paulo, nos 12 meses anteriores à formação da carteira.

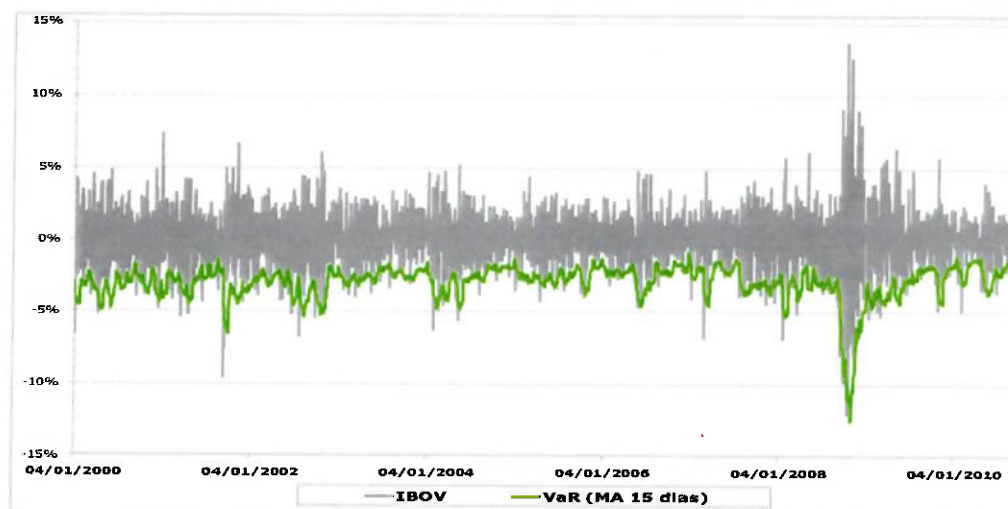
O gráfico 13 apresenta o VaR calculado pela Média Móvel Simples aplicando uma defasagem de 7 dias.

Gráfico 13: IBOVESPA – VaR calculado pela Média Móvel (7 dias)



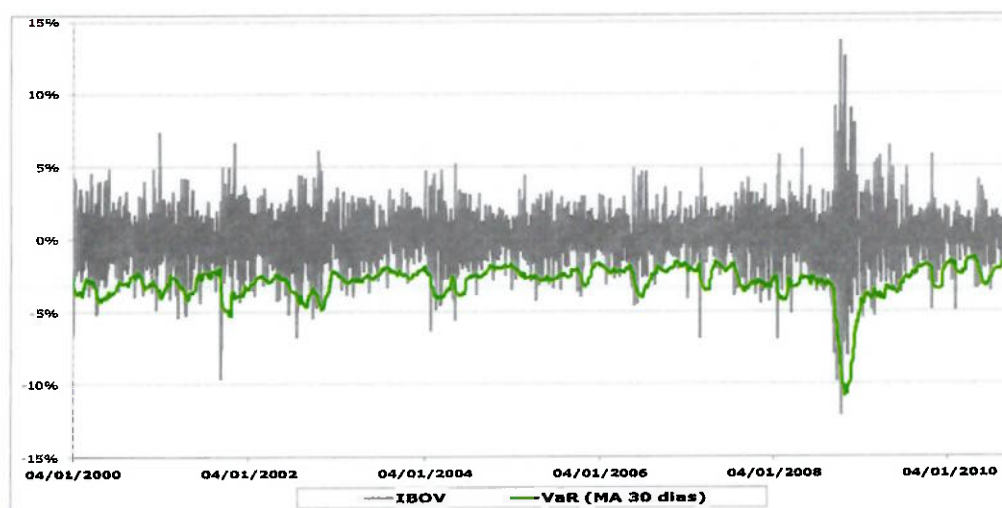
O gráfico 14 apresenta o VaR calculado pela Média Móvel Simples aplicando uma defasagem de 15 dias.

Gráfico 14: IBOVESPA – VaR calculado pela Média Móvel (15 dias)



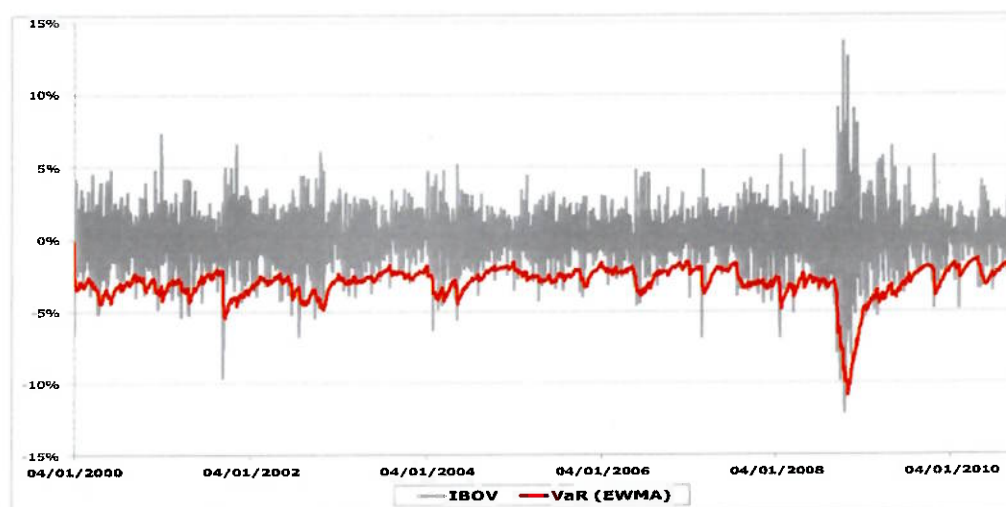
O gráfico 15 apresenta o VaR calculado pela Média Móvel Simples aplicando uma defasagem de 30 dias.

Gráfico 15: IBOVESPA – VaR calculado pela Média Móvel (30 dias)



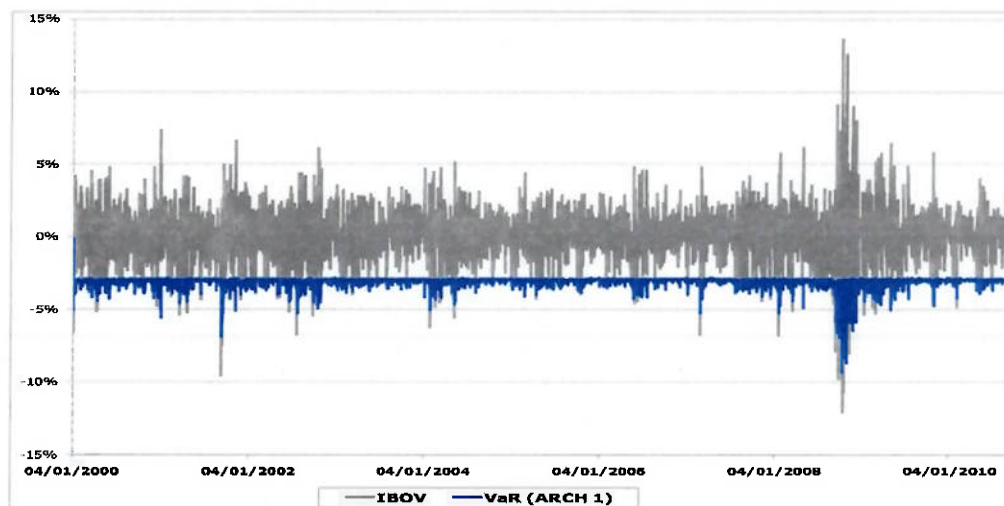
O gráfico 16 apresenta o VaR calculado pelo EWMA considerando o fator de decaimento de 0,94.

Gráfico 16: IBOVESPA – VaR calculado pelo EWMA



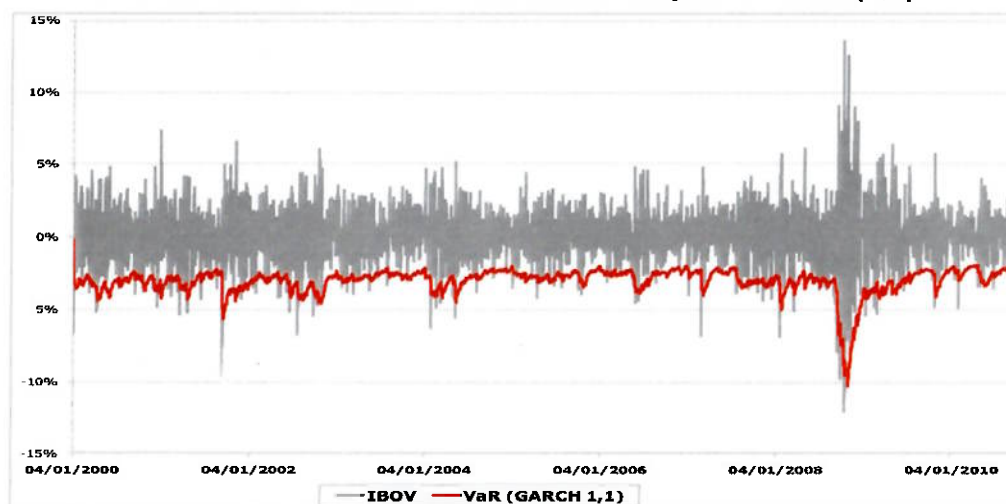
O gráfico 17 apresenta o VaR calculado pelo ARCH(1).

Gráfico 17: IBOVESPA – VaR calculado pelo ARCH(1)



O gráfico 18 apresenta o VaR calculado pelo GARCH(1,1).

Gráfico 18: IBOVESPA – VaR calculado pelo GARCH(1,1)



Os resultados dos testes de violação dos limites do VaR demonstraram que, utilizando o modelo de Média Móvel Simples com defasagem de 7 dias, em 7,35%

das observações, os retornos do índice Ibovespa excederam os limites do VaR. Considerando a defasagem de 15 ou 30 dias este número cai para 6,38% em ambas.

Utilizando o modelo do Riskmetrics EWMA 5,89% das observações excederam o limite do VaR.

Simulando com os modelos ARCH(1) e GARCH(1,1) 5,35% e 5,56% das observações superaram o limite do VaR.

Com isso, observa-se que nenhum modelo permaneceu dentro do nível de significância de 5% utilizado no VaR, porém, o ARCH(1) foi o que sofreu menos violações entre os modelos simulados, seguido do GARCH(1,1) e do EWMA.

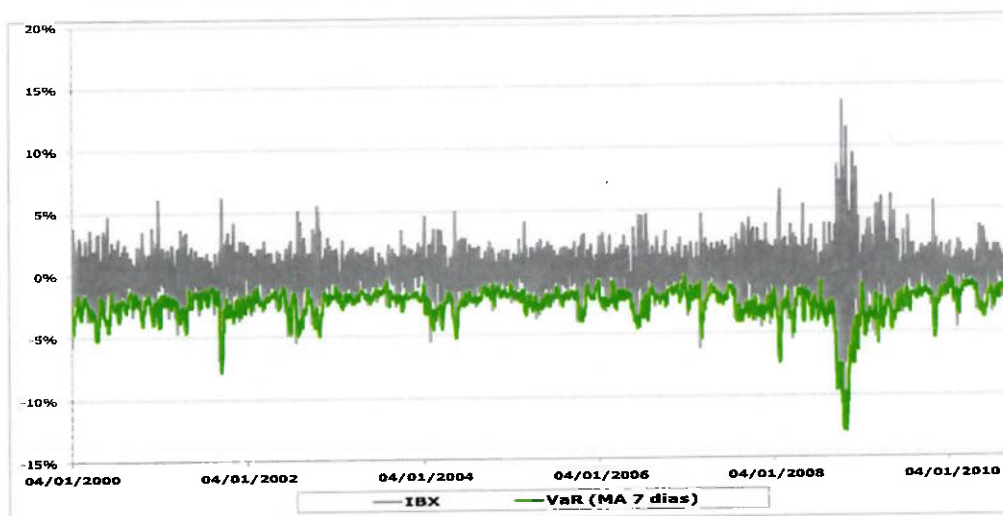
5.4 IBX

O IBX (Índice Brasil) é composto pelas 100 ações melhores classificadas quanto ao seu índice de negociabilidade na Bovespa, sendo que essas ações devem ser negociadas em, pelo menos, 70% dos pregões ocorridos nos doze meses anteriores à formação da carteira do índice.

Neste item considera-se o retorno logarítmico do fechamento do índice IBX para comparar os modelos selecionados.

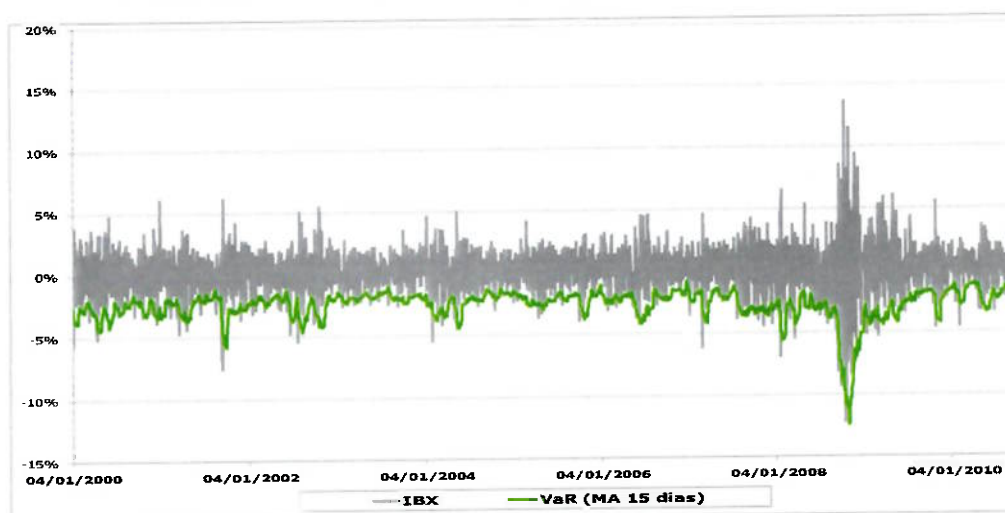
O Gráfico 19 apresenta o VaR calculado pela Média Móvel Simples aplicando uma defasagem de 7 dias.

Gráfico 19: IBX – VaR calculado pela Média Móvel (7 dias)



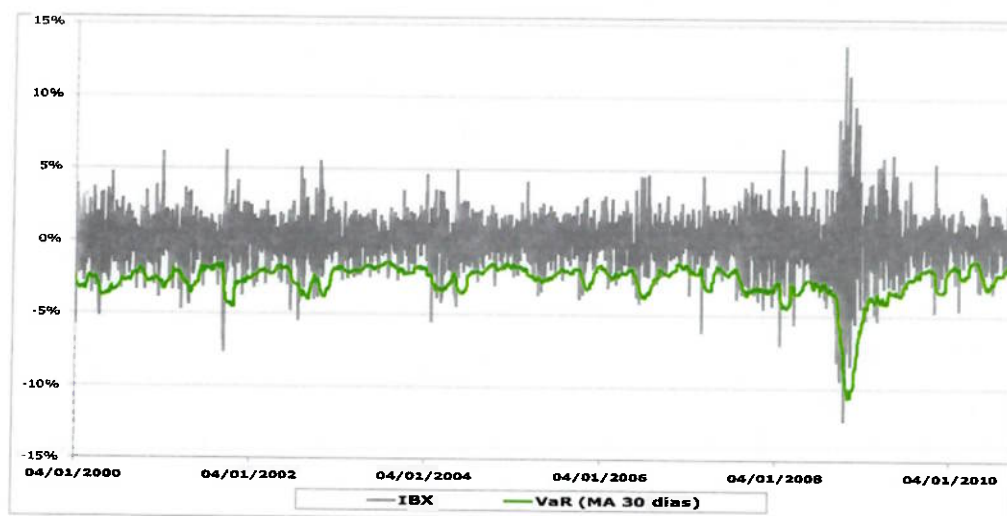
O gráfico 20 apresenta o VaR calculado pela Média Móvel Simples aplicando uma defasagem de 15 dias.

Gráfico 20: IBX – VaR calculado pela Média Móvel (15 dias)



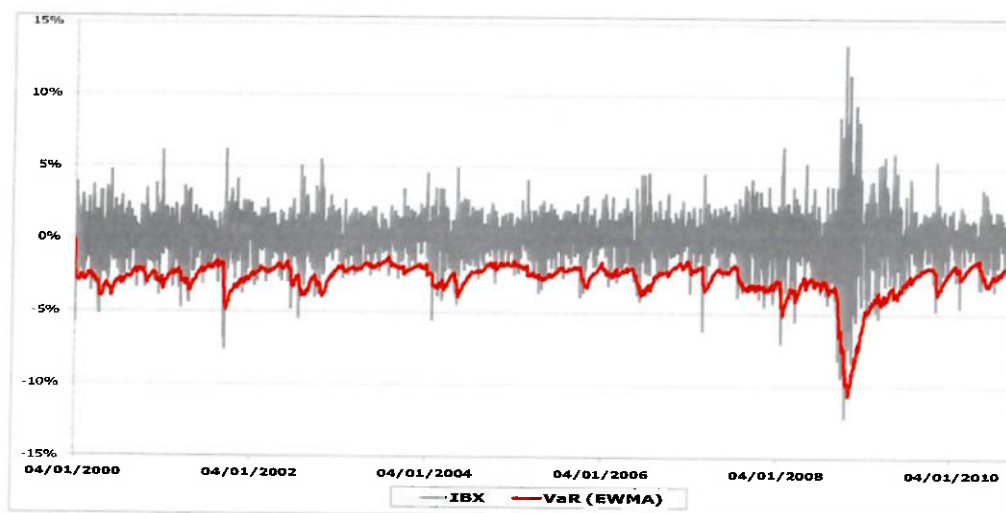
O gráfico 21 apresenta o VaR calculado pela Média Móvel Simples aplicando uma defasagem de 30 dias.

Figura 21: IBX – VaR calculado pela Média Móvel (30 dias)

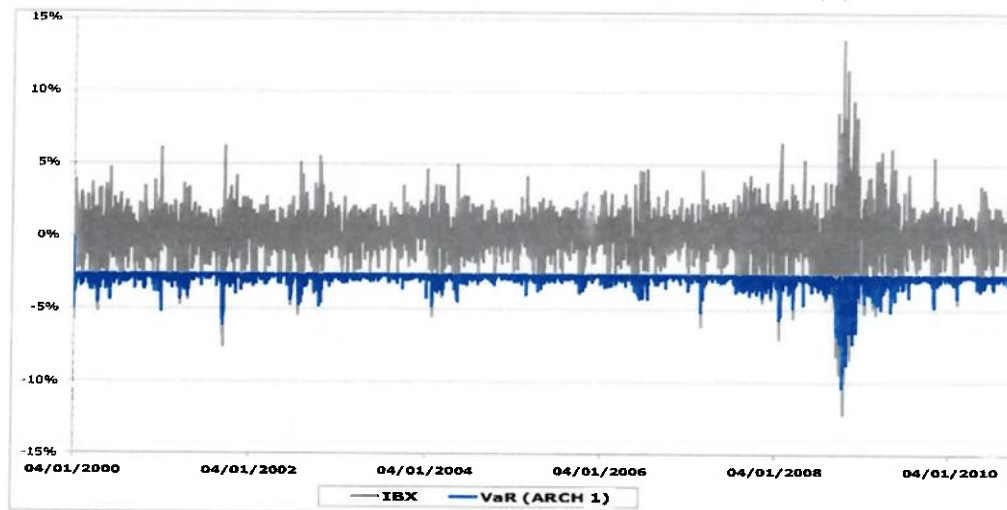


O gráfico 22 apresenta o VaR calculado pelo EWMA considerando o fator de decaimento de 0,94.

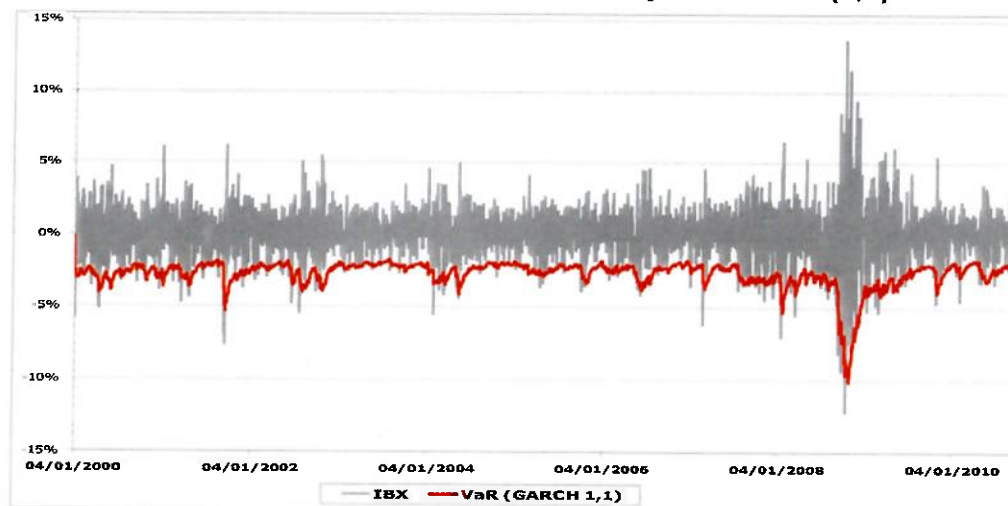
Gráfico 22: IBX – VaR calculado pelo EWMA



O gráfico 23 apresenta o VaR calculado pelo ARCH(1).

Gráfico 23: IBX – VaR calculado pelo ARCH(1)

O gráfico 24 apresenta o VaR calculado pelo GARCH(1,1).

Gráfico 24: IBX – VaR calculado pelo GARCH(1,1)

Os resultados dos testes de violação dos limites do VaR demonstraram que, utilizando o modelo de Média Móvel Simples e comparando as defasagens de 7, 15 e 30 dias, a de 15 foi a que menos excedeu os limites do Var, com 6,17%, seguido

da de 30 dias com 6,21% e da de 7 com 7,20%. Utilizando o modelo do Riskmetrics EWMA 5,63% das observações excederam o limite.

Simulando com os modelos ARCH(1) e GARCH(1,1) 4,81%% e 5,17% das observações superaram o limite do VaR.

Com isso, observa-se que apenas o modelo ARCH(1) permaneceu dentro do nível de significância de 5% utilizado no VaR, e foi o que sofreu o menor número de violações entre os modelos simulados, seguido do GARCH(1,1) e do EWMA.

5.5 Resultados Finais

Neste item é avaliada a eficiência dos modelos comparando os resultados finais das simulações dos modelos com base no teste de violações de limites de VaR.

A tabela 2 apresenta um resumo do *backtest* dos modelos aplicados à série histórica dos papéis e índices escolhidos. Os percentuais apresentados representam o número de vezes que os valores excederam o intervalo de confiança estipulado pelo VaR, dividido pelo tamanho da amostra, resultando na taxa ou percentual de falhas de ocorrência.

Tabela 3: Percentual de Falhas - Comparativo entre os modelos

	PETR4	VALE5	IBOV	IBX
Média Móvel(7)	6.95%	7.06%	7.35%	7.20%
Média Móvel(15)	5.92%	5.88%	6.38%	6.17%
Média Móvel(30)	5.88%	5.14%	6.38%	6.21%
EWMA	5.49%	5.10%	5.89%	5.63%
ARCH(1)	4.46%	4.92%	5.35%	4.81%
GARCH(1,1)	4.85%	4.39%	5.56%	5.17%

Observa-se que o modelo ARCH(1) foi o que apresentou o melhor desempenho, com o menor percentual de falhas para PETR4, IBOVESPA e IBX, além de ficar em 75% das simulações dentro do nível de 5% de significância do VaR.

Com o segundo melhor desempenho, o modelo GARCH(1,1) teve o menor percentual de falhas para a VALE5, e ficou em duas oportunidades dentro dos 5% do VaR.

O modelo EWMA demonstrou um bom desempenho, porém, superou o limite significância do VaR em todas as oportunidades.

Os modelos com pior performance foram os de Média Móvel Simples, sendo que quanto menor o período de defasagem aplicado, maior o número de vezes que excedeu o limite do VaR.

6 CONCLUSÃO

Para a avaliação empírica deste trabalho foram selecionadas as séries históricas, no período compreendido entre 01/01/2000 a 30/09/2010, levando em consideração os preços de fechamento das ações PETR4, da Petrobras, VALE5, da Vale do Rio doce, e dos índices, da Bolsa de Valores de São Paulo, IBOVESPA e IBX, totalizando 2.804 observações de cada item.

Com estes dados foram simulados os modelos de Média Móvel simples, aplicando defasagem de 7, 15 e 30 dias, de suavização exponencial do Riskmetrics – EWMA e os da família ARCH – ARCH(1) e GARCH(1,1), para estimar a volatilidade .

Após a estimação da volatilidade foi aplicado o cálculo do VaR, que depende da volatilidade, do horizonte de tempo e do intervalo de confiança para os retornos contínuos calculados através das diferenças logarítmicas dos preços dos ativos (Galdi e Pereira, 2007).

Além disso, foi aplicado o *backtest* de violação dos limites para um VaR considerando 5% de nível de significância, calculado um passo a frente, para comparar a eficiência dos modelos selecionados, aplicada aos índices e papéis escolhidos.

Os resultados dos testes demonstraram que dentre os modelos selecionados, o ARCH(1) foi o que mais vezes ficou dentro do nível de significância de 5%.

Foi confirmado que ao utilizar o modelo de Média Móvel Simples quanto maior o período de defasagem considerado, menor é o número de violações do VaR.

Foi verificado também que o VaR calculado pelo modelo ARCH(1) foi o que sofreu o menor número de violações, seguido do GARCH(1,1) e do EWMA. O modelo de Médias Móveis foi o que teve a menor aderência e o que sofreu o maior número de violações, ficando com o maior percentual de falhas.

Pelos resultados das simulações, o modelo ARCH(1) foi considerado o modelo com o melhor desempenho dentre os analisados, porém, se for analisado pela facilidade na implementação do modelo, e proximidade dos resultados com o ARCH(1) e GARCH(1,1), sugere-se a utilização do EWMA, da Riskmetrics(1996).

Com base neste trabalho recomenda-se um estudo mais aprofundado das propriedades dos modelos aqui apresentados, a aplicação de outros modelos da família GARCH (EGARCH, TARCH, etc) que possam modelar melhor as características destas séries e a utilização do modelo ARCH e GARCH para “p” e “q” diferentes de 1, embora usualmente para modelos de previsão não sejam utilizados valores de “p” e “q” maiores que 2.

REFERÊNCIAS

ANDERSEN, Torben G.; BOLLERSLEV, Tim; CHRISTOFFERSEN, Peter; DIEBOLD, Francis X. Volatility Forecasting (February 22, 2005). **Handbook of Economic Forecasting**, PIER Working Paper No. 05-011; CFS Working Paper No. 2005/08. Disponível em: <<http://ssrn.com/abstract=673405>>.

ANDERSEN, Torben G.; BOLLERSLEV, Tim; CHRISTOFFERSEN, Peter; DIEBOLD, Francis, X. Practical Volatility and Correlation Modeling for Financial Market Risk Management. In CAREY, M.; STULZ, R. **Risks of Financial Institutions**, University of Chicago Press, 2005. p. 41. Disponível em: <<http://www.nber.org/papers/w11069>>.

ANDO, Larissa; LOPES, Célia Mendes C. **Estudo sobre o uso de Value at Risk para gestão de risco**. São Paulo: Universidade Presbiteriana Mackenzie, [2009 ou 2010]. (Estudo Técnico).

BOLLERSLEV, Tim, 1986. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, **Journal of Econometrics**, 31:307-327, 1986.

CARDOSO, Mayra M. **Simulação de modelos GARCH para séries temporais univariadas de demanda de energia elétrica para consumidores livres em regime de curto prazo**. 2005. 175 p. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Itajubá, Minas Gerais, 2005.

COSTA, Paulo Henrique S.; BAIDYA, Tara K. N.; CALVANO, João **Modelos de Volatilidade: Estimação com parâmetros variáveis no tempo**. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008. (Estudo Técnico)

ENGLE, R. F. (2004), Risk and Volatility: Econometric Models and Financial Practice, **The American Economic Review** 94(3), 405-420.

FAVA, Renato F. **Modelos univariados e multivariados para cálculo do valor em risco de um portfólio**. 2010. 122 p. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

FIGLEWSKI, Stephen, Forecasting Volatility. **Financial Markets Institutions and Instruments**, Vol. 6 No. 2, 1997. Disponível em: <http://ssrn.com/abstract=8312>.

GABE, J.; PORTUGAL, Marcelo S. **Volatilidade implícita versus volatilidade estatística: um exercício utilizando opções e ações da Telemar S.A.** Rio Grande do Sul: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2003.(Estudo Técnico)

GALDI, F. C.; PEREIRA, L. M. Valor em Risco (VaR) Utilizando Modelos de Previsão de Volatilidade: EWMA, GARCH e Volatilidade Estocástica. **Brazilian Business Review**, v.4, n.1, p. 74-95, jan./abr., 2007.

HAMILTON, James D., Time series analysis, **Princeton University Press**, 1994

HENDRICKS, Darryll Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data (April 1996). **Economic Policy Review**, Vol. 2, No. 1, 1996. Disponível em: <http://ssrn.com/abstract=1028807>.

J.P. MORGAN. 1996. **RiskMetrics-technical manual**. Fourth ed.

LO, Michael S. **Generalized autoregressive conditional heterocedastic time series model**. 2003. 61 p. Dissertation (Master) – Departament of Statistic and Actuarial Science, Simon Fraser University, Vancouver, 2003.

MARKOWITZ, H. M. Portfolio selection. **The Journal of Finance**, v.7, n.1, p.37-71, Mar. 1952.

MOLLICA, Marcos Antonio **Uma avaliação de modelos de value-at-risk: comparação entre métodos tradicionais e modelos de variância condicional**. 1999. 92 p. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Economia, Administração e Contabilidade, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

MORETTIN, Pedro A. **Econometria financeira – Um curso em séries temporais e financeiras**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2008.

NASCIMENTO, William L. **Introdução à precificação de opções europeias e análise de volatilidade implícita**. 2008. 61 p. Monografia (Bacharel em Matemática Aplicada e Computacional e Habilitação em Estatística Econômica) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

PEREIRA, Luiz C. **Os fundos de ações e a alocação ótima de ativos proposta por Markowitz**. 2007. 68 p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estácio de Sá, Rio de Janeiro, 2007.

PEREIRA, Pedro Luiz V., **Estimação de volatilidades**, <http://www.RiskTech.com>

PERRELLI, Roberto Introduction to ARCH & GARCH models, **University of Illinois** Optional TA Handout, 2001: 1-7 p.

PINDYCK, Robert S.; RUBINFELD, Daniel L. **Econometria – Modelos & Previsões**. 4. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2004.

POON, Ser-Huang; GRANGER, Clive W. Forecasting Volatility in Financial Markets: a review. **Journal of Economic Literature**, 41, no. 2, 2003, 478-539 p.

REIDER, Rob **Volatility Forecasting I: GARCH Models**. [New York University], 2009.

RIBEIRO, Paulo de T. **Avaliação empírica dos modelos de var (value-at-risk)**. 2006. 87 p. Monografia (Graduação em Engenharia de Produção) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

SABINO, Pedro A. A.; BRESSAN Aureliano A. **Avaliação do desempenho preditivo de modelos para a volatilidade: um estudo para o mercado acionário brasileiro entre 2000 e 2009**. Universidade Federal de Minas Gerais, [2010]. (Estudo Técnico)

SILVA, Lissandra Galego S. **Análise de portfólio – Riscos e efeitos da diversificação**. Espírito Santo: Faculdade Espírito-santense de Administração, [200-?]. (Estudo Técnico)

SOUZA, Luiz Alvares R. de S.; SILVA, Marcos E. **Teoria de valores extremos para cálculo de VaR**. São Paulo: Universidade de São Paulo. 1999. (Estudo Técnico)