

ELEANDRO MARCONDES DE ALMEIDA

**ANÁLISE DA ROBUSTEZ DE SISTEMAS
ELÉTRICOS DURANTE O PLANEJAMENTO
DA EXPANSÃO DE REDES DE TRANSMISSÃO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
à Escola de Engenharia de São Carlos, da
Universidade de São Paulo

Curso de Engenharia Elétrica com ênfase em
Sistemas de Energia e Automação

ORIENTADOR: Prof. Dr. Eduardo Nobuhiro Asada

São Carlos
2013

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

A447a

Almeida, Eleandro Marcondes de
Análise da robustez de sistemas elétricos durante o
planejamento da expansão de redes de transmissão /
Eleandro Marcondes de Almeida; orientador Eduardo
Nobuhiro Asada. São Carlos, 2013.

Monografia (Graduação em Engenharia Elétrica com
ênfase em Sistemas de Energia e Automação) -- Escola de
Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo,
2013.

1. Planejamento da Expansão de Redes de
Transmissão. 2. Robustez de Sistemas Elétricos. 3.
Incerteza. 4. Risco. 5. Programação Linear Inteira
Mista. 6. Programação Binível. I. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Nome: Eleandro Marcondes de Almeida

Título: “Análise da robustez de sistemas elétricos durante o planejamento da expansão de redes de transmissão”

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado
em 19 / 11 / 2013,

com NOTA 9,8 (nove , oito), pela Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Eduardo Nobuhiro Asada - (Orientador - SEM/EESC/USP)

*Prof. Associado João Bosco Augusto London Júnior -
(SEL/EESC/USP)*

Dr. Guilherme Guimarães Lage - (Pós-Doutorando - SEL/EESC/USP)

Coordenador da CoC-Engenharia Elétrica - EESC/USP:
Prof. Associado Homero Schiabel

Agradecimentos

Agradeço a meus pais, **Eleodoro** e **Sandra**, e a meus avós, **Geraldo**, **Terezinha**, **Sebastião** e **Rita**, pela educação, pelo apoio e pela proteção que me deram para chegar aonde estou.

Agradeço a meus irmãos **Lucas**, **Matheus** e **Gustavo**, por aceitarem minha tutela como irmão mais velho.

Agradeço a meus antigos professores pela confiança depositada em mim e pela dedicação no ensino e na transmissão de conhecimento.

Agradeço a meus professores da graduação pela contribuição na minha formação como Engenheiro.

Agradeço à professora **Maristela dos Santos** por despertar em mim o interesse em pesquisa operacional.

Agradeço ao professor **Eduardo Asada** pela orientação neste trabalho, pelo estímulo à pesquisa e pelo conhecimento e experiência transmitidos ao longo dos três anos de trabalho.

Agradeço aos professores **José Manuel** e **Natalia Alguacil** pela ajuda que me deram durante minha estadia em Ciudad Real.

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro concedido durante os meus estudos.

Agradeço a todos os meus amigos, especialmente aos meus quase irmãos **Israel** e **Emerson**, pelos momentos juntos, sejam estudando nos finais de semana ou no almoço de domingo.

E, por fim, porém não menos importante, agradeço a meu anjo **Marilia** por me zelar e poder compartilhar minhas alegrias e conquistas.

Eleandro Marcondes de Almeida

Sumário

Agradecimentos	1
Sumário	2
Lista de Figuras	4
Lista de Tabelas	6
Lista de Siglas	7
Resumo	8
Abstract	9
1 Introdução	10
2 Análise Estática de Sistemas Elétricos	14
2.1 Modelagem do Sistema Elétrico	14
2.1.1 Formulação Matricial ($I = YE$)	18
2.2 Fluxo de Carga	20
2.2.1 Fluxo de Carga pelo Método de Newton	22
2.2.2 Fluxo de Carga pelo Método Desacoplado	23
2.2.3 Fluxo de Carga pelo Método Desacoplado Rápido	25
2.3 Resultados Obtidos	26
2.4 Conclusão	33
3 Modelos do Problema de Expansão de Redes de Transmissão de Sistemas Elétricos	34
3.1 Modelos clássicos do PERT	35
3.1.1 Modelo de Transportes	35
3.1.2 Modelo CC	37
3.2 Otimização Inteira	39
3.2.1 Definição de Problema Linear Inteiro Misto	39
3.2.2 Resolução de um Problema Inteiro Misto	40
3.2.3 Condição de Optimalidade Implícita	40
3.3 Método <i>Branch and Bound</i>	41
3.3.1 Árvore Enumerativa	42
3.3.2 Formulação Genérica	44

3.3.3	Escolha da Variável para Ramificação	45
3.3.4	Escolha do Subproblema	46
3.4	Estudos de Meta-heurísticas	47
3.4.1	Algoritmo Heurístico Construtivo (AHC)	48
3.4.2	<i>Simulated Annealing</i>	49
3.4.3	Algoritmos Genéticos	50
3.4.4	Busca Tabu	51
3.5	Metodologias Empregadas para Resolução de Problema PERT	53
3.5.1	Método Exato: Método <i>Branch and Bound</i>	53
3.5.2	Método Meta-heurístico: Busca Tabu	55
3.6	Resultados	57
4	Análise da Vulnerabilidade de Redes de Transmissão	60
4.1	Introdução	60
4.2	Novo Modelo - Considerando Contingências nas Linhas	60
4.2.1	Abordagem da Otimização Robusta	62
4.2.2	Abordagem da Otimização Estocástica	62
4.2.3	Abordagem da Otimização por Risco	63
4.2.4	Comparação entre as Abordagens	64
4.3	Problema Binível do Planejamento da Expansão com Restrição de Vulnerabilidade	66
4.3.1	Primeira Versão - Problema com 4 níveis não linear	68
4.3.2	Segunda Versão - Problema com 4 níveis linear	70
4.3.3	Terceira Versão - Problema com 4 níveis e nível 3 dual não linear	72
4.3.4	Quarta Versão - Problema com 4 níveis e nível 3 dual linearizado	75
4.3.5	Quinta Versão - Problema com 2 Níveis	78
4.4	Metodologia de Solução	81
4.5	Resultados Numéricos	83
4.5.1	Validação do Problema Binível	83
4.5.2	Avaliação do Parâmetro β	88
4.6	Conclusão	90
5	Índices de Robustez e de Vulnerabilidade	91
5.1	Definição dos Índices	91
5.2	Resultados Obtidos	92
5.3	Conclusão	93
6	Conclusão	94
Referências Bibliográficas		95
A Linearização de Produto entre Variável Contínua e Variável Binária		97
B Dados dos Sistemas Elétricos		98
B.1	Sistema 6 Barras - Garver [6]	98
B.2	Sistema IEEE 24 Barras	99

Listas de Figuras

1.1	Projeção do Consumo de Energia Elétrica no Brasil (Adaptado de [1])	11
1.2	Projeção do Aumento Percentual Anual do Consumo de Engenharia Elétrica no Brasil (Adaptado de [1])	11
2.1	Modelos Trifásico (a) e Unifilar (b) (Adaptado de [5])	15
2.2	Esquema de um Sistema Elétrico	16
2.3	Modelo de Geradores e cargas	16
2.4	Modelo de Elementos <i>Shunt</i>	16
2.5	Modelo Equivalente π de Linhas de Transmissão	17
2.6	Transformador Genérico ($t = ae^{j\phi}$)	18
2.7	Convenção de Sinal para fluxos de potência ativa e reativa	20
2.8	Fluxograma do Algoritmo de Método Desacoplado	24
2.9	Comportamento da Rede Elétrica IEEE-30 barras em função do aumento de demanda de energia	29
2.10	Estimação da Margem de Carregamento do Sistema IEEE-30 barras	30
2.11	Comportamento da Rede Elétrica IEEE-30 barras sem linha 2-5 em função do aumento da demanda de energia	31
2.12	Comportamento da Rede Elétrica IEEE-30 barras sem linha 1-2 em função do aumento da demanda de energia	32
2.13	Sobreposição dos Gráficos	32
3.1	Capacidade Máxima de Fluxo (Adaptado de [6])	36
3.2	Exemplo de uma Árvore	42
3.3	Árvore Enumerativa	43
3.4	Separação do Problema Original	45
3.5	Buscas na Árvore Enumerativa	47
3.6	Recombinação de um Simples Ponto	51
3.7	Fluxograma do Algoritmo <i>Branch and Bound</i>	54
4.1	Horizonte de Planejamento	61
4.2	Resumo do processo de obtenção do problema PERT de dois níveis	81
4.3	Sistema 6 Barras Modificado	84
4.4	Evolução do Algoritmo de Resolução	87
4.5	Evolução do Risco Calculado	88
4.6	Avaliação do Parâmetro β com $C_T^L = \$11\,000$	89
4.7	Avaliação do Parâmetro β com $C_T^L = \$19\,000$	89
4.8	Avaliação do Parâmetro β com $C_T^L = \$27\,000$	90

5.1	Preço de penalização mínimo	91
B.1	Sistema de 6 Barras	98

Listas de Tabelas

2.1	Resultado: Estado do Sistema	27
2.2	Resultado: Fluxo de Potência Ativa	28
3.1	Tempo de execução (em ms)	58
4.1	Exemplo de decisão sobre evento incerto	64
4.2	Dados de Linhas - Sistema 6 Barras Modificado	84
4.3	Carga Não Atendida Mínima para $K = 2$	85
4.4	Planos de Expansão	85
4.5	Arrependimentos $A(s, v)$ para $K = 1$	86
5.1	Variação dos Índices de Vulnerabilidade e de Robustez com $C_T^L = \$19\,000$ e $\$27\,000$	93
B.1	Dados dos Ramos - 6 Barras	98
B.2	Dados das Barras - IEEE 24 Barras	99
B.3	Dados das Barras - IEEE 24 Barras (cont.)	99
B.4	Dados dos Ramos - IEEE 24 Barras	99

Listas de Siglas

AHC	Algoritmo Heurístico Construtivo
CA	Corrente Alternada
CC	Corrente Contínua
EAT	Extra Alta Tensão (entre 230 kV e 750 kV)
EPE	Empresa de Pesquisa Energética
FPC	Fluxo de Potência Continuado
GAMS	<i>General Algebraic Modeling System</i>
IR	Índice de Robustez
IV	Índice de Vulnerabilidade
LCK	Lei de Correntes de Kirchhoff
LTK	Lei de Tensões de Kirchhoff
MME	Ministério de Minas e Energia
PL	Problema Linear
PLIM	Problema Linear Inteiro Misto
PMC	Ponto de Máximo Carregamento
PNI	Problema do Nível Inferior
PNS	Problema do Nível Superior
PNSM	Problema do Nível Superior Modificado
PERT	Planejamento da Expansão de Redes de Transmissão
ONS	Operador Nacional do Sistema Elétrico
UAT	Ultra Alta Tensão (mais de 750 kV)

Resumo

Este trabalho de conclusão de curso visa à elaboração de uma metodologia para analisar a robustez de sistemas elétricos de potência durante o planejamento da expansão da sua rede de transmissão. Tal planejamento se faz necessário para poder satisfazer as exigências da crescente demanda do sistema elétrico. Redes elétricas não robustas estão vulneráveis a contingências na sua estrutura, os quais podem ocasionar desligamentos de partes do sistema, comprometendo, assim, o fornecimento adequado de energia elétrica aos consumidores.

O problema tradicional de planejamento da expansão de redes de transmissão não leva em consideração possíveis contingências, não sendo possível avaliar e melhorar a segurança do sistema elétrico. Um novo modelo que considere a vulnerabilidade das novas configurações do sistema torna-se necessário para que se possa garantir sua segurança e robustez.

Além de estudar as metodologias clássicas do problema em questão, baseadas em problemas lineares inteiros mistos, e sua resolução (Método *Branch and Bound* e Busca Tabu), esse trabalho também propõe e avalia um novo modelo de otimização binável inteiro misto que incorpora a minimização da vulnerabilidade da rede aos modelos clássicos de expansão. O estudo detalhado desse novo modelo irá proporcionar modos de avaliar e quantificar a robustez de redes de transmissão.

Palavras-chave: Planejamento da Expansão de Redes de Transmissão, Robustez de Sistemas Elétricos, Incerteza, Risco, Programação Linear Inteira Mista, Programação Binável.

POWER SYSTEM ROBUSTNESS ANALYSIS DURING TRANSMISSION NETWORK EXPANSION PLANNING

Abstract

This work aims at the development of a methodology to analyze the power systems robustness during its transmission network expansion planning. This planning is necessary in order to satisfy the increasing power load. Not-robust networks are vulnerable against deliberate attacks to its structure, which can cause blackouts and compromise the adequate supply of electricity to the final consumers.

The traditional transmission network expansion planning problems do not include possible contingencies in the system. Thus, it is not possible to assess and improve the power system reliability. A new model that considers the new facilities vulnerability is required so that we can ensure its reliability and robustness.

Besides studying traditional expansion models, which are based on mixed integer linear problems, and solve them (using Branch and Bound and Tabu Search Methods), this work also proposes and evaluates a risk-based bilevel mixed integer optimization model that incorporates the minimization of the network vulnerability. The detailed study of this new model will provide ways to assess and quantify the network transmission robustness.

Keywords: Transmission Network Expansion Planning, Power Systems Robustness, Uncertainty, Risk, Mixed-Integer Linear Programming, Bilevel Programming.

Capítulo 1

Introdução

A rede de transmissão de energia elétrica é o conjunto de equipamentos responsáveis por transportar a energia elétrica desde as usinas geradoras até os centros consumidores. Desempenha um papel muito importante no sistema elétrico de potência, já que universaliza o uso da energia elétrica, pois pode disponibilizá-la para qualquer centro consumidor.

O bom funcionamento de uma rede de transmissão é crucial para o atendimento da demanda da energia elétrica e está sujeito a diversas modificações no sistema, tais como, desligamentos de equipamentos, aumento de demanda, curtos circuitos, etc.

Além disso, sabe-se que o aumento do consumo de energia elétrica é um processo natural no crescimento econômico de um país, pois esse tipo de energia é um dos mais eficientes e práticos para a utilização. Cabe aos profissionais e pesquisadores da área de sistemas elétricos de potência, garantir as melhores condições de fornecimento dessa energia, não inibindo o crescimento da demanda e, consequentemente, o desenvolvimento da nação.

No Brasil, por exemplo, segundo o estudo da demanda do sistema, que consta no relatório de Projeção da Demanda de Energia Elétrica para os Próximos 10 Anos (2013-2022), feito pela Empresa de Pesquisa Energética (EPE) [1], há uma previsão de crescimento do consumo de energia elétrica de aproximadamente 4% ao ano na próxima década. Segundo também esse estudo, em 2011, houve um consumo da ordem de 430 TWh de energia elétrica e que no ano de 2022, se prevê um consumo anual de cerca de 670 TWh, correspondendo a um aumento de mais de 50% da carga.

A projeção do aumento do consumo de energia elétrica apresentada nesse estudo pode ser visualizada no gráfico da Figura 1.1 a seguir.

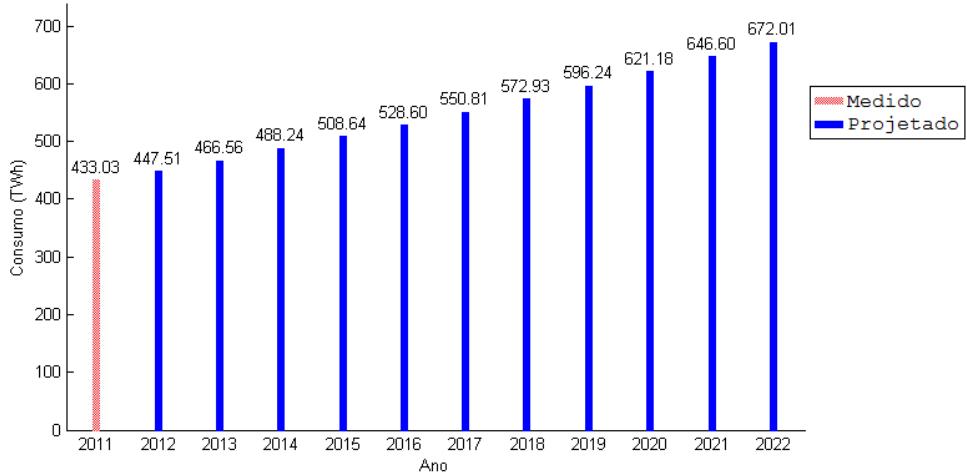


Figura 1.1: Projeção do Consumo de Energia Elétrica no Brasil (Adaptado de [1])

Já no gráfico ilustrado na Figura 1.2, é possível verificar como se comportará ano a ano o aumento percentual do consumo de energia.

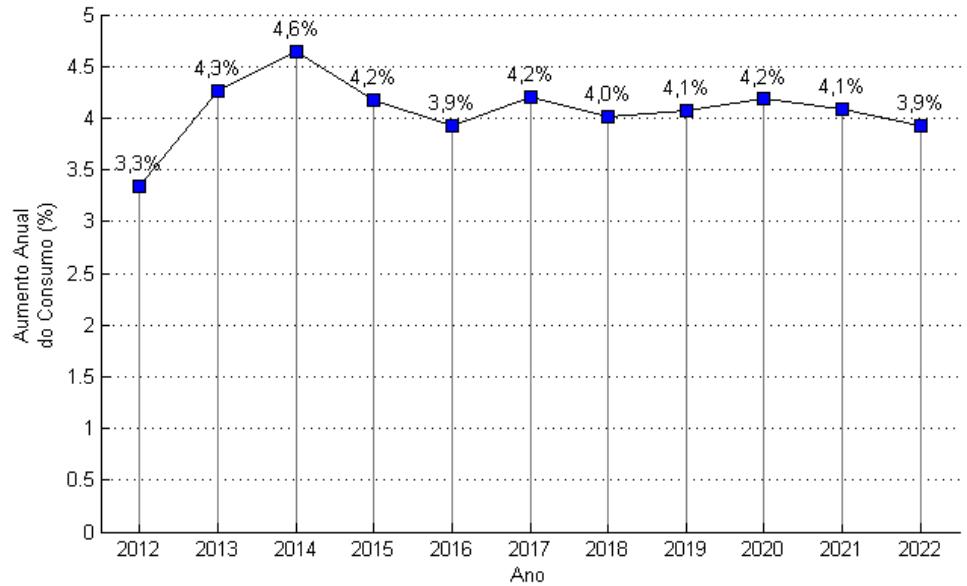


Figura 1.2: Projeção do Aumento Percentual Anual do Consumo de Engenharia Elétrica no Brasil (Adaptado de [1])

Com o crescimento da demanda de energia elétrica vem o compromisso do seu fornecimento contínuo e de qualidade, o qual deve ser assumido pelos profissionais e pesquisadores da área de sistemas elétricos, com intuito principal garantir a melhor operação do sistema. Pode-se definir nesta área de pesquisa, dois tipos de planejamento do sistema elétrico:

- **Planejamento da Operação:** no qual visa-se determinar as condições de estabilidade do sistema, além dos ajustes dos controles do circuito de maneira a garantir o melhor desempenho dos elementos do sistema, balanceando a oferta e a demanda de energia.

No Brasil, esse planejamento é realizado pelo Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS) em diversos horizontes (curto, médio e longo prazos).

- **Planejamento da Expansão:** o qual avalia as condições do sistema elétrico dentro de um horizonte de planejamento (geralmente longo) e busca realizar modificações na sua

estrutura, objetivando suprir o crescimento da demanda por energia elétrica. Minimiza-se neste planejamento o custo total de novas instalações e de alterações de componentes na rede elétrica. Subdivide-se em planejamento da expansão do sistema de geração, que busca aumentar o nível de geração de energia elétrica, e em planejamento da expansão do sistema de transmissão, cujo intuito é expandir a área com acesso à energia elétrica e melhorar o desempenho da rede existente.

No Brasil, a EPE, vinculada ao Ministério de Minas e Energia (MME), é a responsável pela elaboração de estudos para subsidiar o planejamento da expansão do setor elétrico.

Este trabalho abordará especificamente técnicas de otimização e análise de robustez durante o planejamento da expansão do sistema de transmissão.

A maior exigência por parte de órgãos reguladores quanto à boa qualidade do fornecimento de energia elétrica é um papel relevante para a elaboração do planejamento de expansão de sistemas elétricos. Outro motivo relevante para a expansão do sistema é a ampliação da área de ocupação da rede, possibilitando a conexão de mais unidades geradoras e mais centros consumidores, estimulando assim a competitividade pela venda e compra da energia.

Além disso, estudos apontam que a expansão do sistema de geração, com o intuito aumentar a oferta de energia para equilibrar-se com a demanda, sem realizar devidas modificações estruturais e operacionais no sistema de transmissão e distribuição, pode levar o sistema elétrico a operar em um estado instável, próximo ao seu carregamento máximo, no qual a propensão a desligamentos é relativamente alta [2].

Esse trabalho tem como objetivo principal a elaboração de uma metodologia para avaliação da robustez de um sistema elétrico durante o planejamento da expansão de sua rede de transmissão. De maneira geral, busca-se determinar um índice de robustez da rede a partir de um modelo do problema do planejamento de expansão que minimize a vulnerabilidade da rede.

Segue um resumo de todas as etapas desenvolvidas neste projeto, a título de contextualização do problema estudado.

- 1^a ETAPA: Com o intuito de verificar a necessidade do planejamento da expansão de redes de transmissão, foi realizada a modelagem e a determinação do fluxo de potência estático de sistemas elétricos. Nessa etapa, desenvolveu-se em linguagem C a implementação do Método Desacoplado Rápido [3] para resolução de problemas desse tipo. Utilizou-se o pacote *CSparse* [4] visando aproveitar as características esparsas das matrizes que descrevem o comportamento do fluxo de potência em redes de sistemas elétricos.

Tendo em mãos o programa de cálculo de Fluxo de Potência, buscou-se determinar o ponto máximo de carregamento do sistema IEEE 30 Barras, submetendo-o a um aumento proporcional de carga e geração sem alterar a estrutura da sua rede.

- 2^a ETAPA: Nessa etapa, estudaram-se os diversos modelos do problema da expansão de redes de transmissão, bem como os métodos de resolução. Como, de maneira simplificada e concisa, os modelos podem ser escritos sob a forma de problemas lineares inteiros mistos (PLIM), foram estudados métodos exatos e meta-heurísticos para sua resolução.

Dentre esses métodos de resolução, avaliaram-se o Método *Branch and Bound* e a meta-heurística Busca Tabu. Após realizar a implementação desses métodos em linguagem C++,

estudaram-se seus desempenhos para a resolução do problema tradicional de planejamento da expansão da rede de transmissão.

- 3^a ETAPA: A incorporação da minimização da vulnerabilidade da rede de transmissão no problema de expansão é proposta nesta terceira etapa. Um novo modelo construído sob os moldes de um problema de otimização binível inteiro misto é formulado e estudado, com o intuito de extrair características da robustez da rede de transmissão.

Para resolução desse novo modelo, se estudou a técnica de decomposição de *Benders* aplicada a problemas biníveis. Tal metodologia foi implementada em linguagem C++, com chamadas de rotinas de resolução de PLIM através da ferramenta de otimização GAMS.

Capítulo 2

Análise Estática de Sistemas Elétricos

O objetivo desse capítulo é, a primeiro momento, detalhar alguns métodos numéricos para a determinação do estado de um sistema energético. Essa tarefa consiste basicamente em encontrar os valores dos parâmetros elétricos de cada equipamento da rede. Para tanto, na primeira seção será mostrada a modelagem empregada para representar cada equipamento do sistema e, em seguida, na segunda seção, será formulado o problema de fluxo de potência e estudada uma metodologia para sua resolução.

Por fim, objetiva-se também abordar conceitos de fluxo de potência continuado (FPC) e detalhar um procedimento empregado para calculá-lo. Com o fluxo de potência continuado será possível evidenciar a capacidade de transmissão de uma rede elétrica e, dessa maneira justificar o planejamento da expansão de redes de transmissão.

2.1 Modelagem do Sistema Elétrico

O sistema elétrico de potência pode ser dividido basicamente em três setores diferentes. O primeiro é o **sistema de geração**, o qual é responsável por converter a energia nas suas diversas formas (mecânica, solar, nuclear, etc.) em energia elétrica para ser injetada no sistema elétrico. Em seguida, essa energia é transportada desde o sistema de geração até os centros consumidores através do **sistema de transmissão**. Ao chegar aos centros consumidores, a energia é então distribuída para os consumidores finais pelo **sistema de distribuição**.

Tipicamente esses sistemas utilizam a configuração de três fases para o fornecimento de energia elétrica. Essa configuração apresenta a vantagem de a potência entregue a cargas balanceadas ser constante ao longo do tempo, não causando assim danos nos componentes mecânicos do sistema [5]. Entretanto, por simplicidade, utiliza-se um modelo unifilar para representar um sistema elétrico, no qual a potência elétrica flui por únicas linhas. Essa simplificação é possível sempre quando é assumido que o sistema trifásico está equilibrado e operando em regime senoidal permanente.

Abaixo são ilustrados na Figura 2.1 os dois modelos de representação de um sistema, sendo o primeiro, Figura 2.1.(a), o modelo convencional de um sistema trifásico e o segundo, Figura 2.1.(b), representa o modelo unifilar simplificado da rede.

Usa-se na literatura a nomenclatura *barramento* (*barra* ou *nó*) para designar um elo entre os equipamentos da rede. A principal característica de um barramento é a sua impedância desprezível em relação às dos outros elementos da rede.

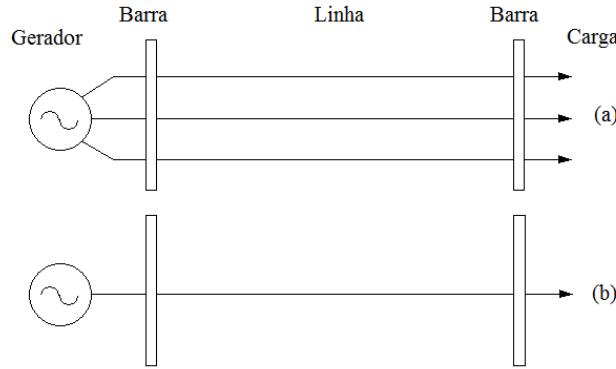


Figura 2.1: Modelos Trifásico (a) e Unifilar (b) (Adaptado de [5])

Na modelagem básica, a cada barra estão associadas quatro variáveis, duas de controle e duas dependentes. Dada uma barra k , têm-se as seguintes grandezas elétricas como variáveis:

- V_k : magnitude da tensão nodal;
- θ_k : ângulo de fase da tensão nodal;
- P_k : geração líquida de potência ativa;
- Q_k : injeção líquida de potência reativa.

Na análise de um sistema, dependendo de quais grandezas são estabelecidas como fixas (variáveis de controle) para uma barra, pode-se classificá-la em três grupos principais:

- Barras PQ - são barras associadas às cargas. Para esse tipo de barras são fixos os valores de potência ativa e reativa e necessita-se calcular os valores de V e θ .
- Barras PV - são barras associadas à geração, cujos parâmetros para serem calculados são θ e Q , já que os valores de potência ativa e o módulo da tensão nodal são constantes.
- Barras $V\theta$ ou Barras de Referência - como o próprio nome já diz, desempenham a função de fornecer uma referência angular às outras barras, pois possuem o módulo e a fase da tensão nodal constantes. Determinam-se para esse tipo de barras as grandezas P e Q .

Outra função das barras de referência é a de fechamento do balanço de potência do sistema, pois como a modelagem geralmente adotada não leva em consideração as perdas de transmissão existentes, ao final da determinação do estado da rede, elas estarão embutidas no valor da potência injetada nas barras de referência estabelecidas. Devido a esta função esse tipo de barra também pode ser denominada Barra *Swing* ou Barra *Slack*.

Os outros elementos do sistema de energia podem ser divididos em dois grupos quanto às ligações de seus terminais:

- Elementos *Barra - Terra*: São elementos ligados diretamente a uma barra e o nó de terra.
Ex: Geradores, Carga e Elementos *Shunts*.
- Elementos *Barra - Barra*: Elementos ligados entre duas barras distintas da rede.
Ex: Linhas de Transmissão, Transformadores em-fase e Defasadores.

A Figura 2.2 ilustra um sistema elétrico simplificado e seus elementos:

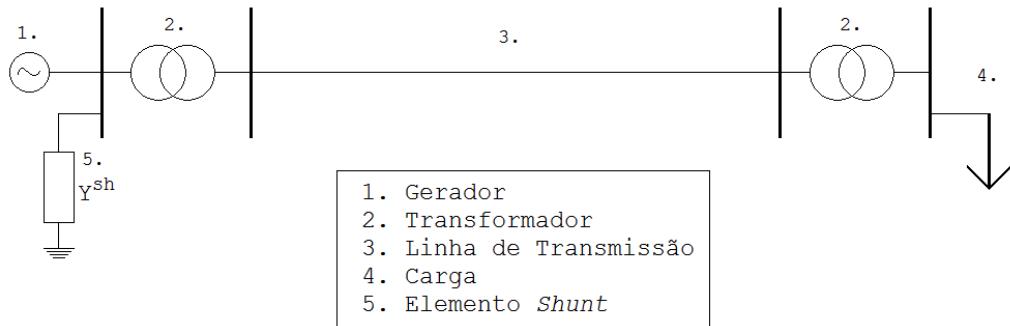


Figura 2.2: Esquema de um Sistema Elétrico

O gerador, na modelagem estática do sistema, é representado apenas como uma injeção de potência ativa e reativa no sistema. De maneira análoga, são modeladas as cargas do sistema. Estas são representadas apenas como consumidores de potência ativa e reativa.

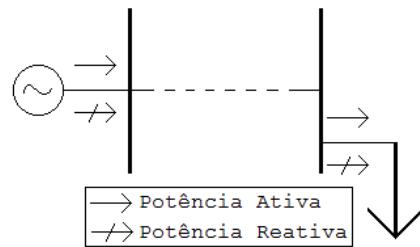


Figura 2.3: Modelo de Geradores e cargas

Os elementos *shunts* são modelados como elementos de admitância constante. Como tipicamente são banco de capacitores ou banco de reatores não apresentam parte resistiva, sendo representados por uma susceptância $j b_k^{\text{sh}}$ que injeta ou consome potência reativa do sistema.

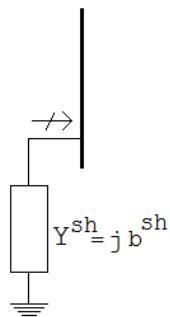


Figura 2.4: Modelo de Elementos *Shunt*

Para modelagem de uma linha de transmissão é usado o Modelo Equivalente π (Figura 2.5). Nesse modelo têm-se uma reatância $j b_{km}^{\text{sh}}$ do tipo capacitiva e uma impedância série $z_{km} = r_{km} + j x_{km}$.

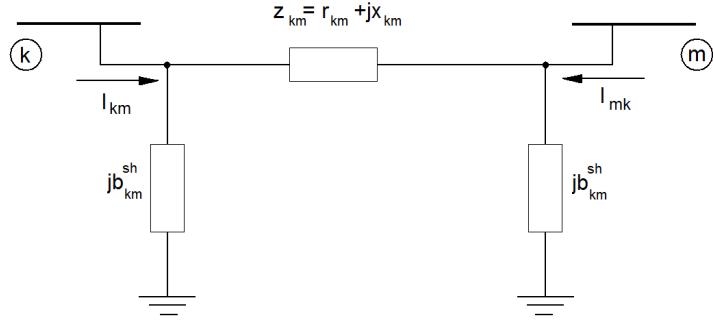


Figura 2.5: Modelo Equivalente π de Linhas de Transmissão

Nesse modelo, a admitância série da linha y_{km} tem valor inverso ao da impedância série z_{km} . Considerando que $y_{km} = g_{km} + jb_{km}$, então:

- $g_{km} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2}$ é chamada de condutância série da linha de transmissão.
- $b_{km} = -\frac{x_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2}$ é chamada de susceptância série da linha de transmissão.

Para se determinar o fluxo de potência em uma linha de transmissão, primeiramente, determina-se a corrente I_{km} que flui do barramento k em direção ao barramento m . Esta é calculada a partir das tensões E_k e E_m e dos parâmetros da linha:

$$I_{km} = y_{km}(E_k - E_m) + jb_{km}^{sh}E_k \quad (2.1)$$

em que as tensões nodais E_k e E_m , são escritas nas seguintes formas fasoriais:

$$E_k = V_k e^{j\theta_k} \text{ e } E_m = V_m e^{j\theta_m} \quad (2.2)$$

A potência que flui da barra k para a barra m é calculada por $S_{km} = E_k I_{km}^*$. A partir do modelo equivalente π , os fluxos de potência ativa e reativa são determinados pelas seguintes expressões:

$$P_{km} = \operatorname{Re}(S_{km}) = g_{km}V_k^2 - g_{km}V_k V_m \cos(\theta_{km}) - b_{km}V_k V_m \sin(\theta_{km}) \quad (2.3)$$

$$Q_{km} = \operatorname{Im}(S_{km}) = -(b_{km} + b_{km}^{sh})V_k^2 + b_{km}V_k V_m \cos(\theta_{km}) - g_{km}V_k V_m \sin(\theta_{km}) \quad (2.4)$$

em que $\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$ é a diferença angular entre os barramentos k e m e $\operatorname{Re}(S_{km})$ indica a parte real da potência complexa S_{km} e $\operatorname{Im}(S_{km})$, a parte imaginária.

A Figura 2.6 a seguir mostra a modelagem de um transformador genérico cuja relação de transformação é $t = ae^{j\phi}$. Esse modelo consiste em um transformador ideal em série com uma admittância y_{km} .

A relação de transformação t é a razão entre as tensões nodais de entrada e saída do transformador, isto é:

$$\frac{E_p}{E_k} = t = ae^{j\phi} \quad (2.5)$$

Considerando que no transformador ideal não há perdas na potência complexa, tem-se a seguinte relação:

$$E_k I_{km}^* = E_p (-I_{mk})^* \quad (2.6)$$

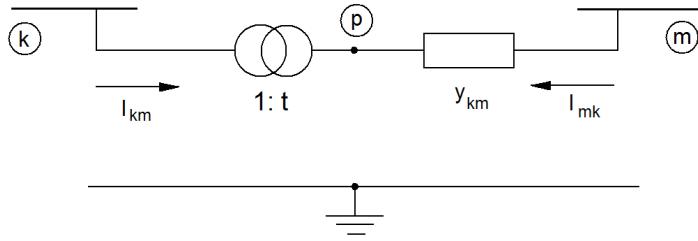


Figura 2.6: Transformador Genérico ($t = ae^{j\phi}$)

Reajandando a equação (2.6) e levando em conta a equação (2.5), obtém-se a seguinte relação:

$$\frac{I_{km}}{I_{mk}} = -t^* = -ae^{-j\phi} \quad (2.7)$$

Uma vez determinada a relação entre as correntes, observando a Figura 2.6, pode-se evidenciar que:

$$I_{mk} = y_{km}(E_m - E_p) \quad (2.8)$$

Substituindo a relação de transformação de tensões (2.5) na equação (2.8) acima, obtém-se:

$$I_{mk} = y_{km}E_m - ae^{j\phi}y_{km}E_k \quad (2.9)$$

E substituindo a relação de transformação de correntes (2.7) em (2.9), obtém-se:

$$I_{km} = -ae^{-j\phi}y_{km}E_m + a^2y_{km}E_k \quad (2.10)$$

Com essas expressões para as correntes no transformador, os fluxos de potência ativa e reativa são determinados conforme determinados para a linha de transmissão e são dados pelas expressões abaixo:

$$P_{km} = g_{km}(aV_k)^2 - g_{km}(aV_k)V_m \cos(\theta_{km} + \phi) - b_{km}(aV_k)V_m \sin(\theta_{km} + \phi) \quad (2.11)$$

$$Q_{km} = -b_{km}(aV_k)^2 + b_{km}(aV_k)V_m \cos(\theta_{km} + \phi) - g_{km}(aV_k)V_m \sin(\theta_{km} + \phi) \quad (2.12)$$

Observe que ao substituir $a = 1$ e $\phi = 0$, obtém-se as formulações de fluxo de potência ativa e reativa em linhas de transmissão. A única diferença está no fato de que o fluxo de potência reativa em linhas de transmissão dependem ainda do parâmetro shunt jb_{km}^{sh} , que não está presente na expressão (2.12).

2.1.1 Formulação Matricial ($I = YE$)

Uma vez modelados os equipamentos do sistema elétrico, necessita-se representar matricialmente a relação entre as correntes nos ramos e as tensões dos barramentos de um sistema, a fim de facilitar a implementação dos algoritmos de resolução do problema de fluxo de potência.

Seja a injeção líquida de corrente na barra k denotada por I_k . Esta pode ser obtida aplicando a Lei das Correntes de Kirchhoff:

$$I_k + I_k^{sh} = \sum_{m \in \Omega_k} I_{km} \quad k = 1, \dots, NB \quad (2.13)$$

sendo I_k^{sh} a corrente que flui o elemento *shunt* para barra k , NB o número total de barras do sistema e Ω_k , o conjunto das barras que estão conectadas ao barramento k .

A corrente I_{km} no ramo que une os nós k e m , seja o ramo uma linha de transmissão ou um transformador, é dada pela expressão geral:

$$I_{km} = (a_{km}^2 y_{km} + jb_{km}^{sh})E_k + (-a_{km}e^{-j\phi_{km}})E_m \quad (2.14)$$

Note que aqui, utilizam-se as notações a_{km} e ϕ_{km} para representar respectivamente o ângulo e a fase da relação de transformação do transformador inserido no ramo $k - m$.

Substituindo a expressão (2.14) na equação de I_k pode-se reescrevê-la como:

$$I_k = \left[jb_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} (jb_{km}^{sh} + a_{km}^2 y_{km}) \right] E_k + \sum_{m \in \Omega_k} (-a_{km}e^{j\phi_{km}} y_{km}) E_m \quad (2.15)$$

Na sua forma matricial, a equação (2.15) acima pode ser escrita como:

$$I = YE \quad (2.16)$$

em que:

- I é o vetor das injecções de corrente;
- E é o vetor das tensões nodais;
- $Y = G + jB$ é a matriz de admitância nodal. Sendo G e B matrizes reais denominadas Matriz de Condutâncias e Matriz de Susceptâncias, respectivamente.

Analizando a expressão (2.15), os elementos da matriz Y são dados por:

$$Y_{km} = -a_{km}e^{j\phi_{km}} y_{km} \quad (2.17)$$

$$Y_{kk} = jb_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} (jb_{km}^{sh} + a_{km}^2 y_{km}) \quad (2.18)$$

Considerando $Y_{km} = G_{km} + jB_{km}$ e $E_k = V_k e^{j\theta_k}$ têm-se as seguintes expressões para os fluxos de potência ativa e reativa numa barra k :

$$P_k = V_k \sum_{m \in \Omega_k^+} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \quad (2.19)$$

$$Q_k = V_k \sum_{m \in \Omega_k^+} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \quad (2.20)$$

em que $\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$ e Ω_k^+ é o conjunto formado pela barra k e por todas as barras do sistema que estão conectadas a essa barra k .

Essa forma matricial de representar os fluxos de potência nos ramos do sistema facilita a notação e auxilia na implementação dos métodos para resolução do problema de fluxo de carga, o qual será detalhado na próxima seção.

2.2 Fluxo de Carga

O cálculo do fluxo de carga (ou fluxo de potência) de um sistema elétrico consiste na determinação do estado da sua rede. Isso inclui determinar todos os parâmetros dos barramentos e o fluxo de potência ativa e reativa em cada um dos seus ramos. Neste trabalho é abordado a modelagem estática do sistema elétrico, no qual se modelam as relações entre os parâmetros elétricos a partir de equações e inequações algébricas. É uma modelagem válida desde que sejam desconsiderados os efeitos transitórios na rede.

As equações algébricas da modelagem estática são baseadas nas Leis Equivalentes de Kirchhoff para sistemas de energia [3]:

- **1^a Lei Equivalente de Kirchhoff:** As potências ativa e reativa injetadas numa barra do sistema devem ser iguais à soma algébrica das potências que fluem pelos componentes internos do sistema que possuam um dos terminais conectados a essa barra.

- **2^a Lei Equivalente de Kirchhoff:** Os fluxos de potência pelos componentes do tipo Barra - Barra são funções das tensões de seus terminais.

Matematicamente:

$$P_k = \sum_{m \in \Omega_k} P_{km}(V_k, V_m, \theta_k, \theta_m) \quad (2.21)$$

$$Q_k + Q_k^{sh}(V_k) = \sum_{m \in \Omega_k} Q_{km}(V_k, V_m, \theta_k, \theta_m) \quad (2.22)$$

em que $Q_k^{sh}(V_k)$ é a potência reativa fornecida por elementos *shunts* da barra k .

A Figura 2.7 mostra a convenção dos sinais dos fluxos de potência utilizada.

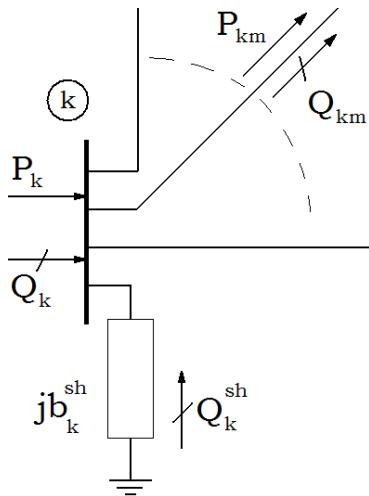


Figura 2.7: Convenção de Sinal para fluxos de potência ativa e reativa

As restrições de desigualdades algébricas na modelagem estática estão relacionadas com aspectos construtivos e econômicos da rede. As principais restrições apresentadas são as imposições de limites para o nível de tensão nas barras PQ da rede e para a injeção de potência reativa em

barras do tipo *PV*.

$$V_k^{MIN} \leq V_k \leq V_k^{MAX} \quad \text{Para barras PQ} \quad (2.23)$$

$$Q_k^{MIN} \leq Q_k \leq Q_k^{MAX} \quad \text{Para barras PV} \quad (2.24)$$

A determinação do estado da rede consiste em encontrar para cada barra os valores dos seus parâmetros variáveis, ou seja, calcular P_k e Q_k para barras $V\theta$, calcular Q_k e θ para barras PV e calcular V_k e θ para barras do tipo PQ .

Sejam $NV\theta$, NPV e NPQ os números de barras do tipo $V\theta$, PV e PQ , respectivamente. Logo, para a determinação do estado da rede é necessário resolver um sistema de equações não-lineares de dimensão $2 \cdot (NV\theta + NPV + NPQ)$, já que para cada barra é necessário determinar 2 parâmetros.

Esse sistema não-linear pode ser dividido em dois subsistemas:

Subsistema 1

Determinação dos parâmetros θ_k para as barras PV e PQ , e V_k para as barras PQ . Esse subsistema consiste em resolver o sistema de equações determinado pelas expressões de fluxo de potência na barra em análise:

$$P_k^{esp} - V_k \sum_{m \in \Omega_k^+} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) = 0 \quad \text{Para barras PQ e PV} \quad (2.25)$$

$$Q_k^{esp} - V_k \sum_{m \in \Omega_k^+} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) = 0 \quad \text{Para barras PQ} \quad (2.26)$$

em que P_k^{esp} e Q_k^{esp} são os valores de potência ativa e reativa especificados para a barra k .

Note que esse sistema possui $2 \cdot NPQ + NPV$ equações e esse mesmo número de incógnitas. Sua resolução será obtida através de métodos numéricos descritos a frente.

Subsistema 2

Cálculo dos parâmetros P_k e Q_k das barras de referência e Q_k das barras do tipo PV . A resolução desse subsistema, cuja dimensão é $2 \cdot NV\theta + NPV$, é mais trivial, pois basta apenas substituir os valores dos parâmetros encontrados anteriormente nas equações abaixo:

$$P_k = V_k \sum_{m \in \Omega_k^+} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \quad \text{Para barras de Referência} \quad (2.27)$$

$$Q_k = V_k \sum_{m \in \Omega_k^+} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \quad \text{Para barras de Referência} \quad (2.28)$$

e barras do tipo PV

Após resolvidos esses dois subsistemas, deve-se verificar as limitações encontradas na operação do sistema, tais como, a capacidade de suporte de fluxo de potência nas linhas e transformadores, os limites da injeção de potência reativa em barras associadas aos geradores (Barras PV) e os limites da tensão em barras relacionadas à carga (Barras PQ).

Caso uma dessas restrições seja infringida, uma maneira de eliminar esse problema é fixar

o valor da variável que foge dos limites estabelecidos e em seguida resolver os dois subsistemas novamente com essa nova alteração.

Serão apresentados agora em subseções alguns métodos numéricos para resolução do Subsistema 1, o qual pode ser escrito na sua forma matricial:

$$g(x) = 0 \quad (2.29)$$

em que:

- $x = \begin{bmatrix} \theta \\ V \end{bmatrix}$ é o vetor das variáveis;
- $g(x) = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{esp} - P(V, \theta) \\ Q^{esp} - Q(V, \theta) \end{bmatrix}$ é a função matricial não linear cujas raízes se desejam encontrar.

2.2.1 Fluxo de Carga pelo Método de Newton

O Método de Newton é um dos métodos numéricos mais utilizados para resolução de sistemas não-lineares graças à sua elevada ordem de convergência. É um método que obtém a solução iterativamente, gerando o vetor de solução x^{v+1} através da expressão (2.30) mostrada a abaixo. Uma vez assegurada a convergência, essa sequência de vetores convergirá para a solução do sistema.

$$x^{v+1} = x^v - [J(x^v)]^{-1}g(x^v) \quad (2.30)$$

em que $J(x^v)$ é a matriz jacobiana da função $g(x)$. No caso do subsistema 1 essa matriz é dividida em 4 submatrizes (H, M, N, L):

$$J(x^v) = \frac{\partial g}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\Delta P)}{\partial\theta} & \frac{\partial(\Delta P)}{\partial V} \\ \frac{\partial(\Delta Q)}{\partial\theta} & \frac{\partial(\Delta Q)}{\partial V} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial\theta} & \frac{\partial P}{\partial V} \\ \frac{\partial Q}{\partial\theta} & \frac{\partial Q}{\partial V} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

em que os elementos das submatrizes H, M, N e L são determinados pelas expressões:

$$\left. \begin{array}{l} H \\ M \\ N \\ L \end{array} \right\} \begin{array}{lcl} H_{km} & = & \frac{\partial P_k}{\partial\theta_m} = V_k V_m (G_{km} \operatorname{sen}\theta_{km} - B_{km} \operatorname{cos}\theta_{km}) \\ H_{kk} & = & \frac{\partial P_k}{\partial\theta_k} = -V_k^2 B_{kk} - V_k \sum_{m \in \Omega_k^+} V_m (G_{km} \operatorname{sen}\theta_{km} - B_{km} \operatorname{cos}\theta_{km}) \\ N_{km} & = & \frac{\partial P_k}{\partial V_m} = V_k (G_{km} \operatorname{cos}\theta_{km} + B_{km} \operatorname{sen}\theta_{km}) \\ N_{kk} & = & \frac{\partial P_k}{\partial V_k} = V_k G_{kk} + \sum_{m \in \Omega_k^+} V_m (G_{km} \operatorname{cos}\theta_{km} + B_{km} \operatorname{sen}\theta_{km}) \\ M_{km} & = & \frac{\partial Q_k}{\partial\theta_m} = -V_k V_m (G_{km} \operatorname{cos}\theta_{km} + B_{km} \operatorname{sen}\theta_{km}) \\ M_{kk} & = & \frac{\partial Q_k}{\partial\theta_k} = -V_k^2 G_{kk} + V_k \sum_{m \in \Omega_k^+} V_m (G_{km} \operatorname{cos}\theta_{km} + B_{km} \operatorname{sen}\theta_{km}) \\ L_{km} & = & \frac{\partial Q_k}{\partial V_m} = V_k (G_{km} \operatorname{sen}\theta_{km} - B_{km} \operatorname{cos}\theta_{km}) \\ L_{kk} & = & \frac{\partial Q_k}{\partial V_k} = -V_k B_{kk} + \sum_{m \in \Omega_k^+} V_m (G_{km} \operatorname{sen}\theta_{km} - B_{km} \operatorname{cos}\theta_{km}) \end{array} \right\}$$

Portanto, o algoritmo de resolução do subsistema 1 descrito pelo método de Newton é:

$$\Delta P(V^v, \theta^v) = H(V^v, \theta^v)\Delta\theta^v + N(V^v, \theta^v)\Delta V^v \quad (2.32)$$

$$\Delta Q(V^v, \theta^v) = M(V^v, \theta^v)\Delta\theta^v + L(V^v, \theta^v)\Delta V^v \quad (2.33)$$

$$\theta^{v+1} = \theta^v + \Delta\theta^v \quad (2.34)$$

$$V^{v+1} = V^v + \Delta V^v \quad (2.35)$$

Apesar de ser bem eficiente e gerar a resposta do subsistema com um número pequeno de iterações, esse método é computacionalmente custoso para algumas aplicações, pois a cada iteração a matriz jacobiana é recalculada e dependendo da dimensão do problema requer um esforço computacional grande.

Para solucionar esse problema e torná-lo mais eficiente, pode-se evitar recalcular a matriz jacobiana e utilizar a mesma matriz calculada na primeira iteração em todas as outras. Dessa maneira, a convergência pode ser comprometida de acordo com o ponto inicial escolhido e caso ocorra, será com um número maior de iterações. Contudo os cálculos serão mais simples, tornando essa saída mais atrativa para sistemas com dimensões elevadas.

2.2.2 Fluxo de Carga pelo Método Desacoplado

Outra solução apresentada em [3] para a simplificação de cálculos na determinação da matriz jacobiana do subsistema apoia-se na informação de que as sensibilidades $\partial P/\partial\theta$ e $\partial Q/\partial V$ são grandes comparadas com as sensibilidades $\partial P/\partial V$ e $\partial Q/\partial\theta$ para sistemas de extra-alta-tensão (EAT, maiores que 230 kV) e de ultra-alta-tensão (UAT, maiores que 750 kV).

Essa simplificação está contida no Método Desacoplado e consiste em assumir que os elementos das submatrizes M e N são nulos e efetuar o desacoplamento das submatrizes jacobianas H e L . A resolução do sistema linear é dividido em dois sistemas menores que são resolvidos alternadamente como mostra o algoritmo abaixo:

$$\Delta P(V^v, \theta^v) = H(V^v, \theta^v)\Delta\theta^v \quad (2.36)$$

$$\theta^{v+1} = \theta^v + \Delta\theta^v \quad (2.37)$$

$$\Delta Q(V^v, \theta^{v+1}) = L(V^v, \theta^{v+1})\Delta V^v \quad (2.38)$$

$$V^{v+1} = V^v + \Delta V^v \quad (2.39)$$

Note que para calcular o valor de ΔV^v é utilizado o vetor θ^{v+1} encontrado na iteração imediatamente anterior, isso agiliza a convergência desse método, tornando-o bem aplicável. A Figura 2.8 a seguir mostra o fluxograma proposto em [3] do algoritmo de resolução do Método Desacoplado.

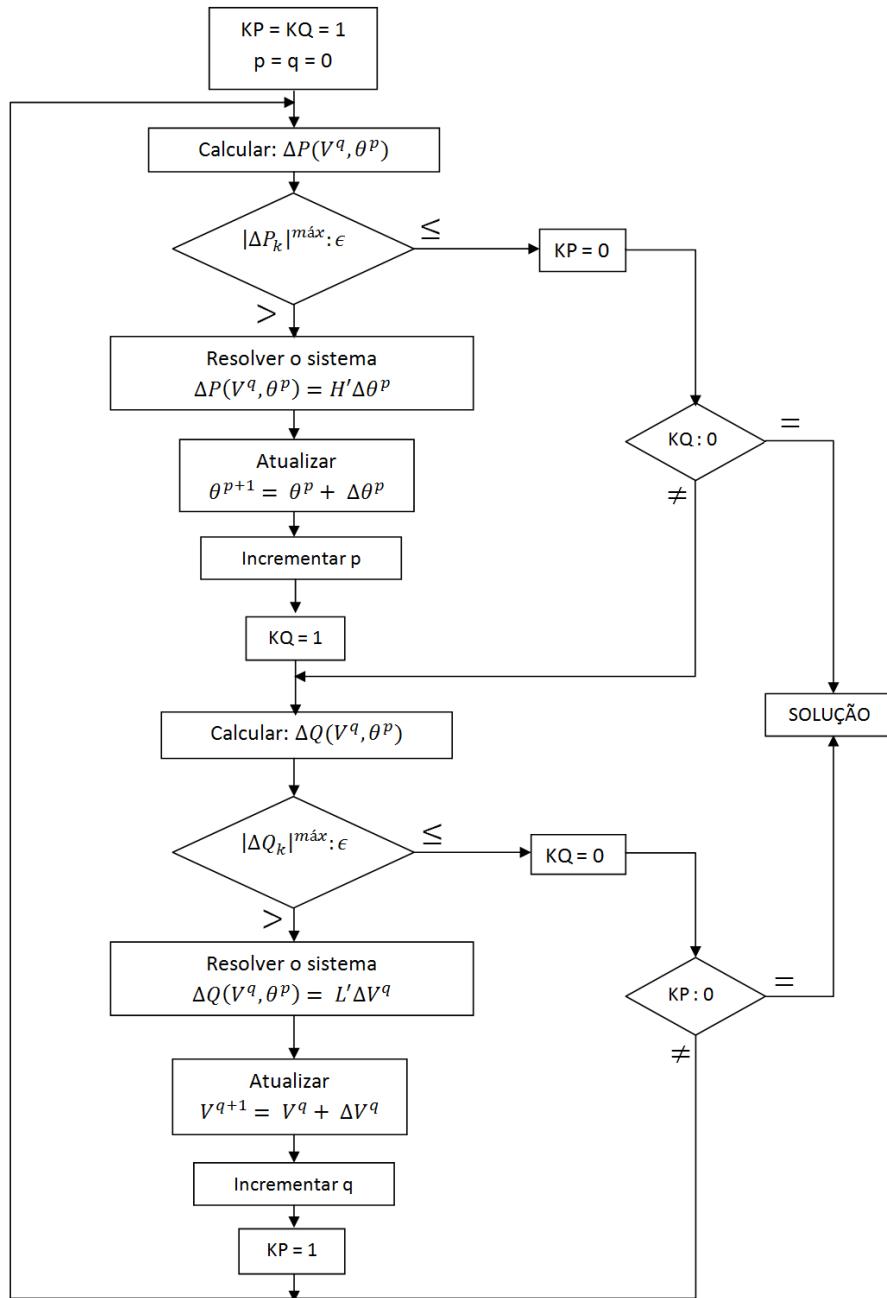


Figura 2.8: Fluxograma do Algoritmo de Método Desacoplado

Uma versão diferente para o cálculo de fluxo de potência utilizando o método desacoplado consiste em substituir as matrizes H e L pelas matrizes H' e L' determinadas pelas expressões abaixo que levam em consideração a matriz diagonal V cujas entradas são os valores das magnitudes das tensões nodais do sistema:

$$H = VH' \quad (2.40)$$

$$L = VL' \quad (2.41)$$

com

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & V_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & V_{NB} \end{bmatrix} \quad V_i: \text{magnitude da tensão no nó } i \ (i = 1, \dots, NB)$$

Nessa nova versão os elementos das matrizes de iteração H' e L' são dados pelas expressões:

$$\begin{aligned} H'_{km} &= V_m(G_{km}\sin\theta_{km} - B_{km}\cos\theta_{km}) \\ H'_{kk} &= -Q_k/V_k - V_k B_{kk} \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} L'_{km} &= G_{km}\sin\theta_{km} - B_{km}\cos\theta_{km} \\ L'_{kk} &= Q_k/V_k^2 - B_{kk} \end{aligned} \quad (2.43)$$

As equações de iterações ficam portanto na forma:

$$\Delta P/V = H'\Delta\theta \quad (2.44)$$

$$\Delta Q/V = L'\Delta V \quad (2.45)$$

em que $\Delta P/V$ (ou $\Delta Q/V$) é uma notação mais simples para $V^{-1}\Delta P$ (ou $V^{-1}\Delta Q$).

Na próxima subseção será feita uma simplificação das equações (2.42) e (2.43) considerando algumas características de redes de transmissão que operam com faixa de tensões elevadas.

2.2.3 Fluxo de Carga pelo Método Desacoplado Rápido

São características de redes de transmissão de EAT e UAT [3]:

- $\theta_{km} \approx 0$, logo $\cos\theta_{km}$ é próximo de 1;
- B_{km} é consideravelmente maior que $G_{km}\sin\theta_{km}$;
- Q_k tem valor bem menor que $B_{kk}V_k^2$.

Logo, aplicando essas aproximações nas expressões dos elementos das submatrizes H' e L' (2.42 e 2.43) obtém-se os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} H'_{km} &\approx -V_m B_{km} \\ H'_{kk} &\approx -V_k B_{kk} \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} L'_{km} &\approx -B_{km} \\ L'_{kk} &\approx -B_{kk} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Assumindo também que as magnitudes das tensões nodais sejam aproximadamente unitárias, as submatrizes H' e L' podem ser aproximadas por

$$H' \approx B' \quad (2.48)$$

$$L' \approx B'' \quad (2.49)$$

Essas matrizes B' e B'' dependem exclusivamente de parâmetros da linha. Esse fato é a principal vantagem obtida com essas aproximações, pois não há necessidade de se recalcular as submatrizes jacobianas a cada iteração.

É possível conseguir melhores desempenhos de resolução quando se considera a matriz B' como a matriz de susceptância do Fluxo de Carga CC [3], desprezando o valor das resistências dos elementos da rede e assumindo $b_{km} \approx -1/x_{km}$. Assim os elementos das matrizes B' e B'' são dados pelas expressões:

$$\begin{aligned} B'_{km} &= -x_{km}^{-1} \\ B'_{kk} &= \sum_{m=1}^{NB} x_{km}^{-1} \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} B''_{km} &= -B_{km} \\ B''_{kk} &= -B_{kk} \end{aligned} \quad (2.51)$$

em que x_{km} é a reatância série da linha ou transformador e B_{km} e B_{kk} são elementos da matriz de susceptâncias B da rede.

2.3 Resultados Obtidos

Desenvolveu-se em linguagem C a implementação do Método Desacoplado Rápido para o cálculo do fluxo estático de potência em sistemas elétricos. Utilizou-se o pacote *CSparse*, criado e disponibilizado por [4]. Este pacote conta com estruturas de dados para representação de matrizes esparsas e suas operações.

Para verificar a aplicabilidade do programa desenvolvido, ele foi usado para o cálculo de fluxo de carga da rede IEEE-30 barras e apresentou os seguintes resultados:

- 1. Estado do Sistema:** A Tabela 2.1 apresenta os valores dos parâmetros de todas as barras da rede após 6 iterações p e 6 iterações q do Método Desacoplado Rápido, com precisão $\epsilon = 10^{-6}$.

Tabela 2.1: Resultado: Estado do Sistema

Número da Barra	Tipo (*)	Tensão		Geração		Carga	
		Módulo (pu)	Ângulo (°)	P (MW)	Q (MVAR)	P (MW)	Q (MVAR)
1	2	1.0600	0.00	131.41	4.75	0.00	0.00
2	1	1.0450	-2.60	40.00	31.56	21.70	12.70
3	0	1.0271	-4.05	0.00	0.00	2.40	1.20
4	0	1.0191	-4.84	0.00	0.00	7.60	1.60
5	1	1.0100	-7.02	50.00	14.90	94.20	19.00
6	0	1.0145	-5.70	0.00	0.00	0.00	0.00
7	0	1.0048	-6.77	0.00	0.00	22.80	10.90
8	1	1.0100	-5.75	27.90	16.92	30.00	30.00
9	0	1.0533	-7.55	0.00	0.00	0.00	0.00
10	0	1.0474	-9.09	0.00	0.00	5.80	2.00
11	1	1.0820	-6.50	10.00	15.00	0.00	0.00
12	0	1.0622	-7.50	0.00	0.00	11.20	7.50
13	1	1.0710	-5.38	30.00	7.28	0.00	0.00
14	0	1.0473	-8.49	0.00	0.00	6.20	1.60
15	0	1.0419	-8.70	0.00	0.00	8.20	2.50
16	0	1.0485	-8.44	0.00	0.00	3.50	1.80
17	0	1.0424	-9.10	0.00	0.00	9.00	5.80
18	0	1.0319	-9.53	0.00	0.00	3.20	0.90
19	0	1.0290	-9.83	0.00	0.00	9.50	3.40
20	0	1.0328	-9.70	0.00	0.00	2.20	0.70
21	0	1.0352	-9.53	0.00	0.00	17.50	11.20
22	0	1.0357	-9.51	0.00	0.00	0.00	0.00
23	0	1.0309	-9.34	0.00	0.00	3.20	1.60
24	0	1.0246	-9.86	0.00	0.00	8.70	6.70
25	0	1.0195	-9.84	0.00	0.00	0.00	0.00
26	0	1.0021	-10.27	0.00	0.00	3.50	2.30
27	0	1.0249	-9.56	0.00	0.00	0.00	0.00
28	0	1.0102	-6.11	0.00	0.00	0.00	0.00
29	0	1.0053	-10.79	0.00	0.00	2.40	0.90
30	0	0.9939	-11.67	0.00	0.00	0.60	1.90

(*) Legenda:	
0	Barra PQ
1	Barra PV
2	Barra $V\theta$

2. **Fluxos de Potência Ativa** Calculados pelo programa, os fluxos de potência ativa podem ser vistos na Tabela 2.2 a seguir. Note que as linhas com maiores sobrecargas são a linha 1 (1-2), a linha 2 (1-3) e a linha 5 (2-5).

Tabela 2.2: Resultado: Fluxo de Potência Ativa

Número da Linha	Barra Início (bi)	Barra Fim (bf)	Potência Ativa (bi→bf)	Potência Ativa (bf→bi)	Perdas
1	1	2	87.567	-86.257	1.310
2	1	3	43.844	-43.034	0.810
3	2	4	26.329	-25.939	0.390
4	3	4	40.634	-40.420	0.214
5	2	5	43.320	-42.468	0.852
6	2	6	34.908	-34.230	0.678
7	4	6	37.692	-37.529	0.163
8	5	7	-1.732	1.732	0.000
9	6	7	24.709	-24.546	0.163
10	6	8	5.008	-5.008	0.000
11	6	9	16.968	-16.968	0.000
12	6	10	11.669	-11.669	0.000
13	9	11	-10.000	10.000	0.000
14	9	10	26.968	-26.968	0.000
15	4	12	21.066	-21.066	0.000
16	12	13	-30.000	30.000	0.000
17	12	14	8.581	-8.581	0.000
18	12	15	20.923	-20.644	0.279
19	12	16	10.362	-10.362	0.000
20	14	15	2.296	-2.296	0.000
21	16	17	6.767	-6.767	0.000
22	15	18	7.662	-7.662	0.000
23	18	19	4.403	-4.403	0.000
24	19	20	-5.109	5.109	0.000
25	10	20	7.381	-7.381	0.000
26	10	17	2.277	-2.277	0.000
27	10	21	15.650	-15.542	0.109
28	10	22	7.529	-7.529	0.000
29	21	22	-1.958	1.958	0.000
30	15	23	7.067	-7.067	0.000
31	22	24	5.519	-5.519	0.000
32	23	24	3.817	-3.817	0.000
33	24	25	0.576	-0.576	0.000
34	25	26	3.544	-3.544	0.000
35	25	27	-2.971	2.971	0.000
36	28	27	16.262	-16.262	0.000
37	27	29	6.189	-6.189	0.000
38	27	30	7.091	-6.930	0.161
39	29	30	3.704	-3.704	0.000
40	8	28	2.895	-2.895	0.000
41	6	28	13.405	-13.405	0.000

Em seguida, realizaram-se algumas simulações para se verificar como se comporta um sistema elétrico quando há um aumento na demanda das cargas. A análise realizada observa a variação da média dos módulos das tensões nodais da rede quando se impõe um aumento na potência gerada e consumida.

Esse procedimento é denominado na literatura por Fluxo de Potência Continuado (FPC) e serve para determinar a capacidade de transmissão de potência de sistemas elétricos.

Na implementação desenvolvida foi adicionada uma variável denominada *taxa* (inicialmente com valor igual a 1) que, antes de iniciar o cálculo de fluxo de potência, multiplica os valores de potência ativa e reativa, geradas e consumidas das barras do tipo PQ e PV da rede.

Em seguida, foi criado um processo iterativo que incrementa o valor de *taxa* com um passo de 0.01 (1%) até o ponto em que o método não apresentava convergência. A divergência foi atribuída quando o método realizava 100 iterações. Assim interrompia-se a incrementação da *taxa* e finalizava-se o programa.

Abaixo é mostrado na Figura 2.9 o gráfico obtido para o sistema IEEE-30 barras.

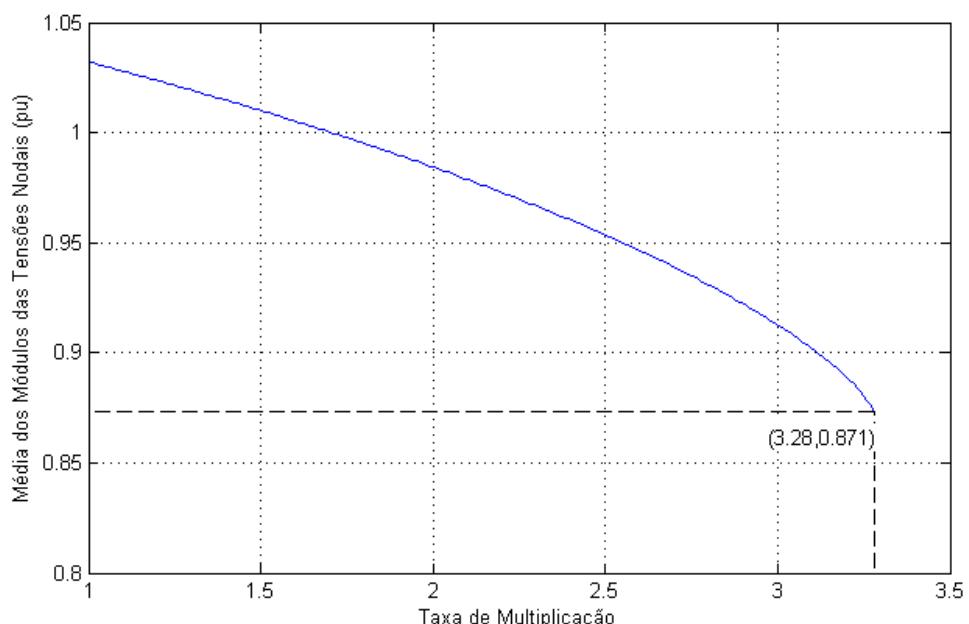


Figura 2.9: Comportamento da Rede Elétrica IEEE-30 barras em função do aumento de demanda de energia

Verifica-se que o método desacoplado rápido desenvolvido converge para valores de taxa menores e iguais a 3,28. E que no ponto em que não há mais convergência a média dos módulos das tensões nodais vale 0,871 pu.

Observando qualitativamente o resultado obtido, observa-se que o nível de tensão da rede diminui com o aumento da potência demandada pelas cargas. Para conseguir suprir novas cargas inseridas no sistema de maneira estável, o sistema elétrico diminui o nível de tensão nodal da rede.

Entretanto, essa diminuição da tensão nodal pode acarretar o desativação de algumas cargas e assim gerar um efeito de desligamento geral da rede. Esse efeito pode ser observado aproximando o gráfico da Figura 2.9 por uma relação polinomial de quarto grau como sugere [2].

Essa aproximação define duas regiões de estabilidade do sistema: a parte superior da curva ajustada (do ponto A ao ponto C) representa os pontos de operação estável do sistema elétrico,

enquanto que na parte inferior da curva (do ponto D ao ponto C), são representados os pontos de operação instável.

Através dessa aproximação é possível estimar o ponto de máximo carregamento (PMC) do sistema, onde um ponto de equilíbrio estável se funde com um ponto de equilíbrio instável. A distância entre o PMC e o ponto de operação do sistema é chamada de Margem da Estabilidade do sistema.

O gráfico ilustrado na Figura 2.10 mostra o PMC estimado ajustando os dados obtidos pelo programa a uma relação de quarto grau.

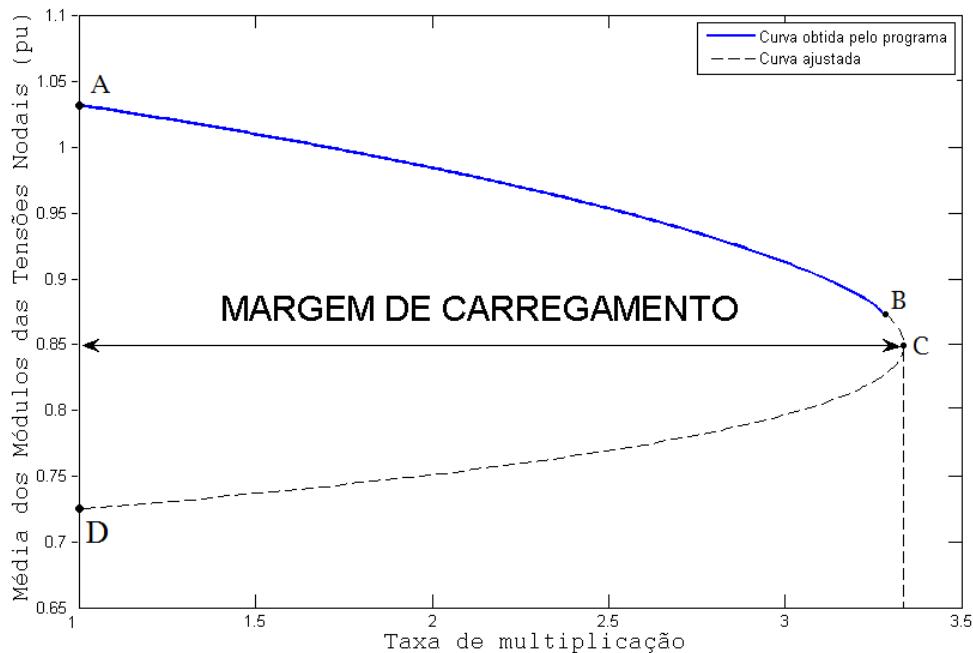


Figura 2.10: Estimação da Margem de Carregamento do Sistema IEEE-30 barras

Nota-se que o ponto de máximo carregamento encontrado ocorre à taxa 3,34 e com uma média de módulos de tensão nodais igual a 0.849 pu. A diferença entre o PMC (Ponto C) e o ponto em que o programa desenvolvido não apresenta convergência (Ponto B) se deve às características de convergência do método Desacoplado Rápido na vizinhança do ponto de máximo carregamento.

A margem de carregamento observada tem valor igual a $2,34 \cdot P_{L_0} \approx 640MW$ (P_{L_0} é a potência ativa demandada inicialmente para taxa unitária).

Em seguida verificou-se o comportamento da rede quando retirada a linha com maior carregamento que não esteja conectada à barra de referência (Barra 1). Observando a Tabela 2.2, essa linha é a que liga os barramentos 2 e 5 (Linha 5).

Segue a Figura 2.11 que ilustra o gráfico da variação da média dos módulos das tensões nodais com o aumento da taxa de demanda, quando retirada a linha 5 (2-5).

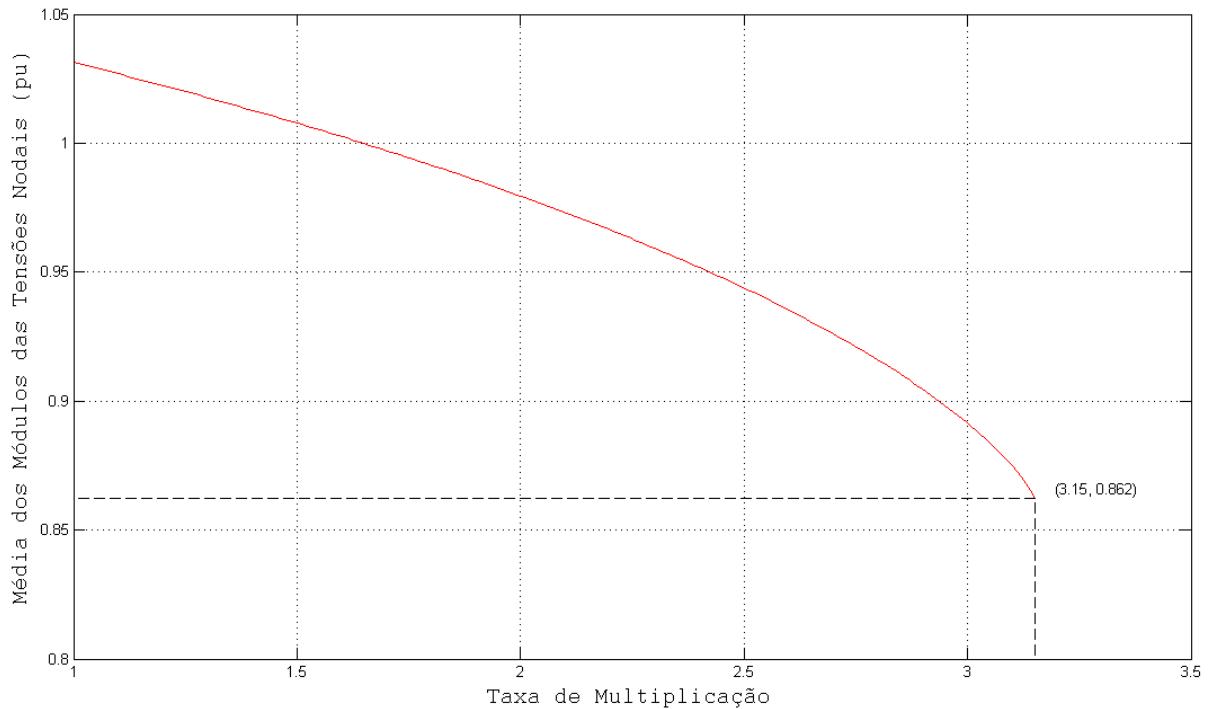


Figura 2.11: Comportamento da Rede Elétrica IEEE-30 barras sem linha 2-5 em função do aumento da demanda de energia

Nesse caso a convergência é conseguida até a taxa de 3,15 (aproximadamente 96% do valor limite conseguido para a rede original). Nesse ponto obtém-se uma média dos módulos das tensões com valor 0,862 pu (pouco mais que 98,7% do valor médio dos módulos das tensões no ponto de instabilidade da rede original).

Outra análise realizada foi a retirada da linha 1 (entre os barramentos 1 e 2) do problema original. Essa linha é a que apresentava maior sobrecarga. O resultado pode ser visto na Figura 2.12 abaixo.

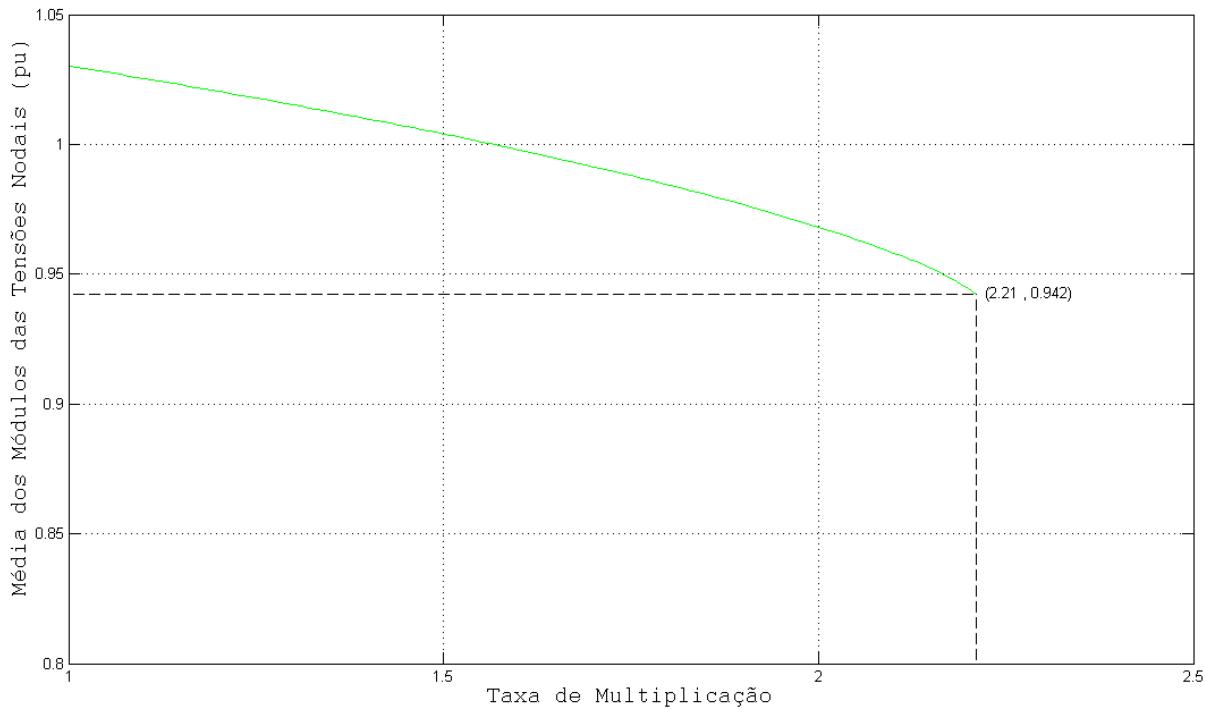


Figura 2.12: Comportamento da Rede Elétrica IEEE-30 barras sem linha 1-2 em função do aumento da demanda de energia

Neste último caso, a divergência ocorre já para taxa igual a 2,21 (pouco mais de 67% da taxa limite do problema original) e com média de tensão igual a 0,942 pu. (cerca de 8% a mais em relação à média dos módulos das tensões no ponto de instabilidade).

O gráfico mostrado na Figura 2.13 apresenta todas as três análises realizadas (problema original, sem linha 5 e sem linha 1). Nota-se que a retirada da linha 1, à qual está ligada a barra de referência, acarreta uma diminuição considerável da margem de estabilidade do sistema.

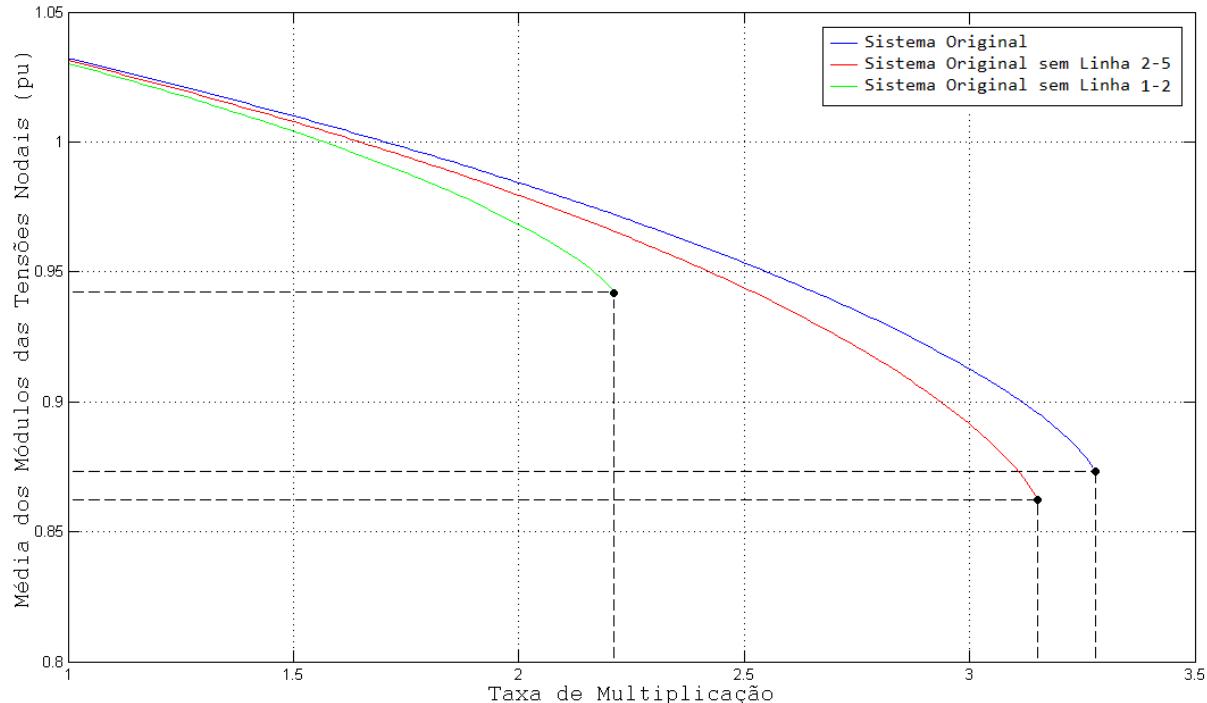


Figura 2.13: Sobreposição dos Gráficos

2.4 Conclusão

A partir dos resultados obtidos pôde-se observar o comportamento que uma rede de sistema de potência apresenta ao aumentar a demanda por energia elétrica. Notou-se que há uma redução do nível de tensão nos nós da rede para manter a estabilidade de operação. Viu-se também a existência de um ponto de bifurcação que determina o limite do aumento da demanda das cargas, o qual é dado o nome de Ponto Máximo de Carregamento (PMC).

O decréscimo da tensão com o aumento da demanda é traduzido pelo termo Capacidade de Transmissão. Quanto maior a capacidade de Transmissão, maior é a sua margem de carregamento e, portanto, a tensão diminui mais lentamente com o aumento da carga.

Como pôde ser visto, o aumento do parque de geração de energia elétrica, sem modificações na estrutura do sistema de transmissão, não garante o bom fornecimento desta energia. Logo um planejamento da expansão da rede de transmissão torna-se necessário tendo em vista um horizonte de longo prazo.

No próximo capítulo deste trabalho, serão abordados os principais modelos deste tipo de problema, bem como algumas metodologias de resolução.

Capítulo 3

Modelos do Problema de Expansão de Redes de Transmissão de Sistemas Elétricos

O problema de Planejamento da Expansão de Redes de Transmissão (PERT) na sua forma tradicional determina em que momento e em quais pontos da rede devem ser realizadas alterações da configuração (rearranjo ou novas instalações). Esse planejamento tem como objetivo garantir o suprimento de toda demanda prevista num horizonte, minimizando o custo total das alterações realizadas. Esse tipo de problema pode ser classificado em duas classes:

- **Planejamento Monoperíodo:** Determina a configuração ótima da rede em um único instante futuro, não se preocupando com o momento em que se realizarão as novas instalações.
- **Planejamento Multiperíodo:** Divide o horizonte de planejamento em diversos períodos menores e determina para cada um, quais são as configurações ótimas da rede.

Nesse trabalho apenas se abordará o planejamento estático da expansão, no qual não há influência do tempo de alocação de novas instalações. A formulação matemática básica desse planejamento clássico é a mostrada abaixo

$$\min_{s, x^o, x^c} f(s, x^o, x^c) \quad (3.1)$$

$$\text{s.a.} \quad g(s, x^o, x^c) = 0 \quad (3.2)$$

$$s_\ell \in \{0, 1\} \quad \forall \ell \in L^C \quad (3.3)$$

em que:

- a função f consiste no custo total de alterações do sistema elétrico;
- a variável binária s representa os planos de expansão para o sistema. Sendo s_ℓ igual a 1 se o equipamento ℓ é construído e 0 caso contrário. Neste trabalho, dentre os equipamentos da rede, apenas se estudará a inclusão ou não de linhas de transmissão;
- x^o e x^c denotam as variáveis contínuas de decisão associadas, respectivamente, à rede elétrica original e à rede elétrica expandida;

- $g(s, x^o, x^c) = 0$ é a restrição de operação do sistema, a qual relaciona as variáveis de decisão segundo características da rede elétrica;
- L^C é o conjunto de linhas candidatas à expansão.

3.1 Modelos clássicos do PERT

No que segue, serão apresentados dois dos modelos propostos ao longo das décadas de pesquisa nessa área: Modelo de Transportes (e Modelo de Transportes Modificado) e Modelo CC.

3.1.1 Modelo de Transportes

Proposto por [6], o Modelo de Transportes considera apenas a capacidade de operação do circuito da rede e a implicação da Lei de Correntes de Kirchhoff (LCK) nos barramentos do sistema. Desta maneira, o problema reduz-se a um problema linear inteiro misto (PLIM) e é o apresentado abaixo:

$$\min_{P_g^G, P_\ell^L, s_\ell} \sum_{\ell \in L^C} c_\ell^L s_\ell \quad (3.4)$$

$$s.a. \quad \sum_{g \in G_n} P_g^G - \sum_{\ell | O(\ell)=n} P_\ell^L + \sum_{\ell | R(\ell)=n} P_\ell^L = d_n \quad \forall n \in N \quad (3.5)$$

$$0 \leq P_g^G \leq \bar{P}_g^G \quad \forall g \in G \quad (3.6)$$

$$-\bar{P}_\ell^L \leq P_\ell^L \leq \bar{P}_\ell^L \quad \forall \ell \in L^O \quad (3.7)$$

$$-s_\ell \bar{P}_\ell^L \leq P_\ell^L \leq s_\ell \bar{P}_\ell^L \quad \forall \ell \in L^C \quad (3.8)$$

$$s_\ell \in \{0, 1\} \quad \forall \ell \in L^C \quad (3.9)$$

As variáveis de decisão desse modelo são:

- P_g^G : potência ativa total injetada pelo gerador g ;
- P_ℓ^L : fluxo de potência ativa na linha ℓ da rede elétrica;
- s_ℓ : variável binária de decisão de novas instalações. Sendo que $s_\ell = 1$, caso se construa a linha ℓ e $s_\ell = 0$, caso contrário.

O objetivo principal do problema tradicional da expansão é a minimização do custo total das novas instalações, determinado pela soma dos custos individuais (c_ℓ^L : custo de instalação da linha ℓ) de cada linha candidata. No processo de definição do escopo do planejamento da expansão, devem ser especificados os ramos onde podem ser construídas novas instalações e determinados os custos dessas operações. Geralmente, para redes em que as distâncias entre os barramentos são grandes, admite-se que o custo de instalação é diretamente proporcional ao comprimento das linhas.

No modelo, a primeira restrição, Eq. (3.5), impõe o balanço de potência ativa em cada barramento da rede respeitando o conceito de que as barras não possuem a capacidade de acumular potência (LCK). Nessa restrição:

- O conjunto G_n contém os índices dos geradores que estão conectados no barramento n ;

- As funções $O(\ell)$ e $R(\ell)$ são, respectivamente, os nós de origem e destino da linha ℓ ;
- O parâmetro d_n corresponde à demanda de potência ativa no barramento n ;
- O conjunto N contém todos os índices de barramento.

A segunda restrição desse modelo, Eq. (3.6), é a imposição dos limites das gerações. Devido a restrições técnicas e econômicas é estabelecido um limite máximo de geração \bar{P}_g^G para cada unidade geradora g .

As duas restrições seguintes, Eqs. (3.7) e (3.8), compreendem a capacidade máxima de fluxo de potência ativa em cada linha da rede. Sendo que a equação (3.7) representa a limitação no fluxo de potência nas linhas da rede original do sistema e a equação (3.8), nas linhas candidatas.

Segundo o trabalho apresentado em [6], a capacidade máxima de transmissão de uma linha \bar{P}_ℓ^L mantém-se constante para linhas cujo comprimento não ultrapassa cerca de 80 km (50 milhas), enquanto que para linhas mais longas esse valor decresce e segue como mostrado na Figura 3.1 a seguir.

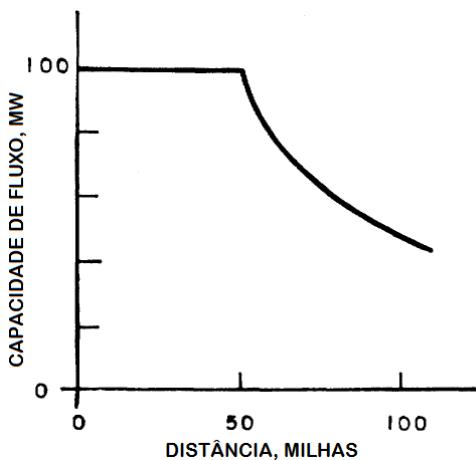


Figura 3.1: Capacidade Máxima de Fluxo (Adaptado de [6])

Por apresentar variáveis inteiras e contínuas, e apenas relações lineares entre elas, esse modelo se enquadra nos moldes de um problema linear inteiro misto. Existem vários métodos de resolução deste tipo de problema, os quais são classificados em três grandes grupos [7]:

- Métodos Exatos (ou Ótimos): São métodos que determinam a solução ótima do problema linear inteiro.
- Métodos Aproximados: Esse tipo de método não encontra necessariamente a solução ótima do problema inteiro, mas garante soluções subótimas que distam uma tolerância máxima da solução ótima.
- Métodos Heurísticos: São métodos que não garantem a solução ótima, mas, de maneira bem eficiente, determinam soluções viáveis para um certo critério.

Para aplicação de técnicas meta-heurísticas na resolução do problema de planejamento da expansão de redes de transmissão, devem ser realizadas algumas modificações no Modelo de Transportes, já que as técnicas meta-heurísticas estipulam valores para as variáveis s_ℓ , logo, não é mais necessário minimizar o custo de instalação, já que é fixo dada uma solução.

Necessita, entretanto, verificar a factibilidade da solução apresentada pelos algoritmos. Dessa maneira, o modelo matemático deve se adequar a esta necessidade e isso é conseguido com a inserção de variáveis de geração artificial (r_n).

Essas variáveis representam uma geração complementar de potência ativa em cada nó do sistema. Para forçar a anulação destas variáveis fictícias, a função objetivo do novo modelo passa a ser:

$$\min_{P_g^G, P_\ell^L, r_n} \sum_{n \in N} r_n \quad (3.10)$$

Assim, para a solução proposta pelo algoritmo da meta-heurística ser válida, essas variáveis devem ser nulas e as outras variáveis representarão os valores ótimos para o fluxo de potência. Quando não for nula, uma dessas variáveis terá valor maior que zero, indicando que não há configuração do fluxo de potência capaz de suprir a barra onde está conectada essa geração artificial.

Após as alterações mencionadas, o modelo passa a ser formulado como abaixo e é denominado Modelo de Transportes Modificado.

$$\min_{P_g^G, P_\ell^L, r_n} \sum_{n \in N} r_n \quad (3.11)$$

$$s.a. \quad \sum_{g \in G_n} P_g^G - \sum_{\ell | O(\ell) = n} P_\ell^L + \sum_{\ell | R(\ell) = n} P_\ell^L = d_n - r_n \quad \forall n \in N \quad (3.12)$$

$$0 \leq P_g^G \leq \bar{P}_g^G \quad \forall g \in G \quad (3.13)$$

$$0 \leq r_n \leq d_n \quad \forall n \in N \quad (3.14)$$

$$-\bar{P}_\ell^L \leq P_\ell^L \leq \bar{P}_\ell^L \quad \forall \ell \in L^O \quad (3.15)$$

$$-s_\ell \bar{P}_\ell^L \leq P_\ell^L \leq s_\ell \bar{P}_\ell^L \quad \forall \ell \in L^C \quad (3.16)$$

Como durante a resolução utilizando meta-heurísticas, os valores das variáveis s_ℓ são estabelecidos, o modelo de transportes modificado é representado por um problema de otimização linear (PL), pois todas suas variáveis pertencem ao espaço dos números reais.

3.1.2 Modelo CC

O Modelo CC, junto com o Modelo CA, são modelos que aplicam as duas Leis de Kirchhoff no sistema elétrico. Entretanto, diferentemente do modelo CA, onde é realizada uma formulação muito próxima do problema real, o modelo CC realiza algumas simplificações na expressão do fluxo de potência ativa entre as linhas da rede de maneira a relacioná-lo apenas com a abertura angular entre os barramentos e a reatância da linha que os une.

Do modelo CA, a expressão que define o fluxo de potência ativa entre dois barramentos é a mostrada abaixo:

$$P_\ell^L = V_k^2 \cdot g_\ell - V_k \cdot V_m \cdot g_\ell \cdot \cos(\delta_k - \delta_m) - V_k \cdot V_m \cdot b_\ell \cdot \sin(\delta_k - \delta_m) \quad (3.17)$$

em que $k = O(\ell)$ e $m = R(\ell)$.

Em sistemas de potência, especialmente em sistemas EAT ou UAT, observam-se as seguintes características:

- As tensões nodais V_k e V_m são próximas de 1 p.u.

- A componente resistiva das impedâncias das linhas é bem menor que a componente reativa ($r_\ell \ll x_\ell$), de modo que $g_\ell \approx 0$ e $b_\ell \approx -1/x_\ell$.
- As aberturas angulares $\delta_k - \delta_m$ são pequenas e portanto, por linearização de Taylor, $\sin(\delta_k - \delta_m) \approx \delta_k - \delta_m$.

Portanto, ao realizar essas simplificações em (3.17), obtém-se uma expressão linear em relação às variáveis definidas:

$$P_\ell^L = \frac{\delta_k - \delta_m}{x_\ell} \quad (3.18)$$

A equação (3.18) acima pode ser comparada com a expressão que define a corrente elétrica que flui em um resistor: a magnitude da corrente I se relaciona com o fluxo de potência ativa P_ℓ^L , as tensões V_k e V_m se relacionam com os ângulos de fase δ_k e δ_m e a resistência R do resistor, com a impedância x_ℓ . Por causa dessa equivalência que é dado a nomenclatura Modelo CC.

Abaixo segue o modelo CC completo:

$$\min_{P_g^G, P_\ell^L, s_\ell, \delta_n} \sum_{\ell \in L^C} c_\ell^L s_\ell \quad (3.19)$$

$$s.a. \quad \sum_{g \in G_n} P_g^G - \sum_{\ell | O(\ell)=n} P_\ell^L + \sum_{\ell | R(\ell)=n} P_\ell^L = d_n \quad \forall n \in N \quad (3.20)$$

$$0 \leq P_g^G \leq \bar{P}_g^G \quad \forall g \in G \quad (3.21)$$

$$0 \leq \delta_n \leq \bar{\delta} \quad \forall n \in N \quad (3.22)$$

$$-\bar{P}_\ell^L \leq P_\ell^L \leq \bar{P}_\ell^L \quad \forall \ell \in L \quad (3.23)$$

$$P_\ell^L = \frac{1}{x_\ell} [\delta_{O(\ell)} - \delta_{R(\ell)}] \quad \forall \ell \in L^O \quad (3.24)$$

$$P_\ell^L = \frac{s_\ell}{x_\ell} [\delta_{O(\ell)} - \delta_{R(\ell)}] \quad \forall \ell \in L^C \quad (3.25)$$

$$s_\ell \in \{0, 1\} \quad \forall \ell \in L^C \quad (3.26)$$

Nesse modelo é inserida a restrição de limite das aberturas angulares, Eq. (3.22), que determina um limite máximo $\bar{\delta}$ para os valores dos ângulos nodais δ_n , para garantir a condição de Taylor descrita mais acima.

As restrições (3.24) e (3.25) indicam a imposição da Lei das Tensões de Kirchhoff (LTK). Simplesmente impõe a relação entre os fluxos de potência ativa e a abertura angular entre as barras, entretanto torna o problema não linear por conta da multiplicação das variáveis s_ℓ e δ_n .

Ao suprimir ambas as restrições, retorna-se ao Modelo de Transporte e este pode apresentar uma solução não aplicável ao problema real, pois pode requisitar uma abertura angular muito grande e infactível para produzir os fluxos de potência na rede.

Contudo, pode-se realizar uma modificação da restrição não linear, com a inclusão de novas restrições e novas variáveis. Esse procedimento está detalhado no Apêndice A e reescreve a

restrição não linear da seguinte maneira:

$$P_\ell^L = \frac{1}{x_\ell} [\delta_\ell^{QO} - \delta_\ell^{QR}] \quad \forall \ell \in L^C \quad (3.27)$$

$$\delta_\ell^{QO} + \delta_\ell^{AO} = \delta_{O(\ell)} \quad \forall \ell \in L^C \quad (3.28)$$

$$\delta_\ell^{QR} + \delta_\ell^{AR} = \delta_{R(\ell)} \quad \forall \ell \in L^C \quad (3.29)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{QO} \leq s_\ell \bar{\delta} \quad \forall \ell \in L^C \quad (3.30)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{QR} \leq s_\ell \bar{\delta} \quad \forall \ell \in L^C \quad (3.31)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{AO} \leq (1 - s_\ell) \bar{\delta} \quad \forall \ell \in L^C \quad (3.32)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{AR} \leq (1 - s_\ell) \bar{\delta} \quad \forall \ell \in L^C \quad (3.33)$$

Observe que a variável δ_n é escrita, de maneira geral, a cada linha ℓ , como a soma de duas novas variáveis δ_ℓ^Q e δ_ℓ^A . Quando $s_\ell = 1$, as restrições (3.32) e (3.33) impõem a anulação das variáveis δ_ℓ^{AO} e δ_ℓ^{AR} , respectivamente. Dessa forma, as variáveis δ_ℓ^{QO} e δ_ℓ^{QR} assumem os valores dos δ_n correspondentes e o fluxo de potência fica definido de maneira correta.

Já quando $s_\ell = 0$, as restrições (3.30) e (3.31) impõem a anulação das variáveis δ_ℓ^{QO} e δ_ℓ^{QR} , respectivamente, e consequentemente, anula-se também o fluxo de potência na linha ℓ .

3.2 Otimização Inteira

Como mostrado anteriormente, os modelos tradicionais do problema de planejamento da expansão de redes de transmissão resultam em problemas lineares inteiros mistos, pois na sua formulação são modeladas variáveis inteiras e variáveis reais através de relações (equações e inequações) lineares. Para estudo de técnicas de resolução desse tipo de problema, nesta seção, serão apresentados os conceitos básicos da subárea da Pesquisa Operacional denominada otimização inteira [8].

3.2.1 Definição de Problema Linear Inteiro Misto

Pode-se escrever qualquer problema de otimização linear na seguinte formulação padrão:

$$\min_x \{c^t x\} \quad (3.34)$$

$$\text{s.a.} \quad Ax = b \quad (3.35)$$

$$x \in \mathbb{R}^n \quad (3.36)$$

em que A é denominada Matriz Tecnológica do problema e tem dimensões m por n , com $m < n$, c é chamado vetor de custos e é n -dimensional, b denota o vetor de recursos m -dimensional e x é o vetor das variáveis de decisão pertencente ao conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$, o qual recebe o nome de **região factível**.

Se existir $x^* \in S$ tal que $c^t x^* \leq c^t x, \forall x \in S$, então diz-se que o problema linear é **factível** e esse vetor x^* é chamado **solução ótima** do problema.

Por outro lado, caso não exista um valor $x^* \in S$ com a propriedade acima e $S \neq \emptyset$, então dizemos que o problema é **ilimitado**. E, por fim, caso $S = \emptyset$, dizemos que o problema é **infactível**.

Suponha que seja imposta uma restrição de integridade às variáveis, de maneira que a região factível seja reduzida ao conjunto $S = \{x \in \mathbb{Z}^n : Ax = b\}$, em que \mathbb{Z}^n é o conjunto dos vetores n -dimensionais com entradas inteiras. Nesse caso o problema linear passa a ser um problema linear inteiro (PLI).

Seja outra situação em que o problema de otimização possua dois tipos de variáveis: um grupo de variáveis devem assumir apenas valores inteiros enquanto que outro grupo pode assumir qualquer valor real. A este novo tipo de problema é dado o nome problema linear inteiro misto (PLIM) e é formulado como abaixo.

$$\min_{x,y} \{c^t x + h^t y\} \quad (3.37)$$

$$\text{s.a.} \quad Ax + Gy = b \quad (3.38)$$

$$x \in \mathbb{R}^{n1} \quad (3.39)$$

$$y \in \mathbb{Z}^{n2} \quad (3.40)$$

Como observado anteriormente, os modelos tradicionais do problema de PERT resultam em problemas desse tipo, pois há variáveis exclusivamente inteiras (novas linhas instaladas) e outras que assumem valores reais (fluxo de potência entre barras, geração nodal, etc.).

3.2.2 Resolução de um Problema Inteiro Misto

Diferentemente da resolução de problemas lineares, não existem condições de otimalidade explícitas para resolução de problemas lineares inteiros mistos (PLIM) [8]. Dessa maneira, para testar se uma solução factível é solução ótima de um problema, é necessário compará-la com todas as outras soluções factíveis explicita ou implicitamente. É nesse sentido que trabalham os métodos de resolução, sempre buscando algoritmos eficientes na comparação das soluções factíveis.

Neste trabalho foram estudados e implementados o método *Branch and Bound*, que está na categoria de métodos exatos, e o método Busca Tabu, que é classificado como um método meta-heurístico. Mais adiante serão apresentados esses estudos e os resultados das implementações.

Durante o processo de resolução do problema inteiro, esses métodos realizam rotinas de determinação de soluções ótimas de uma sequência de problemas lineares semelhantes. As implementações realizadas foram desenvolvidas utilizando a aplicação do Método Dual Simplex, já que essa versão do método simplex mostra-se bem eficiente na resolução do problema da expansão de redes de transmissão [9].

3.2.3 Condição de Otimalidade Implícita

Sabe-se que não há como comprovar a otimalidade de uma solução factível de um problema inteiro sem compará-la com todas as outras soluções factíveis. Entretanto, pode-se realizar essa verificação de maneira eficiente utilizando o conceito de limitantes.

Seja o problema inteiro

$$\min_x \{c^t x\} \quad (3.41)$$

$$\text{s.a.} \quad x \in S \quad (3.42)$$

em que S é a região factível. Pode-se estabelecer um valor limitante superior (\bar{w}) e um inferior (\underline{w}) para a solução ótima do problema. De modo que $\underline{w} \leq w^* \leq \bar{w}$, onde $w^* = c^t x^*$ é o valor mínimo da função objetivo do problema linear.

A definição desses limites são obtidas através de propriedades de problemas lineares. Por exemplo, suponha que é conhecida uma solução factível \hat{x} e seu “desempenho” $\hat{w} = c^t \hat{x}$, logo é possível eliminar toda porção da região factível tal que $c^t x \geq \hat{w}$. Reduz-se assim o número de comparações a serem feitas para comprovar a otimalidade. Pode-se observar que esse valor \hat{w} representa um **limitante superior** da função objetivo.

Para determinação de um limitante inferior, serão feitas antes algumas definições.

Definição 1 (Problema Relaxado) Um problema (PR) $w^R = \min\{f(x) : x \in T \subseteq \mathbb{R}^n\}$ é uma relaxação do problema (PI) $w = \min\{c(x) : x \in X \subseteq \mathbb{R}^n\}$ se:

- $X \subseteq T$ e
- $f(x) \leq c(x)$ para todo $x \in X$

Proposição 1 Se PR é uma relaxação de PI então $w \geq w^R$.

Demonstração: Se x^* é a solução ótima de PI, então $x^* \in X \subseteq T$ e $w = c(x^*) \geq f(x^*)$.

Como $x^* \in T$, $f(x^*) \geq w^R$ e portanto $w \geq f(x^*) \geq w^R$. \square

Com esse resultado, consegue-se uma maneira de determinar o valor **limitante inferior** para o problema inteiro. Basta encontrar um problema relaxado do problema original e determinar sua solução ótima. Um problema simples que pode ser considerado uma relaxação de um problema inteiro é o problema linear definido eliminando suas condições de integridade.

Definição 2 (Problema Linear Relaxado) Para um problema inteiro $\min\{c^t x : x \in P \cap \mathbb{Z}^n\}$ em que $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$, o problema linear relaxado é o problema linear $w^{PL} = \min\{c^t x : x \in P\}$.

Obtendo limitantes \underline{w} e \bar{w} iguais, é possível afirmar que a solução em mãos é a ótima global do problema. Esse resultado define a condição de otimalidade implícita de uma solução factível do problema inteiro.

Essa condição também pode ser aplicada a problemas não lineares inteiros [8], porém a determinação dos limitantes é bem mais complexa e isso dificulta a resolução desse outro tipo de problemas.

3.3 Método *Branch and Bound*

Nesta Seção será estudado e analisado o Método *Branch and Bound* para resolução de problemas lineares inteiros (PLI) e inteiros mistos (PLIM). Tal método foi desenvolvido inicialmente por [10] em 1960 e desde então houve muito aperfeiçoamento na estrutura de seu algoritmo. No artigo de [11], estão sintetizadas as diversas vertentes do Método *Branch and Bound*.

Trata-se de um método exato de enumeração, pois avalia todas as possíveis soluções de um problema inteiro e determina assim suas soluções ótimas, que se baseia na ideia de “Dividir

para Conquistar”: divide o problema inteiro original em pequenos subproblemas mais simples, tornando a busca pela solução inteligente e eficiente.

Para descrever o método, considere o PLIM padrão abaixo:

$$w = \min_x \{c^t x\} \quad (3.43)$$

$$\text{s.a.} \quad x \in S \quad (3.44)$$

em que o vetor de variáveis x é partitionado em dois vetores x_I e x_R tais que $x_I \in S \cap \mathbb{Z}$ são as variáveis inteiras e $x_R \in S \cap \mathbb{R}$, as variáveis reais.

Suponha que esse problema original seja decomposto em vários subproblemas menores e menos complexos, vale então a seguinte proposição:

Proposição 2 *Seja $S = S_1 \cup \dots \cup S_K$ uma decomposição de S em subconjuntos menores e seja w^k a solução ótima do problema com região factível S_k , para $k = 1, \dots, K$. Então, a solução ótima global $w^* = \min_{k=1, \dots, K} w^k$.*

A enumeração de todos os pontos da região factível S do problema inteiro misto original é inviável, pois para problemas de grandes dimensões, o número de pontos da região factível é bem grande. Como realizar, então, uma busca pelo ponto ótimo de maneira inteligente?

O método *Branch and Bound* utiliza uma estrutura de dados denominada Árvore Enumerativa para auxiliar essa busca. Nessa árvore são enumeradas todas as soluções factíveis do problema inteiro original, tanto explicitamente quanto implicitamente.

3.3.1 Árvore Enumerativa

Uma árvore, no contexto de linguagem de programação, é uma estrutura de dados em que se preserva uma relação hierárquica entre seus elementos. Utilizando uma definição recursiva, uma árvore é formada por um nó raiz e suas subárvore descendentes. Uma subárvore, por sua vez, também é uma árvore, possui um nó raiz com subárvore descendentes. Para completar sua definição, uma árvore pode assumir um valor nulo.

Para exemplificar, observe a ilustração na Figura 3.2 abaixo. Ela consiste em uma árvore com raiz A com três subárvore descendentes cujas raízes são B , C e D . As subárvore de raízes B e C não possuem descendentes, enquanto que a última subárvore (com raiz D) possui apenas um descendente: a subárvore de raiz em E .

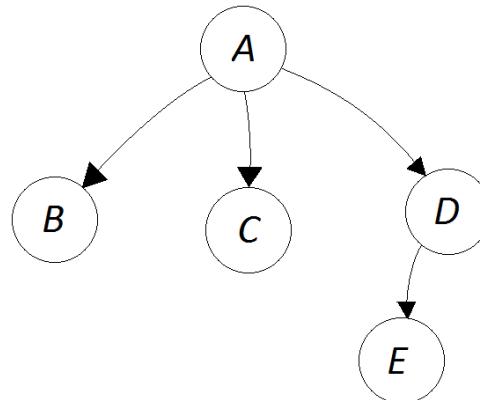


Figura 3.2: Exemplo de uma Árvore

Usam-se algumas nomenclaturas adicionais referentes a esse tipo de estrutura:

- O nó A é pai dos nós B, C e D.
- O nó E é filho do nó D.
- Os nós B, C e E não possuem descendentes e por isso são denominados nós-folha.
- A árvore mostrada tem altura igual a 3, já que possui 3 níveis de descendência.

Uma árvore enumerativa é uma estrutura do tipo ilustrado acima em que se armazena em cada nó um problema linear relaxado. A relação de hierarquização na árvore enumerativa é mantida de maneira que a união das regiões factíveis dos problemas filhos de um nó é a sua própria região factível.

Por exemplo, observe a Figura 3.3 abaixo. O problema linear armazenado no nó raiz tem região factível S e seus descendentes S_1 e S_2 , logo, por se tratar de uma árvore enumerativa, pode-se afirmar que $S = S_1 \cup S_2$.

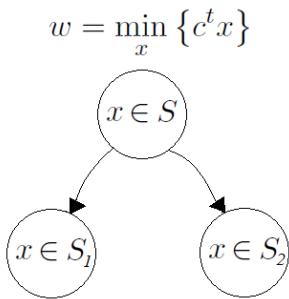


Figura 3.3: Árvore Enumerativa

Pela Proposição 2, a solução ótima de um problema que se encontra num nó da árvore enumerativa é a melhor solução dentre as soluções ótimas dos subproblemas dos seus nós filhos.

Com o conceito de árvore enumerativa solidificado, é possível continuar com o detalhamento do método *Branch and Bound*. Esse método baseia-se em duas ações que caracterizam a sua nomenclatura:

- *BRANCH* (Ramificação): Se o nó da árvore representar um problema ativo, ou seja, passível de se ramificar, realiza-se a separação em k novos subproblemas.
- *BOUND* (Poda/Limitação): Avaliam-se todos os nós ainda não avaliados e os qualifica individualmente como ativo ou limitado (podado).

Ao final da execução do algoritmo, todos os nós da árvore terão sido avaliados e dentre eles estará o nó cujo problema associado possui a solução ótima problema inteiro original. É claro que isso é válido apenas quando existe solução ótima para o problema original.

Diferentemente dos métodos não-exatos de resolução de problemas lineares inteiros, o método *Branch and Bound*, determina com exatidão, salvo erros de arredondamento e à infactibilidade, a solução ótima global do problema original.

3.3.2 Formulação Genérica

A formulação genérica do Método *Banch and Bound* para resolução de um problema linear inteiro (PLI) ou inteiro misto (PLIM) consta das seguintes etapas:

1. INÍCIO DO ALGORITMO: Inicializa a lista de problemas ativos, inserindo o problema original e faz $w = \infty$.
2. Se a lista estiver vazia, vá ao Passo 6.
3. Remova um problema P^i da lista de problemas ativos e resolva o problema linear relaxado associado.
4. AVALIAÇÃO
 - (a) Se a região factível do problema P^i for vazia, realiza a PODA por infactibilidade. Volta para o Passo 2.
 - (b) Se a solução ótima do PL relaxado w^i for tal que $w^i \geq w$, então realiza a PODA por limitação. Volta para o Passo 2.
 - (c) Se a parte x_I^i solução ótima do PL relaxado for inteira, então atualiza $w = w^i$ e realiza a PODA por otimalidade. Volta para o Passo 2.
5. Ramifica o problema P^i em k subproblemas e os insere na lista de nós ativos. Volta para o Passo 2.
6. FIM DO ALGORITMO: Se $w < \infty$, então Solução Ótima foi encontrada.

O método estuda o problema linear relaxado do problema original e determina sua solução ótima. Obviamente se a solução ótima do problema linear relaxado for factível para o problema original, então será também solução ótima do problema inteiro original.

Entretanto caso não seja solução factível para o problema original, existe um elemento x_j^* do vetor x_I da solução ótima do problema linear relaxado que não pertence ao conjunto dos números inteiros, ou seja, sua parte fracionária não é nula.

Segundo o algoritmo, é necessário realizar a ramificação da árvore. Isso indica que se deve separar a região factível do problema original S em k conjuntos S_1, \dots, S_k , formando k novos subproblemas.

Na implementação realizada, optou-se por dividir a região factível original em dois novos conjuntos, da seguinte maneira:

$$S_1 = \{x \in S : x_j \leq \lfloor x_j^* \rfloor\} \text{ e } S_2 = \{x \in S : x_j \geq \lfloor x_j^* \rfloor + 1\} \quad (3.45)$$

em que o operador $\lfloor x \rfloor$ resulta no maior número inteiro que é menor ou igual a x .

Seja o seguinte problema exemplo:

Exemplo 1

$$w = \min_{x_1, x_2} \{-4x_1 - 9x_2\} \quad (3.46)$$

$$s.a. \quad x_1 + 3x_2 \leq 10 \quad (3.47)$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 15 \quad (3.48)$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \quad (3.49)$$

A solução ótima do seu problema linear relaxado é $(x_1, x_2) = (5, 1\frac{2}{3})$. Note que essa solução não satisfaz as condições de integridade do problema original e portanto não é solução factível. A variável x_2 possui valor não-inteiro, logo a ramificação deverá ser feita em cima dessa variável. Divide-se a região factível do problema original S em dois conjuntos S_1 e S_2 , tais que

$$S_1 = \{x \in S : x_2 \leq 1\} \text{ e } S_2 = \{x \in S : x_2 \geq 2\} \quad (3.50)$$

A representação dessa separação é ilustrada na Figura 3.4 abaixo. Note que essa separação não exclui soluções factíveis do problema original. Dada uma solução factível do problema original, ela pertence ao conjunto S_1 ou ao conjunto S_2 .

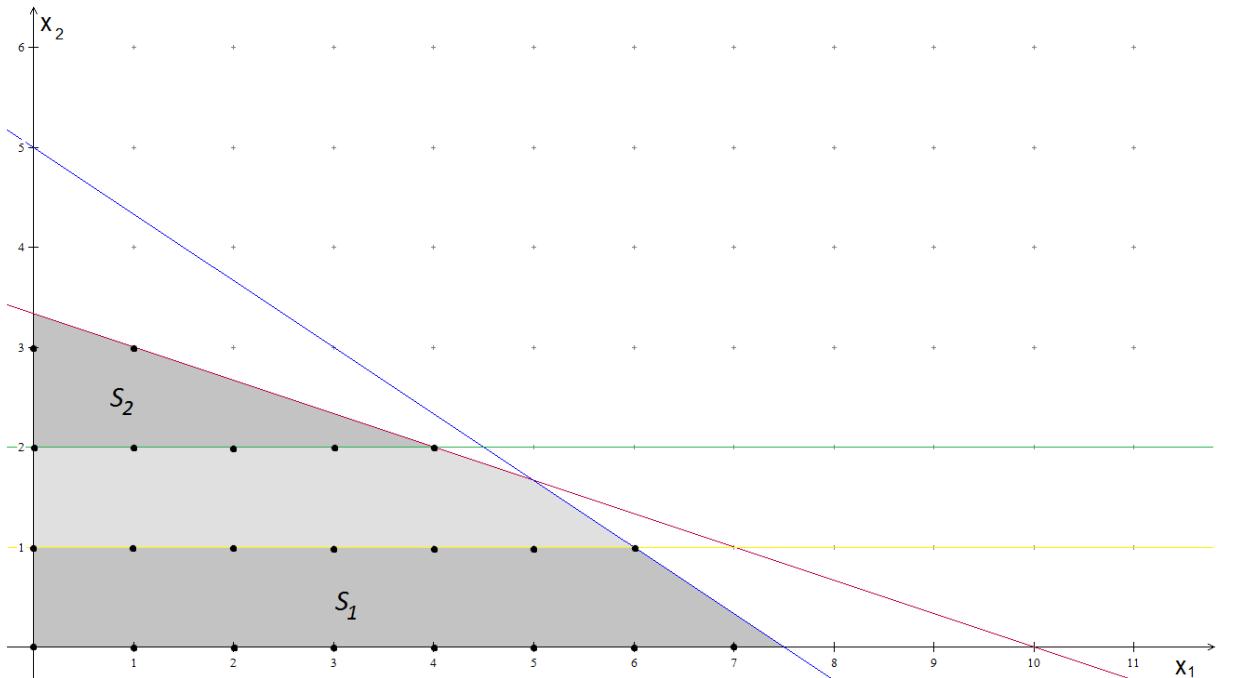


Figura 3.4: Separação do Problema Original

As soluções ótimas para os novos subproblemas são $(x_1, x_2) = (6, 1)$, com $w = -33$ para a região S_1 e $(x_1, x_2) = (4, 2)$, com $w = -34$ para a região S_2 . Ambas soluções são inteiras e factíveis para o problema original. Observando o valor da função objetivo para as duas soluções, conclui-se que a solução $(x_1, x_2) = (4, 2)$ é a ótima global do problema.

Agora seja um exemplo em que há mais de uma variável com valor ótimo não inteiro. Qual delas escolher para realizar a ramificação? Realizada a ramificação, serão formados dois novos problemas que serão inseridos na lista de problemas ativos, segundo a formulação genérica mostrada no início desta Seção. Qual dos problemas contidos nessa lista deverá se analisado primeiro? As respostas para essas perguntas serão apresentadas nas seções a seguir.

3.3.3 Escolha da Variável para Ramificação

Existem vários métodos para escolher sobre que variável será ramificado o problema analisado [11]. Um primeiro critério é a escolha da variável cuja parte fracionária está mais próxima de 0,5. Ao escolher uma variável nesse critério, elimina-se uma grande parte da região factível do problema linear relaxado após a ramificação.

Outro processo de escolha é através da estimativa por pseudocustos. Os pseudocustos de uma variável são valores que exprimem o quanto incrementa a função objetivo quando se aumenta ou diminui em uma unidade da variável. Para cada variável x_j existem dois tipos de pseudocustos, um pseudocusto denominado de redução (P_j^-) e outro de aumento (P_j^+).

A obtenção desses valores é feita através de estimativas e pode-se utilizar as seguintes expressões para estimá-los:

$$P_j^- = \frac{w_{PL}^{k-} - w_{PL}^k}{f_j^k} \quad (3.51)$$

$$P_j^+ = \frac{w_{PL}^{k+} - w_{PL}^k}{1 - f_j^k} \quad (3.52)$$

em que:

- w_{PL}^k é o valor ótimo para o problema relaxado k ;
- w_{PL}^{k+} e w_{PL}^{k-} são os valores ótimos para os problemas relaxados resultantes do aumento e diminuição, respectivamente, da variável x_j ;
- $f_j^k = x_j - \lfloor x_j \rfloor$ é a parte fracionária do valor da variável x_j na solução ótima para o problema relaxado.

A partir desses pseudocustos, escolhe a variável x_j , tal que

$$\max_j \{\max[P_j^- f_j^k, P_j^+ (1 - f_j^k)]\} \quad (3.53)$$

A utilização de pseudocustos nem sempre é vantajosa, pois exige a execução de mais cálculos que o critério dito anteriormente. Além disso, a escolha por pseudocustos pode não diminuir muito o número de problemas lineares na árvore enumerativa final do método *Branch and Bound* quando comparada com a escolha por variável de parte fracionária mais próxima de 0,5.

3.3.4 Escolha do Subproblema

No passo 3 da formulação genérica do Método *Branch and Bound*, é necessário retirar da lista de problemas ativos um problema para ser avaliado. A decisão de escolher que problema retirar também pode ser levado em conta como um critério de desempenho do método.

Nesse contexto, existem dois tipos de critérios para escolha do subproblema a ser avaliado:

- FIFO (*First In First Out*): Consiste em tratar a lista como sendo uma estrutura do tipo Fila, em que sempre é selecionado o primeiro nó que foi inserido. Dessa maneira realiza-se uma Busca em Largura na Árvore Enumerativa.
- LIFO (*Last In First Out*): Diferentemente do critério acima, a lista é considerada como uma estrutura Pilha, onde é retirado sempre o último elemento inserido. Nesse tipo de escolha, é feita uma Busca em Profundidade na Árvore Enumerativa.

Para ilustrar os métodos de busca da solução ótima do problema através da árvore enumerativa, é mostrada na Figura 3.5 a ordem de avaliação dos dois critérios de seleção .

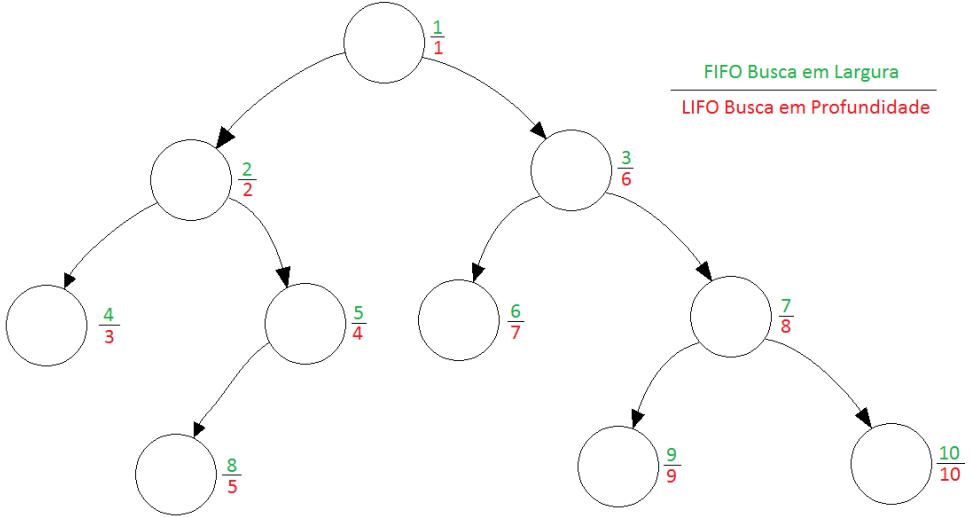


Figura 3.5: Buscas na Árvore Enumerativa

3.4 Estudos de Meta-heurísticas

Serão apresentados, agora, conceitos e filosofias de alguns métodos meta-heurísticos aplicados nas diversas áreas da matemática aplicada e engenharia. O enfoque principal é dado para o problema de expansão de redes apresentado até então, porém serão dadas ideias gerais dos algoritmos estudados. Compõem outra classe de métodos de resolução de problemas inteiros e inteiros mistos.

As meta-heurísticas são técnicas de resolução de problemas de otimização largamente empregadas devido a fatores importantes [12], tais como:

- São relativamente fáceis de serem compreendidas e implementadas, quando comparadas a técnicas exatas.
- Exigem menos esforços computacionais.
- Apresentam elevada eficiência para problemas de médio e grande porte.

Recebem este nome pois surgem de adaptações realizadas em métodos heurísticos já existentes, tornando-os mais robustos e mais inteligentes. Num contexto geral, um método heurístico é aquele que se baseia em um propósito de seleção de soluções e gera um algoritmo capaz de buscar soluções boas para um dado problema, sem entretanto garantir a optimidade.

Antes de apresentar as técnicas meta-heurísticas, serão apresentadas abaixo algumas definições importantes para o desenvolvimento desses algoritmos.

Definição 3 (Espaço de Busca) Define-se *Espaço de Busca* de um problema, o conjunto de todas as soluções candidatas a sua solução ótima, sendo estas factíveis ou não.

Os elementos do espaço de busca de um problema são definidos segundo uma codificação.

Definição 4 (Codificação) Notação matemática para a solução candidata à solução ótima de um problema.

Por exemplo, no caso do problema de expansão de redes, uma solução pode ser definida usando a notação de um vetor de nr posições, em que nr é o número de ramos do sistema

que podem receber novas linhas de transmissão. Cada posição desse vetor representa o total de novas linhas que devem ser inseridas, caracterizando assim um plano de expansão. Isso indica que através da codificação, é possível caracterizar as configurações do problema analisado.

Definição 5 (Configuração) *Dado um problema, uma configuração é um dos elementos do seu espaço de busca.*

De uma maneira geral, os métodos meta-heurísticos geram uma sequência de configurações que tendem a solução ótima do problema aplicado. Partem de uma configuração inicial e em seguida busca uma nova configuração em um subconjunto do Espaço de Busca. Dependendo do método, esta nova configuração pode ou não ser melhor que a configuração atual. Segue-se neste algoritmo até a satisfação de um critério de parada.

As configurações de uma dada iteração são denominadas *Configurações Correntes*. Os métodos Busca Tabu e *Simulated Annealing* possuem apenas uma configuração corrente por iteração, enquanto que os Algoritmos Genéticos apresentam um conjunto de configurações correntes.

Definição 6 (Vizinhança de um Configuração e Configurações Vizinhas) *Dada uma iteração k do algoritmo meta-heurístico. Ao subconjunto do Espaço de Busca onde serão procuradas as configurações correntes da iteração seguinte $k + 1$, é dado o nome de **Vizinhança da Configuração Corrente**. Cada um de seus elementos é chamado **Configuração Vizinha** da configuração atual.*

Antes de apresentar as técnicas meta-heurísticas estudadas, serão introduzidas ainda as características de um tipo de método heurístico para resolução do problema de expansão de redes de transmissão. Devido às suas abordagens, esse método é denominado Algoritmo Heurístico Construtivo (AHC).

3.4.1 Algoritmo Heurístico Construtivo (AHC)

O Algoritmo Heurístico Construtivo é uma técnica de resolução de problemas de expansão de redes de transmissão altamente empregadas devido à sua facilidade de implementação e exigir pouco esforço computacional. Apesar dessas características, o AHC nem sempre encontra a solução ótima global do problema de expansão, convergindo para um ótimo local, principalmente para sistemas de médio a grandes portes [13].

Esse tipo de algoritmo parte de uma configuração original e seguem acrescentando linhas em ramos escolhidos segundo um critério heurístico. Continua-se nesse processo até se obter uma solução factível para o sistema elétrico, onde todas as cargas são atendidas e a linhas transportam potência dentro dos seus limites estipulados.

As variedades de algoritmos heurísticos construtivos se diferenciam pela maneira de escolher o ramo onde será inserida a linha a cada passo. Para tanto, cada uma das abordagens desse algoritmo define para os ramos da rede, a cada iteração, um Índice de Sensibilidade (IS) ou índice de desempenho.

Ramos com maiores índices de sensibilidade garantem, a um menor custo, um impacto maior ao sistema elétrico quando nele é inserido uma nova linha.

O algoritmo heurístico construtivo proposto por [6] formula o problema de expansão segundo o Modelo de Transportes, entretanto o relaxa eliminando a restrição de integralidade das variáveis

s_ℓ . Resolve-se o problema linear resultante e usa o seguinte critério para determinar o índice de sensibilidade dos ramos da rede:

$$IS_\ell = s_\ell \bar{P}_\ell^L \quad \forall \ell \in L^C \quad (3.54)$$

Acrescenta-se uma linha no ramo com maior índice de sensibilidade e, em seguida, reformula-se o problema linear, realizando as devidas mudanças relativas ao acréscimo desta nova linha. Resolve-se o novo problema formulado e determinam-se novos valores de índices de sensibilidade. Repete-se esse processo até o ponto em que o problema linear apresenta solução $s_\ell = 0, \forall \ell \in L^C$.

Esse AHC foi implementado para gerar uma solução inicial para o método meta-heurístico Busca Tabu, como será detalhado mais adiante. No que segue serão apresentadas algumas técnicas de meta-heurísticas estudadas e suas filosofias de resolução de problemas.

3.4.2 Simulated Annealing

Annealing é um processo industrial de recozimento de materiais, solicitado quando necessita-se eliminar as tensões presentes na estrutura cristalina dos materiais. Trata-se de um aquecimento até uma temperatura crítica seguido de um resfriamento lento e natural. Nesse processo a estrutura cristalina do material rearranja-se de maneira a formar uma configuração de menor energia livre.

Os princípios do algoritmo *Simulated Annealing* são baseados na simulação deste processo físico [14]. A busca pela energia mínima do sistema assemelha-se ao processo de otimização do problema. A cada iteração o problema parte para uma nova solução (nova condição para a estrutura cristalina) e segue até encontrar-se em uma situação em que a energia é mínima.

A grandeza física que controla o processo de recozimento é a temperatura e esta também é representada no algoritmo *Simulated Annealing*. Define-se uma variável, denotada por T , que controlará o processo de convergência do método. Partindo de uma temperatura inicial T_0 , ela se aproxima do valor da temperatura ambiente, T_∞ definindo assim o fim do algoritmo.

A atuação da variável temperatura no algoritmo é feita através da elaboração da probabilidade de escolha. O método *Simulated Annealing*, assim como os outros métodos heurísticos, se inicia com uma configuração inicial para o problema (x^0) e gera a partir desta várias outras configurações vizinhas. Para este método em específico um elevado número de vizinhos não se transforma em um limitante do método, pois a partir de uma configuração atual, escolhe-se aleatoriamente um de seus vizinhos x' para se tornar uma possível configuração futura. Para tanto, a configuração candidata deve satisfazer o critério de seleção:

- Se a configuração candidata for melhor que a configuração corrente, ela passa a ser escolhida como próxima solução. Em um problema de minimização é o mesmo que verificar se $f(x^0) > f(x')$, sendo $f(x)$ a função objetivo a ser otimizada.
- Mesmo sendo pior, a configuração candidata ainda pode ser escolhida por um critério probabilístico definido pela temperatura. Quanto mais alta for a temperatura, maior será a chance da configuração pior ser escolhida. Por exemplo, para o mesmo problema de minimização, pode-se definir um valor limitante $L = e^{\frac{f(x^0)-f(x')}{T}}$ e sortear um número entre 0 e 1 e verificar: se o número for maior que L, escolhe-se como próxima configuração a solução

candidata x' , caso negativo, escolhe-se outra configuração vizinha para ser candidata à configuração corrente.

Esse controle pela temperatura assemelha-se com o processo industrial, já que a altas temperaturas, o material pode apresentar uma configuração bem instável para sua estrutura cristalina. Sendo que a passagem para outra configuração nem sempre garante diminuição da energia do sistema.

O algoritmo pode ser então definido da seguinte maneira:

1. Inicializa as variáveis $x = x^0$, $T = T_0$, $k = 0$;
2. Gera o conjunto $N(x)$ de vizinhos da configuração corrente;
3. Seleciona um vizinho aleatoriamente x' no conjunto $N(x)$;
4. Se o vizinho escolhido for melhor que a configuração corrente ou se, escolhido um valor aleatório δ entre 0 e 1, $\delta \geq e^{\frac{f(x^0) - f(x')}{T}}$, faz-se $x = x'$ e segue para o Passo 5. Caso negativo, volte ao Passo 3;
5. Incrementa-se k e determina-se a nova temperatura $T = T(k)$.
6. Se o critério de parada for satisfeito, pare. Senão volte ao Passo 2.

Pode-se incluir no algoritmo acima, uma variável de controle do número máximo de tentativas para encontrar uma próxima solução corrente dada uma certa temperatura. Este valor máximo pode variar também ao longo do algoritmo, acelerando assim o processo de convergência do método.

Aplicações deste meta-heurística em problemas de expansão de redes de transmissão de energia elétrica podem ser encontradas em [15] e [16].

3.4.3 Algoritmos Genéticos

Os Algoritmos Genéticos são métodos meta-heurísticos que se baseiam em conceitos de genética e de evolução natural. Proposto por [17], o Algoritmo Genético implementa dois conceitos primordiais na evolução das espécies, a seleção natural e a reprodução sexuada, para resolução de problemas complexos de diversas áreas.

Inicia-se o algoritmo com uma população aleatória de indivíduos (configurações), obtida de maneira a garantir uma variedade bem grande entre os indivíduos para que a seleção seja eficiente. Um agente de seleção natural avalia cada indivíduo da população e determina aqueles mais bem adaptados, ou seja, as melhores configurações. Estas ganham o direito de passar para a próxima geração suas características, através dos operadores genéticos.

Estes operadores devem atender um requisito básico para serem eficientes, que é transmitir para a próxima geração de indivíduos as características dos melhores indivíduos atuais sem gerar novas configurações idênticas, procurando sempre a diversificação dos elementos, evitando assim a convergência para um ótimo local. Dentre os operadores, podem ser citados como principais o operador de recombinação e o operador de mutação.

O operador de recombinação é responsável por realizar a troca de material genético entre duas configurações. Pode ser implementado usando técnica de recombinação de um simples ponto,

onde escolhe-se um ponto aleatoriamente no vetor de codificação dos indivíduos-pais e geram-se novos indivíduos filhos recombinando as partes obtidas pela separação dos vetores neste ponto. A Figura 3.6 descreve este processo de maneira autoexplicativa.

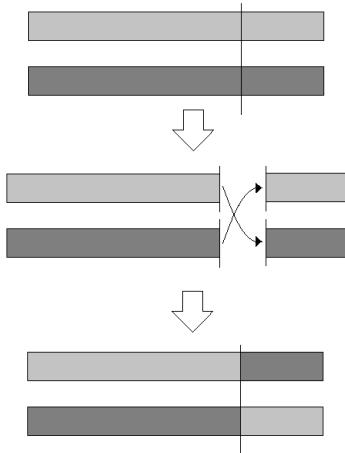


Figura 3.6: Recombinação de um Simples Ponto

O operador genético de mutação por sua vez é responsável por modificar as configurações genéticas dos novos indivíduos gerados pelo operador de recombinação, de maneira aleatória, alterando uma ou várias entradas do vetor de codificação. Este operador pode garantir a diversidade dos indivíduos da nova população.

O processo segue até um certo número de gerações, onde se supõe que os indivíduos apresentam características marcantes da solução ótima do problema. Então é feita uma busca pelos indivíduos e seleciona-se o mais bem adaptado para ser a solução ótima encontrada pelo algoritmo.

Obviamente, esse processo não garante encontrar a solução ótima global do problema, assim como as outras técnicas meta-heurística. Entretanto pode-se estipular um valor limite para a solução ótima, isto é, se em alguma geração houver um indivíduo melhor que tal valor, esse pode ser escolhido como solução para o problema analisado.

Trabalhos como [18] e [19] apresentam abordagens dessa meta-heurística para resolução do problema de expansão de redes de transmissão de energia elétrica.

3.4.4 Busca Tabu

O método Busca Tabu, diferentemente dos outros dois métodos meta-heurísticos apresentados anteriormente, não se baseia em nenhum processo físico ou biológico. Sua filosofia de resolução é baseada exclusivamente em conceitos de inteligência artificial. Foi proposta inicialmente por [20] e fundamenta-se no princípio de memória adaptativa e na exploração sensível.

Como outro método meta-heurístico, a Busca Tabu parte de uma configuração inicial x^0 e define uma vizinhança para esta configuração $N(x^0)$ e obtém desta vizinhança uma nova configuração que passa a ser a próxima configuração corrente. Entretanto, há algumas peculiaridades deste método:

1. Nem sempre o método escolhe uma solução melhor que a configuração corrente. O método em si busca a menos pior das soluções vizinhas para serem candidatas à configuração corrente.

2. O conjunto de vizinhos de uma configuração não é definida estaticamente. A cada solução corrente, a maneira de se definir a vizinhança altera. Isso ocorre devido principalmente a fatores como:

- Proibição de configurações por conta de uma lista Tabu. Para definir um conjunto de vizinhos de uma configuração corrente, são aplicados alguns atributos, como por exemplo, aumentar em uma unidade uma posição do vetor da configuração. Desta maneira, ao eleger uma solução corrente, verifica-se a sua procedência, isto é, verifica-se qual atributo foi aplicado para a criação da configuração escolhida e proíbem-se as próximas configurações que surgem da aplicação deste atributo por um número T de iterações do método.

Para melhor explicar esta proibição de atributos, seja uma solução corrente x e uma operação $V(x)$ que gera uma nova configuração vizinha x' , ou seja, $V(x) = x'$. Esta operação pode ser, por exemplo, o aumento ou diminuição de uma das entradas do vetor de codificação da configuração x . Se o algoritmo selecionar x' como próxima solução corrente, então a operação $V(x)$ gerará configurações proibidas durante um número T de iterações.

- Estratégias de Redução de Vizinhanças. Muitas vezes o método Busca Tabu torna-se inviável devido ao tamanho da vizinhança gerada a cada iteração já que este método avalia cada uma das configurações vizinhas. Para contornar este problema existem técnicas de redução de vizinhanças
- Utilização de Configurações de Elite para gerar novas vizinhanças. Dessa maneira armazena-se as melhores soluções já ocorridas ao longo do algoritmo e as utilizam sempre para geração das vizinhanças a cada iteração.
- Redefinir a caracterização da vizinhança durante a execução. Alterações na maneira como são geradas as novas configurações vizinhas podem ser feitas ao longo do algoritmo. Essa abordagem é realizada quando se tem conhecimento do problema a ser aplicado.

A lista tabu pode em algumas situações proibir configurações bem atrativas, restringindo escolhê-las para serem configurações correntes. Devido a esse fato, incorpora-se ao algoritmo um critério de aspiração, que, quando é satisfeito, libera uma solução proibida, tornando-a eleita à configuração menos pior da vizinhança. Esse critério de aspiração pode liberar as soluções que sejam melhores que a solução corrente, por exemplo. Ou mesmo liberar as configurações que já se apresentou como melhor nas últimas k_p iterações do método.

Como afirmado por [20], a incorporação de memória no método o torna mais inteligente e a busca pela solução ótima torna-se mais eficiente. O algoritmo Busca Tabu mais simples, denominado Busca Tabu com Memória de Curto Prazo, consiste em apenas uma lista tabu de atributos e um critério de aspiração.

O algoritmo parte de uma solução inicial e busca dentre as soluções vizinhas a menos pior que não está proibida, ou que estando, satisfaça o critério de aspiração. Essa configuração é eleita a próxima solução corrente do algoritmo e o atributo que a gerou nessa etapa é incluído na lista tabu. Continua-se o processo até obter uma vizinhança onde todos os elementos estejam proibidos e não satisfazem o critério de aspiração.

Existem técnicas avançadas que podem ser empregadas para melhorar o desempenho do algoritmo Busca Tabu de memória de curto prazo [12]. Dentre elas podem ser citadas Intensificação e Diversificação, Oscilação estratégica, uso de Configurações de Elite, etc. Outras alteram o tipo de memória incorporada do método, mudando-a para uma abordagem de médio ou longo prazo. O artigo [21] apresenta uma aplicação do método Busca Tabu em problema de expansão de redes de transmissão de energia elétrica. Nele são propostas fases de intensificação e diversificação, além de utilizar conceitos de memória de médio a longo prazo.

3.5 Metodologias Empregadas para Resolução de Problema PERT

Com o intuito de comparar os métodos de resolução do problema tradicional do planejamento da expansão de redes de transmissão, foram implementados o Método *Branch and Bound* e o Método Busca Tabu, como já foi mencionado.

São diferentes na forma como abordam a busca pela solução do problema, sendo o primeiro um método exato que realiza uma busca exaustiva através da região factível do problema, contudo garante a solução ótima e o segundo, que, apesar de não garantir a solução ótima do problema, encontra soluções boas e de maneira mais rápida.

Seguem as descrições das simulações realizadas para comparar esses métodos de resolução.

3.5.1 Método Exato: Método *Branch and Bound*

Avaliou-se o método *Branch and Bound* tomando como referência os dois tipos de abordagem de seleção dos nós da árvore enumerativa (FIFO e LIFO). Como critério de ramificação dos nós da árvore foi definido como sendo pela variável inteira cuja parte fracionária é a mais próxima do valor 0,5.

O algoritmo para resolução do problema de expansão modelado é o ilustrado no fluxograma da Figura 3.7.

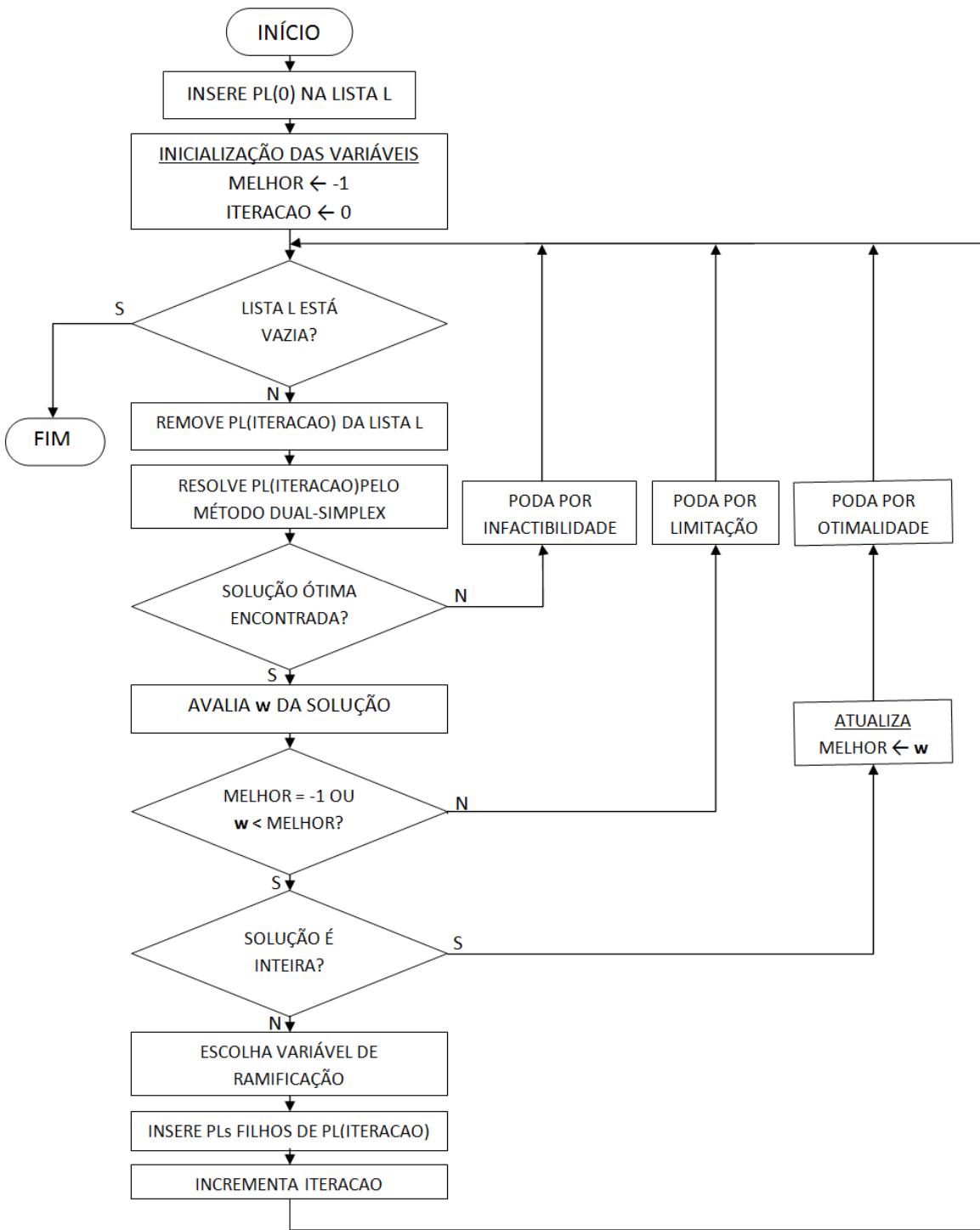


Figura 3.7: Fluxograma do Algoritmo *Branch and Bound*

Foram avaliados dois sistemas elétricos para obtenção dos resultados:

- Sistema com 6 Barras [6] .
- Sistema IEEE 24 Barras com redespacho da geração.

Os dados das linhas e barras desses sistemas são encontrados no Apêndice B.

3.5.2 Método Meta-heurístico: Busca Tabu

Serão apresentados os detalhes da aplicação do Método Busca Tabu na resolução do problema de planejamento de expansão de redes de transmissão implementada neste trabalho.

Codificação

A codificação utilizada para as configurações é representada por um vetor de nr posições inteiras, cujos valores variam de 0 até n^{MAX} . Cada posição r deste vetor indica o número de novas linhas adicionadas ao ramo r do circuito da rede. Este tipo de notação para os elementos de busca recebe o nome de codificação decimal, pois cada entrada do vetor é um número inteiro. Existe outro tipo de notação, o qual denomina-se codificação binária, em que os números de novas linhas inseridas nos ramos são representados na sua forma binária.

O espaço de busca adotado, portanto, constitui-se no conjunto S definido abaixo.

$$S = \{x \in \mathbb{Z}^{nr} : 0 \leq x_i \leq n^{MAX}, \forall i \in \{1, \dots, nr\}\} \quad (3.55)$$

Caracterização da Vizinhança

Para geração de vizinhança optou-se por inserir e retirar linhas de apenas um ramo do circuito da configuração corrente. O número máximo de linhas inseridas ou retiradas foi escolhido como sendo igual a 2. Desta maneira, a partir de uma configuração corrente, pode-se obter no máximo $2 \cdot nr$ novas configurações vizinhas removendo linhas nos ramos do circuito (nr configurações resultado da remoção de uma linha apenas em cada ramo da configuração corrente e nr , resultado da remoção de duas linhas) e no máximo também $2 \cdot nr$ novas configurações vizinhas acrescentando linhas na configuração corrente.

Com essas operações de geração de configurações vizinhas, pode-se totalizar um número máximo de $4 \cdot nr$ elementos na vizinhança de uma configuração. Obviamente este número é dificilmente alcançado devido às limitações dos valores do código das soluções, isto é, não é possível retirar linha em ramos com 0 novas linhas inseridas, nem menos, inserir em ramos com n_{max} novas linhas já inseridas.

Como característica do método Busca Tabu, a cada vizinho gerado, é realizada a chamada do método Dual Simplex para verificar sua factibilidade segundo o Modelo de Transportes Modificado. Além de verificar a factibilidade, utiliza-se o valor da função objetivo para ser incluída na avaliação dos vizinhos de uma configuração corrente. Para tanto, é determinado para cada um deles um Valor de Desempenho (VD) definido pela expressão abaixo:

$$VD = v + \alpha w \quad (3.56)$$

em que

- $v = \sum_{\ell \in L^C} c_\ell^L s_\ell$ é o custo total das novas instalações proposta pela configuração.
- $w = \sum_{n \in N} r_n$ é o valor da função objetivo do problema linear resolvido para verificar a factibilidade da solução proposta. Este fator interfere proibindo que o método aceite soluções infactíveis com baixo custo total de instalação.

- α é denominado Fator de Penalidade. Para que seja comparável numericamente com o valor v (custo total de instalação), esta constante α é determinada pela expressão $\alpha = \alpha' \cdot c^{MAX}$, em que c^{MAX} é o maior custo individual de instalação e α' é um parâmetro para o algoritmo Busca Tabu.

Tratamento de Infactibilidades

Como pode ser observado na seção anterior, a implementação realizada considera a opção de escolher uma solução não factível para se tornar a solução corrente. Entretanto ela é penalizada pelo fator α definido como parâmetro do método.

Outro ponto do método em que se avalia a factibilidade da solução é durante a verificação do critério de aspiração, no qual não se aceitam soluções infactíveis que estejam proibidas para se tornarem configurações correntes.

Lista Tabu

Ao ser escolhida uma configuração proveniente de uma modificação do ramo k , seja ela inserção ou remoção, proíbem-se ações neste ramos por um número T de iterações. Este ramo k é então adicionado na lista Tabu do método por T iterações.

Critério de Aspiração

Para apresentar o critério de aspiração adotado, o qual permite escolher uma configuração vizinha proibida para se tornar a solução corrente da iteração seguinte, as situações serão separadas em dois casos:

1º CASO: Solução Corrente é factível:

Nesse caso, só se aceitará uma configuração proibida se for a melhor dentre todas configurações vizinhas, for factível e possuir um valor de desempenho (VD) menor que o da solução corrente. A princípio, esse critério de aspiração pode parecer guloso, já que somente permite transitar de uma solução factível para outra factível, mas esse pensamento é equivocado, pois a solução proibida será aceita apenas quando for melhor que qualquer outra solução vizinha, inclusive as soluções infactíveis não proibidas.

2º CASO: Solução Corrente é infactível:

Nesse caso aceita-se uma solução proibida se esta for factível e melhor que todas as soluções vizinhas. Aceita-se também uma solução proibida infactível, para esse caso, quando a solução corrente não apresentar configurações vizinhas que não estejam proibidas, isto é, dada uma solução infactível corrente, transita-se para uma solução infactível, caso todas as soluções vizinhas estejam proibidas. Isso garante que o algoritmo não termine com uma solução infactível.

Determinação da Configuração Inicial

A configuração inicial do método Busca Tabu implementado é a resultante da aplicação do Algoritmo Heurístico Construtivo (AHC) no sistema elétrico analisado. Adotando essa técnica para a determinação da configuração inicial, o método converge mais rapidamente para sua solução ótima.

Os sistemas elétricos utilizados para simulação são os mesmos utilizados na avaliação do método *Branch and Bound*.

3.6 Resultados

Seguem os testes realizados para efeito de comparação entre os métodos *Branch and Bound* e *Busca Tabu* aplicados na resolução do problema de expansão de redes de transmissão de energia elétrica.

Para cada sistema elétrico analisado, foram simulados os dois métodos numéricos de resolução e calculado o tempo médio de execução para determinação da solução ótima do problema. Esse tempo médio é resultado de uma média aritmética de 30 simulações para cada algoritmo.

Ambos os métodos encontraram as soluções ótimas do problema, mostrando-se eficazes na resolução do problema de planejamento da expansão.

Para o problema de expansão do sistema de 6 barras, os métodos implementados apresentaram como solução os seguintes valores.

$$\begin{aligned} P_1^G &= 50MW & n_{2-6} &= 3 \\ P_3^G &= 165MW & n_{3-5} &= 1 \\ P_6^G &= 545MW & n_{4-6} &= 3 \end{aligned}$$

Nessa configuração, o valor ótimo do problema tem custo total \$20 000.

Para o sistema IEEE 24 barras, apontaram-se como solução ótima para o problema os seguintes valores para os montantes de geração nodais.

$$\begin{aligned} P_1^G &= 465MW \\ P_2^G &= 576MW \\ P_7^G &= 721MW \\ P_{13}^G &= 1424MW \\ P_{15}^G &= 645MW \\ P_{16}^G &= 465MW \\ P_{18}^G &= 1200MW \\ P_{21}^G &= 1200MW \\ P_{22}^G &= 900MW \\ P_{23}^G &= 954MW \end{aligned}$$

Quanto aos números de novas instalações, obtiveram-se os seguintes valores:

$$\begin{aligned}
n_{3-24} &= 1 \\
n_{6-10} &= 1 \\
n_{7-8} &= 1 \\
n_{10-12} &= 1 \\
n_{14-16} &= 1 \\
n_{16-17} &= 2 \\
n_{16-19} &= 1 \\
n_{17-18} &= 1
\end{aligned}$$

Neste caso o valor ótimo do custo total é \$310 000.

Segue na tabela 3.1, os resultados dos testes de cálculo de tempo de execução de cada método.

Tabela 3.1: Tempo de execução (em ms)

Sistema	Branch and Bound		Busca Tabu
	LIFO	FIFO	
6 Barras	16 ± 6	11 ± 7	83 ± 9
24 Barras	18700 ± 200	3260 ± 20	89000 ± 1000

Observando os dados da tabela 3.1, conclui-se que o método Busca Tabu não apresentou melhoria no desempenho na resolução do problema de expansão das redes dos sistemas elétricos analisados quando comparado com o método exato. O tempo de processamento do método meta-heurístico chega a ser cerca de 27 vezes maior quando comparado ao método exato (Sistema 24 barras, abordagem FIFO).

O mau desempenho do método meta-heurístico pode ser atribuído a alguns fatores:

- Os sistemas elétricos analisados são relativamente pequenos, sendo que os métodos exatos se apresentam ainda mais viáveis que os métodos meta-heurísticos. Testes com sistemas elétricos maiores são requeridos para completar esta afirmação.
- O método Busca Tabu não está inteligente o bastante para a resolução do problema. Para avaliar esta possibilidade é possível alterar a estrutura do método, modificando a maneira de geração de vizinhanças e de exploração dos vizinhos.
- Há uma exaustiva exploração nas vizinhanças das soluções correntes, já que a cada iteração avaliam-se todas as soluções vizinhas da solução em mãos, independentemente se a solução vizinha já foi avaliada anteriormente. A implementação de uma exploração mais inteligente no espaço de busca do problema, visando diminuir o número total de problemas lineares a serem resolvidos, irá decrescer consideravelmente o tempo de execução do método Busca Tabu.

Entretanto a comparação realizada dos métodos através do tempo de execução não é tão relevante para o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão, pois para este tipo de projeto o tempo disponível é grande o suficiente para não ser caracterizado como um

limitante. Portanto, de maneira geral, pode-se afirmar que ambos os métodos se mostraram eficazes na resolução do problema PERT.

Capítulo 4

Análise da Vulnerabilidade de Redes de Transmissão

Esse capítulo irá apresentar toda a formulação matemática necessária para definir o novo modelo do problema de planejamento da expansão de redes de transmissão. Nesse novo modelo, visa-se incorporar a minimização da vulnerabilidade da rede frente a contingências que venham a acontecer nas linhas do sistema.

Na segunda parte do capítulo, serão apresentados os testes e as simulações realizados para validar o novo modelo proposto.

4.1 Introdução

A energia elétrica carrega consigo uma crucial importância nos dias de hoje e a interrupção do seu fornecimento pode causar grandes desastres econômicos para uma nação. Além disso, devido a razões econômicas, ambientais e políticas, em vários países as redes de transmissão não estão sendo devidamente expandidas [22]. Como consequência, as redes de transmissão vêm operando próximas aos seus limites estáticos e dinâmicos, aumentando ainda mais sua vulnerabilidade.

Somadas ambas características, operação próxima aos seus limites e a crucial importância, as redes de transmissão (entende-se aqui redes de transmissão e de distribuição de energia elétrica) se tornam pontos estratégicos para desligamentos intencionais.

Este trabalho estuda modelos matemáticos que incorporam ao Problema de Planejamento de Expansão de Redes de Transmissão (PERT) uma maneira de mitigar a exposição a desligamentos e minimizar a vulnerabilidade da rede elétrica.

4.2 Novo Modelo - Considerando Contingências nas Linhas

Considere que no horizonte de planejamento possam existir diferentes cenários da rede atual, Figura 4.1. Sendo cada cenário a consequência de uma contingência na rede de transmissão. Dessa maneira, a decisão de expansão da rede está sujeita a um fator estocástico.

Por convenção, adota-se a existência de um cenário 0 (zero) no qual supõe-se que não haverá nenhuma contingência no sistema.

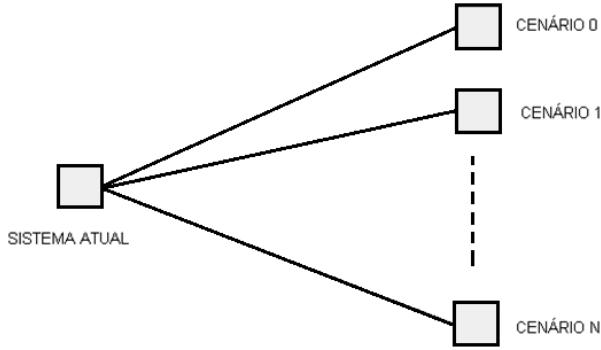


Figura 4.1: Horizonte de Planejamento

Para representar matematicamente cada um desses cenários, será adotada uma variável binária v de dimensão $n_{\ell o}$, número de linhas na rede original, tal que, quando o valor v_ℓ é igual a zero, se indica que a linha ℓ sofreu uma contingência e precisou ser desligada e $v_\ell = 1$, caso não tenha sido retirada.

Portanto, para um sistema com $n_{\ell o}$ linhas, existem um total máximo de $2^{n_{\ell o}}$ cenários diferentes. Esse número é muito grande para redes reais, contudo, baseando-se em um critério de segurança $n - K$, esse número de cenários é reduzido.

Ao especificar o valor K , diz-se que no máximo K linhas do sistema original serão desligadas. Logo, o conjunto de cenários \mathcal{V}_K no critério de segurança $n - K$ é expresso por:

$$\mathcal{V}_K = \{v \in \mathbb{B}^{n_{\ell o}} : \sum_{\ell=1}^{n_{\ell o}} v_\ell \geq n_{\ell o} - K\} \quad (4.1)$$

em que $\mathbb{B} = \{0, 1\}$.

Necessita-se avaliar cada um dos planos de expansão s que o planejador do sistema tem em mãos frente à ocorrência de todos esses possíveis cenários. Para isso, um plano s em um dado cenário definido pela contingência v , pode ser avaliado através do corte de carga mínimo necessário para mantém a operação do sistema.

Denotado por $\mathcal{Q}(s, v)$, o corte de carga mínimo é determinado resolvendo o seguinte problema linear:

$$\mathcal{Q}(s, v) = \min_{\Delta d_n, P_g^G, P_\ell^L, \delta_n} \left\{ \sum_{n \in N} \Delta d_n \right\} \quad (4.2)$$

s.a.

$$\sum_{g \in G_n} P_g^G - \sum_{\ell | O(\ell)=n} P_\ell^L + \sum_{\ell | R(\ell)=n} P_\ell^L = d_n - \Delta d_n \quad \forall n \in N \quad (4.3)$$

$$P_\ell^L = \frac{v_\ell}{x_\ell} [\delta_{O(\ell)} - \delta_{R(\ell)}] \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.4)$$

$$P_\ell^L = \frac{s_\ell}{x_\ell} [\delta_{O(\ell)} - \delta_{R(\ell)}] \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.5)$$

$$0 \leq P_g^G \leq \bar{P}_g^G \quad \forall g \in G \quad (4.6)$$

$$-\bar{P}_\ell^L \leq P_\ell^L \leq \bar{P}_\ell^L \quad \forall \ell \in L \quad (4.7)$$

$$0 \leq \delta_n \leq \bar{\delta} \quad \forall n \in N \quad (4.8)$$

$$0 \leq \Delta d_n \leq d_n \quad \forall n \in N \quad (4.9)$$

Esse problema representa a ação que o operador do sistema deverá tomar frente à contingência v e dado que já foi implantado o plano de expansão s . É possível ajustar as variáveis de operação do sistema de maneira a minimizar a carga não atendida, ou seja, o corte de carga.

Nesse problema linear, o planejador do sistema pode atuar sobre as seguintes variáveis de decisão:

- Δd_n : o corte de carga da barra n . Representa o total de carga do nó n que precisa ser desligado para que o sistema opere de maneira estável. Esta variável está diretamente relacionada com a variável de geração artificial r_n do modelo de transportes modificado apresentado no Capítulo 3.
- P_g^G : total de potência ativa injetada no sistema pelo gerador g .
- P_ℓ^L : fluxo de potência ativa na linha ℓ .
- δ_n : ângulo de fase da tensão na barra n .

Uma vez avaliado o plano de expansão frente às diversas contingências, ou seja, determinadas os cortes mínimos de carga em cada situação, como determinar o melhor plano de expansão dentre os factíveis? A seguir serão apresentadas três abordagens diferentes para responder a essa pergunta.

4.2.1 Abordagem da Otimização Robusta

Nessa abordagem, para cada plano de expansão s é determinado seu pior desempenho $\mathcal{Q}^{MAX}(s)$ frente a todos os cenários. Escolhe-se como sendo o plano ótimo, aquele que apresentar menor valor para esse pior desempenho.

Matematicamente consiste em resolver o seguinte problema:

$$\min_{s \in \mathcal{S}^*} \{\mathcal{Q}^{MAX}(s)\} \quad (4.10)$$

em que

$$\mathcal{Q}^{MAX}(s) = \max_{v \in \mathcal{V}_K} \{\mathcal{Q}(s, v)\} \quad (4.11)$$

e \mathcal{S}^* é o conjunto de planos de expansão que satisfazem $Q(s, 1) = 0$, isto é, no cenário 0, representado pelo vetor $v = 1$, tem-se corte de carga nulo. Além disso, os planos de expansão em \mathcal{S}^* devem ser economicamente factíveis, devem estar dentro de orçamento do planejador, isto é conseguido impondo uma restrição de custo máximo C_T^L do plano de expansão:

$$\sum_{\ell \in L^C} s_\ell \leq C_T^L \quad (4.12)$$

4.2.2 Abordagem da Otimização Estocástica

Nessa outra abordagem é atribuída uma probabilidade de ocorrência $\pi(v)$ a cada contingência v do conjunto \mathcal{V}_K . Em seguida, determinam-se os cortes de carga mínimos esperados para cada plano de expansão s através da expressão:

$$\mathcal{Q}^{ESP}(s) = \sum_{v \in \mathcal{V}_K} \pi(v) \cdot \mathcal{Q}(s, v) \quad (4.13)$$

A determinação do plano ótimo de expansão através da abordagem estocástica é traduzida no seguinte problema:

$$\min_{s \in \mathcal{S}^*} \left\{ \sum_{v \in \mathcal{V}_K} \pi(v) \cdot \mathcal{Q}(s, v) \right\} \quad (4.14)$$

Essa abordagem exige a determinação do valor dessas probabilidades $\pi(v)$. Vale lembrar que sendo $\pi(v)$ uma distribuição de probabilidades, as seguintes propriedades devem ser válidas:

- $0 \leq \pi(v) \leq 1 \quad \forall v \in \mathcal{V}_K$
- $\sum_{v \in \mathcal{V}_K} \pi(v) = 1$

O trabalho [23] apresenta um modelo de problema linear inteiro misto para estimar essa distribuição de probabilidades. Trabalha-se, entretanto, com um espaço de cenários \mathcal{V}_K reduzido, obtido através de um procedimento de geração de cenários que modela a visão de um estrategista que pretende causar dano ao sistema elétrico. Dessa maneira são selecionados apenas os cenários que possuem maiores cortes de cargas e com menos linhas desligadas.

4.2.3 Abordagem da Otimização por Risco

Esta terceira abordagem atribui um valor de risco $R(s)$ para cada plano de expansão s e determina o melhor plano como sendo o com menor valor de risco.

$$\min_{s \in \mathcal{S}^*} \{R(s)\} \quad (4.15)$$

Antes de propor uma maneira de quantificar os riscos de cada plano de expansão s , será apresentado o conceito de arrependimento da tomada de uma decisão.

Imagine que é necessário tomar uma decisão hoje e o resultado dessa decisão será influenciada por um fator estocástico futuro, *a priori*, desconhecido. Para melhor compreensão, toma-se como exemplo o problema proposto nesse trabalho: o planejador do sistema necessita escolher um plano de expansão e o desempenho desse plano dependerá da ocorrência ou não das futuras contingências.

Suponha que o planejador implantou um plano s e que, em um momento futuro, uma contingência v tenha ocorrido. O planejador do sistema pode se sentir arrependido da escolha tomada, caso houvesse um plano de expansão diferente do escolhido que, se fosse implantado, diminuiria o dano causado ao ocorrer a contingência.

Seja $A(s, v)$ uma função que descreve o arrependimento que o planejador do sistema tem ao implantar o plano de expansão s e ocorrer a contingência v . Esse arrependimento pode ser medido como o quanto longe a decisão tomada está da melhor decisão que seria tomada se tivessem certeza que a contingência v iria ocorrer.

Dado que a contingência v ocorreu, a melhor situação possível para o planejador do sistema é aquela em que há menor corte de carga do sistema. Denotando esse corte por $\mathcal{Q}^{MIN}(v)$, pode-se escrevê-lo como:

$$\mathcal{Q}^{MIN}(v) = \min_{s \in \mathcal{S}^*} \{\mathcal{Q}(s, v)\} \quad (4.16)$$

Note que, nesse caso, a variável v é fixada e se varia s dentro do conjunto S^* para buscar o plano que minimize o corte de carga. Essa situação é fictícia, já que não há o conhecimento prévio da certeza da ocorrência da contingência v .

Logo, pode-se definir o arrependimento de um plano s frente a ocorrência de uma contingência v como sendo:

$$A(s, v) = \mathcal{Q}(s, v) - \mathcal{Q}^{MIN}(v) \quad (4.17)$$

Definidos os arrependimentos dos planos de expansão s diante de cada cenário definido pelas contingências v , define-se como sendo o risco $R(s)$ desse plano de expansão, o valor do seu arrependimento máximo, como mostrado na expressão abaixo:

$$R(s) = \max_{v \in \mathcal{V}_K} A(s, v) \quad (4.18)$$

Logo, a abordagem por risco para determinação do melhor plano expansão é a descrita abaixo:

$$\min_{s \in S^*} R(s) \quad (4.19)$$

em que

$$R(s) = \max_{v \in \mathcal{V}_K} A(s, v) \quad (4.20)$$

e

$$A(s, v) = \mathcal{Q}(s, v) - \mathcal{Q}^{MIN}(v) \quad (4.21)$$

4.2.4 Comparação entre as Abordagens

Para explicar as diferenças entre essas três abordagem de problemas probabilísticos, seja o seguinte exemplo mostrado na Tabela 4.1, retirado de [24].

Tabela 4.1: Exemplo de decisão sobre evento incerto

Cenário	Probabilidade	Decisão		
		A	B	C
S_1	0,10	\$100	\$50	\$60
S_2	0,90	\$20	\$50	\$30
Custo Esperado		\$28	\$50	\$33
Máximo Custo		\$100	\$50	\$60
Máximo Arrependimento		\$50	\$30	\$10

Nesse exemplo, há dois cenários futuros possíveis, S_1 e S_2 , cada um com certa probabilidade de ocorrência, 0,10 e 0,90, respectivamente.

O problema consiste em tomar uma decisão dentre as opções existentes (A, B ou C). Para cada decisão e cenário existe um custo a ser pago, por exemplo, se é tomada a decisão A e ocorre o cenário S_1 , então se deve pagar uma quantia de \$100. Por outro lado, se é tomada a decisão C e o cenário S_2 ocorre, se deve pagar um total igual a \$30.

O primeiro tipo de abordagem, no qual se baseia a Otimização Robusta, é aquele que seleciona a decisão que causa menor dano no pior caso. Isso significa que para cada decisão se determina a maior quantia a se pagar independentemente das probabilidades de ocorrência de cada cenário futuro.

No caso do exemplo, os piores casos para as decisões A, B e C são \$100, \$50, \$60, respectivamente. Logo, segundo essa abordagem, a melhor decisão a ser tomada é a decisão B.

A segunda abordagem para escolher a melhor decisão, na qual se baseia a Otimização Estocástica, consiste em determinar a quantia esperada a ser paga a cada uma das decisões.

Por exemplo, a decisão A tem um custo esperado de $0,10 \cdot \$100(S_1) + 0,90 \cdot \$20(S_2) = \$28$, enquanto que a decisão B tem custo esperado de $0,10 \cdot \$50(S_1) + 0,90 \cdot \$50(S_2) = \$50$ e a decisão C tem custo esperado de $0,10 \cdot \$60(S_1) + 0,90 \cdot \$30(S_2) = \$33$. Assim, sob o ponto de vista dessa segunda abordagem, a melhor decisão é a decisão A, já que possui menor custo esperado.

A última abordagem, sob o ponto de vista da Otimização por Risco, atribui a cada decisão, um risco a ser tomado e assim se escolhe a decisão cujo risco é o menor possível.

Para cada cenário se determina o menor custo a ser tomado, no exemplo, para o cenário S_1 o menor custo a ser pago é \$50 e para S_2 , \$20. Esses são chamados custos ideias para cada cenário.

O arrependimento de uma decisão frente a um cenário é calculado como a diferença entre o custo a ser pago e o custo ideal do cenário. O risco de uma decisão passa a ser então, o valor máximo de arrependimento da decisão frente a todos os cenários. No exemplo, o risco da decisão A vale $\max\{\$100 - \$50, \$20 - \$20\} = \$50$, o risco de B, $\max\{\$50 - \$50, \$50 - \$20\} = \$30$ e de C, $\max\{\$60 - \$50, \$30 - \$20\} = \$10$. Para essa abordagem, a melhor escolha é a decisão C, pois possui menor risco.

Nota-se que para cada um dos tipos de abordagem, o mesmo problema possui diferentes soluções ótimas. A Otimização Estocástica depende muito da distribuição de probabilidade dos parâmetros estudados. No tipo de problema estudado aqui essa distribuição não é facilmente determinada devido ao fato de existirem poucas amostras reais. Em outras palavras, não há um número relativamente grande de ocorrências do evento para que se possa caracterizar uma distribuição de probabilidades de maneira exata.

A Otimização Robusta, quando comparada com a otimização estocástica, exige menos esforço computacional para sua implementação. Além disso, há uma perda da dependência das probabilidades de ocorrência dos cenários, isso se torna interessante em casos em que as probabilidades são difíceis de serem calculadas. Apesar disso, a otimização robusta se apresenta muito conservadora e quase sempre gera soluções ótimas de preços elevados.

A Otimização por Risco busca agregar as qualidades de cada uma das outras abordagens. Elimina-se a dependência da distribuição de probabilidades dos parâmetros incertos e não é muito conservadora na escolha da seleção da melhor solução.

A partir desse ponto, se aprofundará em um modelo para o problema PERT considerando a vulnerabilidade da rede, baseando-se em Otimização por Risco. De maneira geral se buscará minimizar uma função objetivo ponderada entre a minimização do risco e a minimização do custo, como mostrada na expressão abaixo:

$$\min_{s \in S^*} \{(1 - \beta) \cdot p \cdot R(s) + \beta \cdot C(s)\} \quad (4.22)$$

Nessa expressão, o parâmetro β pondera entre os dois objetivos do problema. Assume valores entre 0 e 1. Quando $\beta = 1$, se ignora o objetivo de minimizar o risco $R(s)$ dos planos de expansão e leva em consideração apenas a minimização do custo $C(s)$, isto é, retorna-se ao problema PERT tradicional.

Por outro lado, quando se pondera $\beta = 0$, apenas se está buscando minimizar o risco dos

planos de expansão, ignorando, assim, seu custo de instalação.

Na expressão (4.22), há também o parâmetro p , o qual representa o preço da demanda não atendida em \\$/MW. Essa constante auxilia na conversão de demanda não atendida, representada pelo risco do plano, em unidade monetária, com o intuito de comparar ambos os objetivos (minimização de risco e de custo).

4.3 Problema Binível do Planejamento da Expansão com Restrição de Vulnerabilidade

A abordagem de otimização por risco, como mostrada na seção anterior, é descrita por um problema com quatro níveis de otimização. Nessa seção, será detalhado o procedimento tomado para reformular o problema de otimização por risco em um problema com apenas dois níveis de otimização, sendo cada um deles um problema linear inteiro misto.

Para facilitar a notação, o problema (4.2)-(4.9), que define o corte mínimo de carga $\mathcal{Q}(s, v)$ dado que foi implantado o plano de expansão s e a ocorreu a contingência v , pode ser linearizado utilizando a técnica descrita no Apêndice A e ser reescrito como o seguinte problema linear:

$$\mathcal{Q}(s, v) = \min_{x \in \mathcal{M}(s, v)} c^t x \quad (4.23)$$

em que

$$\mathcal{M}(s, v) = \{x \in \mathbb{R}^n : A^x x = b - A^v v - A^s s\} \quad (4.24)$$

Nessa simplificação:

- $x \in \mathbb{R}^n$ contempla todas as variáveis reais do problema linear;
- $A^x \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A^v \in \mathbb{R}^{m \times n_{\ell v}}$ e $A^s \in \mathbb{R}^{m \times n_{\ell s}}$ são matrizes que relacionam as variáveis x , v e s , respectivamente, nas restrições do problema;
- $b \in \mathbb{R}^m$ é um vetor constante que representa os recursos do problema;
- $c \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de custo das variáveis x . Nesse problema, as variáveis s e v não têm custo associado.

De maneira análoga, o problema que define o corte de carga mínimo dada a ocorrência de uma contingência v , antes denotada por $\mathcal{Q}^{MIN}(v)$, pode ser reescrito como:

$$\mathcal{Q}(v) = \min_{(x, s) \in \mathcal{M}(v)} c^t x \quad (4.25)$$

em que

$$\mathcal{M}(v) = \{(x, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{B}^{n_{\ell s}} : A^x x + A^s s = b - A^v v \text{ e } s \in \mathcal{S}^*\} \quad (4.26)$$

Neste último problema, existe a flexibilidade de modificar o plano de expansão s para conseguir o menor corte de carga.

Com essa nova notação, o arrependimento $A(s, v)$ do planejador ao implantar um plano de expansão s e ocorrer uma contingência v , pode ser denotado por:

$$A(s, v) = \min_{x \in \mathcal{M}(s, v)} c^t x - \min_{(\hat{x}, \hat{s}) \in \mathcal{M}(v)} c^t \hat{x} \quad (4.27)$$

Note que para ter distinção entre as variáveis dos dois problemas de otimização, utilizou-se a notação \hat{x} e \hat{s} para representar as variáveis do segundo problema.

O problema (4.27) contém os dois níveis de otimização mais baixos do problema geral. O terceiro nível, de baixo para cima, está representado na definição do risco de um plano de expansão s , $R(s)$, o qual passa a ser reformulado como:

$$R(s) = \max_{v \in \mathcal{V}_K} \left\{ \min_{x \in \mathcal{M}(s, v)} c^t x - \min_{(\hat{x}, \hat{s}) \in \mathcal{M}(v)} c^t \hat{x} \right\} \quad (4.28)$$

O primeiro passo para reformular o modelo acima é utilizar-se do Teorema da Dualidade Forte [7] para reescrever o problema (4.25) de determinação de corte mínimo de carga na sua versão dual sobre as variáveis reais x .

O problema primal (4.25) é um problema de minimização, com restrições de igualdade e variáveis irrestritas. Logo, sua versão dual, será de maximização, com variáveis irrestritas e restrições de igualdade.

Dessa forma, a expressão para determinar o risco $R(s)$ de um plano de expansão s passa a ser:

$$R(s) = \max_{v \in \mathcal{V}_K} \left\{ \max_{\lambda \in \mathcal{H}} \lambda^t (b - A^v v - A^s s) - \min_{(\hat{x}, \hat{s}) \in \mathcal{M}(v)} c^t \hat{x} \right\} \quad (4.29)$$

em que λ são as variáveis do problema dual e $\mathcal{H} = \{\lambda \in \mathbb{R}^m : \lambda^t A^x = c^t\}$ é a sua região factível.

Agora, seja a função $W(v)$ definida em \mathcal{V}_K como sendo $W(v) = w^*(v) - \hat{w}^*(v)$. Em que:

- $w^*(v) = \max_{\lambda \in \mathcal{H}} \{\lambda^t (b - A^v v - A^s s)\};$
- $\hat{w}^*(v) = \min_{(\hat{x}, \hat{s}) \in \mathcal{M}(v)} \{c^t \hat{x}\}.$

Pela definição acima $w^*(v) \geq \lambda^t (b - A^v v - A^s s)$, $\forall \lambda \in \mathcal{H}$ e $\hat{w}^*(v) \leq c^t \hat{x}$, $\forall (\hat{x}, \hat{s}) \in \mathcal{M}(v)$.

Consequentemente,

$$W(v) = w^*(v) - \hat{w}^*(v) \geq \lambda^t (b - A^v v - A^s s) - c^t \hat{x} \quad \forall (\lambda, \hat{x}, \hat{s}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{M}(v) \quad (4.30)$$

Portanto, sem perda de equivalência, a expressão (4.29) pode ser escrita como:

$$R(s) = \max_{(v, \lambda, \hat{x}, \hat{s}) \in \mathcal{V}_K \times \mathcal{H} \times \mathcal{M}(v)} \{\lambda^t (b - A^v v - A^s s) - c^t \hat{x}\} \quad (4.31)$$

Nesse ponto da reformulação, conseguiu-se condensar em apenas um nível de otimização todos os três níveis inferiores do problema de otimização por risco.

Com esse novo modelo, em apenas um problema de otimização, é possível determinar qual o arrependimento máximo do plano de expansão s , em que contingência v ele ocorre e qual o plano \hat{s} que satisfaz a condição de corte de carga mínima.

O problema completo reformulado é o mostrado abaixo:

(Problema do Nível Superior)

$$\min_s \{(1 - \beta) \cdot p \cdot R(s) + \beta \cdot C(s)\} \quad (4.32)$$

s.a.

$$s \in \mathcal{S}^* \quad (4.33)$$

(Problema do Nível Inferior)

$$R(s) = \max_{v, \lambda, \hat{x}, \hat{s}} \{ \lambda^t(b - A^v v - A^s s) - c^t \hat{x} \} \quad (4.34)$$

s.a.

$$v \in \mathcal{V}_K \quad (4.35)$$

$$\lambda \in \mathcal{H} \quad (4.36)$$

$$(\hat{x}, \hat{s}) \in \mathcal{M}(v) \quad (4.37)$$

Esse problema é classificado como problema de otimização binível. Serão mostrados a seguir os passos para a definição completa desse problema. Será mostrado também que, com linearizações do tipo apresentado no Apêndice A, ambos os níveis de otimização serão modelados como problemas lineares inteiros mistos.

4.3.1 Primeira Versão - Problema com 4 níveis não linear

Essa primeira versão contém o problema geral como é apresentado. É definido como um problema com 4 níveis de otimização, sendo os níveis 3 e 4 não lineares devido às multiplicações de variáveis contínuas e binárias.

(Nível 1)

$$\min_{P_g^{G0}, P_\ell^{L0}, \delta_n^0, s_\ell} \left\{ (1 - \beta) \cdot p \cdot R(s) + \beta \cdot \sum_{\ell \in L^C} c_\ell^L s_\ell \right\} \quad (4.38)$$

s.a.

$$\sum_{g \in G_n} P_g^{G0} - \sum_{\ell | O(\ell) = n} P_\ell^{L0} + \sum_{\ell | R(\ell) = n} P_\ell^{L0} = d_n \quad \forall n \in N \quad (4.39)$$

$$P_\ell^{L0} = \frac{1}{x_\ell} [\delta_{O(\ell)}^0 - \delta_{R(\ell)}^0] \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.40)$$

$$P_\ell^{L0} = \frac{s_\ell}{x_\ell} [\delta_{O(\ell)}^0 - \delta_{R(\ell)}^0] \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.41)$$

$$-\bar{P}_\ell^L \leq P_\ell^{L0} \leq \bar{P}_\ell^L \quad \forall \ell \in L \quad (4.42)$$

$$0 \leq P_g^{G0} \leq \bar{P}_g^G \quad \forall g \in G \quad (4.43)$$

$$0 \leq \delta_n^0 \leq \bar{\delta} \quad \forall n \in N \quad (4.44)$$

$$\sum_{\ell \in L^C} c_\ell^L s_\ell \leq C_T^L \quad (4.45)$$

$$s_\ell \in \{0, 1\} \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.46)$$

(Nível 2) - Definição do Risco

$$R(s) = \max_{v_\ell} \{ A(s, v) \} \quad (4.47)$$

s.a.

$$\sum_{\ell \in L^O} v_\ell \geq n_{\ell o} - K \quad (4.48)$$

$$v_\ell \in \{0, 1\} \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.49)$$

(Nível 3) - Definição dos Arrependimentos

$$A(s, v) = \min_{P_g^G, P_\ell^L, \Delta d_n, \delta_n} \left\{ \sum_{n \in N} \Delta d_n \right\} - \mathcal{Q}^{MIN}(v) \quad (4.50)$$

s.a.

$$\sum_{g \in G_n} P_g^G - \sum_{\ell | O(\ell) = n} P_\ell^L + \sum_{\ell | R(\ell) = n} P_\ell^L = d_n - \Delta d_n \quad \forall n \in N \quad (4.51)$$

$$P_\ell^L = \frac{v_\ell}{x_\ell} [\delta_{O(\ell)} - \delta_{R(\ell)}] \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.52)$$

$$P_\ell^L = \frac{s_\ell}{x_\ell} [\delta_{O(\ell)} - \delta_{R(\ell)}] \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.53)$$

$$-\bar{P}_\ell^L \leq P_\ell^L \leq \bar{P}_\ell^L \quad \forall \ell \in L \quad (4.54)$$

$$0 \leq P_g^G \leq \bar{P}_g^G \quad \forall g \in G \quad (4.55)$$

$$0 \leq \delta_n \leq \bar{\delta} \quad \forall n \in N \quad (4.56)$$

$$0 \leq \Delta d_n \leq d_n \quad \forall n \in N \quad (4.57)$$

(Nível 4) - Definição da Corte de Carga Mínimo

$$\mathcal{Q}(v) = \min_{\hat{P}_g^G, \hat{P}_\ell^L, \Delta \hat{d}_n, \hat{\delta}_n, \hat{P}_g^{G0}, \hat{P}_\ell^{L0}, \hat{\delta}_n^0, \hat{s}_\ell} \left\{ \sum_{n \in N} \Delta \hat{d}_n \right\} \quad (4.58)$$

s.a.

$$\sum_{g \in G_n} \hat{P}_g^G - \sum_{\ell | O(\ell) = n} \hat{P}_\ell^L + \sum_{\ell | R(\ell) = n} \hat{P}_\ell^L = d_n - \Delta \hat{d}_n \quad \forall n \in N \quad (4.59)$$

$$\hat{P}_\ell^L = \frac{v_\ell}{x_\ell} [\hat{\delta}_{O(\ell)} - \hat{\delta}_{R(\ell)}] \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.60)$$

$$\hat{P}_\ell^L = \frac{s_\ell}{x_\ell} [\hat{\delta}_{O(\ell)} - \hat{\delta}_{R(\ell)}] \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.61)$$

$$-\bar{P}_\ell^L \leq \hat{P}_\ell^L \leq \bar{P}_\ell^L \quad \forall \ell \in L \quad (4.62)$$

$$0 \leq \hat{P}_g^G \leq \bar{P}_g^G \quad \forall g \in G \quad (4.63)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_n \leq \bar{\delta} \quad \forall n \in N \quad (4.64)$$

$$0 \leq \Delta \hat{d}_n \leq d_n \quad \forall n \in N \quad (4.65)$$

$$\sum_{g \in G_n} \hat{P}_g^{G0} - \sum_{\ell | O(\ell) = n} \hat{P}_\ell^{L0} + \sum_{\ell | R(\ell) = n} \hat{P}_\ell^{L0} = d_n \quad \forall n \in N \quad (4.66)$$

$$\hat{P}_\ell^{L0} = \frac{1}{x_\ell} [\hat{\delta}_{O(\ell)}^0 - \hat{\delta}_{R(\ell)}^0] \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.67)$$

$$\hat{P}_\ell^{L0} = \frac{\hat{s}_\ell}{x_\ell} [\hat{\delta}_{O(\ell)}^0 - \hat{\delta}_{R(\ell)}^0] \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.68)$$

$$-\bar{P}_\ell^L \leq \hat{P}_\ell^{L0} \leq \bar{P}_\ell^L \quad \forall \ell \in L \quad (4.69)$$

$$0 \leq \hat{P}_g^{G0} \leq \bar{P}_g^G \quad \forall g \in G \quad (4.70)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_n^0 \leq \bar{\delta} \quad \forall n \in N \quad (4.71)$$

$$\sum_{\ell \in L^C} c_\ell^L \hat{s}_\ell \leq C_T^L \quad (4.72)$$

$$\hat{s}_\ell \in \{0, 1\} \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.73)$$

4.3.2 Segunda Versão - Problema com 4 níveis linear

Para se obter essa segunda versão, aplica-se a técnica de linearização do Apêndice A nos níveis 1, 3 e 4 da versão anterior do problema. Ainda constitui em um problema de 4 níveis de otimização.

(Nível 1)

$$\min_{P_g^{G0}, P_\ell^{L0}, \delta_n^0, s_\ell, \delta_\ell^{QO0}, \delta_\ell^{QR0}, \delta_\ell^{AO0}, \delta_\ell^{AR0}} \left\{ (1 - \beta) \cdot p \cdot R(s) + \beta \cdot \sum_{\ell \in L^C} c_\ell^L s_\ell \right\} \quad (4.74)$$

s.a.

$$\sum_{g \in G_n} P_g^{G0} - \sum_{\ell | O(\ell)=n} P_\ell^{L0} + \sum_{\ell | R(\ell)=n} P_\ell^{L0} = d_n \quad \forall n \in N \quad (4.75)$$

$$P_\ell^{L0} = \frac{1}{x_\ell} [\delta_{O(\ell)}^0 - \delta_{R(\ell)}^0] \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.76)$$

$$P_\ell^{L0} = \frac{1}{x_\ell} (\delta_\ell^{QO0} - \delta_\ell^{QR0}) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.77)$$

$$-\bar{P}_\ell^L \leq P_\ell^{L0} \leq \bar{P}_\ell^L \quad \forall \ell \in L \quad (4.78)$$

$$0 \leq P_g^{G0} \leq \bar{P}_g^G \quad \forall g \in G \quad (4.79)$$

$$0 \leq \delta_n^0 \leq \bar{\delta} \quad \forall n \in N \quad (4.80)$$

$$\delta_\ell^{QO0} + \delta_\ell^{AO0} = \delta_{O(\ell)}^0 \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.81)$$

$$\delta_\ell^{QR0} + \delta_\ell^{AR0} = \delta_{R(\ell)}^0 \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.82)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{QO0} \leq \bar{\delta} s_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.83)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{QR0} \leq \bar{\delta} s_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.84)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{AO0} \leq \bar{\delta} (1 - s_\ell) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.85)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{AR0} \leq \bar{\delta} (1 - s_\ell) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.86)$$

$$\sum_{\ell \in L^C} c_\ell^L s_\ell \leq C_T^L \quad (4.87)$$

$$s_\ell \in \{0, 1\} \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.88)$$

(Nível 2) - Definição do Risco

$$R(s) = \max_{v_\ell} \{A(s, v)\} \quad (4.89)$$

s.a

$$\sum_{\ell \in L^O} v_\ell \geq n_{\ell o} - K \quad (4.90)$$

$$v_\ell \in \{0, 1\} \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.91)$$

(Nível 3) - Definição dos Arrependimentos

$$A(s, v) = \min_{P_g^G, P_\ell^L, \Delta d_n, \delta_n, \delta_\ell^{QO}, \delta_\ell^{QR}, \delta_\ell^{AO}, \delta_\ell^{AR}} \left\{ \sum_{n \in N} \Delta d_n \right\} - \mathcal{Q}(v) \quad (4.92)$$

s.a.

$$\sum_{g \in G_n} P_g^G - \sum_{\ell | O(\ell) = n} P_\ell^L + \sum_{\ell | R(\ell) = n} P_\ell^L = d_n - \Delta d_n \quad \forall n \in N \quad (4.93)$$

$$P_\ell^L = \frac{1}{x_\ell} (\delta_\ell^{QO} - \delta_\ell^{QR}) \quad \forall \ell \in L \quad (4.94)$$

$$-\bar{P}_\ell^L \leq P_\ell^L \leq \bar{P}_\ell^L \quad \forall \ell \in L \quad (4.95)$$

$$0 \leq P_g^G \leq \bar{P}_g^G \quad \forall g \in G \quad (4.96)$$

$$0 \leq \Delta d_n \leq d_n \quad \forall n \in N \quad (4.97)$$

$$\delta_\ell^{QO} + \delta_\ell^{AO} = \delta_{O(\ell)} \quad \forall \ell \in L \quad (4.98)$$

$$\delta_\ell^{QR} + \delta_\ell^{AR} = \delta_{R(\ell)} \quad \forall \ell \in L \quad (4.99)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{QO} \leq \bar{\delta} v_\ell \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.100)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{QR} \leq \bar{\delta} v_\ell \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.101)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{AO} \leq \bar{\delta} (1 - v_\ell) \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.102)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{AR} \leq \bar{\delta} (1 - v_\ell) \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.103)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{QO} \leq \bar{\delta} s_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.104)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{QR} \leq \bar{\delta} s_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.105)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{AO} \leq \bar{\delta} (1 - s_\ell) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.106)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{AR} \leq \bar{\delta} (1 - s_\ell) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.107)$$

(Nível 4) - Definição da Corte de Carga Mínimo

$$\mathcal{Q}(v) = \min_{\begin{array}{l} \hat{P}_g^G, \hat{P}_\ell^L, \Delta \hat{D}_n, \hat{d}_n, \hat{s}_\ell, \hat{\delta}_\ell^{QO}, \\ \hat{\delta}_\ell^{QR}, \hat{\delta}_\ell^{AO}, \hat{\delta}_\ell^{AR}, \hat{P}_g^{G0}, \hat{P}_\ell^{L0}, \\ \hat{d}_n^0, \hat{\delta}_\ell^{QO0}, \hat{\delta}_\ell^{QR0}, \hat{\delta}_\ell^{AO0}, \hat{\delta}_\ell^{AR0} \end{array}} \left\{ \sum_{n \in N} \Delta \hat{d}_n \right\} \quad (4.108)$$

s.a.

$$\sum_{g \in G_n} \hat{P}_g^G - \sum_{\ell | O(\ell) = n} \hat{P}_\ell^L + \sum_{\ell | R(\ell) = n} \hat{P}_\ell^L = d_n - \Delta \hat{d}_n \quad \forall n \in N \quad (4.109)$$

$$\hat{P}_\ell^L = \frac{1}{x_\ell} (\hat{\delta}_\ell^{QO} - \hat{\delta}_\ell^{QR}) \quad \forall \ell \in L \quad (4.110)$$

$$-\bar{P}_\ell^L \leq \hat{P}_\ell^L \leq \bar{P}_\ell^L \quad \forall \ell \in L \quad (4.111)$$

$$0 \leq \hat{P}_g^G \leq \bar{P}_g^G \quad \forall g \in G \quad (4.112)$$

$$0 \leq \Delta \hat{d}_n \leq d_n \quad \forall n \in N \quad (4.113)$$

$$\hat{\delta}_\ell^{QO} + \hat{\delta}_\ell^{AO} = \hat{\delta}_{O(\ell)} \quad \forall \ell \in L \quad (4.114)$$

$$\hat{\delta}_\ell^{QR} + \hat{\delta}_\ell^{AR} = \hat{\delta}_{R(\ell)} \quad \forall \ell \in L \quad (4.115)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{QO} \leq \bar{\delta} v_\ell \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.116)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{QR} \leq \bar{\delta} v_\ell \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.117)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{AO} \leq \bar{\delta} (1 - v_\ell) \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.118)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{AR} \leq \bar{\delta} (1 - v_\ell) \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.119)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{QO} \leq \bar{\delta}\hat{s}_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.120)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{QR} \leq \bar{\delta}\hat{s}_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.121)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{AO} \leq \bar{\delta}(1 - \hat{s}_\ell) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.122)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{AR} \leq \bar{\delta}(1 - \hat{s}_\ell) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.123)$$

$$\sum_{g \in G_n} \hat{P}_g^{G0} - \sum_{\ell | O(\ell)=n} \hat{P}_\ell^{L0} + \sum_{\ell | R(\ell)=n} \hat{P}_\ell^{L0} = d_n \quad \forall n \in N \quad (4.124)$$

$$\hat{P}_\ell^{L0} = \frac{1}{x_\ell} [\hat{\delta}_{O(\ell)}^0 - \hat{\delta}_{R(\ell)}^0] \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.125)$$

$$\hat{P}_\ell^{L0} = \frac{1}{x_\ell} (\hat{\delta}_\ell^{QO0} - \hat{\delta}_\ell^{QR0}) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.126)$$

$$-\bar{P}_\ell^L \leq \hat{P}_\ell^{L0} \leq \bar{P}_\ell^L \quad \forall \ell \in L \quad (4.127)$$

$$0 \leq \hat{P}_g^{G0} \leq \bar{P}_g^G \quad \forall g \in G \quad (4.128)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_n^0 \leq \bar{\delta} \quad \forall n \in N \quad (4.129)$$

$$\hat{\delta}_\ell^{QO0} + \delta_\ell^{AO0} = \delta_{O(\ell)}^0 \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.130)$$

$$\hat{\delta}_\ell^{QR0} + \delta_\ell^{AR0} = \delta_{R(\ell)}^0 \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.131)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{QO0} \leq \bar{\delta}\hat{s}_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.132)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{QR0} \leq \bar{\delta}\hat{s}_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.133)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{AO0} \leq \bar{\delta}(1 - \hat{s}_\ell) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.134)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{AR0} \leq \bar{\delta}(1 - \hat{s}_\ell) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.135)$$

$$\sum_{\ell \in L^C} c_\ell^L \hat{s}_\ell \leq C_T^L \quad (4.136)$$

$$\hat{s}_\ell \in \{0, 1\} \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.137)$$

4.3.3 Terceira Versão - Problema com 4 níveis e nível 3 dual não linear

Nessa terceira versão, substitui-se o problema de nível 3 da versão anterior pelo seu correspondente dual. Ainda com 4 níveis de otimização, essa nova versão possui seu nível 3 não linear devido à multiplicação de variáveis binárias e contínuas na sua função objetivo.

(Nível 1)

$$\min_{\substack{P_g^{G0}, P_\ell^{L0}, \delta_n^0, s_\ell, \\ \delta_\ell^{QO0}, \delta_\ell^{QR0}, \delta_\ell^{AO0}, \delta_\ell^{AR0}}} \left\{ (1 - \beta) \cdot p \cdot R(s) + \beta \cdot \sum_{\ell \in L^C} c_\ell^L s_\ell \right\} \quad (4.138)$$

s.a.

$$\sum_{g \in G_n} P_g^{G0} - \sum_{\ell | O(\ell)=n} P_\ell^{L0} + \sum_{\ell | R(\ell)=n} P_\ell^{L0} = d_n \quad \forall n \in N \quad (4.139)$$

$$P_\ell^{L0} = \frac{1}{x_\ell} [\delta_{O(\ell)}^0 - \delta_{R(\ell)}^0] \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.140)$$

$$P_\ell^{L0} = \frac{1}{x_\ell} (\delta_\ell^{QO0} - \delta_\ell^{QR0}) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.141)$$

$$-\bar{P}_\ell^L \leq P_\ell^{L0} \leq \bar{P}_\ell^L \quad \forall \ell \in L \quad (4.142)$$

$$0 \leq P_g^{G0} \leq \bar{P}_g^G \quad \forall g \in G \quad (4.143)$$

$$0 \leq \delta_n^0 \leq \bar{\delta} \quad \forall n \in N \quad (4.144)$$

$$\delta_\ell^{QO0} + \delta_\ell^{AO0} = \delta_{O(\ell)}^0 \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.145)$$

$$\delta_\ell^{QR0} + \delta_\ell^{AR0} = \delta_{R(\ell)}^0 \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.146)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{QO0} \leq \bar{\delta} s_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.147)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{QR0} \leq \bar{\delta} s_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.148)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{AO0} \leq \bar{\delta}(1 - s_\ell) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.149)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{AR0} \leq \bar{\delta}(1 - s_\ell) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.150)$$

$$\sum_{\ell \in L^C} c_\ell^L s_\ell \leq C_T^L \quad (4.151)$$

$$s_\ell \in \{0, 1\} \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.152)$$

(Nível 2) - Definição do Risco

$$R(s) = \max_{v_\ell} \{A(s, v)\} \quad (4.153)$$

s.a.

$$\sum_{\ell \in L^O} v_\ell \geq n_{\ell o} - K \quad (4.154)$$

$$v_\ell \in \{0, 1\} \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.155)$$

(Nível 3) - Definição dos Arrependimentos

$$\begin{aligned} A(s, v) = & \max_{\substack{\Delta N_n, \Delta L_\ell, \Delta G_g, \alpha_n, \\ \beta_n, \gamma_n^U, \gamma_n^L, \epsilon_\ell^U, \epsilon_\ell^L, \\ \varphi_g, \pi_\ell, \sigma_\ell^O, \sigma_\ell^R, \lambda_\ell^A, \lambda_\ell^B, \\ \lambda_\ell^C, \lambda_\ell^D, \mu_\ell^A, \mu_\ell^B, \mu_\ell^C, \mu_\ell^D}} \left\{ \sum_{n \in N} \Delta N_n - \sum_{\ell \in L} \Delta L_\ell - \sum_{g \in G} \Delta G_g \right. \\ & + \sum_{\ell \in L^O} [v_\ell(\lambda_\ell^A + \lambda_\ell^B) + (1 - v_\ell)(\lambda_\ell^C + \lambda_\ell^D)] \\ & \left. + \sum_{\ell \in L^C} [s_\ell(\mu_\ell^A + \mu_\ell^B) + (1 - s_\ell)(\mu_\ell^C + \mu_\ell^D)] \right\} - \mathcal{Q}(v) \quad (4.156) \end{aligned}$$

s.a.

$$\Delta N_n = D_n(\alpha_n - \beta_n) - \gamma_n^U \quad \forall n \in N \quad (4.157)$$

$$\Delta L_\ell = \bar{P}_\ell^L(\epsilon_\ell^U + \epsilon_\ell^L) \quad \forall \ell \in L \quad (4.158)$$

$$\Delta G_g = \bar{P}_g^G \varphi_g \quad \forall g \in G \quad (4.159)$$

$$\alpha_{N(g)} \leq \varphi_g \quad \forall g \in G \quad (4.160)$$

$$\alpha_{O(\ell)} - \alpha_{R(\ell)} = \epsilon_\ell^U - \epsilon_\ell^L + \pi_\ell \quad \forall \ell \in L \quad (4.161)$$

$$\alpha_n - \beta_n \leq 1 \quad \forall n \in N \quad (4.162)$$

$$\sum_{\ell | O(\ell)=n} \sigma_\ell^O + \sum_{\ell | R(\ell)=n} \sigma_\ell^R = \gamma_n^U - \gamma_n^L \quad \forall n \in N \quad (4.163)$$

$$\sigma_\ell^O \geq \lambda_\ell^A - \frac{\bar{\delta}}{x_\ell} \pi_\ell \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.164)$$

$$\sigma_\ell^R \geq \lambda_\ell^B + \frac{\bar{\delta}}{x_\ell} \pi_\ell \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.165)$$

$$\sigma_\ell^O \geq \lambda_\ell^C \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.166)$$

$$\sigma_\ell^R \geq \lambda_\ell^D \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.167)$$

$$\sigma_\ell^O \geq \mu_\ell^A - \frac{\bar{\delta}}{x_\ell} \pi_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.168)$$

$$\sigma_\ell^R \geq \mu_\ell^B + \frac{\bar{\delta}}{x_\ell} \pi_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.169)$$

$$\sigma_\ell^O \geq \mu_\ell^C \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.170)$$

$$\sigma_\ell^R \geq \mu_\ell^D \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.171)$$

$$\beta, \gamma^U, \gamma^L, \epsilon^U, \epsilon^L, \varphi \geq 0 \quad (4.172)$$

$$\mu^A, \mu^B, \mu^C, \mu^D \leq 0 \quad (4.173)$$

$$\lambda^A, \lambda^B, \lambda^C, \lambda^D \leq 0 \quad (4.174)$$

(Nível 4) - Definição da Corte de Carga Mínimo

$$\mathcal{Q}(v) = \min_{\begin{array}{l} \hat{P}_g^G, \hat{P}_\ell^L, \Delta \hat{d}_n, \hat{s}_\ell, \hat{\delta}_\ell^{QO}, \\ \hat{\delta}_\ell^{QR}, \hat{\delta}_\ell^{AO}, \hat{\delta}_\ell^{AR}, \hat{P}_g^{G0}, \hat{P}_\ell^{L0}, \\ \hat{\delta}_n^0, \hat{\delta}_\ell^{QO0}, \hat{\delta}_\ell^{QR0}, \hat{\delta}_\ell^{AO0}, \hat{\delta}_\ell^{AR0} \end{array}} \left\{ \sum_{n \in N} \Delta \hat{d}_n \right\} \quad (4.175)$$

s.a.

$$\sum_{g \in G_n} \hat{P}_g^G - \sum_{\ell | O(\ell)=n} \hat{P}_\ell^L + \sum_{\ell | R(\ell)=n} \hat{P}_\ell^L = d_n - \Delta \hat{d}_n \quad \forall n \in N \quad (4.176)$$

$$\hat{P}_\ell^L = \frac{1}{x_\ell} (\hat{\delta}_\ell^{QO} - \hat{\delta}_\ell^{QR}) \quad \forall \ell \in L \quad (4.177)$$

$$-\bar{P}_\ell^L \leq \hat{P}_\ell^L \leq \bar{P}_\ell^L \quad \forall \ell \in L \quad (4.178)$$

$$0 \leq \hat{P}_g^G \leq \bar{P}_g^G \quad \forall g \in G \quad (4.179)$$

$$0 \leq \Delta \hat{d}_n \leq d_n \quad \forall n \in N \quad (4.180)$$

$$\hat{\delta}_\ell^{QO} + \hat{\delta}_\ell^{AO} = \hat{\delta}_{O(\ell)} \quad \forall \ell \in L \quad (4.181)$$

$$\hat{\delta}_\ell^{QR} + \hat{\delta}_\ell^{AR} = \hat{\delta}_{R(\ell)} \quad \forall \ell \in L \quad (4.182)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{QO} \leq \bar{\delta} v_\ell \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.183)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{QR} \leq \bar{\delta} v_\ell \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.184)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{AO} \leq \bar{\delta} (1 - v_\ell) \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.185)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{AR} \leq \bar{\delta} (1 - v_\ell) \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.186)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{QO} \leq \bar{\delta} \hat{s}_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.187)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{QR} \leq \bar{\delta} \hat{s}_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.188)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{AO} \leq \bar{\delta} (1 - \hat{s}_\ell) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.189)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{AR} \leq \bar{\delta} (1 - \hat{s}_\ell) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.190)$$

$$\sum_{g \in G_n} \hat{P}_g^{G0} - \sum_{\ell | O(\ell)=n} \hat{P}_\ell^{L0} + \sum_{\ell | R(\ell)=n} \hat{P}_\ell^{L0} = d_n \quad \forall n \in N \quad (4.191)$$

$$\hat{P}_\ell^{L0} = \frac{1}{x_\ell} [\hat{\delta}_{O(\ell)}^0 - \hat{\delta}_{R(\ell)}^0] \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.192)$$

$$\hat{P}_\ell^{L0} = \frac{1}{x_\ell} (\hat{\delta}_\ell^{QO0} - \hat{\delta}_\ell^{QR0}) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.193)$$

$$-\bar{P}_\ell^L \leq \hat{P}_\ell^{L0} \leq \bar{P}_\ell^L \quad \forall \ell \in L \quad (4.194)$$

$$0 \leq \hat{P}_g^{G0} \leq \bar{P}_g^G \quad \forall g \in G \quad (4.195)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_n^0 \leq \bar{\delta} \quad \forall n \in N \quad (4.196)$$

$$\hat{\delta}_\ell^{QO0} + \delta_\ell^{AO0} = \delta_{O(\ell)}^0 \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.197)$$

$$\hat{\delta}_\ell^{QR0} + \delta_\ell^{AR0} = \delta_{R(\ell)}^0 \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.198)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{QO0} \leq \bar{\delta} s_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.199)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{QR0} \leq \bar{\delta} s_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.200)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{AO0} \leq \bar{\delta}(1 - s_\ell) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.201)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{AR0} \leq \bar{\delta}(1 - s_\ell) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.202)$$

$$\sum_{\ell \in L^C} c_\ell^L s_\ell \leq C_T^L \quad (4.203)$$

$$s_\ell \in \{0, 1\} \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.204)$$

4.3.4 Quarta Versão - Problema com 4 níveis e nível 3 dual linearizado

Essa quarta versão é o resultado da linalização do nível 3 da versão anterior. Ainda possui 4 níveis de otimização, porém todos lineares.

(Nível 1)

$$\min_{\substack{P_g^{G0}, P_\ell^{L0}, \delta_n^0, s_\ell, \\ \delta_\ell^{QO0}, \delta_\ell^{QR0}, \delta_\ell^{AO0}, \delta_\ell^{AR0}}} \left\{ (1 - \beta) \cdot p \cdot R(s) + \beta \cdot \sum_{\ell \in L^C} c_\ell^L s_\ell \right\} \quad (4.205)$$

s.a.

$$\sum_{g \in G_n} P_g^{G0} - \sum_{\ell | O(\ell) = n} P_\ell^{L0} + \sum_{\ell | R(\ell) = n} P_\ell^{L0} = d_n \quad \forall n \in N \quad (4.206)$$

$$P_\ell^{L0} = \frac{1}{x_\ell} [\delta_{O(\ell)}^0 - \delta_{R(\ell)}^0] \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.207)$$

$$P_\ell^{L0} = \frac{1}{x_\ell} (\delta_\ell^{QO0} - \delta_\ell^{QR0}) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.208)$$

$$-\bar{P}_\ell^L \leq P_\ell^{L0} \leq \bar{P}_\ell^L \quad \forall \ell \in L \quad (4.209)$$

$$0 \leq P_g^{G0} \leq \bar{P}_g^G \quad \forall g \in G \quad (4.210)$$

$$0 \leq \delta_n^0 \leq \bar{\delta} \quad \forall n \in N \quad (4.211)$$

$$\delta_\ell^{QO0} + \delta_\ell^{AO0} = \delta_{O(\ell)}^0 \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.212)$$

$$\delta_\ell^{QR0} + \delta_\ell^{AR0} = \delta_{R(\ell)}^0 \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.213)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{QO0} \leq \bar{\delta} s_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.214)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{QR0} \leq \bar{\delta} s_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.215)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{AO0} \leq \bar{\delta}(1 - s_\ell) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.216)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{AR0} \leq \bar{\delta}(1 - s_\ell) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.217)$$

$$\sum_{\ell \in L^C} c_\ell^L s_\ell \leq C_T^L \quad (4.218)$$

$$s_\ell \in \{0, 1\} \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.219)$$

(Nível 2) - Definição do Risco

$$R(s) = \max_{v_\ell} \{A(s, v)\} \quad (4.220)$$

s.a.

$$\sum_{\ell \in L^O} v_\ell \geq n_{\ell o} - K \quad (4.221)$$

$$v_\ell \in \{0, 1\} \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.222)$$

(Nível 3)

$$\begin{aligned} A(s, v) = & \max_{\Delta N_n, \Delta L_\ell, \Delta G_g, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n^U, \gamma_n^L, \epsilon_\ell^U, \epsilon_\ell^L, \varphi_g, \pi_\ell, \sigma_\ell^O, \sigma_\ell^R, \lambda_\ell^{QA}, \lambda_\ell^{QB}, \lambda_\ell^{QC}, \lambda_\ell^{QD}, \lambda_\ell^{AA}, \lambda_\ell^{AB}, \lambda_\ell^{AC}, \lambda_\ell^{AD}, \mu_\ell^A, \mu_\ell^B, \mu_\ell^C, \mu_\ell^D} \left\{ \sum_{n \in N} \Delta N_n - \sum_{\ell \in L} \Delta L_\ell \right. \\ & - \sum_{g \in G} \Delta G_g + \sum_{\ell \in L^O} [\lambda_\ell^{QA} + \lambda_\ell^{QB} + \lambda_\ell^{QC} + \lambda_\ell^{QD}] \\ & \left. + \sum_{\ell \in L^C} [s_\ell(\mu_\ell^A + \mu_\ell^B) + (1 - s_\ell)(\mu_\ell^C + \mu_\ell^D)] \right\} \\ & - \mathcal{Q}(v) \end{aligned} \quad (4.223)$$

s.a

$$\Delta N_n = D_n(\alpha_n - \beta_n) - \gamma_n^U \quad \forall n \in N \quad (4.224)$$

$$\Delta L_\ell = \bar{P}_\ell^L(\epsilon_\ell^U + \epsilon_\ell^L) \quad \forall \ell \in L \quad (4.225)$$

$$\Delta G_g = \bar{P}_g^G \varphi_g \quad \forall g \in G \quad (4.226)$$

$$\alpha_{N(g)} \leq \varphi_g \quad \forall g \in G \quad (4.227)$$

$$\alpha_{O(\ell)} - \alpha_{R(\ell)} = \epsilon_\ell^U - \epsilon_\ell^L + \pi_\ell \quad \forall \ell \in L \quad (4.228)$$

$$\alpha_n - \beta_n \leq 1 \quad \forall n \in N \quad (4.229)$$

$$\sum_{\ell|O(\ell)=n} \sigma_\ell^O + \sum_{\ell|R(\ell)=n} \sigma_\ell^R = \gamma_n^U - \gamma_n^L \quad \forall n \in N \quad (4.230)$$

$$\sigma_\ell^O \geq \lambda_\ell^{QA} + \lambda_\ell^{AA} - \frac{\bar{\delta}}{x_\ell} \pi_\ell \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.231)$$

$$\sigma_\ell^R \geq \lambda_\ell^{QB} + \lambda_\ell^{AB} + \frac{\bar{\delta}}{x_\ell} \pi_\ell \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.232)$$

$$\sigma_\ell^O \geq \lambda_\ell^{QC} + \lambda_\ell^{AC} \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.233)$$

$$\sigma_\ell^R \geq \lambda_\ell^{QD} + \lambda_\ell^{AD} \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.234)$$

$$\lambda_\ell^{QA} \geq v_\ell \underline{\lambda} \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.235)$$

$$\lambda_\ell^{QB} \geq v_\ell \underline{\lambda} \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.236)$$

$$\lambda_\ell^{QC} \geq (1 - v_\ell) \underline{\lambda} \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.237)$$

$$\lambda_\ell^{QD} \geq (1 - v_\ell) \underline{\lambda} \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.238)$$

$$\lambda_\ell^{AA} \geq (1 - v_\ell) \underline{\lambda} \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.239)$$

$$\lambda_\ell^{AB} \geq (1 - v_\ell) \underline{\lambda} \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.240)$$

$$\lambda_{\ell}^{AC} \geq v_{\ell}\lambda \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.241)$$

$$\lambda_{\ell}^{AD} \geq v_{\ell}\underline{\lambda} \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.242)$$

$$\sigma_{\ell}^O \geq \mu_{\ell}^A - \frac{\bar{\delta}}{x_{\ell}}\pi_{\ell} \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.243)$$

$$\sigma_{\ell}^R \geq \mu_{\ell}^B + \frac{\bar{\delta}}{x_{\ell}}\pi_{\ell} \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.244)$$

$$\sigma_{\ell}^O \geq \mu_{\ell}^C \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.245)$$

$$\sigma_{\ell}^R \geq \mu_{\ell}^D \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.246)$$

$$\beta, \gamma^U, \gamma^L, \epsilon^U, \epsilon^L, \varphi \geq 0 \quad (4.247)$$

$$\mu^A, \mu^B, \mu^C, \mu^D \leq 0 \quad (4.248)$$

$$\lambda^{QA}, \lambda^{QB}, \lambda^{QC}, \lambda^{QD} \leq 0 \quad (4.249)$$

$$\lambda^{AA}, \lambda^{AB}, \lambda^{AC}, \lambda^{AD} \leq 0 \quad (4.250)$$

(Nível 4) - Definição da Corte de Carga Mínimo

$$\mathcal{Q}(v) = \min_{\hat{P}_g^G, \hat{P}_{\ell}^L, \Delta\hat{d}_n, \hat{s}_{\ell}, \hat{\delta}_{\ell}^{QO}, \hat{\delta}_{\ell}^{QR}, \hat{\delta}_{\ell}^{AO}, \hat{\delta}_{\ell}^{AR}, \hat{P}_g^{G0}, \hat{P}_{\ell}^{L0}, \hat{\delta}_n^0, \hat{\delta}_{\ell}^{QOO}, \hat{\delta}_{\ell}^{QR0}, \hat{\delta}_{\ell}^{AO0}, \hat{\delta}_{\ell}^{AR0}} \left\{ \sum_{n \in N} \Delta\hat{d}_n \right\} \quad (4.251)$$

s.a.

$$\sum_{g \in G_n} \hat{P}_g^G - \sum_{\ell | O(\ell) = n} \hat{P}_{\ell}^L + \sum_{\ell | R(\ell) = n} \hat{P}_{\ell}^L = d_n - \Delta\hat{d}_n \quad \forall n \in N \quad (4.252)$$

$$\hat{P}_{\ell}^L = \frac{1}{x_{\ell}}(\hat{\delta}_{\ell}^{QO} - \hat{\delta}_{\ell}^{QR}) \quad \forall \ell \in L \quad (4.253)$$

$$-\bar{P}_{\ell}^L \leq \hat{P}_{\ell}^L \leq \bar{P}_{\ell}^L \quad \forall \ell \in L \quad (4.254)$$

$$0 \leq \hat{P}_g^G \leq \bar{P}_g^G \quad \forall g \in G \quad (4.255)$$

$$0 \leq \Delta\hat{d}_n \leq d_n \quad \forall n \in N \quad (4.256)$$

$$\hat{\delta}_{\ell}^{QO} + \hat{\delta}_{\ell}^{AO} = \hat{\delta}_{O(\ell)} \quad \forall \ell \in L \quad (4.257)$$

$$\hat{\delta}_{\ell}^{QR} + \hat{\delta}_{\ell}^{AR} = \hat{\delta}_{R(\ell)} \quad \forall \ell \in L \quad (4.258)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_{\ell}^{QO} \leq \bar{\delta}v_{\ell} \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.259)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_{\ell}^{QR} \leq \bar{\delta}v_{\ell} \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.260)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_{\ell}^{AO} \leq \bar{\delta}(1 - v_{\ell}) \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.261)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_{\ell}^{AR} \leq \bar{\delta}(1 - v_{\ell}) \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.262)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_{\ell}^{QO} \leq \bar{\delta}\hat{s}_{\ell} \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.263)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_{\ell}^{QR} \leq \bar{\delta}\hat{s}_{\ell} \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.264)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_{\ell}^{AO} \leq \bar{\delta}(1 - \hat{s}_{\ell}) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.265)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_{\ell}^{AR} \leq \bar{\delta}(1 - \hat{s}_{\ell}) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.266)$$

$$\sum_{g \in G_n} \hat{P}_g^{G0} - \sum_{\ell | O(\ell) = n} \hat{P}_{\ell}^{L0} + \sum_{\ell | R(\ell) = n} \hat{P}_{\ell}^{L0} = d_n \quad \forall n \in N \quad (4.267)$$

$$\hat{P}_{\ell}^{L0} = \frac{1}{x_{\ell}}[\hat{\delta}_{O(\ell)}^0 - \hat{\delta}_{R(\ell)}^0] \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.268)$$

$$\hat{P}_{\ell}^{L0} = \frac{1}{x_{\ell}}(\hat{\delta}_{\ell}^{QOO} - \hat{\delta}_{\ell}^{QR0}) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.269)$$

$$-\bar{P}_\ell^L \leq \hat{P}_\ell^{L0} \leq \bar{P}_\ell^L \quad \forall \ell \in L \quad (4.270)$$

$$0 \leq \hat{P}_g^{G0} \leq \bar{P}_g^G \quad \forall g \in G \quad (4.271)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_n^0 \leq \bar{\delta} \quad \forall n \in N \quad (4.272)$$

$$\hat{\delta}_\ell^{QO0} + \delta_\ell^{AO0} = \delta_{O(\ell)}^0 \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.273)$$

$$\hat{\delta}_\ell^{QR0} + \delta_\ell^{AR0} = \delta_{R(\ell)}^0 \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.274)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{QO0} \leq \bar{\delta} \hat{s}_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.275)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{QR0} \leq \bar{\delta} \hat{s}_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.276)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{AO0} \leq \bar{\delta}(1 - \hat{s}_\ell) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.277)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{AR0} \leq \bar{\delta}(1 - \hat{s}_\ell) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.278)$$

$$\sum_{\ell \in L^C} c_\ell^L \hat{s}_\ell \leq C_T^L \quad (4.279)$$

$$\hat{s}_\ell \in \{0, 1\} \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.280)$$

4.3.5 Quinta Versão - Problema com 2 Níveis

Esse é a versão final do modelo proposto, resultado da junção dos níveis 2, 3 e 4 da versão anterior. Esse modelo possui dois níveis de otimização lineares e é apresentado abaixo:

(Problema do Nível Superior - PNS)

$$\min_{\substack{P_g^{G0}, P_\ell^{L0}, \delta_n^0, s_\ell, \\ \delta_\ell^{QO0}, \delta_\ell^{QR0}, \delta_\ell^{AO0}, \delta_\ell^{AR0}}} \left\{ (1 - \beta) \cdot p \cdot R(s) + \beta \cdot \sum_{\ell \in L^C} c_\ell^L s_\ell \right\} \quad (4.281)$$

s.a.

$$\sum_{g \in G_n} P_g^{G0} - \sum_{\ell | O(\ell) = n} P_\ell^{L0} + \sum_{\ell | R(\ell) = n} P_\ell^{L0} = d_n \quad \forall n \in N \quad (4.282)$$

$$P_\ell^{L0} = \frac{1}{x_\ell} [\delta_{O(\ell)}^0 - \delta_{R(\ell)}^0] \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.283)$$

$$P_\ell^{L0} = \frac{1}{x_\ell} (\delta_\ell^{QO0} - \delta_\ell^{QR0}) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.284)$$

$$-\bar{P}_\ell^L \leq P_\ell^{L0} \leq \bar{P}_\ell^L \quad \forall \ell \in L \quad (4.285)$$

$$0 \leq P_g^{G0} \leq \bar{P}_g^G \quad \forall g \in G \quad (4.286)$$

$$0 \leq \delta_n^0 \leq \bar{\delta} \quad \forall n \in N \quad (4.287)$$

$$\delta_\ell^{QO0} + \delta_\ell^{AO0} = \delta_{O(\ell)}^0 \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.288)$$

$$\delta_\ell^{QR0} + \delta_\ell^{AR0} = \delta_{R(\ell)}^0 \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.289)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{QO0} \leq \bar{\delta} s_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.290)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{QR0} \leq \bar{\delta} s_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.291)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{AO0} \leq \bar{\delta}(1 - s_\ell) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.292)$$

$$0 \leq \delta_\ell^{AR0} \leq \bar{\delta}(1 - s_\ell) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.293)$$

$$\sum_{\ell \in L^C} c_\ell^L s_\ell \leq C_T^L \quad (4.294)$$

$$s_\ell \in \{0, 1\} \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.295)$$

(Problema do Nível Inferior - PNI)

$$\begin{aligned}
R(s) = & \max_{v_\ell, \Delta N_n, \Delta L_\ell, \Delta G_g, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n^U, \\
& \gamma_n^L, \epsilon_n^U, \epsilon_n^L, \varphi_g, \pi_\ell, \sigma_\ell^O, \sigma_\ell^R, \lambda_\ell^{QA}, \\
& \lambda_\ell^{QB}, \lambda_\ell^{QC}, \lambda_\ell^{QD}, \lambda_\ell^{AA}, \lambda_\ell^{AB}, \lambda_\ell^{AC}, \\
& \lambda_\ell^{AD}, \mu_\ell^A, \mu_\ell^B, \mu_\ell^C, \mu_\ell^D, \hat{P}_g^G, \hat{P}_\ell^L, \\
& \Delta \hat{d}_n, \hat{\delta}_n, \hat{s}_\ell, \hat{\delta}_\ell^{QO}, \hat{\delta}_\ell^{QR}, \hat{\delta}_\ell^{AO}, \hat{\delta}_\ell^{AR} \\
& \hat{P}_g^{GO}, \hat{P}_\ell^{LO}, \hat{\delta}_n^0, \hat{\delta}_\ell^{QOO}, \hat{\delta}_\ell^{QRO}, \hat{\delta}_\ell^{AOO}, \\
& \hat{\delta}_\ell^{AR0}} \\
& - \sum_{g \in G} \Delta G_g + \sum_{\ell \in L^O} [\lambda_\ell^{QA} + \lambda_\ell^{QB} + \lambda_\ell^{QC} + \lambda_\ell^{QD}] \\
& + \sum_{\ell \in L^C} [s_\ell(\mu_\ell^A + \mu_\ell^B) + (1 - s_\ell)(\mu_\ell^C + \mu_\ell^D)] - \sum_{n \in N} \Delta \hat{d}_n \Big\} \quad (4.296)
\end{aligned}$$

s.a.

$$\sum_{\ell \in L^O} v_\ell \geq n_{\ell o} - K \quad (4.297)$$

$$v_\ell \in \{0, 1\} \quad \forall \ell \in L \quad (4.298)$$

$$\Delta N_n = D_n(\alpha_n - \beta_n) - \gamma_n^U \quad \forall n \in N \quad (4.299)$$

$$\Delta L_\ell = \bar{P}_\ell^L(\epsilon_\ell^U + \epsilon_\ell^L) \quad \forall \ell \in L \quad (4.300)$$

$$\Delta G_g = \bar{P}_g^G \varphi_g \quad \forall g \in G \quad (4.301)$$

$$\alpha_{N(g)} \leq \varphi_g \quad \forall g \in G \quad (4.302)$$

$$\alpha_{O(\ell)} - \alpha_{R(\ell)} = \epsilon_\ell^U - \epsilon_\ell^L + \pi_\ell \quad \forall \ell \in L \quad (4.303)$$

$$\alpha_n - \beta_n \leq 1 \quad \forall n \in N \quad (4.304)$$

$$\sum_{\ell | O(\ell)=n} \sigma_\ell^O + \sum_{\ell | R(\ell)=n} \sigma_\ell^R = \gamma_n^U - \gamma_n^L \quad \forall n \in N \quad (4.305)$$

$$\sigma_\ell^O \geq \lambda_\ell^{QA} + \lambda_\ell^{AA} - \frac{\bar{\delta}}{x_\ell} \pi_\ell \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.306)$$

$$\sigma_\ell^R \geq \lambda_\ell^{QB} + \lambda_\ell^{AB} + \frac{\bar{\delta}}{x_\ell} \pi_\ell \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.307)$$

$$\sigma_\ell^O \geq \lambda_\ell^{QC} + \lambda_\ell^{AC} \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.308)$$

$$\sigma_\ell^R \geq \lambda_\ell^{QD} + \lambda_\ell^{AD} \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.309)$$

$$\lambda_\ell^{QA} \geq v_\ell \lambda \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.310)$$

$$\lambda_\ell^{QB} \geq v_\ell \lambda \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.311)$$

$$\lambda_\ell^{QC} \geq (1 - v_\ell) \lambda \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.312)$$

$$\lambda_\ell^{QD} \geq (1 - v_\ell) \lambda \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.313)$$

$$\lambda_\ell^{AA} \geq (1 - v_\ell) \lambda \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.314)$$

$$\lambda_\ell^{AB} \geq (1 - v_\ell) \lambda \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.315)$$

$$\lambda_\ell^{AC} \geq v_\ell \lambda \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.316)$$

$$\lambda_\ell^{AD} \leq v_\ell \lambda \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.317)$$

$$\sigma_\ell^O \geq \mu_\ell^A - \frac{\bar{\delta}}{x_\ell} \pi_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.318)$$

$$\sigma_\ell^R \geq \mu_\ell^B + \frac{\bar{\delta}}{x_\ell} \pi_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.319)$$

$$\sigma_\ell^O \geq \mu_\ell^C \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.320)$$

$$\sigma_\ell^R \geq \mu_\ell^D \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.321)$$

$$\beta, \gamma^U, \gamma^L, \epsilon^U, \epsilon^L, \varphi \geq 0 \quad (4.322)$$

$$\mu^A, \mu^B, \mu^C, \mu^D \leq 0 \quad (4.323)$$

$$\lambda^{QA}, \lambda^{QB}, \lambda^{QC}, \lambda^{QD} \leq 0 \quad (4.324)$$

$$\lambda^{AA}, \lambda^{AB}, \lambda^{AC}, \lambda^{AD} \leq 0 \quad (4.325)$$

$$\sum_{g \in G_n} \hat{P}_g^G - \sum_{\ell | O(\ell) = n} \hat{P}_\ell^L + \sum_{\ell | R(\ell) = n} \hat{P}_\ell^L = d_n - \Delta \hat{d}_n \quad \forall n \in N \quad (4.326)$$

$$\hat{P}_\ell^L = \frac{1}{x_\ell} (\hat{\delta}_\ell^{QO} - \hat{\delta}_\ell^{QR}) \quad \forall \ell \in L \quad (4.327)$$

$$-\bar{P}_\ell^L \leq \hat{P}_\ell^L \leq \bar{P}_\ell^L \quad \forall \ell \in L \quad (4.328)$$

$$0 \leq \hat{P}_g^G \leq \bar{P}_g^G \quad \forall g \in G \quad (4.329)$$

$$0 \leq \Delta \hat{d}_n \leq d_n \quad \forall n \in N \quad (4.330)$$

$$\hat{\delta}_\ell^{QO} + \hat{\delta}_\ell^{AO} = \hat{\delta}_{O(\ell)} \quad \forall \ell \in L \quad (4.331)$$

$$\hat{\delta}_\ell^{QR} + \hat{\delta}_\ell^{AR} = \hat{\delta}_{R(\ell)} \quad \forall \ell \in L \quad (4.332)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{QO} \leq \bar{\delta} v_\ell \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.333)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{QR} \leq \bar{\delta} v_\ell \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.334)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{AO} \leq \bar{\delta} (1 - v_\ell) \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.335)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{AR} \leq \bar{\delta} (1 - v_\ell) \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.336)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{QO} \leq \bar{\delta} \hat{s}_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.337)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{QR} \leq \bar{\delta} \hat{s}_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.338)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{AO} \leq \bar{\delta} (1 - \hat{s}_\ell) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.339)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{AR} \leq \bar{\delta} (1 - \hat{s}_\ell) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.340)$$

$$\sum_{g \in G_n} \hat{P}_g^{G0} - \sum_{\ell | O(\ell) = n} \hat{P}_\ell^{L0} + \sum_{\ell | R(\ell) = n} \hat{P}_\ell^{L0} = d_n \quad \forall n \in N \quad (4.341)$$

$$\hat{P}_\ell^{L0} = \frac{1}{x_\ell} [\hat{\delta}_{O(\ell)}^0 - \hat{\delta}_{R(\ell)}^0] \quad \forall \ell \in L^O \quad (4.342)$$

$$\hat{P}_\ell^{L0} = \frac{1}{x_\ell} (\hat{\delta}_\ell^{QO0} - \hat{\delta}_\ell^{QR0}) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.343)$$

$$-\bar{P}_\ell^L \leq \hat{P}_\ell^{L0} \leq \bar{P}_\ell^L \quad \forall \ell \in L \quad (4.344)$$

$$0 \leq \hat{P}_g^{G0} \leq \bar{P}_g^G \quad \forall g \in G \quad (4.345)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_n^0 \leq \bar{\delta} \quad \forall n \in N \quad (4.346)$$

$$\hat{\delta}_\ell^{QO0} + \delta_\ell^{AO0} = \delta_{O(\ell)}^0 \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.347)$$

$$\hat{\delta}_\ell^{QR0} + \delta_\ell^{AR0} = \delta_{R(\ell)}^0 \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.348)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{QO0} \leq \bar{\delta}\hat{s}_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.349)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{QR0} \leq \bar{\delta}\hat{s}_\ell \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.350)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{AO0} \leq \bar{\delta}(1 - \hat{s}_\ell) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.351)$$

$$0 \leq \hat{\delta}_\ell^{AR0} \leq \bar{\delta}(1 - \hat{s}_\ell) \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.352)$$

$$\sum_{\ell \in L^C} c_\ell^L \hat{s}_\ell \leq C_T^L \quad (4.353)$$

$$\hat{s}_\ell \in \{0, 1\} \quad \forall \ell \in L^C \quad (4.354)$$

Segue abaixo na Figura 4.2, um esquema de todas etapas descritas anteriormente.

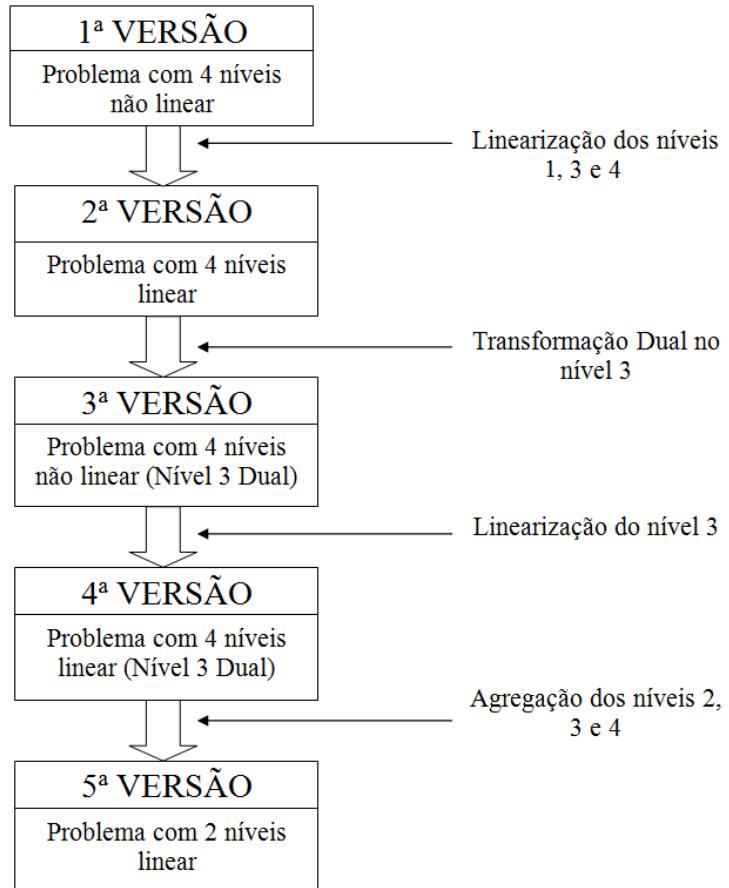


Figura 4.2: Resumo do processo de obtenção do problema PERT de dois níveis

4.4 Metodologia de Solução

Nessa seção, será apresentada uma metodologia para a resolução e análise do novo modelo proposto na seção anterior. Para facilitar a notação, pode-se reescrever o modelo proposto da seguinte maneira:

(PNS)

$$\min_s \{(1 - \beta) \cdot p \cdot R(s) + \beta \cdot C(s)\} \quad (4.355)$$

$$\text{s.a.} \quad s \in \mathcal{S}^* \quad (4.356)$$

(PNI)

$$R(s) = \max_{x^I} \{G(s, x^I)\} \quad (4.357)$$

$$\text{s.a.} \quad x^I \in \mathcal{X}^I \quad (4.358)$$

em que x^I consiste em todas as variáveis do problema do nível inferior e o \mathcal{X}^I , seu conjunto de domínio.

A metodologia de resolução proposta consiste na Decomposição de Benders aplicada a problemas de otimização binível e foi baseada na empregada por [25]. Essa metodologia constitui-se na reestruturação do PNS da seguinte maneira:

(Problema do Nível Superior Modificado - PNSM)

$$\min_s \{(1 - \beta) \cdot p \cdot \Theta + \beta \cdot C(s)\} \quad (4.359)$$

s.a.

$$\Theta \geq R'(s) \quad (4.360)$$

$$s \in \mathcal{S}^* \quad (4.361)$$

onde $R'(s)$ é uma função aproximada de $R(s)$ e é reformulada a cada iteração do algoritmo.

Inicialmente, assume-se que $R'(s) = 0, \forall s \in \mathcal{S}^*$. Dessa maneira, a resolução do problema reestruturado acima retornará como solução ótima o plano de expansão com menor custo de implementação, já que a variável Θ tenderá para o valor zero e o problema se tornará o problema PERT tradicional. Será utilizada a denotação $s^{(0)}$ para representar esse plano de expansão.

Uma vez determinado esse plano de expansão, calcula-se seu risco $R(s^{(0)})$ através do PNI. Com esse valor, pode-se estimar os riscos das outras variáveis, através de uma aproximação linear dessa função:

$$R'(s) = R(s^{(0)}) + \tilde{\nabla}R^t(s^{(0)}) \cdot (s - s^{(0)}) \quad (4.362)$$

em que $\tilde{\nabla}R^t(s^{(0)})$ é uma aproximação do vetor gradiente da função risco. O próprio vetor gradiente da função risco não pode ser determinado analiticamente, pois essa função depende da resolução de um problema linear inteiro misto para se definida. Entretanto, a aproximação do vetor gradiente pode determinada através da seguinte expressão:

$$\tilde{\nabla}R(s) = \frac{\partial G}{\partial s}(s) \quad (4.363)$$

Uma característica importante é que a variável s não influencia na região factível do PNI. Isso contribui para a validação dessa estimativa do vetor gradiente.

Observando a função objetivo $G(s, x^I)$ do PNI da versão bínivel do modelo proposto na seção anterior, Eq. (4.296), essa aproximação é dada por:

$$\tilde{\nabla}R^t(s) = \mu^A + \mu^B - \mu^C - \mu^D \quad (4.364)$$

Voltando ao PNSM, pode-se incluir a restrição $\Theta \geq R(s^{(0)}) + \tilde{\nabla}R^t(s^{(0)}) \cdot (s - s^{(0)})$, $\forall s \in \mathcal{S}^*$ e resolvê-lo novamente. Obtém-se um novo plano de expansão ótimo, o qual será denotado por $s^{(1)}$. Calcula-se o risco associado a esse plano $s^{(1)}$ e estima-se novamente a função risco para os demais planos, através da seguinte expressão:

$$R'(s) = \max_{j=0,1} \left\{ R(s^{(j)}) + \tilde{\nabla}R^t(s^{(j)}) \cdot (s - s^{(j)}) \right\} \quad (4.365)$$

Esse processo continua e a cada iteração é reformulada a função que aproxima o risco dos planos de expansão através da seguinte formulação:

$$R'(s) = \max_{j=0,1,\dots,k} \left\{ R(s^{(j)}) + \nabla R^t(s^{(j)}) \cdot (s - s^{(j)}) \right\} \quad (4.366)$$

em que k é a iteração corrente.

Como condição de convergência, verifica-se se os valores do risco estimado $R'(s)$ e do risco calculado $R(s)$ da solução ótima da iteração são iguais. Caso sejam iguais, essa solução é a ótima global do problema. Já como condição de divergência, adota-se um limite máximo k^{MAX} para o número de iterações do algoritmo.

De forma resumida, as etapas do algoritmo de resolução são mostradas abaixo:

1. Inicializar $k = 0$;
2. Resolver PNSM, com $R'(s) = 0$ para todo plano s , e obter $s^{(k)}$ e $\Theta^{(k)}$;
3. Resolver PNI, com $s = s^{(k)}$, e obter $R(s^{(k)})$ e $\tilde{\nabla}R(s^{(k)})$;
4. Se $R(s^{(k)}) = \Theta^{(k)}$, parar, SOLUÇÃO ÓTIMA ENCONTRADA;
5. Incluir a restrição $\Theta \geq R(s^{(k)}) + \tilde{\nabla}R^t(s^{(k)})(s - s^{(k)})$ ao PNSM;
6. Fazer $k = k + 1$;
7. Se $k = k^{MAX}$, parar, DIVERGÊNCIA;
8. Resolver PNSM e obter $s^{(k)}$ e $\Theta^{(k)}$;
9. Voltar ao Passo 3.

4.5 Resultados Numéricos

As formulações propostas foram testadas no sistema de 6 barras, cujos dados são apresentados no Apêndice B. As simulações foram realizadas utilizando a ferramenta de otimização *GAMS* e valor $\bar{\delta}$ foi definido como sendo $\pi/2$ e o preço da energia p como 50 \$/*MW*.

4.5.1 Validação do Problema Binível

Realizaram-se algumas alterações no sistema de 6 barras para poder efetuar a validação do modelo binível proposto. O sistema elétrico de 6 barras modificado possui 6 barras e 10 linhas, sendo 3 delas no ramo 4-6 e 2 no ramo 3-5. Para melhor estudar esse sistema, se agruparam as linhas múltiplas, modelando-as como únicas linhas. O sistema 6 barras modificado é o ilustrado na Figura 4.3.

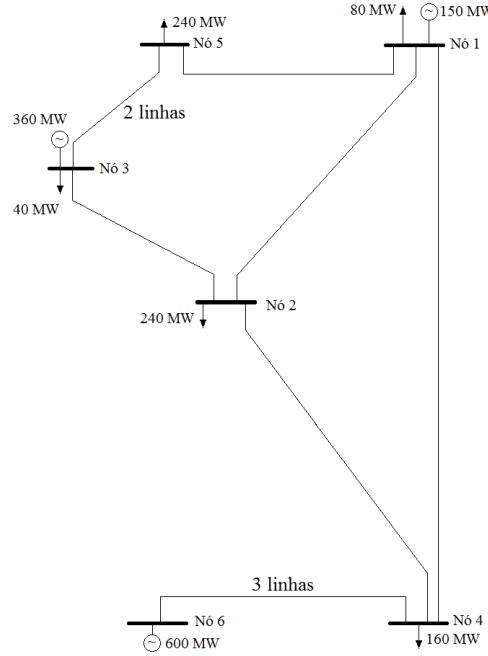


Figura 4.3: Sistema 6 Barras Modificado

Esse sistema, como está, já supre toda a demanda de energia futura prevista. Os planos de expansão serão, portanto, realizados apenas como medida de segurança e reforço da robustez da rede elétrica.

Os dados das linhas se encontram na Tabela 4.2. Nela estão destacadas as quatro linhas candidatas para a expansão do sistema elétrico (linhas 1-3, 2-6, 3-4 e 5-6).

Tabela 4.2: Dados de Linhas - Sistema 6 Barras Modificado

Ramo	1-2	1-4	1-5	2-3	2-4	3-5	4-6	1-3	2-6	3-4	5-6
x_ℓ (p.u.)	0,40	0,60	0,20	0,20	0,40	0,20/2	0,30/3	0,38	0,30	0,59	0,61
\bar{P}_ℓ^L (p.u.)	1,00	0,80	1,00	1,00	1,00	$2 \times 1,00$	$3 \times 1,00$	1,00	1,00	0,82	0,78
c_ℓ^L ($10^3 \$$)	-	-	-	-	-	-	-	3,8	3,0	5,9	6,1

Fixou-se o valor para o custo máximo como sendo $C_T^L = \$16\,000$, com o qual é possível inserir no máximo 3 novas linhas. Em seguida resolveram-se vários problemas lineares referentes à obtenção dos cortes de carga mínimos $Q^{MIN}(v)$ para cada cenário futuro da rede. O resultado dessas simulações são mostrados na Tabela 4.3 a seguir.

Note que, por simplicidade, a tabela mostra apenas os valores de corte de carga para o critério de segurança $n - 2$, isto é, se pressupõe que serão desligadas no máximo 2 linhas do sistema. Apesar disso, ainda foram estudados os casos para $K = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 7 , porém não são apresentados. Consideraram-se, portanto, os $2^7 = 128$ cenários possíveis do sistema elétrico.

Tabela 4.3: Carga Não Atendida Mínima para $K = 2$

Contingência v	Linhas Desligadas	$\mathcal{Q}^{MIN}(v)$ (MW)	Contingência v	Linhas Desligadas	$\mathcal{Q}^{MIN}(v)$ (MW)
1	1-2	7,8	15	1-4, 2-3	24,2
2	1-4	0,0	16	1-4, 2-4	3,7
3	1-5	0,0	17	1-4, 3-5	66,1
4	2-3	40,0	18	1-4, 4-6	104,4
5	2-4	3,8	19	1-5, 2-3	40,0
6	3-5	66,9	20	1-5, 2-4	0,0
7	4-6	100,3	21	1-5, 3-5	162,0
8	1-2, 1-4	9,3	22	1-5, 4-6	95,0
9	1-2, 1-5	0,0	23	2-3, 2-4	74,1
10	1-2, 2-3	83,3	24	2-3, 3-5	148,1
11	1-2, 2-4	40,0	25	2-3, 4-6	150,0
12	1-2, 3-5	76,5	26	2-4, 3-5	92,4
13	1-2, 4-6	102,5	27	2-4, 4-6	94,9
14	1-4, 1-5	0,0	28	3-5, 4-6	218,8

Em seguida foram definidos os planos de expansão factíveis com o orçamento pré-determinado. O total de planos de expansão é igual a 15 e são os mostrados na Tabela 4.4 abaixo. São apresentados também cada um de seus arrependimentos máximos, que representam seus riscos $R(s)$, para diferentes valores de K . Estão destacados os valores ótimos para um dos casos estudados.

Tabela 4.4: Planos de Expansão

Plano de Expansão	Linhas Construídas	$R(s)$ em MW			
		$K = 1$	$K = 2$	$K = 3$	$K = 4, 5, 6, 7$
s_1	-	169,7	251,2	282,0	282,0
s_2	5-6	126,1	173,2	204,0	204,0
s_3	3-4	149,7	174,0	215,8	236,1
s_4	3-4, 5-6	89,1	105,5	137,8	158,1
s_5	2-6	97,8	151,2	182,0	182,0
s_6	2-6, 5-6	31,2	76,4	104,0	104,0
s_7	2-6, 3-4	93,7	113,2	119,7	136,1
s_8	2-6, 3-4, 5-6	19,4	35,2	41,7	58,1
s_9	1-3	149,7	184,8	219,0	270,3
s_{10}	1-3, 5-6	109,3	155,7	182,0	192,3
s_{11}	1-3, 3-4	149,7	155,1	178,0	188,3
s_{12}	1-3, 3-4, 5-6	88,3	100,0	100,0	110,3
s_{13}	1-3, 2-6	73,1	81,5	119,0	170,3
s_{14}	1-3, 2-6, 5-6	13,3	59,3	82,0	92,3
s_{15}	1-3, 2-6, 3-4	73,1	78,0	81,6	88,3

Vale lembrar que todos esses valores citados até agora foram obtidos resolvendo um total de 1920 problemas lineares diferentes, correspondentes aos 15 planos de expansão e 128 cenários.

Observando a Tabela 4.4 acima se pode ver que para $K = 1$ o plano de expansão que possui o menor risco é o plano s_{14} (1-3, 2-6, 5-6) enquanto que para os outros casos, $K = 2, 3, 4, 5, 6$ e 7, o plano s_8 (2-6, 3-4, 5-6) se apresenta com menor risco.

Pode-se também observar que os critérios de segurança $n - 4$, $n - 5$, $n - 6$ e $n - 7$ apresentam os mesmo resultados para o problema.

Por fim, no que segue abaixo na Tabela 4.5, estão os valores dos arrependimentos $A(s, v)$ para todos os planos de expansão factíveis e para as contingências pertencentes ao conjunto \mathcal{V}_1 .

Tabela 4.5: Arrependimentos $A(s, v)$ para $K = 1$

Planos de Expansão	Contingências							$R(s)$
	0	1	2	3	4	5	6	
s_1	0,0	32,2	15,7	40,0	42,0	77,6	103,1	169,7
s_2	19,7	47,5	26,9	0,0	12,5	87,8	56,9	126,1
s_3	17,3	41,3	15,7	40,0	42,0	82,6	122,0	149,7
s_4	23,4	51,6	30,2	2,3	13,9	89,1	60,5	72,2
s_5	0,0	3,0	0,0	40,0	42,5	9,8	97,8	69,7
s_6	0,0	2,2	0,0	0,0	25,1	5,0	23,7	31,3
s_7	0,0	0,7	0,0	40,0	37,4	9,3	93,7	49,7
s_8	0,0	0,0	0,0	0,0	16,6	4,5	19,4	0,0
s_9	0,0	32,2	7,7	40,0	23,0	80,3	84,2	149,7
s_{10}	17,7	50,1	21,2	8,1	0,0	87,3	59,2	109,3
s_{11}	13,0	42,2	7,7	40,0	23,0	83,6	102,3	149,7
s_{12}	21,1	53,7	24,6	10,8	0,0	88,3	63,9	71,7
s_{13}	0,0	2,5	0,0	40,0	16,4	3,5	73,1	49,7
s_{14}	0,0	1,9	0,0	0,0	3,8	0,0	0,0	13,3
s_{15}	0,0	0,3	0,0	40,0	0,5	3,2	73,1	49,7
								73,1

Em posse desses dados, foi modelado o novo problema proposto utilizando o *software GAMS* e compararam-se o valores de riscos obtidos através do novo modelo com os dados da tabela 4.5 acima, para cada um dos 15 planos de expansão factíveis. Constatou-se que os valores são idênticos, comprovando assim a exatidão do problema formulado.

Outra validação realizada foi a do algoritmo de resolução proposto. Tal algoritmo foi implementado em linguagem *C++* dentro de suas subrotinas resolviam-se os problemas lineares inteiros mistos utilizando a ferramenta *GAMS*.

A seguir serão mostrados os gráficos com a evolução do algoritmo para a resolução do problema de planejamento, considerando os seguintes critérios de segurança $K = 1, K = 2, K = 3$ e $K = 4, 5, 6$ e 7 .

A Figura 4.4 apresenta os gráficos dos riscos, estimados e calculados, a cada iteração do algoritmo. Note que os valores dos riscos estimados são sempre inferiores aos seus riscos calculados. Ao longo do algoritmo, esses valores convergem a um mesmo valor de risco, configurando, assim, a solução ótima do problema.

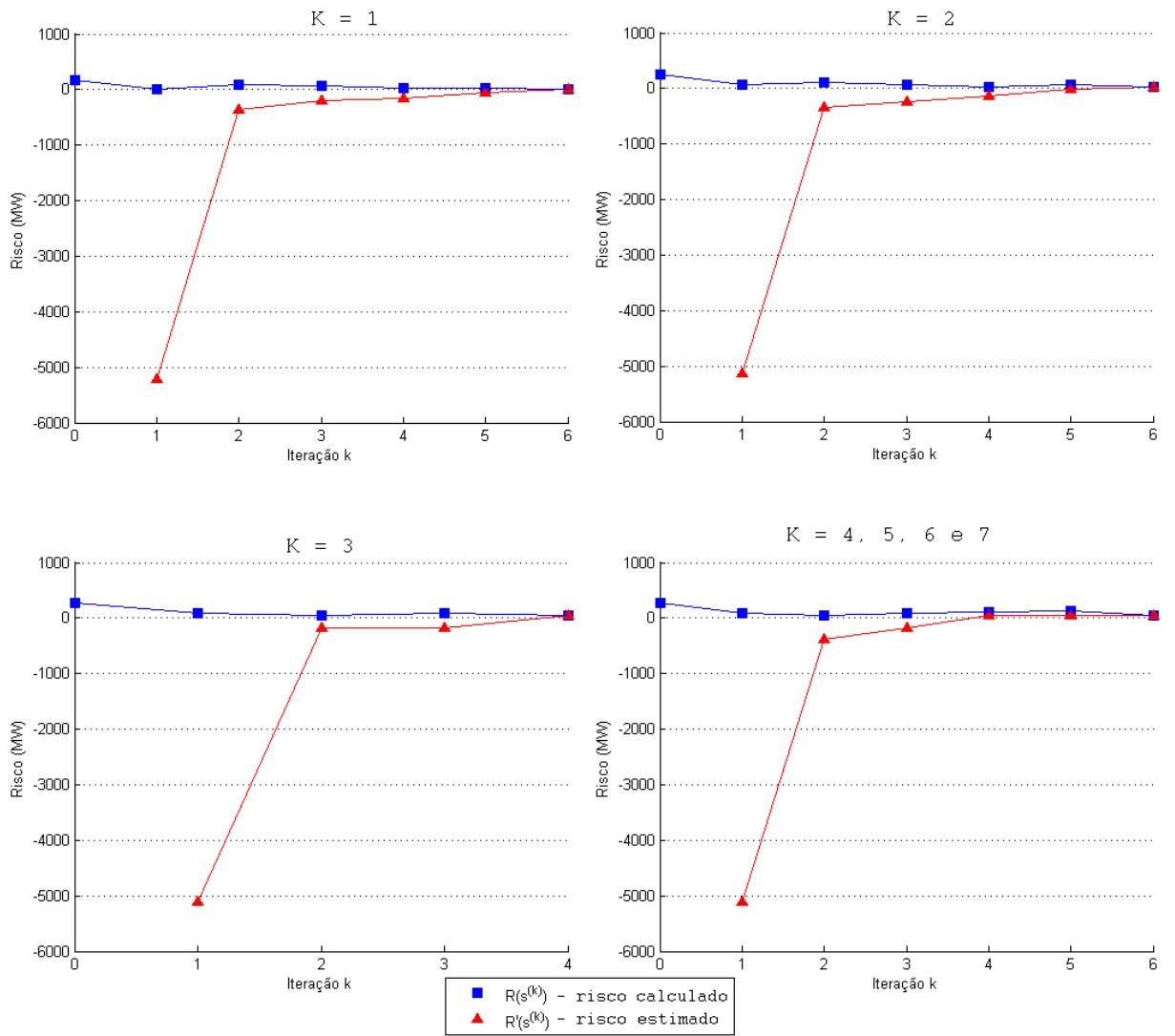


Figura 4.4: Evolução do Algoritmo de Resolução

Para melhor visualização dos riscos calculados, são mostrados na Figura 4.5 abaixo os gráficos que descrevem o comportamento desses riscos a cada iteração.

Os resultados obtidos através dessas simulações são iguais aos obtidos passo-a-passo anteriormente, concluindo, portanto, que o método é eficaz na resolução do problema proposto aplicado ao sistema elétrico teste.

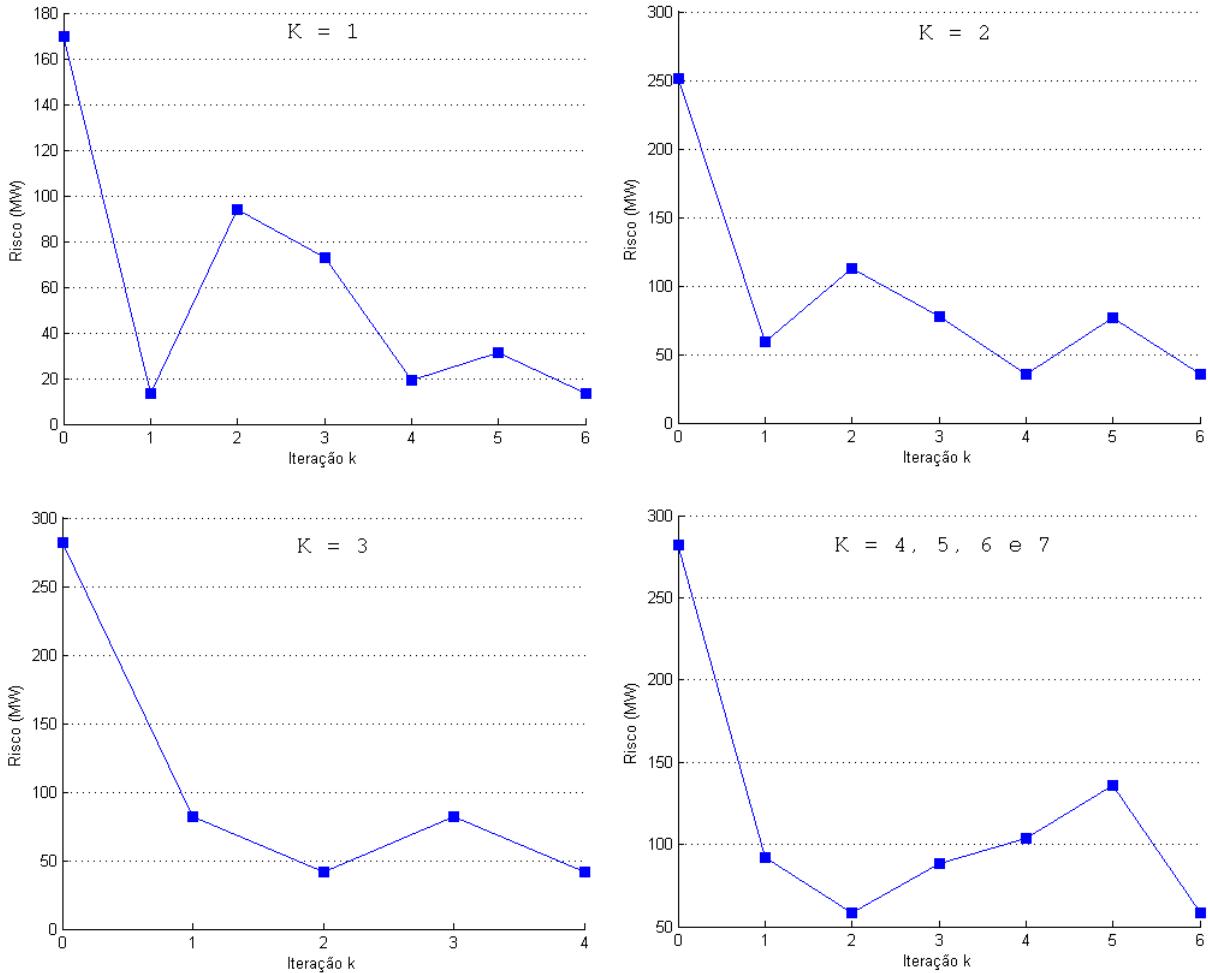


Figura 4.5: Evolução do Risco Calculado

4.5.2 Avaliação do Parâmetro β

Validado o novo modelo proposto, buscou-se avaliar a ponderação atribuída entre a minimização por risco e a minimização por custo. Essa avaliação é realizada observando o resultado do problema ao alterar o valor do parâmetro β .

O sistema elétrico estudado nessa etapa foi o Sistema 6 barras original, cujos dados estão descritos no Apêndice B. Como alternativas de expansão, optou-se por inserir novas linhas nos ramos 1-2, 1-4, 1-5, 2-3, 2-4, 2-6, 3-5, 4-6 ou 5-6. Esses ramos são os que já possuem linhas na configuração original e os propostos para expansão no artigo [6].

Nos ramos que já possuem linhas, o número de novas linhas máxima a ser inserido foi fixado como sendo 2 linhas. Já nos ramos que não possuem linhas, o número máximo de novas linhas instaladas foi fixado igual a 3.

Resolveu-se o problema proposto para valores de β , variando de 0 a 1, discretizado por um passo igual a 0,02. O valor de custo máximo foi variado também, assumindo os valores \$11 000, \$19 000 e \$27 000. E por fim o parâmetro K do critério de segurança variou de 1 a 6 linhas.

As Figuras 4.6, 4.7 e 4.8 mostram respectivamente os resultados das simulações para o custo máximo das instalações valendo \$11 000, \$19 000 e \$27 000.

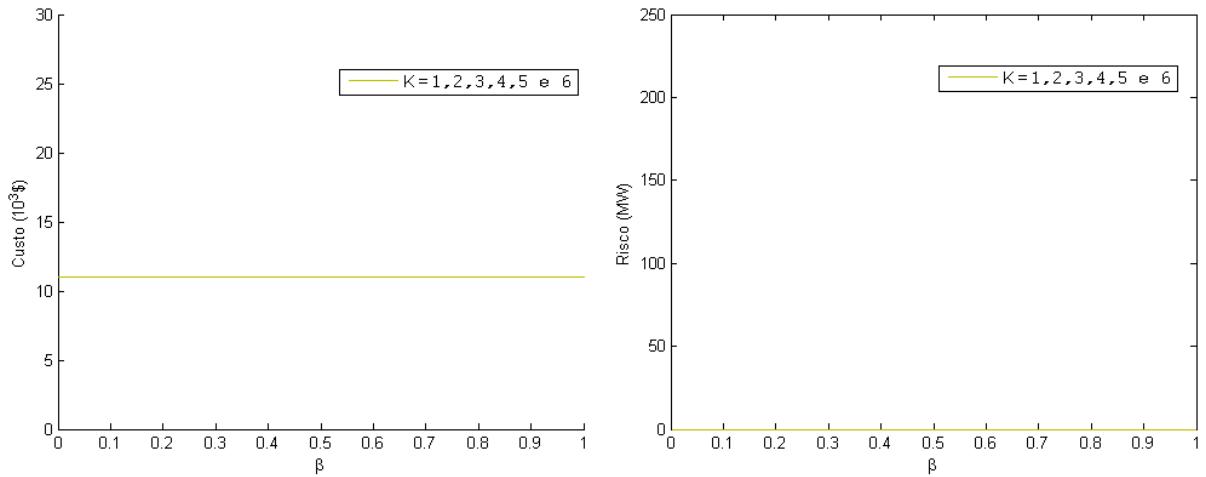


Figura 4.6: Avaliação do Parâmetro β com $C_T^L = \$11\,000$

Pode-se observar na Figura 4.6 que quando o limite de custo é igual a $\$11\,000$, não é possível estimar o risco e ele é dito ser sempre nulo, não importando o valor do parâmetro β . Isso ocorre porque, com esse custo máximo como limitação, existe apenas uma única solução factível (uma nova linha entre 3 e 5 e duas novas linhas entre 4 e 6) e não haverá arrependimento após a ocorrência de uma contingência, já que não existem mais opções de expansão. As outras opções de planos de expansão ou não garantem o corte de carga nulo no cenário 0 ou são mais caros que o limite.

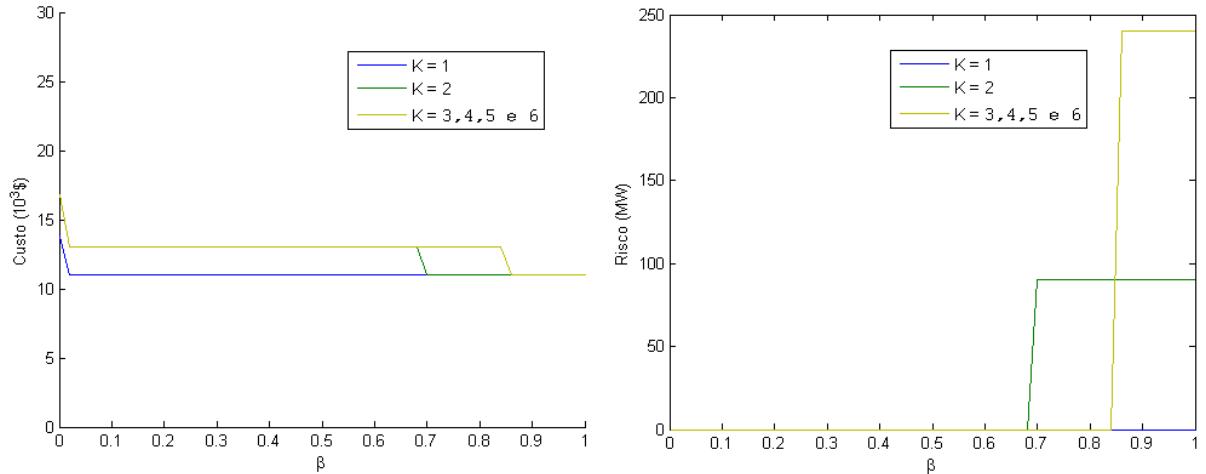


Figura 4.7: Avaliação do Parâmetro β com $C_T^L = \$19\,000$

Ao aumentar o limite de custo máximo, novos planos de expansão mais caros passam a ser factíveis e podem garantir uma melhor segurança ao sistema fazendo com que surja um risco diferente de zero ao se ponderar a minimização do custo.

Esse fato pode ser notado na Figura 4.7. Observa-se que para $\beta = 0,70$ e $K = 2$, o risco da solução ótima deixa de ser nulo. Nessa situação, pode-se afirmar que a ponderação dada à minimização do risco não foi suficiente para anulá-lo.

Para $K = 1$, os valores de risco se mantêm nulos para qualquer valor de ponderação β . Já para os outros valores de K (de 3 a 6), existe risco não nulo associado às soluções ótimas a partir da ponderação $\beta = 0,86$.

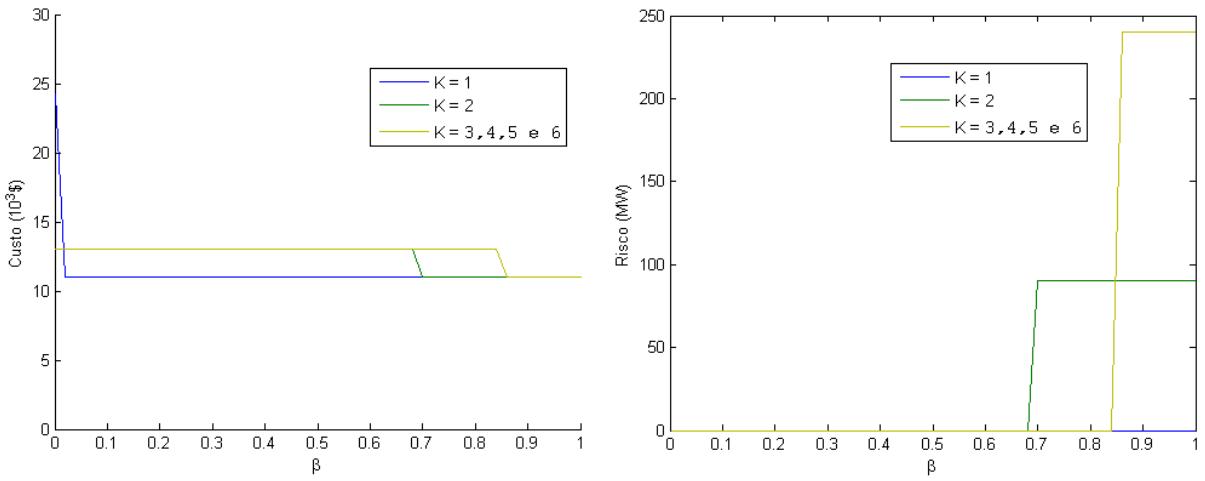


Figura 4.8: Avaliação do Parâmetro β com $C_T^L = \$27\,000$

A Figura 4.8 é semelhante à Figura 4.7. Isso mostra que para esse problema, com a variação do custo máximo para mais de \$19 000 não se alteram os resultados obtidos.

4.6 Conclusão

O modelo tradicional do problema de planejamento de expansão de redes de transmissão não leva em consideração a vulnerabilidade do sistema a eventuais desligamentos, seja ele causado por fenômenos da natureza, por ataques intencionais ou por manobras de operação. A incorporação da minimização dessa vulnerabilidade torna-se necessária já que em projetos reais não se visa apenas a minimização dos custos de instalações.

Esses eventos de contingência do sistema são classificados como incertos e não-aleatórios, o que indica que não se pode modelá-los com uma distribuição de probabilidades conhecida, já que não há amostras suficientes para sua validação [26]. Nesse contexto, a otimização estocástica torna-se inviável pois possui alta dependência dos parâmetros probabilísticos do problema.

A abordagem de Otimização por Risco contorna esse problema de dependência das probabilidades de ocorrência dos eventos incertos. Menos conservador que a Otimização Robusta, essa abordagem busca selecionar os planos de expansão que minimizam os riscos tomados, modelados através do arrependimento de cada decisão.

Os modelos propostos até então para o problema de planejamento de expansão de redes de transmissão sujeito a desligamentos intencionais necessitam da definição dos potenciais cenários do sistema elétrico [23],[26]. Em outras palavras, esse modelos necessitam da definição prévia dos possíveis cenários futuros do sistema elétrico, resultantes da ação de diversos planos de ataque.

Nesse trabalho buscou-se agregar os planos de ataque como variáveis do problema, a fim de evitar a determinação das piores contingências na rede e fazê-la de maneira automática na resolução do novo modelo. Além disso, com esse novo modelo proposto, condensaram-se as várias etapas das abordagens estudadas do problema de planejamento.

Determinou-se um procedimento de resolução do modelo proposto usando técnicas de otimização binável, descritas pelo Método de Decomposição de Benders [25] e realizou-se a aplicação do modelo para sistemas elétricos para validação desse modelo através da análise dos resultados. Verificou-se também a compensação, ponderada pelo parâmetro β , entre o custo de instalação e a minimização da vulnerabilidade da rede elétrica.

Capítulo 5

Índices de Robustez e de Vulnerabilidade

Nessa etapa do projeto, tentou-se propor uma medida da vulnerabilidade e da robustez dos sistemas elétricos durante o planejamento da expansão, baseando-se no novo modelo proposto no capítulo anterior.

5.1 Definição dos Índices

Naturalmente, durante o planejamento da expansão visando à minimização do corte de cargas, a função objetivo do modelo é descrito como mostrado abaixo:

$$\min_{s \in S^*} \{ P^{PEN} \cdot R(s) + C(s) \} \quad (5.1)$$

em que P^{PEN} é o preço de penalização do risco $R(s)$ dos planos de expansão, dado em (\$/MW). Nessa formulação, o corte de carga, representado pelo risco da implantação do plano, é penalizado segundo o preço da energia. Tal preço é um dado obtido ou estimado pelo planejador do sistema e representa o custo da demanda não atendida, isto é, o quanto que dever ser pago por todos os MWs da demanda não atendida ao ocorrer a contingência.

Quando esse preço é grande, inevitavelmente será escolhido um plano de expansão de risco nulo. Isso indica que esse plano é o melhor plano frente a todas as contingências.

Ao diminuir o preço pela carga não atendida, o lado do custo da instalação começa a apresentar-se mais importante, de modo que, a partir de um preço mínimo P_{MIN}^{PEN} , o plano de expansão escolhido já não possui risco nulo. Essa situação é ilustrada na Figura 5.1 abaixo:

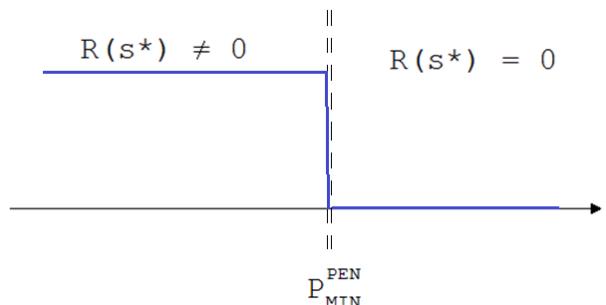


Figura 5.1: Preço de penalização mínimo

O valor P_{MIN}^{PEN} representa um limite entre a região em que o risco do plano ótimo não é nulo e a região em que esse risco é nulo.

Como dito anteriormente, o valor do preço de penalização P^{PEN} é determinado no escopo do projeto de planejamento e independe da escolha do planejador. Dessa maneira, quando uma rede possui P_{MIN}^{PEN} alto, menor é a chance de determinar um plano com risco nulo. Em outras palavras, é mais difícil encontrar um plano de expansão que seja ótimo em qualquer cenário de contingência.

Pode-se relacionar diretamente o valor P_{MIN}^{PEN} da rede à sua vulnerabilidade. Convenientemente, será definida a grandeza denominada Índice de Vulnerabilidade (IV) como sendo:

$$IV = P_{MIN}^{PEN} \quad (5.2)$$

Reescrevendo a função objetivo, Eq. (4.355), do problema do nível superior, formulado na seção anterior, da seguinte forma:

$$\min_{s \in S^*} \left\{ \frac{1 - \beta}{\beta} \cdot p \cdot R(s) + C(s) \right\} \quad (5.3)$$

e comparando ambas as expressões para a função objetivo (Equações (5.3) e (5.1)), é possível relacionar os seguintes valores:

$$P^{PEN} = \frac{1 - \beta}{\beta} \cdot p \quad (5.4)$$

Avaliando o comportamento do valor do risco $R(s^*)$ das soluções ótimas ao alterar o valor de β , pode-se determinar um ponto β_{lim} em que se define a fronteira entre a região de risco nulo e a região de risco não nulo.

Dessa forma:

$$P_{MIN}^{PEN} = \frac{1 - \beta_{lim}}{\beta_{lim}} \cdot p \quad (5.5)$$

Ou seja

$$IV = \frac{1 - \beta_{lim}}{\beta_{lim}} \cdot p \quad (5.6)$$

De maneira análoga, baseando-se no fato de que os conceitos de vulnerabilidade e de robustez são diretamente inversos, define-se também o Índice de Robustez da rede de transmissão (IR) como sendo $IR = IV^{-1}$ ou então:

$$IR = \frac{\beta_{lim}}{(1 - \beta_{lim}) \cdot p} \quad (5.7)$$

5.2 Resultados Obtidos

Utilizando o programa desenvolvido para resolução do problema PERT com restrições de vulnerabilidade, realizou-se uma série de simulações com o intuito de avaliar a proposta de definição dos índices de vulnerabilidade e de robustez.

Essas simulações foram descritas no capítulo anterior e seus resultados podem ser visualizadas nas Figuras 4.6, 4.7 e 4.8.

Observando a Figura 4.6, nota-se que o risco é nulo para qualquer valor escolhido para o parâmetro β . Logo, considerando essa simulação, o valor de β_{lim} nesse caso é igual a 1,0.

Dessa forma, o Índice de Vulnerabilidade da rede, para $C_T^L = \$11\,000$ tem valor nulo e, consequentemente, o Índice de Robustez, tem valor ∞ .

Isso já é esperado, pois com esse custo máximo estabelecido, o planejador do sistema não tem flexibilidade de escolha e há apenas um único plano factível. Obviamente, nessa situação, não teria a necessidade de se realizar o planejamento da expansão, já que a escolha está decidida por conta da limitação de recursos.

Para o caso em que o custo máximo varia para $\$19\,000$ e $\$27\,000$, o valor de β_{lim} altera para $\beta_{lim} = 0,70$ considerando $K = 2$ e para $\beta_{lim} = 0,86$ considerando $K = 3, 4, 5$ e 6 .

Lembrando que foi utilizado preço de $\$50$ para o corte de cada MW de carga, os índices de vulnerabilidade e de robustez para essas simulações obtidos estão apresentados na Tabela 5.1 abaixo.

Tabela 5.1: Variação dos Índices de Vulnerabilidade e de Robustez com $C_T^L = \$19\,000$ e $\$27\,000$

K	β_{lim}	IV ($\$/MW$)	IR ($kW/\$$)
1	1,00	0,0	∞
2	0,70	21,4	46,67
3, 4, 5 e 6	0,86	8,1	122,86

Observando a Tabela acima, considerando o critério de segurança $n - 2$, por exemplo, o preço da carga não atendida pode diminuir até $\$21,4/MW$, seu índice de vulnerabilidade, que o modelo ainda escolherá uma solução ótima com risco de implantação nulo.

O índice de robustez pode ser interpretado como a valorização máxima da unidade monetária na compensação do corte de carga. Isto é ao ocorrer uma contingência, é necessário pagar pelo corte de carga. Quando a unidade monetária está mais valorizada que o índice de robustez, por exemplo, no caso da Tabela 5.1, considerando o critério de segurança $K = 3$, quando consegue-se cobrir mais que $122,86\ kW$ com uma unidade monetária, compensa-se arriscar e escolher um plano mais barato a escolher um plano que melhore a segurança da rede.

5.3 Conclusão

Os índices de vulnerabilidade e de robustez aqui propostos podem ser utilizados em uma análise prévia da compensação da escolha de um plano de expansão com maior segurança ou de um plano com menor custo de implantação.

Uma vez determinados esses índices, é possível estipular, baseando no estudo do mercado de energia, quão vulnerável está a rede em relação às contingências que nela podem ocorrer.

Esses índices podem ser utilizados também para comparar redes diferentes, considerando mesmos critérios de segurança e mesmo limite de orçamento. Nessa comparação, pode-se determinar que rede necessita ser reforçada primeiramente durante o processo de expansão.

Ainda podem ser utilizados por órgãos reguladores para determinar o preço da demanda não atendida e assim garantir que os planos de expansão realizados prezem pela segurança da rede e pelo bom fornecimento de energia elétrica.

Capítulo 6

Conclusão

Este trabalho abordou diversas áreas de estudos de sistemas elétricos de potência. Desde de a modelagem dos seus elementos, à análise estática e à definição do problema da expansão da sua rede de transmissão.

Este trabalho agregou também conceitos de otimização linear inteira mista e de linguagens de programação, áreas que consistem em ferramentas essenciais para um engenheiro eletricista atuante em sistemas de energia.

Observou-se que o planejamento da expansão de redes de transmissão se faz necessário devido ao crescimento da demanda de energia, consequência direta do desenvolvimento do país. Porém as técnicas tradicionais de formulação do problema e determinação dos planos de expansão não garantem a melhoria da segurança e da confiabilidade da rede frente às possíveis contingências que venham a ocorrer.

O novo modelo proposto buscou acrescentar a minimização da vulnerabilidade das redes a esses modelos tradicionais. Dessa maneira, a estrutura do problema se alterou e foi inserido um fator estocástico na modelagem para representar a ocorrência de contingências.

Essas ocorrências podem ser consideradas com eventos incertos não aleatórios, isto é, não podem ser representadas adequadamente por uma distribuição de probabilidades conhecida [23]. Por esse motivo, adotou-se a abordagem de otimização por risco para definir o novo modelo e incorporar a minimização da vulnerabilidade da rede.

Testes e simulações foram realizados com o intuito de validar o novo modelo e sua implementação. Através da análise dos resultados obtidos, pôde-se comprovar a aplicabilidade do novo modelo, satisfazendo assim as expectativas no início do projeto.

Por fim, um novo método baseado no preço da demanda não atendida para a avaliação da robustez da rede pode ser definido e espera-se que ainda seja aplicado em trabalhos futuros.

Referências Bibliográficas

- [1] Empresa de Pesquisa Energética, “Projeção da demanda de energia elétrica para os próximos 10 anos (2013-2022),” Ministério de Minas e Energia, Rio de Janeiro, Dezembro 2012.
- [2] M. Cantarino, “Análise de sensibilidade da margem de carregamento em sistemas elétricos de potência: Um estudo comparativo,” Mestrado, UFJF, Juiz de Fora, 2007.
- [3] A. Monticelli, *Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica*. Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1983.
- [4] T. A. Davis, *Direct Methods for Sparse Linear Systems*. SIAM, Philadelphia, 2006.
- [5] A. Monticelli e A. Garcia, *Introdução a Sistemas de Energia Elétrica*. Editora Unicamp, Campinas, 1999.
- [6] L. L. Garver, “Transmission network estimation using linear programming,” *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-89, Setembro/Outubro 1970.
- [7] M. N. Arenales, V. A. Armentano, R. Morabito, e H. H. Yanasse, *Pesquisa Operacional*. Editora Campus/Elsevier, Rio de Janeiro, 2007.
- [8] L. A. Wolsey, *Integer Programming*. Wiley-Interscience, New York, 1998.
- [9] S. H. M. Hashimoto, “Análise e desenvolvimento de algoritmos eficientes de programação linear para o problema de planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo,” Doutorado, UNESP, Ilha Solteira, 2005.
- [10] A. H. Land e A. G. Doig, “An automatic method of solving discrete programming problems,” *Econometrica*, vol. 28, Julho 1960.
- [11] J. T. Linderoth e M. W. P. Savelsbergh, “A computational study of search strategies for mixed integer programming,” *INFORMS Journal on Computing*, no. 11, 1999.
- [12] R. Romero e J. R. S. Mantovani, “Introdução a metaheurísticas,” em *Anais do 3º Congresso Temático de Dinâmica e Controle da SBMAC*, UNESP, Ilha Solteira, Maio 2004.
- [13] A. S. Sousa, “Tomada de Decisão Fuzzy e Busca Tabu Aplicadas ao Planejamento da Expansão de Sistemas de Transmissão,” Mestrado, EESC - USP, São Carlos, 2009.
- [14] S. Kirkpatrick, C. D. G. Jr., e M. Vecchi, “Optimization by simulated annealing,” *Science*, vol. 220, no. 4598, Maio 1983.
- [15] R. Romero, R. A. Gallego, e A. Monticelli, “Transmission system expansion planning by simulated annealing,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 11, Fevereiro 1996.

- [16] R. A. Gallego, A. B. Alves, A. Monticelli, e R. Romero, “Parallel simulated annealing applied to long term transmission,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 12, Fevereiro 1997.
- [17] J. H. Holland, *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press, 1975.
- [18] R. A. Gallego, A. Monticelli, e R. Romero, “Transmission system expansion planning by an extended genetic algorithm,” *IEE Proceedings*, vol. 145, Maio 1998.
- [19] E. L. da Silva, H. A. Gil, e J. M. Areiza, “Transmission network expansion planning under an improved genetic algorithm,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 15, no. 3, Agosto 2000.
- [20] F. Glover, E. Taillard, e D. de Werra, “A users guide to tabu search,” em *Annals of Operations Research*, vol. 41, 1993.
- [21] E. L. da Silva, G. C. d. O. J. M. A. Ortiz, e S. Binato, “Transmission network expansion planning under a tabu search approach,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 16, Fevereiro 2001.
- [22] M. Carrión, J. M. Arroyo, e N. Alguacil, “Vulnerability-constrained transmission expansion planning: A stochastic programming approach,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 22, Novembro 2007.
- [23] N. Alguacil, M. Carrión, e J. M. Arroyo, “Transmission network expansion planning under deliberate outages,” *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, vol. 31, Outubro 2009.
- [24] R. Jiang, J. Wang, M. Zhang, e Y. Guan, “Two-stage minimax regret robust unit commitment,” *IEEE Transaction on Power Systems*, vol. 38, Agosto 2013.
- [25] A. Delgadillo, J. M. Arroyo, e N. Alguacil, “Analysis of electric grid interdiction with line switching,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 25, Maio 2010.
- [26] J. M. Arroyo, N. Alguacil, e M. Carrión, “A risk-based approach for transmission network expansion planning under deliberate outages,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 25, Agosto 2010.

Apêndice A

Linearização de Produto entre Variável Contínua e Variável Binária

Dado um produto de uma variável binária $y \in \{0, 1\}$ e uma variável contínua $x \in [\underline{x}, \bar{x}]$, pode-se encontrar uma formulação linear equivalente seguindo os seguintes passos:

1. Define-se x^Q como sendo uma nova variável contínua que representa o produto de y por x ;
2. Define-se x^A como sendo uma nova variável contínua satisfazendo $x = x^Q + x^A$;
3. Introduzem-se as seguintes inequações

$$\underline{x} \cdot y \leq x^Q \leq \bar{x} \cdot y$$

e

$$\underline{x} \cdot (1 - y) \leq x^A \leq \bar{x} \cdot (1 - y)$$

Seguindo esses passos, se y assumir valor igual a 0, x^Q deverá ser igual a 0 também para satisfazer a primeira restrição. Logo, x^A será igual a x .

Por outro lado, se y assumir valor igual a 1, x^A valerá zero para satisfazer a segunda inequação e x^Q terá o mesmo valor de x .

Apêndice B

Dados dos Sistemas Elétricos

B.1 Sistema 6 Barras - Garver [6]

Esse exemplo possui seis nós e seis linhas instaladas. A topologia desse sistema, as demandas nodais e os limites máximos de geração em cada nó são mostrados na Figura B.1. Os dados de cada ramo estão mostrados na Tabela B.1.

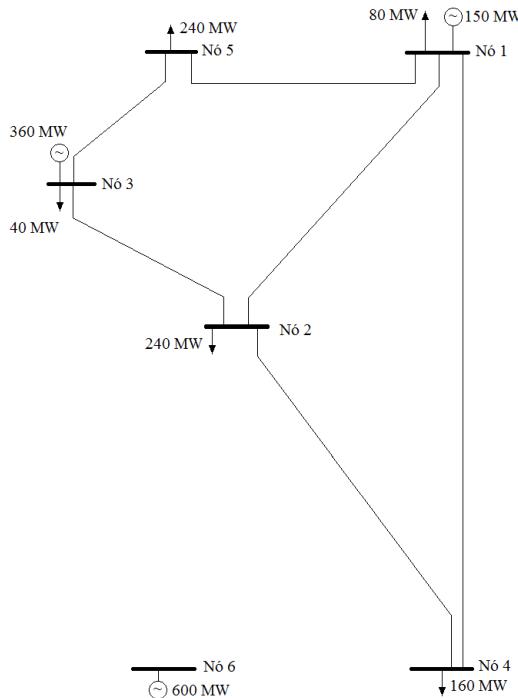


Figura B.1: Sistema de 6 Barras

Tabela B.1: Dados dos Ramos - 6 Barras

Ramo	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6	2-3	2-4	2-5	2-6	3-4	3-5	3-6	4-5	4-6	5-6
x_l (pu)	0,40	0,38	0,60	0,20	0,68	0,20	0,40	0,31	0,30	0,59	0,20	0,48	0,63	0,30	0,61
c_l^L (10^3 \$)	4,0	3,8	6,0	2,0	6,8	2,0	4,0	3,1	3,0	5,9	2,0	4,8	6,3	3,0	6,1
\bar{P}_l^L (MW)	100	100	80	100	70	100	100	100	100	82	100	100	75	100	78

B.2 Sistema IEEE 24 Barras

Contém 24 barras e 41 ramos.

Tabela B.2: Dados das Barras - IEEE 24 Barras

Barra	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
\bar{P}^G (MW)	465	576	0	0	0	0	722	0	0	0	0	0
d (MW)	324	291	540	222	213	408	375	513	525	585	0	0

Tabela B.3: Dados das Barras - IEEE 24 Barras (cont.)

Barra	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
\bar{P}^G (MW)	1424	0	645	465	0	1200	0	0	1200	900	954	0
d (MW)	795	582	951	300	0	999	543	384	0	0	0	0

Tabela B.4: Dados dos Ramos - IEEE 24 Barras

Número	Ramo	Número de Linhas Inicial	Reatância (pu)	Capacidade de Fluxo (MW)	Custo ($10^3 \$$)
1	1-2	1	0.0139	175	0,3
2	1-3	1	0.2112	175	5,5
3	1-5	1	0.0845	175	2,2
4	2-4	1	0.1267	175	3,3
5	2-6	1	0.1920	175	5,0
6	3-9	1	0.1190	175	3,1
7	3-24	1	0.0839	400	5,0
8	4-9	1	0.1037	175	2,7
9	5-10	1	0.0883	175	2,3
10	6-10	1	0.0605	175	1,6
11	7-8	1	0.0614	175	1,6
12	8-9	1	0.1651	175	4,3
13	8-10	1	0.1651	175	4,3
14	9-11	1	0.0839	400	5,0
15	9-12	1	0.0839	400	5,0
16	10-11	1	0.0839	400	5,0
17	10-12	1	0.0839	400	5,0
18	11-13	1	0.0476	500	6,6
19	11-14	1	0.0418	500	5,8
20	12-13	1	0.0476	500	6,6
21	12-23	1	0.0966	500	13,4
22	13-23	1	0.0865	500	12,0
23	14-16	1	0.0389	500	5,4
24	15-16	1	0.0173	500	2,4
25	15-21	2	0.0490	500	6,8
26	15-24	1	0.0519	500	7,2
27	16-17	1	0.0259	500	3,6
28	16-19	1	0.0231	500	3,2
29	17-18	1	0.0144	500	2,0
30	17-22	1	0.1053	500	14,6
31	18-21	2	0.0259	500	3,6
32	19-20	2	0.0396	500	5,5
33	20-23	2	0.0216	500	3,0
34	21-22	1	0.0678	500	9,4
35	1-8	0	0.1344	500	3,5
36	2-8	0	0.1267	500	3,3
37	6-7	0	0.1920	500	5,0
38	13-14	0	0.0447	500	6,2
39	14-23	0	0.0620	500	8,6
40	16-23	0	0.0822	500	11,4
41	19-23	0	0.0606	500	8,4