

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Estudo de bocal convergente-divergente em foguete de pequeno porte

Vitor Bossolani

São Paulo
2017

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Estudo de bocal convergente-divergente em foguete de
pequeno porte

Trabalho de conclusão de curso
apresentado à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para
graduação em Engenharia Mecânica

Vitor Bossolani

Orientador(a): Prof Dr Ernani Vitillo
Volpe

Área de concentração:
Engenharia Mecânica

São Paulo
2017

Catálogo-na-publicação

Bossolani, Vitor

Estudo de bocal convergente-divergente em foguete de pequeno porte /
V. Bossolani -- São Paulo, 2017.

43 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São
Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Escoamento compressível 2.Bocal C-D 3.Geometria 4.Malha
5.Simulação I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento
de Engenharia Mecânica II.t.

Resumo

O presente trabalho consiste no estudo de um escoamento compressível em um bocal Convergente-Divergente (C-D) em um foguete de pequeno porte. Inicialmente, estuda-se o escoamento quasi-unidimensional isentrópico (área variável ao longo do escoamento) de modo a compreender os principais fundamentos envolvidos na análise de escoamentos compressíveis. Busca-se compreensão de como determinadas propriedades do fluido variam ao longo do escoamento, tais como pressão, temperatura, densidade e velocidade, abordando conceitos fundamentais no estudo de escoamentos compressíveis, tais como pressão e de temperatura de estagnação e o conceito de seção crítica. Em um segundo momento, três configurações de bocais convergente-divergente são estudados, ponderando-se as vantagens e desvantagens de cada configuração. Adota-se o bocal cônico inicialmente para análise uma vez que tal configuração apresenta boa aplicabilidade e apresenta boa eficiência para os processos envolvidos no presente projeto. Com o design escolhido, simula-se o problema com as condições de contorno para o escoamento (Euler) a partir da malha criada para o bocal. Adota-se uma pressão de saída tal que o choque no bocal pode ser observado de modo a validar a geometria escolhida. Com o modelo validado, simulam-se novos resultados para uma diferente condição de pressão na saída do bocal, sem a presença do choque na seção divergente.

Palavras-chaves: Escoamento compressível, Bocal C-D, foguete de pequeno porte, escoamento quasi-unidimensional isentrópico, geometria, malha, simulação.

Abstract

The current work consists in the study of a compressible flow of a convergent-divergent nozzle of a small rocket. Initially, the quasi-one-dimensional isentropic flow has been studied (section changes throughout the flow) to comprehend the fundamentals involved in the analysis of compressible flows. The comprehension is sought in order to understand how some properties of the fluid change throughout the flow, i.e. pressure, temperature, density and velocity, approaching the essential concepts in the compressible flow study, such as stagnation pressure, stagnation temperature as well as the concept of critical section. In the following, three different settings of convergent-divergent nozzles are studied, evaluating the advantages and disadvantages of each one. The conical nozzle is firstly adopted for the analysis since this setting presents good applicability and great efficiency for the processes involved in the current project. After choosing the best design, the problem is implemented in the simulation with the pertinent boundary conditions for the flow (Euler) based on the mesh developed for the nozzle. The exit pressure is chosen in such a way that the shock is presented throughout the flow, validating the geometry in study. Finally, new simulations are implemented for a new exit pressure in order to not identify the shock in the flow.

Keywords: Compressible flow, convergent-divergent nozzle, small rocket, quasi-one-dimensional isentropic flow, geometry, mesh, simulation.

Lista de ilustrações

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Bocal Convergente-Divergente (C-D). | 9 |
| Figura 2 – escoamento adiabático, reversível, quasi-unidimensional em regime permanente. | 13 |
| Figura 3 – escoamento em dutos convergentes e divergentes. | 14 |
| Figura 4 – Relação propriedades para bocais e difusores. | 15 |
| Figura 5 – escoamento em dutos com secção transversal variável. | 16 |
| Figura 6 – Relação entre a razão de áreas e o número de Mach para secção crítica. | 19 |
| Figura 7 – Relação de pressão em função da pressão à jusante para um bocal C-D (escoamento reversível). | 20 |
| Figura 8 – Volume de controle do choque em estudo. | 21 |
| Figura 9 – Diagrama T-s para um choque normal. | 23 |
| Figura 10 – escoamento em um bocal C-D. | 25 |
| Figura 11 – Variação da razão de pressão na garganta em um bocal C-D ($k = 1.4$). | 26 |
| Figura 12 – Malha gerada no software <i>Gmsh</i> | 29 |
| Figura 13 – Malha ampliada do projeto desenvolvida no software <i>Gmsh</i> | 30 |
| Figura 14 – Pressões de Saída e Regiões para escoamento em bocal C-D. | 33 |
| Figura 15 – Distribuição da Temperatura Estática com a presença do choque no escoamento - <i>SU2</i> | 34 |
| Figura 16 – Distribuição da Temperatura de Estagnação com a presença do choque no escoamento - <i>SU2</i> | 35 |
| Figura 17 – Distribuição da Pressão Estática com a presença do choque no escoamento - <i>SU2</i> | 35 |
| Figura 18 – Distribuição da Pressão de Estagnação com a presença do choque no escoamento - <i>SU2</i> | 36 |
| Figura 19 – Distribuição do número de Mach com a presença de choque no escoamento - <i>SU2</i> | 37 |
| Figura 20 – Resíduos computacionais na simulação <i>Fluent</i> | 38 |
| Figura 21 – Distribuição da Temperatura Estática no escoamento - <i>ANSYS Fluent</i> | 38 |
| Figura 22 – Distribuição da Temperatura de Estagnação no escoamento - <i>ANSYS Fluent</i> | 39 |
| Figura 23 – Distribuição da Pressão Estática no escoamento - <i>ANSYS Fluent</i> | 39 |
| Figura 24 – Distribuição da Pressão de Estagnação no escoamento - <i>ANSYS Fluent</i> | 40 |
| Figura 25 – Distribuição do número de Mach no escoamento - <i>ANSYS Fluent</i> | 40 |
| Figura 26 – Distribuição da Temperatura Estática no escoamento - <i>SU2</i> | 41 |
| Figura 27 – Distribuição da Temperatura de Estagnação no escoamento - <i>SU2</i> | 41 |
| Figura 28 – Distribuição da Pressão Estática no escoamento - <i>SU2</i> | 42 |

| | |
|--|----|
| Figura 29 – Distribuição da Pressão de Estagnação no escoamento - <i>SU2</i> | 42 |
| Figura 30 – Distribuição do número de Mach no escoamento - <i>SU2</i> | 43 |

Lista de símbolos

| | |
|----------|---|
| g | Aceleração da gravidade |
| c_p | Calor específico de um gás perfeito à pressão constante |
| k | Razão entre calores específicos à pressão zero |
| R | Constante universal dos gases |
| h | Entalpia |
| h_0 | Entalpia de Estagnação |
| M | Número de Mach |
| M^* | Número de Mach Crítico |
| ρ | Massa Específica |
| ρ^* | Massa Específica Crítica |
| P | Pressão |
| P^* | Pressão Crítica |
| P_0 | Pressão de Estagnação |
| A | Seção Transversal |
| A^* | Seção Transversal Crítica |
| T | Temperatura |
| T^* | Temperatura Crítica |
| T_0 | Temperatura de Estagnação |
| V | Velocidade do fluido |
| a | Velocidade do som no meio |

Sumário

| | | |
|-------|--|----|
| 1 | OBJETIVOS | 8 |
| 2 | BOCAL CONVERGENTE-DIVERGENTE | 9 |
| 3 | EQUACIONAMENTO | 10 |
| 3.1 | Hipóteses Simplificadoras | 10 |
| 3.2 | Gás Perfeito | 10 |
| 3.3 | Relações para as condições de Estagnação | 11 |
| 3.4 | Relação propriedades de Estagnação | 12 |
| 3.5 | Escoamento quasi-unidimensional, em regime permanente, adiabático e reversível de um gás ideal em bocais | 12 |
| 4 | ESCOAMENTO COM SECÇÃO TRANSVERSAL VARIÁVEL | 16 |
| 4.1 | Equações Operacionais | 16 |
| 4.2 | Conceito de Secção Crítica | 18 |
| 4.3 | Análise da razão entre uma pressão em uma secção qualquer com a pressão de estagnação no escoamento | 19 |
| 5 | ONDAS DE CHOQUE | 21 |
| 5.1 | Hipóteses simplificadoras para onda de choque normal estacionária | 22 |
| 5.2 | Equacionamento para onda de choque normal estacionária | 22 |
| 5.3 | Choque em bocais C-D | 23 |
| 6 | DESIGN BOCAIS C-D | 27 |
| 6.1 | Bocal Cônico | 27 |
| 6.2 | Bocal Sino | 27 |
| 6.3 | Bocal Duplo Sino | 28 |
| 6.4 | <i>Geometria adotada</i> | 28 |
| 7 | MATERIAIS E MÉTODOS | 29 |
| 7.1 | Gerador de Malhas | 29 |
| 7.2 | Procedimento <i>ANSYS Fluent</i> | 30 |
| 7.3 | Procedimento <i>SU2</i> | 31 |
| 7.3.1 | Condições de Contorno SU2 | 31 |
| 7.3.2 | Critérios de Convergência | 31 |

| | | |
|------------|---|-----------|
| 7.3.3 | Métodos Numéricos Convectivos | 32 |
| 7.3.4 | Integração numérica | 32 |
| 7.4 | Condições de Contorno | 32 |
| 7.5 | Condições de Choque | 32 |
| 8 | RESULTADOS E ANÁLISES | 34 |
| 8.1 | Resultados Choque - <i>SU2</i> | 34 |
| 8.2 | Resultados <i>ANSYS Fluent</i> | 37 |
| 8.3 | Resultados <i>SU2</i> | 40 |
| 9 | CONCLUSÕES | 44 |
| | REFERÊNCIAS | 45 |

1 Objetivos

- Estudar um escoamento compressível quasi-unidimensional isentrópico de modo a desenvolver e compreender as principais equações que governam tal tipo de escoamento;
- Observar como as propriedades do fluido variam ao longo do escoamento, enfatizando principalmente o conceito de área crítica no escoamento;
- Definir uma geometria, gerar uma malha e implementar as condições de contorno pertinentes ao escoamento (Euler) para a realização de simulações computacionais;
- Validar o modelo escolhido e analisar os diferentes resultados obtidos.

2 Bocal Convergente-Divergente

Em tal seção, busca-se estudar -sucintamente- as características de um bocal C-D, ilustrado pela Figura 1.

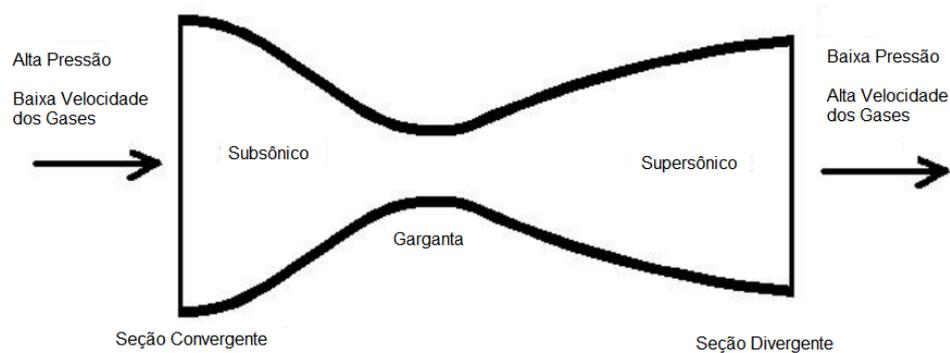


Figura 1 – Bocal Convergente-Divergente (C-D).

Fonte: (Adaptado de (FERNANDES; FORTUNATO, 2011))

Na figura anterior, pode-se observar duas regiões bem definidas no escoamento: uma convergente e outra divergente. Na primeira, o fluido é acelerado quando a secção transversal diminui ao longo do escoamento. Na segunda, a secção transversal aumenta e o fluido pode ter sua velocidade aumentada ou diminuída dependendo das características impostas no escoamento. (FERNANDES; FORTUNATO, 2011)

Na seção convergente, o fluido é acelerado até atingir $M = 1$ na região de menor secção transversal denominada garganta. Posteriormente, na seção divergente, o fluido pode ter sua pressão aumentada com a diminuição da velocidade com o número de Mach sendo sempre menor do que valor unitário (escoamento subsônico) ou o fluido pode ter sua pressão diminuída com o aumento da velocidade sendo que o número de Mach ultrapassa a unidade (escoamento supersônico) na saída.

3 Equacionamento

Para tal seção, desenvolve-se o equacionamento de um escoamento compressível quasi-unidimensional em bocais C-D. Tal denominação é devido ao fato da seção transversal variar lentamente na direção do escoamento. Portanto, ao longo do escoamento, tem-se que $A = A(x)$, $P = P(x)$, $\rho = \rho(x)$ e $V = V(x)$.

O equacionamento tem como ponto de partida as leis de conservação para volume de controle com base nas hipóteses adotadas e tem como objetivo inicial o estudo da variação das principais propriedades do fluido durante o escoamento para determinadas condições impostas.

3.1 Hipóteses Simplificadoras

Em um primeiro momento, para o estudo de tal escoamento, admitem-se hipóteses simplificadoras para o modelo matemático a ser analisado.

1. Escoamento em regime permanente;
2. Escoamento adiabático e reversível (exceto nas ondas de choque);
3. Não há realização de trabalho;
4. Desconsiderar variação da energia potencial gravitacional;
5. Fluido tratado como gás ideal.

3.2 Gás Perfeito

A equação 3.1 representa a equação de estado para gás perfeito.

$$\rho = \frac{P}{R.T} \quad (3.1)$$

A equação 3.2 representa o calor específico de um gás perfeito a pressão constante em termos de k e R .

$$c_p = \left(\frac{k}{k-1}\right).R \quad (3.2)$$

A equação 3.3 define a velocidade do fluido com base no número de Mach.

$$V = M.a \quad (3.3)$$

A equação 3.4 define a velocidade do som para gás perfeito.

$$a = \sqrt{k.R.T} \quad (3.4)$$

3.3 Relações para as condições de Estagnação

Com base na conservação de energia, desprezando-se o termo referente à energia potencial, obtém-se a expressão identificada a seguir.

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2.g} \quad (3.5)$$

Utilizando-se as equações 3.2, 3.4 e 3.5, obtém-se a relação a seguir.

$$h_0 = h + M^2 \cdot \frac{k-1}{2} \cdot c_p \cdot T \quad (3.6)$$

Para gás, pode-se escrever a relação expressa a seguir.

$$h = c_p \cdot T \quad (3.7)$$

Consequentemente, pode-se escrever a equação 3.8 com base nas equações 3.6 e 3.7.

$$h_0 = h \cdot \left[1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2\right] \quad (3.8)$$

Utilizando-se agora a relação expressa pela equação 3.7, obtém-se a equação 3.9 que relaciona a temperatura de qualquer secção do escoamento com a temperatura de estagnação, a razão entre calores específicos e o número de Mach para tal secção.

$$T_0 = T \cdot \left[1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2\right] \quad (3.9)$$

Com o intuito de obter uma relação similar agora para a pressão em uma determinada secção transversal do escoamento, utiliza-se a relação entre pressão e temperatura para processos isentrópicos, fornecida pela equação 3.10.

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (3.10)$$

Com isso, pode-se relacionar as equações 3.9 e 3.10, de modo a se expressar a pressão para determinada região do escoamento em função da pressão de estagnação, razão entre calores específicos e o número de Mach para tal secção.

$$P_0 = P \cdot \left[1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2\right]^{\frac{k}{k-1}} \quad (3.11)$$

3.4 Relação propriedades de Estagnação

Para um gás perfeito, é válida a equação evidenciada a seguir envolvendo temperaturas de estagnação para duas diferentes secções no escoamento.

$$T_{01} = T_{02} \quad (3.12)$$

Além disso, a equação 3.13 é obtida integrando-se a equação de pressão-energia no estado de estagnação para um escoamento adiabático e sem trabalho (PIMENTA, 1998).

$$\frac{P_{01}}{P_{02}} = \exp \frac{-\Delta s}{R} \quad (3.13)$$

No caso limite para escoamento isentrópico, tem-se que $P_{01} = P_{02}$.

3.5 Escoamento quasi-unidimensional, em regime permanente, adiabático e reversível de um gás ideal em bocais

A Figura 2 expressa o modelo físico de um bocal C-D o qual será utilizado para se obter as equações que descrevem o escoamento.

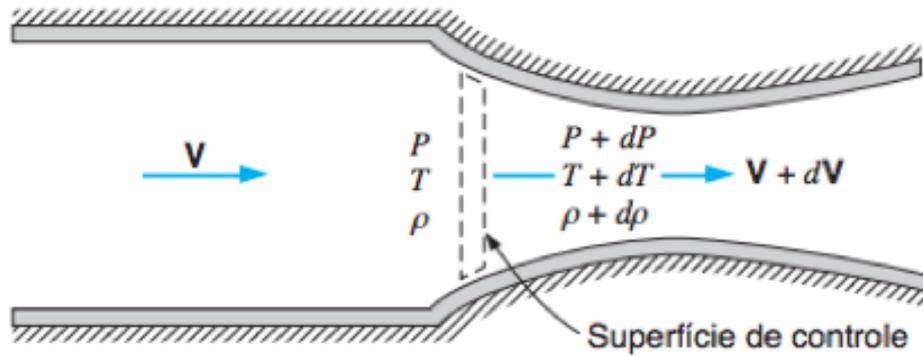


Figura 2 – Escoamento adiabático, reversível, quasi-unidimensional em regime permanente.

Fonte: (BORGNAKKE; SONNTAG, 2013)

Aplicando-se a Primeira Lei para o modelo em questão, tem-se a expressão evidenciada a seguir.

$$dh + V.dV = 0 \quad (3.14)$$

Além disso, para volume de controle, obtém-se a relação entre as propriedades termodinâmicas expressa pela Equação 3.15. Nota-se a ainda que o primeiro termo da equação é nulo, uma vez que o processo é isentrópico.

$$T.ds = dh - \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (3.15)$$

Resta-se ainda analisar a conservação de massa, representada pela equação de continuidade fornecida a seguir.

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0 \quad (3.16)$$

Manipulando-se as Equações 3.14, 3.15 e 3.16, obtém-se uma das equações mais importantes para escoamentos compressíveis isentrópicos quasi-unidimensionais. Tal equação expressa a seguir permite estudar a variação da seção transversal ao longo do escoamento em função do gradiente de pressão no escoamento em questão.

$$\frac{dA}{A} = \frac{dP}{\rho.V^2} \cdot (1 - M^2) \quad (3.17)$$

A equação obtida anteriormente é conhecida como relação área-velocidade e pode ser interpretada com base na Figura 3.

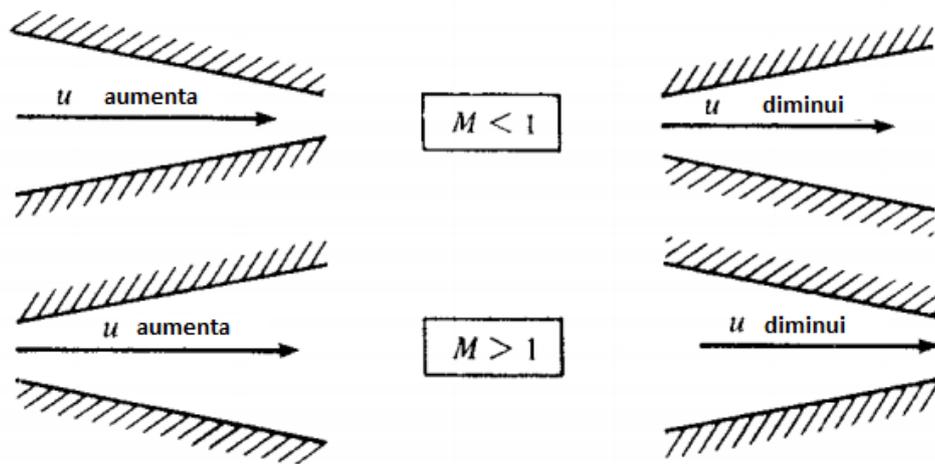


Figura 3 – Escoamento em dutos convergentes e divergentes.

Fonte: (Adaptado de (ANDERSON, 1990))

1. Para $M \rightarrow 0$ (caso limite de compressibilidade), o produto $A.V$ é constante, relação conhecida para escoamento incompressível.

2. Para $0 \leq M < 1$ (escoamento subsônico), um aumento de velocidade é associado com uma diminuição da área, e vice-versa.

3. Para $M > 1$ (escoamento supersônico), um aumento de velocidade é associado com um aumento da área, e vice-versa. Entretanto, diferentemente do escoamento subsônico, a velocidade aumenta para um ducto divergente e diminui para um ducto convergente.

4. Para $M = 1$ (escoamento sônico), observa-se a relação $\frac{dA}{A} = 0$, indicando um valor mínimo ou máximo para a seção transversal em tal região do escoamento. Fisicamente, a única solução aceitável é na situação em que a área é mínima (denominada garganta - já mencionada anteriormente).

A Figura 4 resume a relação da seção transversal, da pressão e da velocidade para bocais e difusores. Note que o presente estudo se restringe a estudar o comportamento do escoamento apenas para bocais (C-D).

| Mach | Bocais | | | Difusores | | |
|-------------------------------------|---------|---------|-------------|-----------|---------|-------------|
| | A | p | c | A | p | c |
| $M < 1$ (Escoamento Subsonico) | diminui | diminui | aumenta | aumenta | aumenta | diminui |
| $M = 1$ (Escoamento Sonico) | A^* | p^* | $c^* = a^*$ | A^* | p^* | $c^* = a^*$ |
| $M > 1$ (Escoamento Supersonico) | aumenta | diminui | aumenta | diminui | aumenta | diminui |

Figura 4 – Relação propriedades para bocais e difusores.

Fonte: (Adaptado de (YAHYA, 3a edicao))

4 Escoamento com Secção Transversal Variável

Previamente, estabeleceram-se relações de modo a compreender como a secção transversal, a velocidade e a pressão para uma determinada região do escoamento se relacionam entre si.

Nessa etapa do projeto, são desenvolvidas equações operacionais que envolvem as diferentes propriedades do fluido para determinada secção do escoamento. Tal análise é essencial de modo a calcular as propriedades de um fluido em uma determinada secção do escoamento, conhecendo-se as propriedades em outra secção. Além disso, estuda-se o conceito de secção crítica mais a diante de modo a demonstrar uma abordagem diferente no cálculo de propriedades termodinâmicas desejadas.

4.1 Equações Operacionais

A Figura 5 ilustra o escoamento a ser estudado para duas diferentes e arbitrárias secções do escoamento, identificadas pelos pontos 1 e 2.

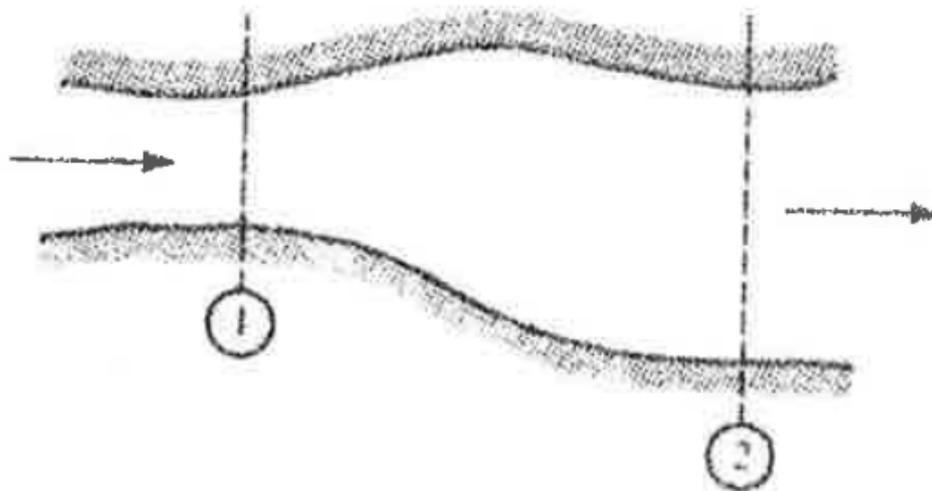


Figura 5 – Escoamento em dutos com secção transversal variável.

Fonte: (PIMENTA, 1998)

Primeiramente, para todo o escoamento, deve-se garantir a conservação de massa,

definida pela expressão a seguir.

$$\rho_1 \cdot V_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot V_2 \cdot A_2 \quad (4.1)$$

Para tal escoamento, busca-se inicialmente a relação que expresse a variação da secção transversal. Combinando-se as Equações 4.1, 3.1 e 3.4, obtém-se a expressão evidenciada a seguir.

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{P_1 \cdot M_1}{P_2 \cdot M_2} \cdot \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \quad (4.2)$$

Além disso, como já discutida nas secções 3.4 e 3.3, combinando-se as Equações 3.12 e 3.9, pode-se obter a expressão que relaciona a variação da temperatura para duas secções no escoamento.

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_2^2} \quad (4.3)$$

Note que na Equação 4.3, não se utilizaram índices para os calores específicos ($k_1 = k_2$). Isso não é totalmente verdade uma vez que tais valores mudam com a variação de temperatura no escoamento. Como essa alteração nos valores para tais parâmetros é muito pequena, pode-se considerar que tais valores sejam aproximadamente iguais para as duas secções estudadas. (PIMENTA, 1998)

O mesmo procedimento feito para se obter a Equação 4.3 com base nas temperaturas das secções em análise é realizado agora para a obtenção da relação entre pressões. Com base nas secções 3.3 e 3.4, pode-se obter a Equação 4.4, combinando-se as Equações 3.12 e 3.9 e assim expressando a razão entre pressões em função dos números de Mach e dos coeficientes específicos do gás em estudo.

$$\frac{P_1}{P_2} = \left[\frac{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_1^2} \right]^{\frac{k}{k-1}} \cdot \exp \frac{\Delta s}{R} \quad (4.4)$$

Note que a relação entre as secções transversais expressa pela Equação 4.2 é função não apenas do número de Mach, mas também das pressões e temperaturas em estudo. Combinando-se tal equação com as Equações 4.4 e 4.3, obtém-se uma expressão para a diferença das secções transversais em função apenas do número de Mach e da razão entre calores específicos - quando o escoamento é isentrópico.

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{M_1}{M_2} \cdot \left[\frac{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_1^2} \right]^{\frac{k+1}{2 \cdot (k-1)}} \cdot \exp \frac{\Delta s}{R} \quad (4.5)$$

Note que para as equações representadas anteriormente, o termo $\exp \frac{\Delta s}{R}$ foi mantido de modo a se representar um caso mais geral. Entretanto, para um escoamento isentrópico, esse termo equivale a 1 e, portanto, pode ser retirado das equações uma vez que é um fator multiplicativo unitário. Vale notar que a equação 4.5 mostra que a área crítica muda através de um choque, onde $\Delta s > 0$.

4.2 Conceito de Secção Crítica

As equações operacionais termodinâmicas obtidas anteriormente descrevem a relação entre temperaturas, pressões e secções transversais para quaisquer dois pontos do escoamento. Entretanto, com o intuito de se obter uma determinada propriedade termodinâmica de uma secção, digamos P_2 , por exemplo, deve-se conhecer tal propriedade na outra secção analisada (P_1) bem como os valores do número de Mach para ambas as secções em análise (M_1 e M_2).

Tal processo pode não ser extremamente simples em casos em que não se conhece o número de Mach na secção desejada, por exemplo. Para facilitar o cálculo em questão, introduz-se o conceito de estado crítico.

O estado crítico pode ser definido como "o estado termodinâmico que existiria se o fluido estudado apresentasse o número de Mach igual a 1 por algum processo particular"(PIMENTA, 1998). Sabe-se que esse valor é encontrado para a região da garganta já mencionado previamente. Em tal secção, agora se conhecesse o valor do número de Mach e, conseqüentemente, basta conhecer umas das propriedades termodinâmicas desejadas para a determinação da mesma propriedade em outra secção em que o número de Mach também é conhecido.

A Equação 4.5 pode então ser reescrita, agora impondo que a secção 1 seja a secção crítica e admitindo um processo isentrópico.

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \cdot \left[\frac{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2}{\frac{k-1}{2}} \right]^{\frac{k+1}{2 \cdot (k-1)}} \quad (4.6)$$

A Figura 6 ilustra a equação obtida anteriormente graficamente para as regiões subsônica e supersônica.

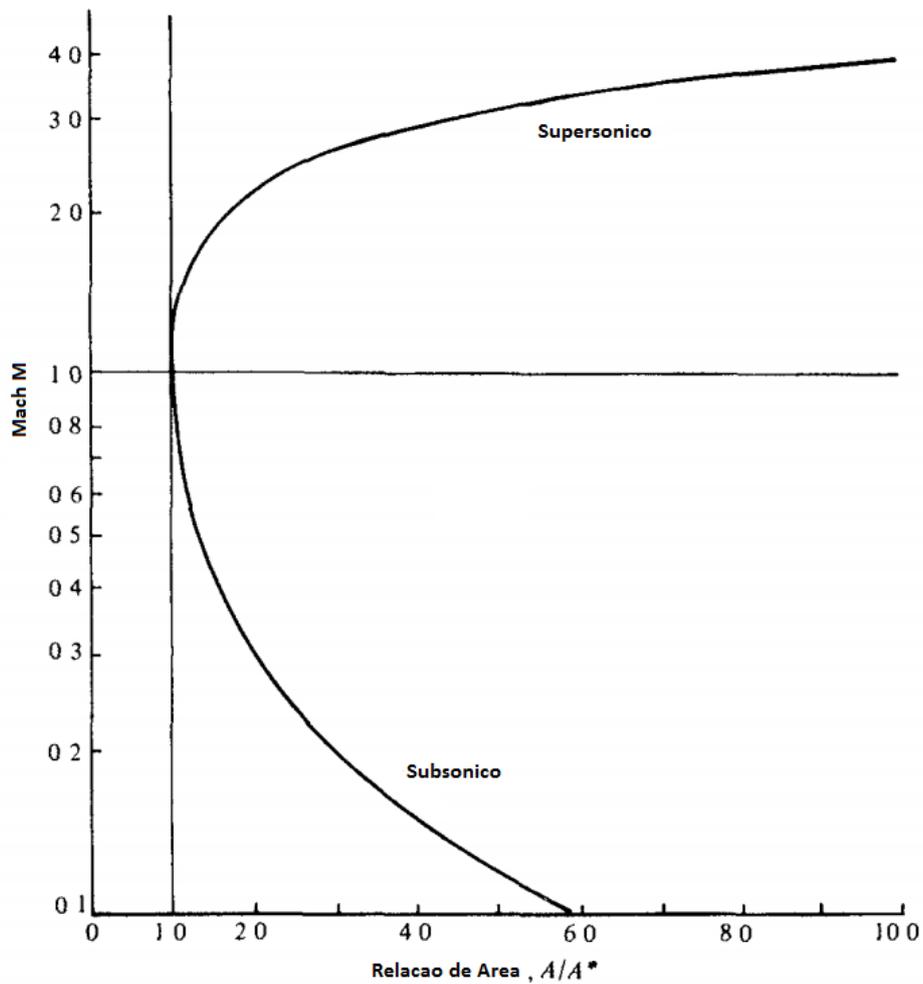


Figura 6 – Relação entre a razão de áreas e o número de Mach para seção crítica.

Fonte: (Adaptado de (ANDERSON, 1990))

4.3 Análise da razão entre uma pressão em uma secção qualquer com a pressão de estagnação no escoamento

Nessa etapa do estudo, busca-se compreender melhor como a diferença de pressão entre uma secção qualquer e a secção à jusante do escoamento se relacionam. A Figura 7 ilustra o que será discutido a seguir.

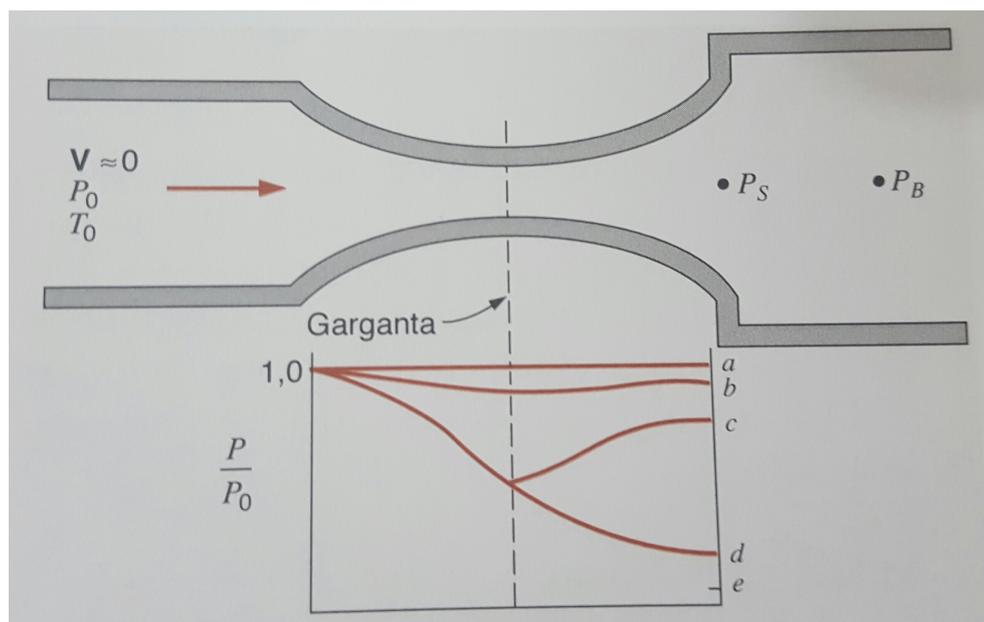


Figura 7 – Relação de pressão em função da pressão à jusante para um bocal C-D (escoamento reversível).

Fonte: (BORGNAKKE; SONNTAG, 2013)

Na Figura 7, o ponto a indica a condição em que $P_B = P_0 < 1$ e, portanto, não há escoamento. Quando $\frac{P_B}{P_0}$ decresce, mas ainda é consideravelmente maior que a relação crítica de pressão (ponto b), a velocidade aumenta na parte convergente e $M < 1$ na garganta. Logo, a parte divergente atua como um difusor subsônico em que a velocidade é diminuída e a pressão aumentada. No ponto c , a pressão à jusante corresponde ao valor para $M = 1$ na garganta, mas a parte divergente ainda atua com um difusor subsônico. Em seguida tem-se o ponto d que indica uma pressão à jusante ainda menor do que no caso anterior, mas nesse caso a parte divergente atua como um bocal supersônico, em que a velocidade aumenta e a pressão diminui. É importante ressaltar que para valores de pressão abaixo do ponto c , mas ainda acima do ponto d , o escoamento não pode ser mais considerado isentrópico, ocorrendo a presença de ondas de choque - assunto abordado na seção 5. Para o ponto e , a pressão é reduzida ainda mais o que faz com que a redução de pressão entre P_S e P_B ocorra externamente ao bocal. (BORGNAKKE; SONNTAG, 2013)

5 Ondas de Choque

Ondas de choque podem ser caracterizadas como fenômenos físicos nos quais ocorrem mudanças de estado do fluido durante o escoamento. As mudanças citadas são abruptas e delimitadas por uma área de ocorrência muito pequena. Tais fenômenos devem ser encarados como descontinuidades do escoamento uma vez que ocorre grande variação das propriedades do fluido nas regiões de ocorrência.

Pelo fato das iterações presentes apresentarem natureza muito complexa, estudam-se apenas as propriedades que ocorrem nos lados da onda formada, analisando-se a descontinuidade no escoamento. Somado a isso, os objetos de estudo são ondas de choque normais estacionárias, ocasionadas em regiões supersônicas do escoamento e, basicamente envolvem um processo de compressão (PIMENTA, 1998). No final dessa seção, é discutido a ocorrência de tais fenômenos na porção divergente em bocais (para regimes supersônicos).

A Figura 8 representa o volume de controle do choque a ser analisado. Considera-se que a ordem de grandeza da espessura do choque seja na ordem de 10^{-5} m, ou seja, pode ser desprezada. Logo, as mudanças serão relacionadas apenas com o choque, as áreas dos à jusante e à montante do choque podem ser consideradas equivalentes e a superfície de contato com a parede pode ser desprezada, bem como os efeitos de atrito (PIMENTA, 1998).

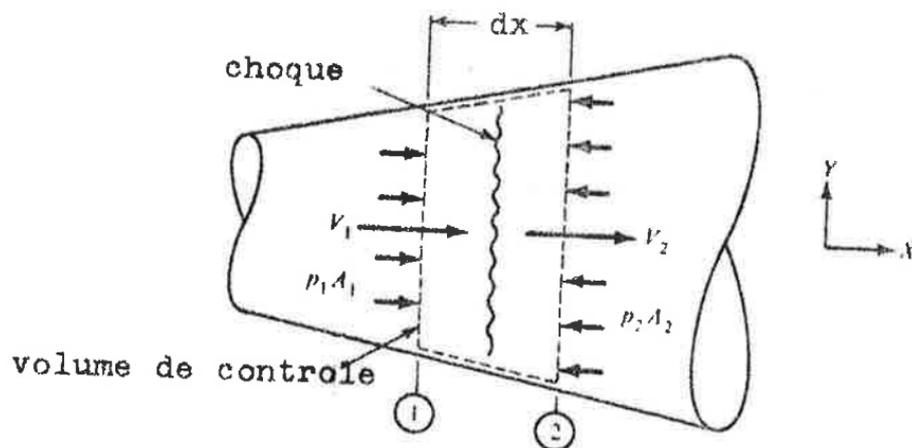


Figura 8 – Volume de controle do choque em estudo.

Fonte: (PIMENTA, 1998)

5.1 Hipóteses simplificadoras para onda de choque normal estacionária

Inicialmente, evidenciam-se as hipóteses adotadas para tal análise.

1. Escoamento em regime permanente;
2. Escoamento unidimensional;
3. Escoamento adiabático;
4. Não há realização de trabalho de eixo;
5. Desconsiderar variação da energia potencial gravitacional;
6. Forças cizalhantes desprezíveis;
7. Áreas constantes ($A_1 \approx A_2$).

5.2 Equacionamento para onda de choque normal estacionária

Em primeira estância, devem ser garantidas a continuidade no escoamento expressa pela relação 4.1. Quando combinamos tal relação com a equação de estado para gases ideais 3.1 e as relações de velocidade para tais gases 3.3 e 3.4, pode-se obter a expressão a seguir.

$$\frac{P_1 \cdot M_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{P_2 \cdot M_2}{\sqrt{T_2}} \quad (5.1)$$

Em seguida, expressa-se a equação relacionada a variação da quantidade de movimento em questão (PIMENTA, 1998).

$$P_1 + \frac{\rho_1 \cdot V_1^2}{g} = P_2 + \frac{\rho_2 \cdot V_2^2}{g} \quad (5.2)$$

Combinando-se a Equação 5.2 com a Equação 3.4, obtém-se a relação a seguir.

$$P_1 \cdot [1 + k \cdot M_1^2] = P_2 \cdot [1 + k \cdot M_2^2] \quad (5.3)$$

É válido lembrar que a Equação 4.3 também representa tal escoamento. Combinando-se tal expressão com as relações 5.1 e 5.3 e ainda realizando-se determinadas operações

algébricas (PIMENTA, 1998), pode-se obter uma equação apenas em função dos números de Mach e da razão entre os calores específicos.

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \frac{2}{(k-1)}}{\frac{2k}{(k-1)} \cdot (M_1^2 - 1)} \quad (5.4)$$

Assim, o novo número de Mach (M_2) resultante da onda de choque pode ser calculado pela Equação 5.4. Com tal parâmetro obtido, podem ser utilizadas as relações 5.3 e 4.3 a fim de se determinar as propriedades termodinâmicas desconhecidas na secção 2.

É interessante destacar que as secções 1 e 2 (antes e depois do choque) são estados bem definidos, porém as mudanças decorrentes do choque em estudo não satisfazem as condições definidas em um processo de equilíbrio pela Termodinâmica (PIMENTA, 1998). Por tal motivo, esse processo é representado por uma linha pontilhada ou sinuosa (Figura 9).

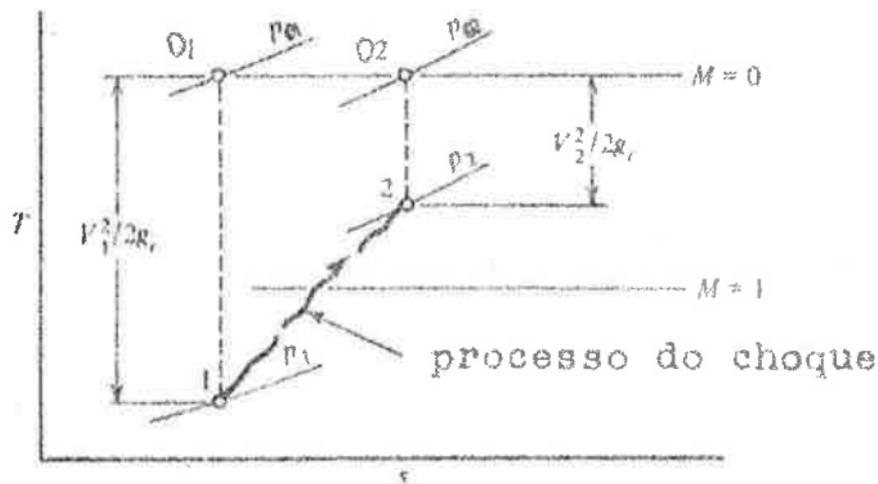


Figura 9 – Diagrama T-s para um choque normal.

Fonte: (PIMENTA, 1998)

5.3 Choque em bocais C-D

Na secção 4, já foi discutido como a relação de áreas se dá no escoamento em estudo. Além disso, foi também analisado como a razão de pressões (P/P_0) determina as condições do escoamento. Para tal relação foi visto que existem duas condições críticas. A primeira se dá quando os escoamentos são subsônicos em ambas as porções convergente e

divergente e o bocal está bloqueado na garganta ($M = 1$). A outra condição crítica se dá quando o bocal está bloqueado na garganta e se tem um escoamento supersônico na porção divergente (condição de projeto).

É importante ressaltar que para a primeira condição crítica, as pressões de saída e do tanque no receptor devem se igualar. O ajuste não-isentrópico para que isso aconteça se dá por considerar o choque normal que provoca uma variação de entropia na região de ocorrência do escoamento (PIMENTA, 1998). Tal variação é abrupta e ocorre em um pequeno intervalo de espaço.

Quando a razão de pressões cai para um valor abaixo da primeira condição crítica, observa-se uma onda de choque gerada na porção divergente do bocal (localização exata depende da razão de pressão em questão). Essa onda faz com que a pressão aumente consideravelmente em um curto período e, como a área aumenta, a porção do bocal à jusante do choque atua como difusor subsônico. Se esse valor for reduzido ainda mais, essa onda de choque pode ser formada fora do bocal, garantindo um regime supersônico para o escoamento dentre toda a porção divergente.

A Figura 10 ilustra o que foi anteriormente discutido.

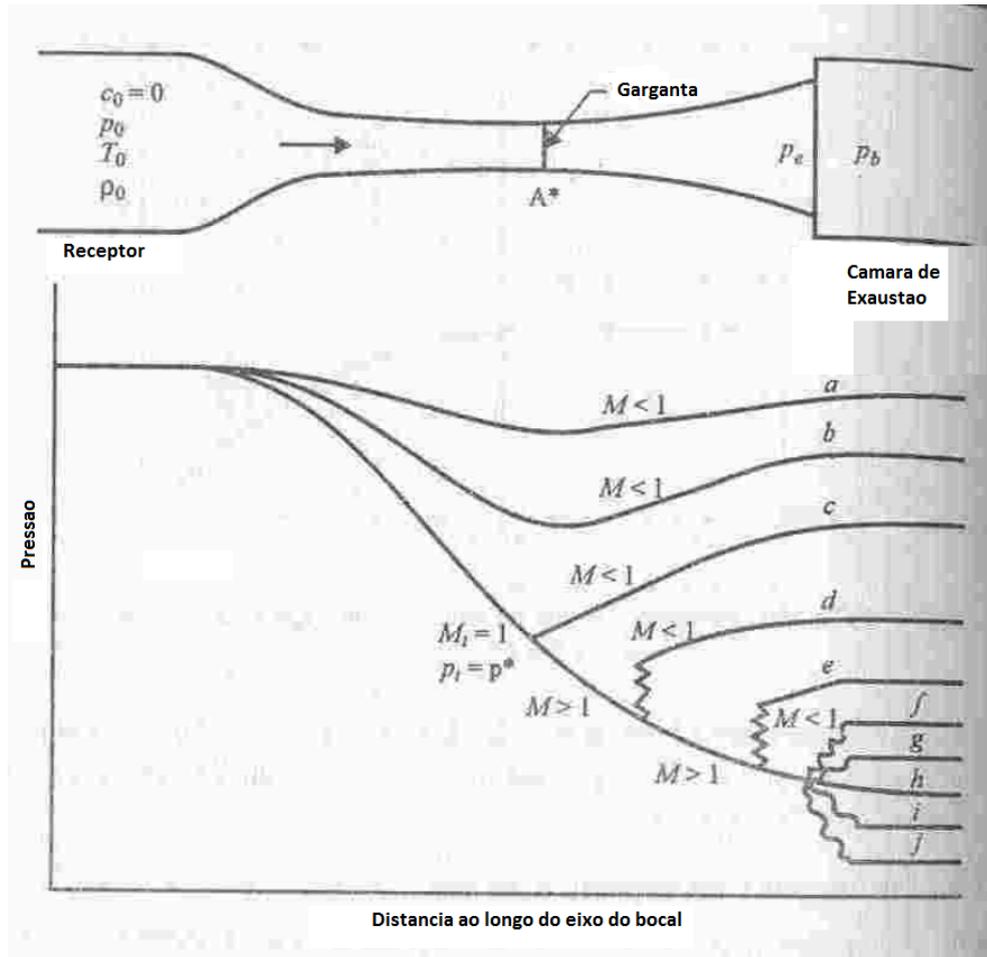


Figura 10 – escoamento em um bocal C-D.

Fonte: (Adaptado de (ANDERSON, 1990))

O gráfico ilustrado na Figura 11 evidencia a variação da razão de pressão na garganta em função da razão. Como se pode observar, depois de atingida a área crítica na garganta ($M = 1$), o bocal está bloqueado o que faz com que qualquer redução na razão entre P/P_0 não afete a pressão na região da garganta.

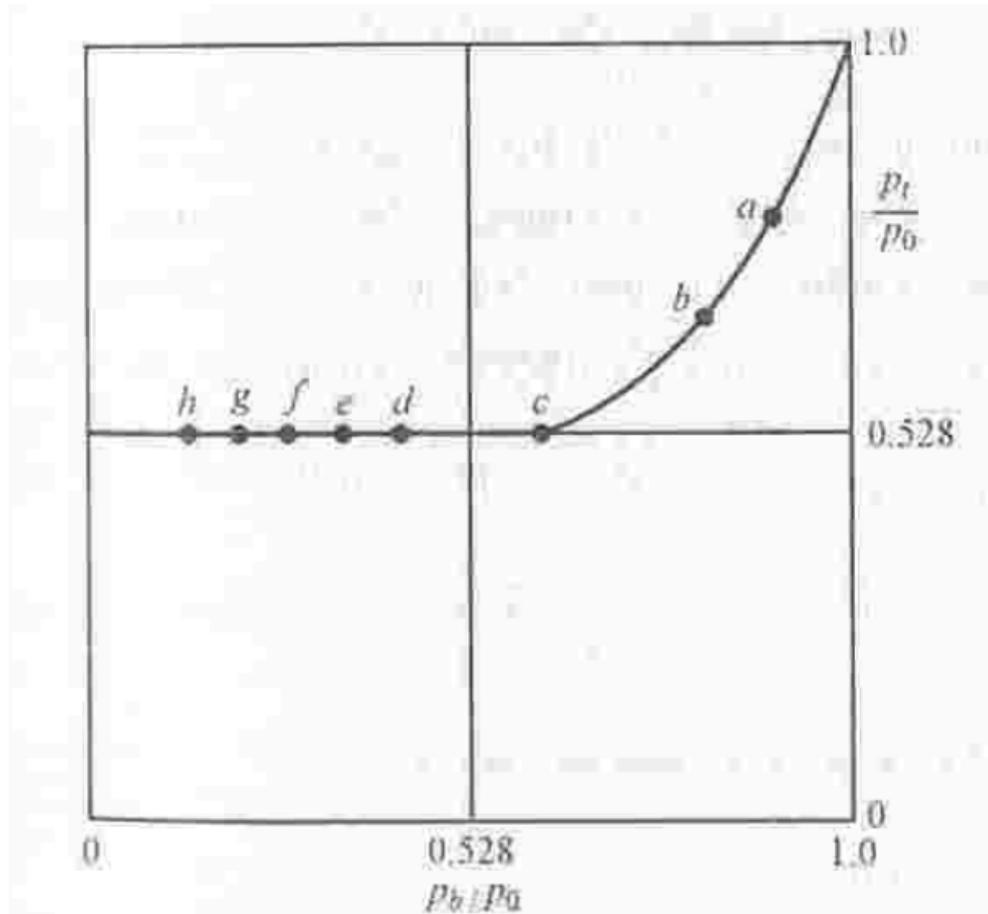


Figura 11 – Variação da razão de pressão na garganta em um bocal C-D ($k = 1.4$).

Fonte: (ANDERSON, 1990)

Nota-se ainda na figura anterior que a relação de pressão crítica equivale a $P/P_0 = 0,528$. Tal valor é extremamente importante, pois representa a pressão limite que conseguimos chegar na saída do bocal de modo a não identificar o choque no escoamento.

6 Design Bocais C-D

Nessa capítulo, busca-se analisar alternativas para o design de um bocal C-D. O objetivo de tal estudo é avaliar diferentes designs para tais bocais de modo a comparar as vantagens e desvantagens de cada modelo estudado.

Adicionalmente, estuda-se o design do bocal já implementado pela equipe de extensão da EPUSP (Projeto Júpiter) a qual trabalha com o escoamento em foguetes de pequeno porte.

A determinação da geometria a ser modelada nesse trabalho leva em conta a facilidade de fabricação de cada tipo de bocal, limitações na aplicação de cada um, facilidade na otimização da geometria em estudo e complexidade na realização futura de simulações computacionais.

Para tal estudo, analisam-se três diferentes geometrias para bocais C-D, abordando as principais características e especificidades de cada design. Utiliza-se o trabalho (LINARES; CIAMPITTI; ROBAINA, 2015) na comparação de tais geometrias.

6.1 Bocal Cônico

O design cônico para um bocal C-D é a geometria mais simplista para tal aplicação. Consequentemente, não corresponde ao modelo com a maior eficiência para a estrutura em análise (devido a componentes de velocidade não-axiais do fluido na seção de saída), apesar de possuir uma geometria menos complexa, facilitando assim a manufatura e o estudo de tal componente.

É importante destacar que a o único parâmetro de qualidade em tal geometria é o ângulo constante (α) do cone na seção divergente. Por esse motivo, tal design apresenta facilidade de otimização e menor custo de produção.

6.2 Bocal Sino

O design bocal sino é o mais adotado para tais estudos. Essa geometria apresenta uma eficiência maior ao modelo estudado anteriormente em termos de demandar um comprimento menor para a estrutura e por não apresentar componentes de velocidade não-axiais.

A principal diferença para o a geometria cônica é a variação do ângulo do cone que agora é dado pelo contorno de uma parábola. Apesar de garantir uma maior eficiência, nota-se que a fabricação não é mais tão elementar, uma vez que a geometria em questão

é mais complexa -apesar de ainda apresentar relativa flexibilidade na fabricação de tal componente.

Além disso, tal geometria apresenta uma limitação devido a uma falta de compensação de altitude. O fluido proveniente na saída do bocal pode apenas sob expandir ou sobre expandir dependendo da pressão na saída e do ambiente. A diferença de pressões para altitudes distintas faz com que tal estrutura apresente perdas em eficiência fora da faixa de altitude ótima.

6.3 Bocal Duplo Sino

Como discutido na secção anterior, o design de bocal duplo sino apresenta problemas em eficiência quando submetidos a diferentes altitudes. Com o intuito de neutralizar tais problemas para o amplo espectro de pressões para as distintas altitudes, faz-se uso da geometria em questão.

Em tal design, nota-se a presença de uma secunda curvatura ao longo do bocal. Tal característica tem por função compensar a queda de eficiência ocasionada pela variação na pressão na secção de saída do fluido durante o escoamento. Quando o fluido deixa o bocal em elevadas altitudes aonde a pressão local é menor do que a pressão do escoamento, o mesmo expande na primeira região de curvatura e ainda sim continua se expandindo na secunda curvatura de modo a garantir a manutenção da eficiência para tal escoamento.

É importante ressaltar que tal bocal apresenta uma maior dificuldade na fabricação, otimização e simulação devido a sua geometria mais complexa.

6.4 Geometria adotada

Nessa secção, discute-se sobre o design adotado na realização do processo de otimização que constitui esse trabalho. O design escolhido é o bocal sino- já discutido previamente.

Tal modelo foi adotado devido à elevada eficiência, mesmo apresentando uma geometria um pouco mais complexa quando comparada com o bocal cônico. Além disso, tal geometria não apresenta grandes dificuldades de implementação em softwares geradores de malha e pode apresentar excelentes resultados em processos de otimização.

7 Materiais e Métodos

Nesse capítulo, busca-se detalhar a malha utilizada para as simulações no presente trabalho. Além disso, detalha-se o procedimento para as simulações nos softwares utilizados para a obtenção dos resultados.

7.1 Gerador de Malhas

Em projetos anteriormente estudados abordando esse mesmo tema, muitos se utilizavam do software *GAMBIT* para a geração da malha, utilizando-se de um script de geração automática. Entretanto, tal software foi descontinuado e se opta pela geração de malha através do software *Gmsh*. A malha do projeto em questão é ilustrada pela Figura 12. a seguir.

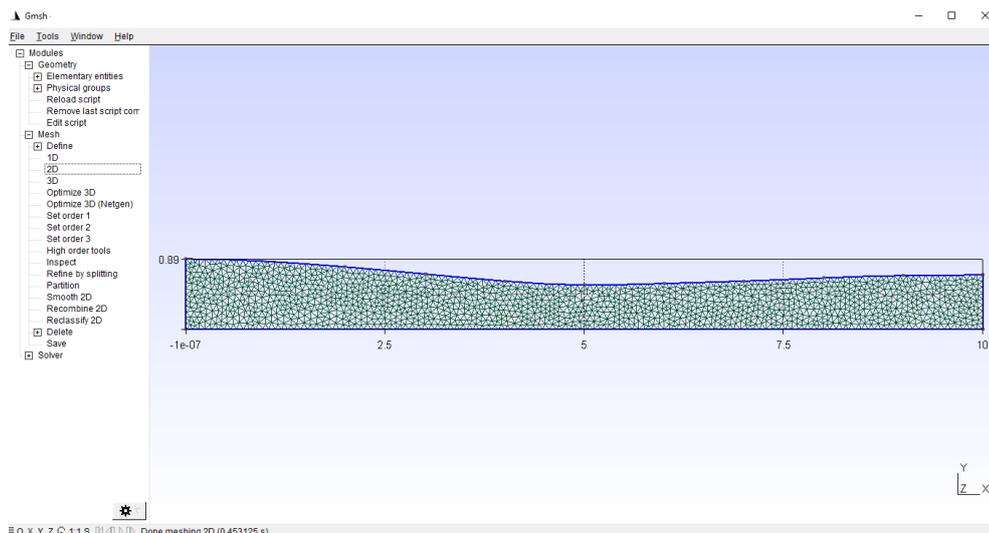


Figura 12 – Malha gerada no software *Gmsh*.

A malha possui elementos triangulares e apresenta 1.759 elementos. Nesse primeiro contato com o software, opta-se por não refinar a mesma nas regiões próximas a parede. Em um maior nível de resolução, pode-se observar a malha representada pela Figura 13.

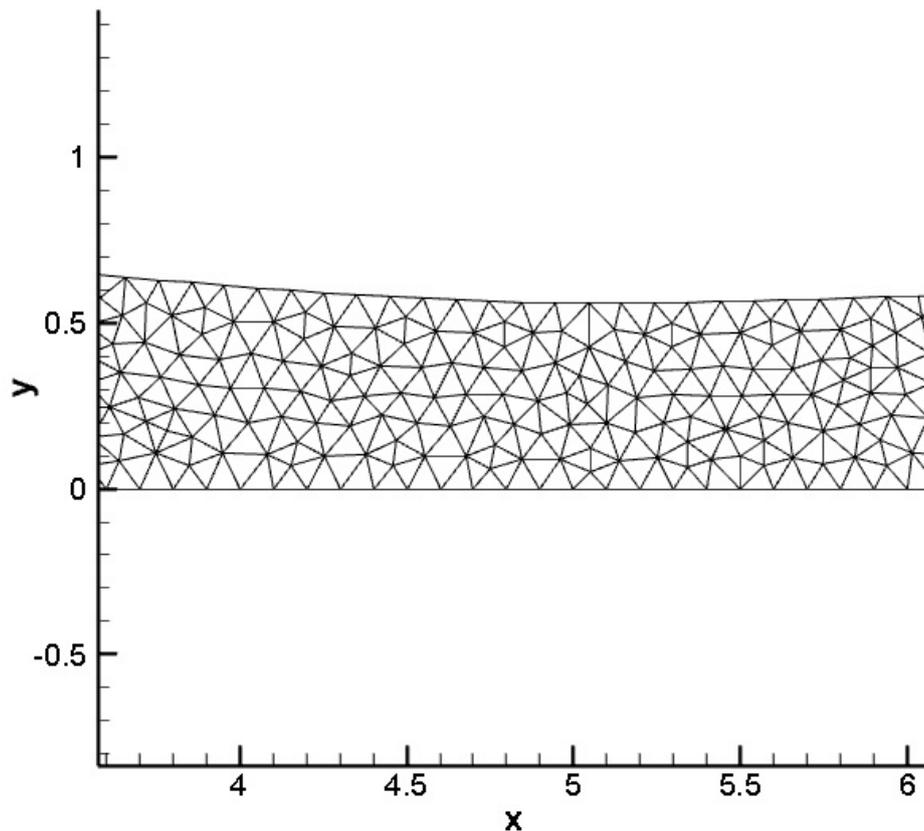


Figura 13 – Malha ampliada do projeto desenvolvida no software *Gmsh*.

A escolha pelo software *Gmsh* se deu devido a flexibilidade que o mesmo apresenta para geração de malhas no formato *.su2* e no formato para *.msh*. Tal flexibilidade é importante, pois iremos utilizar ambos os softwares *SU2* e *ANSYS Fluent* para plotar os resultados obtidos.

7.2 Procedimento *ANSYS Fluent*

O software em questão é frequentemente utilizado no âmbito de simulações computacionais. Trata-se de um software robusto, com uma interface simples que permite o usuário rapidamente iniciar a realização de simulações em problemas mais simples.

Em tal software, primeiramente, importa-se a malha criada no software *Gmsh*. Além disso, por se tratar de um escoamento de Euler, deve-se desconsiderar a viscosidade na simulação. Utiliza-se ar como fluido no escoamento e por fim são definidas as condições de contorno para o escoamento.

Finalmente, com a geometria, malha e condições de contorno definidos, inicia-se a simulação com um modelo de primeira ordem e, posteriormente, refina-se os resultados

utilizando um modelo de segunda ordem seguido por uma quantidade maior de iterações até os resíduos computacionais serem desprezíveis.

7.3 Procedimento *SU2*

O *SU2* é um software idealizado pelo Laboratório de Design Aeroespacial (ADL) do Departamento de Aeronáutica e Astronáutica da Universidade de *Stanford* e membros da comunidade científica internacional, e é lançado sob uma licença de código aberto. O mesmo foi idealizado para realizar análises e resolver problemas de otimização de Equações Diferenciais Parciais (PDE).

O *SU2* foi escolhido para esse estudo, pois apresenta uma estrutura a qual incorpora um sistemas de equações adjuntas que possibilita fornecer uma previsão de alta fidelidade e informações de sensibilidade que podem ser usadas para uma eventual otimização, usando uma estrutura baseada em gradientes, refinamento de malha adaptativa orientada a objetivos, ou quantificação de incerteza.

7.3.1 Condições de Contorno *SU2*

No *SU2*, a temperatura de estagnação, a pressão de estagnação e um vetor unitário que descreve a direção do fluxo de entrada, devem ser especificados a densidade, a velocidade ou o fluxo de massa, também podem ser especificados).

7.3.2 Critérios de Convergência

Existem três diferentes tipos de critérios de convergência para encerrar uma simulação utilizando o solver *SU2*:

1. *EXT – ITER*: executa-se um número específico de iterações, reduzindo a densidade residual por uma ordem de grandeza especificada ou convergindo um objetivo (como o arrasto) definindo uma tolerância;
2. *RESIDUAL – REDUCTION*: controla quantas reduções de ordem de grandeza na densidade residual são necessárias para a convergência;
3. *RESIDUAL – MINVAL*: define o valor mínimo que o resíduo pode alcançar antes de encerrar os cálculos automaticamente.

O usuário pode definir um número específico de interações para um número inicial de densidade residual usando a opção *STARTCONV – ITER*. No entanto, o *SU2* sempre usará o valor máximo da densidade residual para calcular a redução relativa, mesmo que o valor máximo ocorra após a iteração especificada em *STARTCONV – ITER*.

7.3.3 Métodos Numéricos Convectivos

Para o escoamento interno do bocal escolhido para esta investigação numérica, o método de $2ND - ORDER - ROE$ mostrou um bom desempenho quando utilizado em conjunto com o limitador Venkatakrisnan. Sem o limitador, a computação é muito menos estável e pode não convergir.

Nas simulações iniciais, optou-se pelo método convectivo $1ST - ORDER - JST$, porém não houve uma convergência numérica satisfatória. A limitação não é aplicável para primeira ordem (escolhida inicialmente nos métodos ROE e JST), pois não há reconstrução de ordem superior e, portanto, não é necessário limitar os gradientes. Os termos viscosos são calculados com a média corrigida do método de gradientes (por padrão).

7.3.4 Integração numérica

A integração temporal Euler Implícita foi utilizada com um número CFL de valor 6, e mostrou-se adequada ao estudo numérico. A convergência foi acelerada com três níveis de Multigrid.

7.4 Condições de Contorno

A Tabela 1 ilustra as condições de contorno adotadas para a simulação em questão.

Tabela 1 – Condições de Contorno no Escoamento

| Parâmetro | Módulo | Unidade |
|-----------------------------------|--------|---------|
| Temperatura de estagnação entrada | 1600 | K |
| Pressão de estagnação entrada | 45,94 | bar |
| Pressão absoluta saída | 0,828 | bar |

7.5 Condições de Choque

Tal seção tem por função identificar as diferentes regiões no escoamento de um bocal C-D com base na pressão de saída do bocal. A Figura 14 ilustra as diferentes regiões do escoamento para cada faixa de pressões de saída.

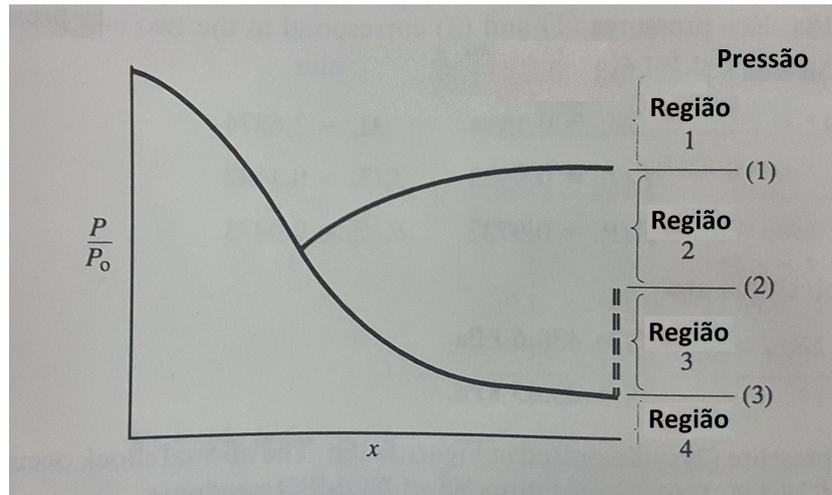


Figura 14 – Pressões de Saída e Regiões para escoamento em bocal C-D.

Fonte: Adaptado de (ANDERSON, 1990))

Com base nas condições de contorno do problema e auxílio de Tabelas Termodinâmicas, calcula-se as faixas de pressão de saída do bocal para cada região ilustrada na Figura 14. A Tabela 1 ilustra as regiões para o escoamento no bocal C-D em estudo, evidenciando as faixas de pressões na saída do bocal calculadas.

Tabela 2 – Faixas de Pressões de Saída para as regiões do escoamento

| Região | Pressão de Saída (kPa) |
|--------|------------------------|
| 1 | $p > 4043$ |
| 2 | $1165 < p < 4043$ |
| 3 | $729 < p < 1165$ |
| 4 | $p < 729$ |

8 Resultados e Análises

8.1 Resultados Choque - *SU2*

Nessa seção, altera-se a pressão de saída do bocal de modo a validar o modelo em estudo com base na presença da onda de choque para tal relação de pressões. Com base na Tabela 2 da seção 7.5, adota-se uma pressão de saída de $3,7 \cdot 10^6$ Pa de modo a averiguar a presença do choque na porção divergente e assim validar o modelo em estudo.

A Figura 15 representa a distribuição da temperatura estática no bocal que deve decrescer ao longo do escoamento até o momento do choque, região na qual temos um aumento brusco na temperatura estática.

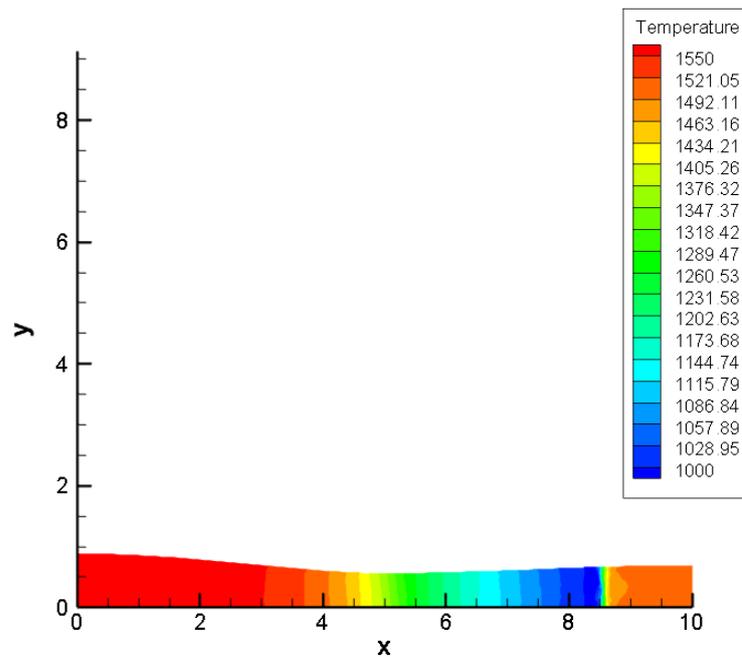


Figura 15 – Distribuição da Temperatura Estática com a presença do choque no escoamento - *SU2*.

A seguir, a Figura 16 ilustra a distribuição da temperatura de estagnação no bocal que pela teoria deve ser constante ao longo do escoamento - exceto na região do choque onde existe uma descontinuidade no escoamento.

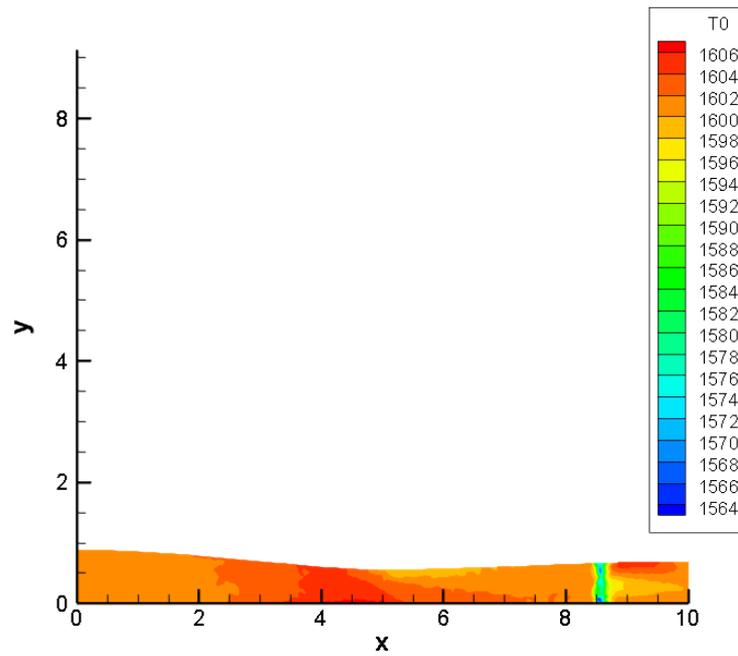


Figura 16 – Distribuição da Temperatura de Estagnação com a presença do choque no escoamento - *SU2*.

A Figura 17 representa a distribuição da pressão estática no bocal que deve ter seu módulo decrescido na evolução do escoamento até o instante do choque aonde se observa um aumento da pressão estática no bocal.

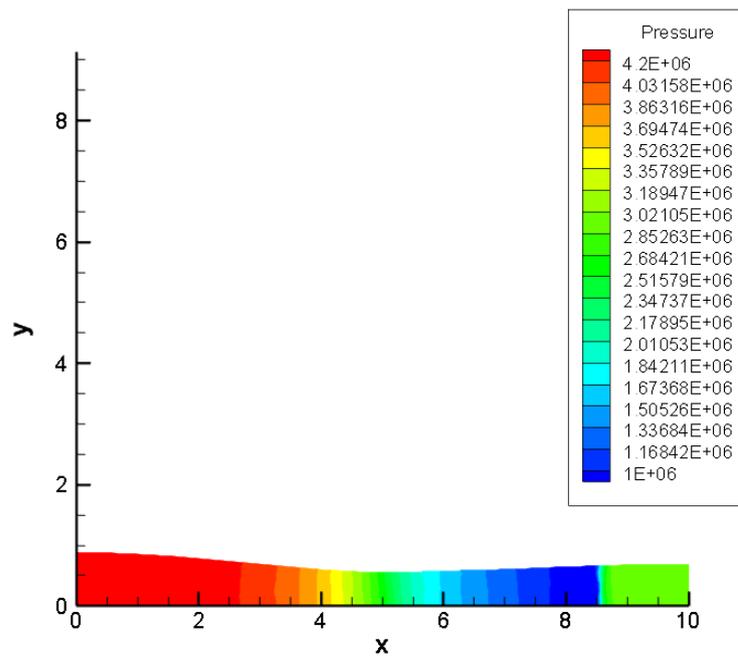


Figura 17 – Distribuição da Pressão Estática com a presença do choque no escoamento - *SU2*.

Posteriormente, na Figura 18 destaca-se a evolução da pressão de estagnação no escoamento que deve ser constante para as diferentes secções do bocal. Em tal figura, ainda observa-se que a pressão cai abruptamente devido a descontinuidade evidenciada na onda de choque.

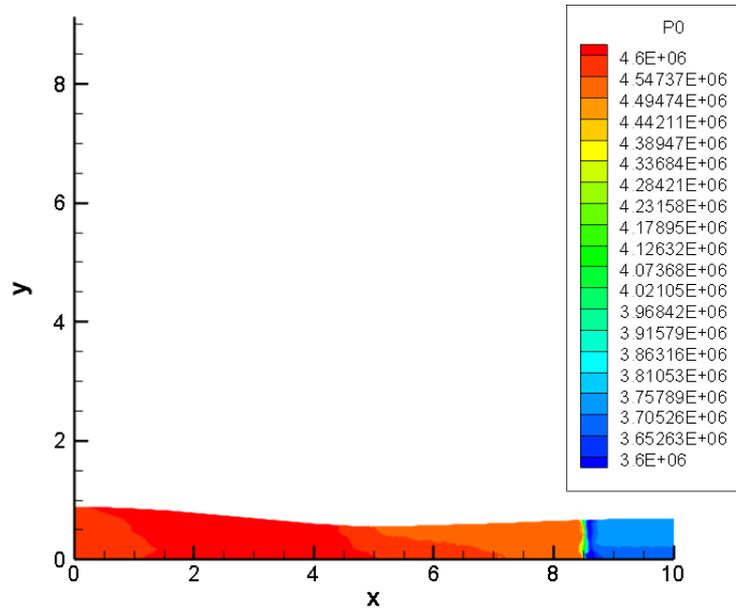


Figura 18 – Distribuição da Pressão de Estagnação com a presença do choque no escoamento - *SU2*.

Por fim, a Figura 19 representa a distribuição do número de Mach no escoamento, passando de um regime subsônico ($M < 1$) na porção convergente para um escoamento supersônico ($M > 1$) na porção divergente. Nota-se ainda a queda do número de Mach na onda de choque.

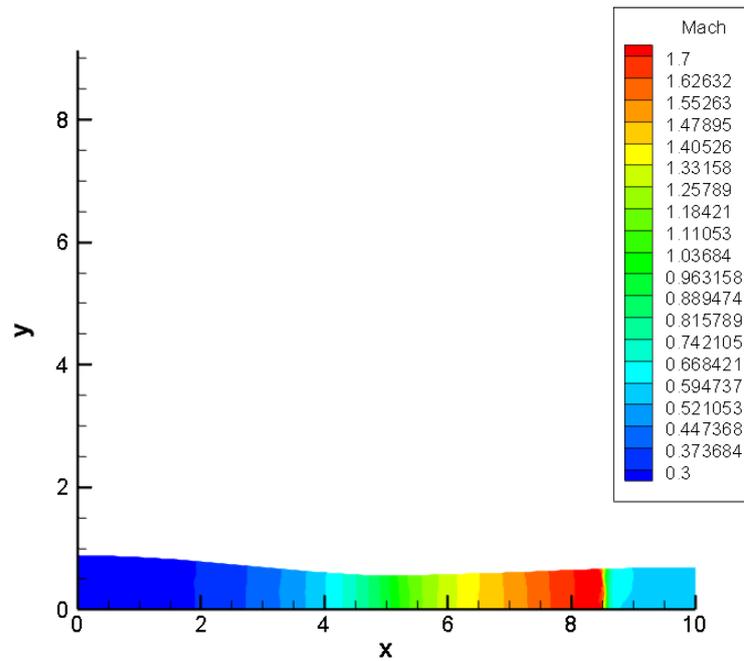


Figura 19 – Distribuição do número de Mach com a presença de choque no escoamento - *SU2*.

8.2 Resultados *ANSYS Fluent*

Nesse capítulo, simula-se o modelo no software Ansys com a mesma geometria e condições de contorno das simulações anteriores.

A Figura 20 pode-se observar como os resíduos computacionais decrescem ao longo da simulação de modo que a solução convirja. Para o estudo em questão, foram realizadas 2.750 iterações e um resíduo da ordem de 10^{-6} .

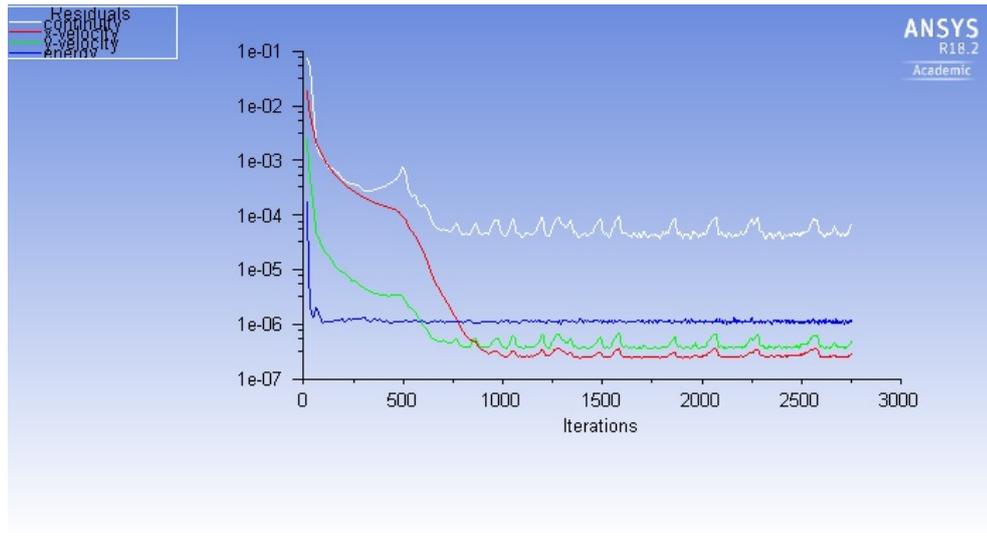


Figura 20 – Resíduos computacionais na simulação Fluent.

A Figura 21 representa a distribuição da temperatura estática no bocal que deve decrescer ao longo do escoamento.

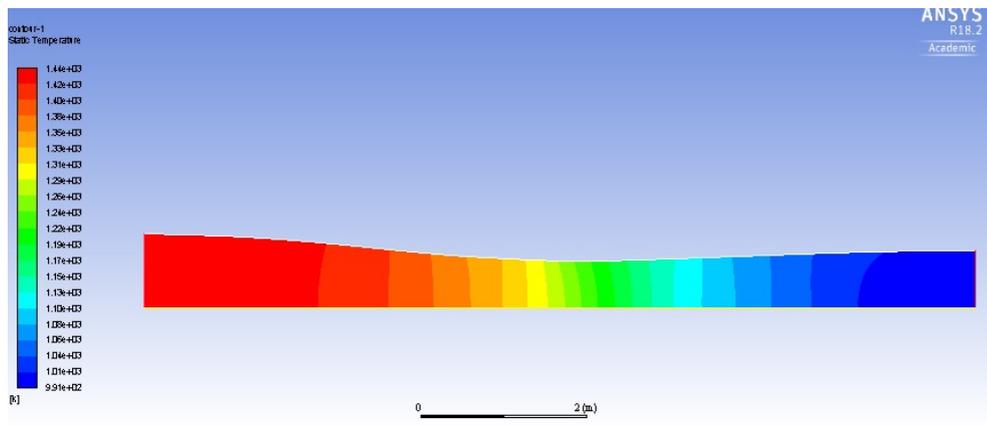


Figura 21 – Distribuição da Temperatura Estática no escoamento - ANSYS Fluent.

A seguir, a Figura 22 ilustra a distribuição da temperatura de estagnação no bocal que pela teoria deve ser constante ao longo do escoamento.

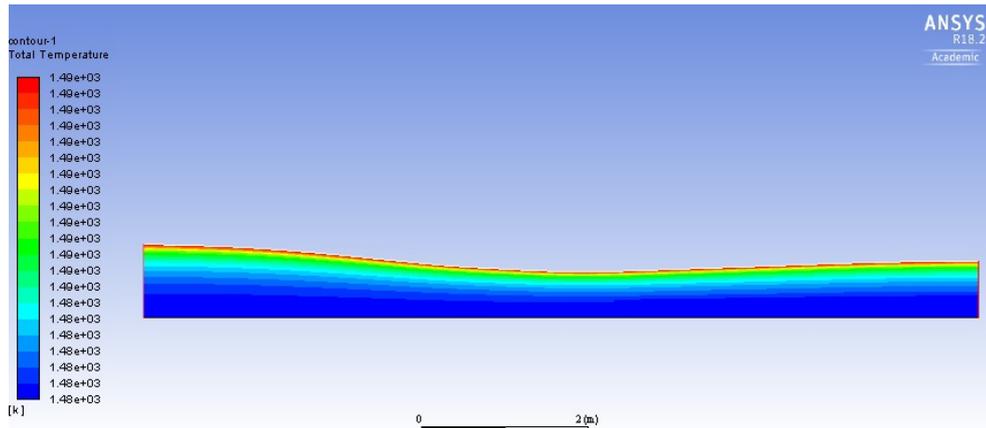


Figura 22 – Distribuição da Temperatura de Estagnação no escoamento - *ANSYS Fluent*.

A Figura 23 representa a distribuição da pressão estática no bocal que deve ter seu módulo decrescido na evolução do escoamento.

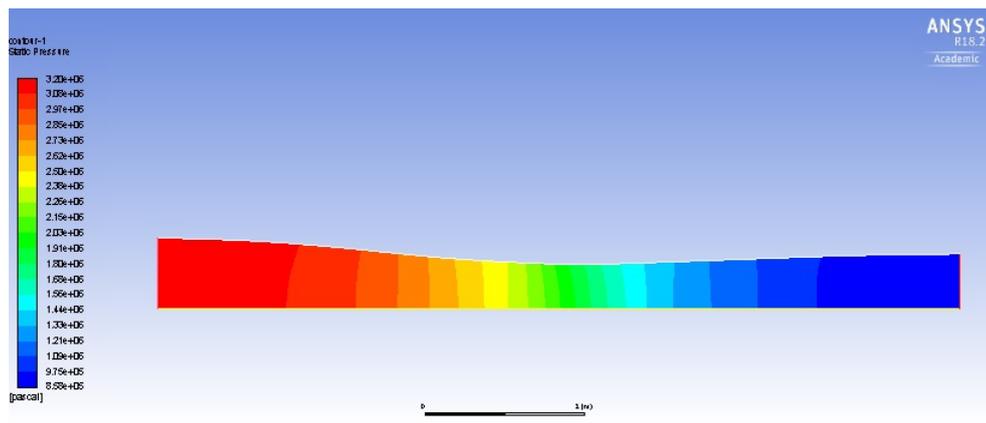


Figura 23 – Distribuição da Pressão Estática no escoamento - *ANSYS Fluent*.

Posteriormente, na Figura 24 destaca-se a evolução da pressão de estagnação no escoamento que deve ser constante para as diferentes secções do bocal.

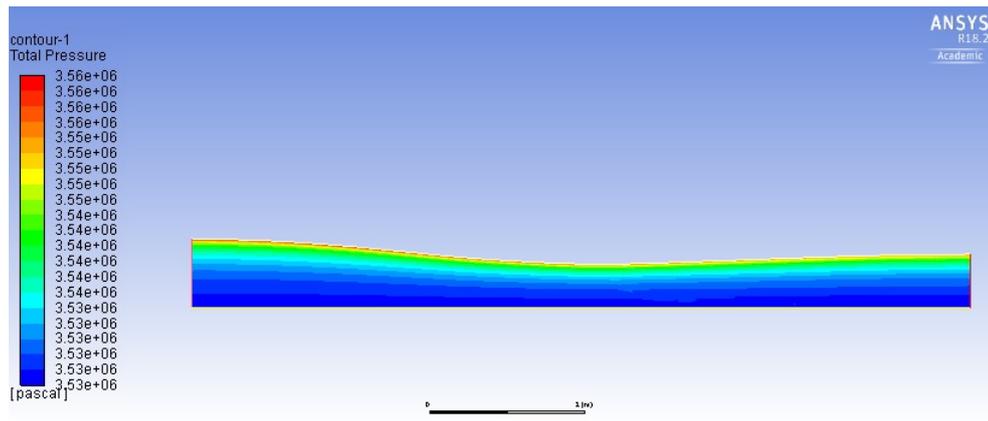


Figura 24 – Distribuição da Pressão de Estagnação no escoamento - *ANSYS Fluent*.

Por fim, a Figura 25 representa a distribuição do número de Mach no escoamento, passando de um regime subsônico ($M < 1$) na porção convergente para um escoamento supersônico ($M > 1$) na porção divergente.

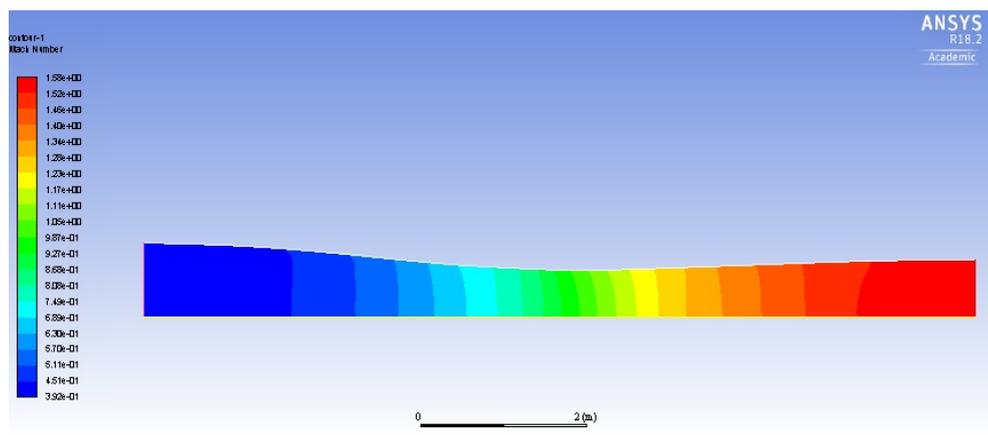


Figura 25 – Distribuição do número de Mach no escoamento - *ANSYS Fluent*.

8.3 Resultados *SU2*

A Figura 26 representa a distribuição da temperatura estática ao longo do bocal. Com base na teoria, a temperatura deveria decrescer para o escoamento em questão.

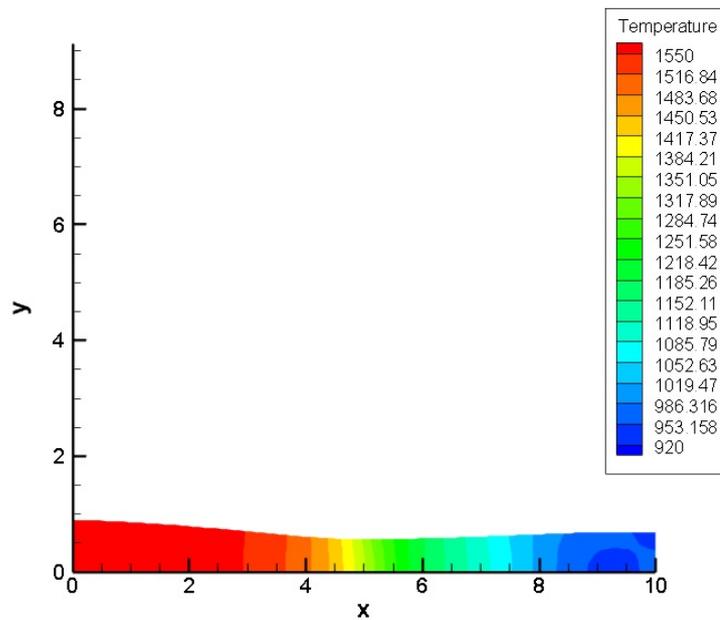


Figura 26 – Distribuição da Temperatura Estática no escoamento - *SU2*.

Adicionalmente, a Figura 27 representa a distribuição da temperatura de estagnação no escoamento. Conforme esperado, pode-se perceber que as temperaturas são constantes ao longo do escoamento.

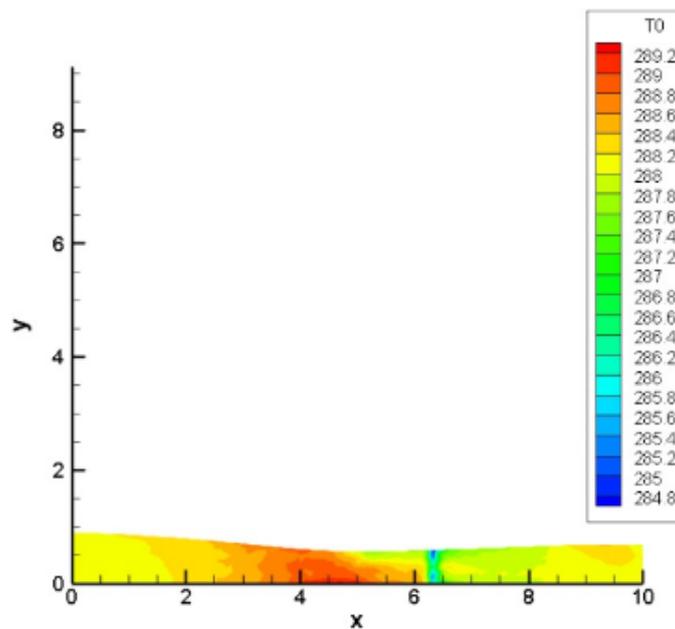


Figura 27 – Distribuição da Temperatura de Estagnação no escoamento - *SU2*.

A Figura 28 ilustra a evolução da pressão estática a qual deve ter o valor decrescido

ao longo do escoamento.

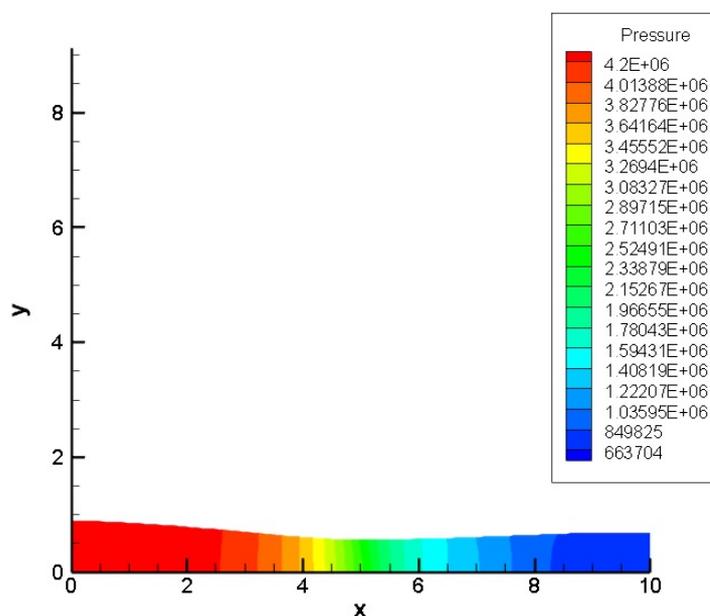


Figura 28 – Distribuição da Pressão Estática no escoamento - *SU2*.

A seguir a Figura 29 evidencia a distribuição da pressão de estagnação no escoamento que deve ter seu módulo constante.

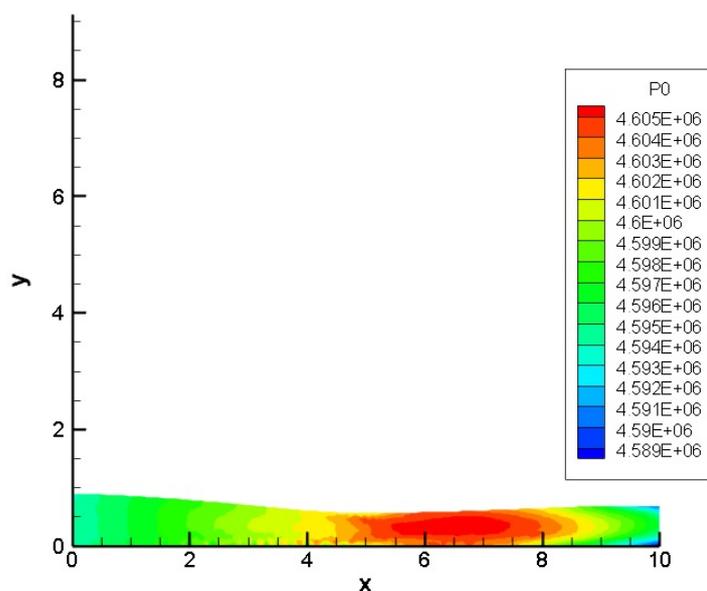


Figura 29 – Distribuição da Pressão de Estagnação no escoamento - *SU2*.

Finalmente, a Figura 30 representa a evolução do número de Mach ao longo do escoamento.

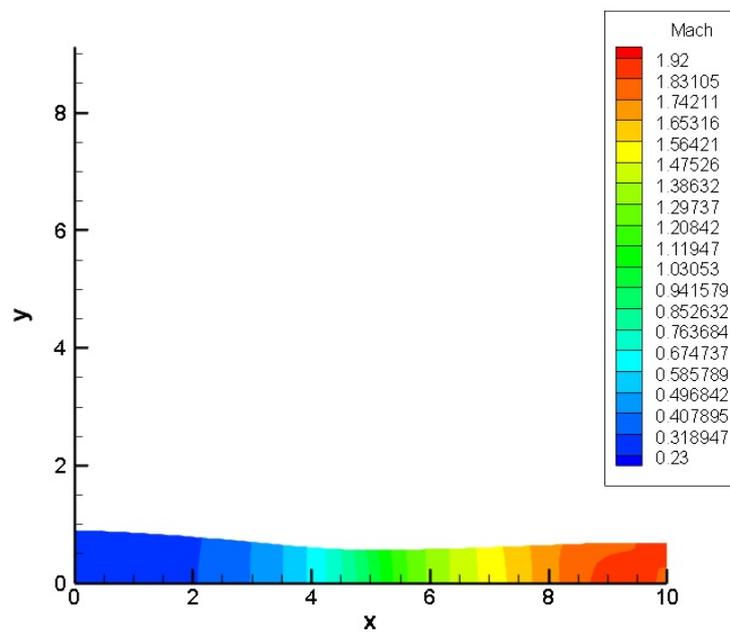


Figura 30 – Distribuição do número de Mach no escoamento - *SU2*.

9 Conclusões

- A geometria escolhida é suficiente para a obtenção de resultados satisfatórios para o projeto em questão;
- A malha gerada no software *Gmsh* proporcionou bons resultados nas simulações realizadas, apesar da temperatura e pressão de estagnação (na ausência do choque) apresentarem determinado range de variação (mesmo que pequeno);
- O refinamento da malha apresentou um elevado custo computacional, porém os resultados obtidos foram similares aos dos encontrados para uma malha menos refinada;
- O choque no escoamento foi encontrado com base na pressão de saída de $3,7 \cdot 10^6$, validando o modelo em análise;
- As respostas obtidas em ambos os softwares *SU2* e *ANSYS Fluent* são coerentes com o esperado na teoria, tanto em aspectos qualitativos como quantitativos;

Referências

ANDERSON, J. D. *Modern compressible flow with historical perspective*. [S.l.]: McGraw Hill New York, 1990. v. 12. Citado 5 vezes nas páginas 14, 19, 25, 26 e 33.

AZEVEDO, J.; DOURADO, W. Euler solutions of two dimensional flows using unstructured meshes. In: *Anais do XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica-XI COBEM, Azul*. [S.l.: s.n.], 1991. p. 189–192. Nenhuma citação no texto.

BORGNAKKE, C.; SONNTAG, R. E. *Fundamentos da Termodinâmica*. [S.l.]: Blucher, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 20.

CHIEREGATTI, B. G. *Otimização aerodinâmica de aerofólios utilizando o método adjunto*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2008. Nenhuma citação no texto.

CONSTANTINO, C. A.; VOLPE, O. P. D. E. V. Análise e otimização aerodinâmica utilizando o método adjunto. *EPUSP, S. Paulo, Brasil*, 2006. Nenhuma citação no texto.

FERNANDES, L. M. B.; FORTUNATO, S. C. *Escoamento Compressível Subsonico e Supersonico em Bocais Convergente Divergentes*. 2011. Citado na página 9.

LINARES, M.; CIAMPITTI, A.; ROBAINA, M. *Design Optimization of a Supersonic Nozzle Final Report*. 2015. Citado na página 27.

PIMENTA, P. D. M. d. M. *Introducao a Dinamica dos Gases Termodinamica do Escoamento Compressivel*. 1998. Departamento de Engenharia Mecanica da Escola Politecnica da USP. Citado 8 vezes nas páginas 12, 16, 17, 18, 21, 22, 23 e 24.

PROJETOJUPITER. *Diretrizes basicas para o projeto de bocais para motores solidos*. 2016. Nenhuma citação no texto.

YAHYA, S. M. *Fundamentals of compressible flow with aircraft and rocket*. [S.l.]: New Age, 3a edicao. Citado na página 15.