

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

TALLES DE SOUZA ARAÚJO

Análise de Sistemas Chaveados
via Equações Diferenciais e Integrais Generalizadas

São Carlos
Novembro de 2024

TALLES DE SOUZA ARAÚJO

Análise de Sistemas Chaveados
via Equações Diferenciais e Integrais Generalizadas

Monografia apresentada ao Curso
de Engenharia Elétrica com
ênfase em Sistemas de Energia
e Automação, da Escola de
Engenharia de São Carlos da
Universidade de São Paulo, como
parte dos requisitos para obten-
ção do Título de Engenheiro(a)
Eletricista.

Orientadora: Profa. Dra. Marcia
Cristina Anderson Braz Federson

São Carlos
Novembro de 2024

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

A147 Araújo, Tales de Souza
a Análise de Sistemas Chaveados via Equações
Diferenciais e Integrais Generalizadas / Tales de Souza Araújo; orientadora Marcia Cristina Anderson Braz Federson. São Carlos, 2024.

Monografia (Graduação em Engenharia Elétrica com ênfase em Sistemas de Energia e Automação) -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2024.

1. Sistemas chaveados. 2. Modelagem. 3. Equações diferenciais impulsivas. I. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Nome: Tales de Souza Araujo

Título: “Análise de Sistemas Chaveados via Equações Diferenciais e Integrais Generalizadas”

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado
em 02/12/2024,

com NOTA 10,0 (dez, zero), pela Comissão
Julgadora:

Profa. Titular Marcia Cristina Anderson Braz Federson - Orientadora
SMA / ICMC / USP

Prof. Titular Luís Fernando Costa Alberto - SEL / EESC / USP

Prof. Associado Ricardo Quadros Machado - SEL / EESC / USP

Coordenador da CoC-Engenharia Elétrica - EESC/USP:
Professor Associado José Carlos de Melo Vieira Júnior

*Dedico este trabalho aos meus pais, que sempre me apoiaram,
independentemente de minhas escolhas.*

RESUMO

ARAÚJO, T. S. **Análise de Sistemas Chaveados via Equações Diferenciais e Integrais Generalizadas.** 2024. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

Sistemas chaveados desempenham um papel crucial na engenharia elétrica, sendo amplamente empregados em aplicações como conversores CC-CC, controle de motores e sistemas de automação. Este estudo apresenta uma análise detalhada desses sistemas utilizando equações diferenciais e integrais generalizadas. A pesquisa aborda a modelagem matemática por meio de representações em espaço de estados e lógica de chaveamento, além de explorar modelos específicos, como o modelo médio e o de pequenos sinais. Como contribuição principal, o trabalho demonstra a equivalência entre sistemas chaveados e sistemas impulsivos, evidenciando que é possível transformar um no outro de forma bidirecional. Adicionalmente, o estudo inclui uma análise aprofundada do conversor Boost, um tipo de conversor CC-CC, com foco em suas características operacionais e sua modelagem matemática. A validação dos modelos teóricos foi realizada por meio de simulações, comparando os resultados previstos com os obtidos na prática. Os resultados demonstram que a abordagem proposta descreve eficazmente o comportamento dinâmico dos sistemas chaveados, dispensando suposições ou linearizações. Esta pesquisa contribui para o avanço do entendimento de técnicas de análise e modelagem de sistemas chaveados, com aplicações práticas em diversas áreas da engenharia elétrica.

Palavras-chave: Sistemas chaveados. Equações diferenciais impulsivas. Conversor Boost. Modelagem em espaço de estados.

ABSTRACT

ARAÚJO, T. S. **Analysis of Switched Systems Through Generalized Differential and Integral Equations.** 2024. Bachelor's Thesis (Final Graduation Project) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

Switched systems play a crucial role in electrical engineering, being widely employed in applications such as DC-DC converters, motor control, and automation systems. This study presents a detailed analysis of these systems using generalized differential and integral equations. The research addresses mathematical modeling through state-space representations and switching logic, in addition to exploring specific models, such as the average model and the small-signal model. As a main contribution, the work demonstrates the equivalence between switched systems and impulsive systems, showing that it is possible to transform one into the other bidirectionally. Additionally, the study includes an in-depth analysis of the Boost converter, a type of DC-DC converter, focusing on its operational characteristics and mathematical modeling. The validation of the theoretical models was carried out through simulations, comparing the predicted results with those obtained in practice. The results demonstrate that the proposed approach effectively describes the dynamic behavior of switched systems, without requiring assumptions or linearizations. This research contributes to advancing the understanding of analysis and modeling techniques for switched systems, with practical applications in various areas of electrical engineering.

Keywords: Switched systems. Impulsive differential equations. Boost converter. State-space modeling.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Trajetória de $x(t)$, com condição inicial $x(0) = 15$.	18
Figura 2 – Trajetória de $x(t)$, com condição inicial $x(0) = 10$.	24
Figura 3 – Circuito do conversor Boost.	27
Figura 4 – Formas de onda do conversor Boost.	29
Figura 5 – Formas de onda do conversor Boost.	30
Figura 6 – Evolução no tempo dos estados do conversor Boost.	38
Figura 7 – Evolução no tempo dos estados do conversor Boost para $f = 100$ Hz.	39
Figura 8 – Trajetória de $x(t)$, com condição inicial $x(0) = 8$.	42
Figura 9 – Trajetórias do sistema impulsivo (3.6) para diferentes condições iniciais.	43
Figura 10 – Trajetórias de $x(t)$ com condição inicial $x(0) = 1$ (em vermelho) e $x(0) = -4$ (em azul).	44
Figura 11 – Trajetória de $x(t)$ com condição inicial $x(0) = 1$.	45
Figura 12 – Gráfico da função $\sigma(t)$ do Exemplo 12.	48
Figura 13 – Gráfico das funções $\alpha_m(t)$, do Exemplo 12.	49
Figura 14 – Estratégia de controle em cascata para o conversor Boost.	53
Figura 15 – Lógica do sinal de saída α_1 do PWM.	55
Figura 16 – Evolução no tempo dos estados do conversor Boost com controle.	56
Figura 17 – Circuito equivalente de um motor CC.	57
Figura 18 – Evolução no tempo da velocidade angular do motor CC.	59
Figura 19 – Frequência de chaveamento da chave de controle da velocidade angular do motor CC.	59
Figura 20 – Sistema de 3 barras e 3 geradores.	62
Figura 21 – Evolução no tempo dos estados do sistema de 3 barras e 3 geradores para $t_a = 0.194$ s.	62
Figura 22 – Evolução no tempo dos estados do sistema de 3 barras e 3 geradores para $t_a = 0.195$ s.	63
Figura 23 – Diagrama de Venn do espaço de $G([a, b], \mathbb{R}^n)$.	71
Figura 24 – Diagrama de Venn referente à integral de Henstock-Kurzweil.	74

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CC-CC	Corrente Contínua para Corrente Contínua
CC	Corrente Contínua
CA	Corrente Alternada
<i>cte</i>	Constante
LTI	<i>Linear Time-Invariant</i> (Linear e Invariante no Tempo)
LKC	Lei de Kirchhoff das Correntes
LKT	Lei de Kirchhoff das Tensões
PWM	<i>Pulse Width Modulation</i> (Modulação por Largura de Pulso)
EDI	Equação Diferencial Impulsiva
EIV	Equação Integral do tipo Volterra
MPPT	<i>Maximum Power Point Tracking</i> (Rastreamento do ponto de máxima potência)
PWM	<i>Pulse Width Modulation</i> (Modulação por Largura de Pulso)
PID	Proporcional Integral Derivativo

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{R}_+	Conjunto dos números reais positivos.
\mathbb{Q}	Conjunto dos números racionais.
\mathbb{R}^n	Espaço vetorial n -dimensional.
\dot{x}	Derivada de $x(t)$.
$\sigma(t)$	Sinal de chaveamento.
T_s	Período de chaveamento.
D	Razão cíclica (<i>duty cycle</i>).
L, C, R	Indutância, capacitância e resistência, respectivamente.
$x(t^-)$	Limite a esquerda de x em t .
$x(t^+)$	Limite a direita de x em t .
t_k	Momento impulsivo/Instante de chaveamento.
Δx	Diferença entre os limites laterais de x em um ponto.
$x^{(t)}(\theta)$	Função $x(t)$ com atraso θ .
I_k	Operador impulsivo k .
$var(f)$	Variação de f .
$BV([a, b], \mathbb{R}^n)$	Espaço das funções de variação limitada do intervalo $[a, b]$ em \mathbb{R}^n .
$G([a, b], \mathbb{R}^n)$	Espaço das funções regradas do intervalo $[a, b]$ em \mathbb{R}^n .
$G^-([a, b], \mathbb{R}^n)$	Espaço das funções regradas contínuas à esquerda do intervalo $[a, b]$ em \mathbb{R}^n .

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	17
1.1 Sistemas chaveados	17
1.2 Motivação para o estudo	19
1.2.1 Desafios na modelagem de sistemas chaveados	19
1.2.2 Limitações dos modelos tradicionais	20
1.3 Objetivo do trabalho	21
1.4 Estrutura do trabalho	21
2 SISTEMAS CHAVEADOS	23
2.1 Noções básicas	23
2.2 Conversores CC-CC	26
2.2.1 Conversor Boost	27
2.2.2 Modelo médio	27
2.2.3 Modelo de pequenos sinais	31
2.2.4 Modelo em espaço de estados	34
3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS IMPULSIVAS	41
3.1 Sistemas com impulsos em tempos fixados	41
3.2 Sistemas com impulsos em tempos variáveis	43
3.3 Sistemas autônomos com impulsos	44
3.4 Sistemas autônomos impulsivos com retardo	45
3.5 Sistemas chaveados e sistemas impulsivos	46
3.5.1 A resposta de um sistema chaveado	46
3.5.2 Equivalência entre sistemas chaveados e impulsivos	47
3.6 Equações integrais e sistemas chaveados	50
4 APLICAÇÕES	53
4.1 Conversor Boost com controle de dupla malha	53
4.2 Controle de velocidade de um motor CC	56
4.3 Tempo de abertura dos disjuntores isoladores de falhas	59
5 CONCLUSÃO	65
REFERÊNCIAS	67
APÊNDICE A - Função regrada	71
APÊNDICE B - Integral de Henstock-Kurzweil	73
APÊNDICE C - Esboço da prova do Corolário 3.6.1	75

1 INTRODUÇÃO

Sistemas chaveados são uma classe de sistemas dinâmicos que alternam entre diferentes subsistemas, ou modos de operação, ao longo do tempo. O chaveamento entre esses modos pode ser determinado por um controlador lógico, por condições internas do sistema, ou por eventos externos. Por exemplo, em conversores de eletrônica de potência, como o conversor Boost, o chaveamento ocorre devido ao controle dos interruptores (transistores), que alternam entre estados ligados e desligados para regular a saída de tensão. Esse comportamento dinâmico e abrupto torna os sistemas chaveados amplamente utilizados em aplicações que exigem alta eficiência e controle preciso, como em fontes de alimentação, controle de motores elétricos e sistemas de energia renovável^[1–4].

1.1 Sistemas chaveados

Sistemas híbridos combinam dinâmicas contínuas e discretas, modelando processos que alternam entre diferentes estados ou modos de operação. Eles são representados por equações diferenciais para a dinâmica contínua e por lógicas ou autômatos para as transições discretas.

Em diversas aplicações, o foco está nas propriedades da dinâmica contínua, enquanto a dinâmica discreta desempenha um papel secundário. Assim, ao invés de estudar a dinâmica discreta em detalhes, é possível considerar o sistema como composto por várias dinâmicas contínuas, nas quais uma lógica de chaveamento seleciona uma delas. Esse método permite analisar o comportamento do sistema conforme diferentes lógicas de chaveamento. Sistemas que envolvem dinâmicas contínuas e chaveamentos entre elas são chamados sistemas chaveados^[5], uma abordagem dos sistemas híbridos que abstrai a dinâmica discreta para enfatizar a contínua.

Um sistema chaveado pode ser definido matematicamente por^[6]

- Um conjunto de índices \mathcal{J} ;
- Uma família de funções vetoriais $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $k \in \mathcal{J}$ e
- Uma função de chaveamento $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{J}$, que é constante por partes e determina qual dinâmica f_k será ativa em cada instante de tempo.

A dinâmica do sistema é descrita pela equação diferencial

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)),$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado do sistema.

Um caso simples de um sistema chaveado é abordado no exemplo a seguir.

Exemplo 1 (Controle de temperatura). A temperatura de um ambiente varia de acordo com o seu fluxo líquido de energia de acordo com a seguinte relação^[7]:

$$CT' = q, \quad (1.1)$$

sendo

- C a capacidade térmica do sistema (ambiente);
- T a temperatura do sistema e
- q o fluxo de energia térmica.

Assumindo que é possível injetar/extrair energia do sistema através de algum controlador de temperatura, (1.1) torna-se

$$CT' = q + u, \quad (1.2)$$

sendo u a energia fornecida ou removida pelo controlador térmico.

Considere que $C = 10 \text{ kJ}^{\circ}\text{C}^{-1}$, $q = -2 \text{ kW}$, $u = 5 \text{ kW}$ se o controlador estiver no modo aquecedor, e $u = -5 \text{ kW}$ quando estiver no modo de resfriamento. Considere também que o controlador esteja no modo de aquecimento quando $T < 20^{\circ}\text{C}$, e no modo de resfriamento quando $T > 25^{\circ}\text{C}$.

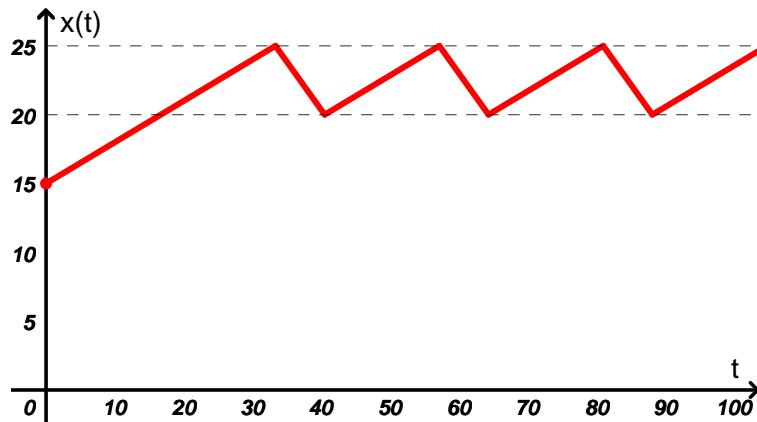
Dessa forma, o sistema (ambiente mais controlador térmico) descrito por (1.2) pode ser modelado como um sistema chaveado a partir de

$$\dot{x} = \begin{cases} 0.3, & \text{se } x < 20; \\ -0.7, & \text{se } x > 25, \end{cases}$$

com $x = T$ (valores de x entre 20 e 25 mantêm o último modo de operação do controlador).

A Figura 1 mostra o comportamento da temperatura do ambiente para a condição inicial $x(0) = 15$.

Figura 1 – Trajetória de $x(t)$, com condição inicial $x(0) = 15$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O sinal $\sigma(t)$, que alterna entre diferentes dinâmicas $f_k(x)$, pode ser interpretado de várias maneiras, cada uma delas é melhor adaptada a um tipo específico de problema ou análise^[5]:

- (a) **Dependente do tempo:** Se o sinal $\sigma(t)$ depender unicamente do tempo, isso significa que o sistema seguirá um padrão de chaveamento controlado exclusivamente pelo tempo, sem levar em conta o estado atual do sistema. Este tipo de chaveamento é caracterizado por uma dependência temporal explícita, e o sinal de chaveamento pode ser descrito como uma função determinística do tempo.
Matematicamente, isso pode ser expresso por uma função $\sigma(t)$ que varia ao longo do tempo, como uma onda quadrada ou uma sequência de pulsos com uma frequência ou período pré-determinado. Nesse caso, o sistema alterna entre suas dinâmicas de acordo com um padrão de tempo predefinido, por exemplo, alternando de forma periódica entre diferentes dinâmicas em intervalos de tempo fixos.
- (b) **Dependente do estado:** Em alguns casos, o sinal $\sigma(t)$ pode depender também do estado do sistema $x(t)$, ou seja, a dinâmica do sistema pode ser alterada em função do valor atual do estado $x(t)$. Isso implica que o comportamento do sistema pode mudar dependendo de sua condição ou contexto, levando a uma escolha dinâmica do regime de operação. Por exemplo, se $x(t)$ estiver em uma região específica do espaço de estados, o sistema pode seguir uma dinâmica diferente em relação a quando $x(t)$ está em outra região. Esse tipo de chaveamento pode ser usado em sistemas em que a operação do sistema depende de certos limiares ou condições de operação, como em sistemas de controle adaptativo ou híbridos.
- (c) **Com memória:** Em algumas situações, o sinal de chaveamento $\sigma(t)$ pode ter memória, ou seja, o valor de $\sigma(t)$ para o instante t pode depender de seu valor em instantes anteriores. Isso significa que o

sistema pode ter uma dependência de estados passados, e a decisão sobre qual dinâmica seguir não é apenas uma função do tempo atual ou do estado atual, mas também dos estados anteriores.

A memória pode ser representada matematicamente como uma relação recursiva, como uma função $\sigma(t)$ dependente de $\sigma(\tau)$, $\tau < t$, ou até mesmo como um conjunto de informações que descrevem o histórico de escolhas do sistema.

- (d) **Controlado ou Autônomo:** O sinal $\sigma(t)$ é escolhido ou modificado pelo projetista do sistema, possivelmente com base em uma estratégia de controle. Em sistemas controlados, o chaveamento pode ser ajustado em tempo real para otimizar a operação do sistema. O controle pode ser feito por um controlador que determina qual dinâmica $f_k(x)$ o sistema deve seguir em função de variáveis de entrada, condições do sistema ou objetivos de desempenho.

O sinal $\sigma(t)$ será autônomo se for determinado por uma condição natural ou uma dinâmica inerente ao sistema, sem intervenção externa. Isso pode ocorrer em sistemas biológicos, naturais ou em sistemas em que o comportamento do chaveamento é ditado por parâmetros internos ou por interações naturais no sistema. Nesse caso, $\sigma(t)$ pode ser governado por leis físicas ou condições ambientais.

O sinal de chaveamento $\sigma(t)$ em sistemas chaveados é uma ferramenta crucial que determina qual dinâmica o sistema segue em determinado momento. Ele pode ser dependente do tempo, do estado ou até mesmo ter memória. Além disso, pode ser controlado por um projetista ou ser autônomo, dependendo da aplicação. O sinal de chaveamento, portanto, modela a alternância entre dinâmicas de maneira flexível, e sua escolha e análise dependem do tipo de problema, das características do sistema e dos objetivos de controle.

1.2 Motivação para o estudo

A modelagem de sistemas chaveados é um campo de estudo complexo que busca representar com precisão sistemas cujas operações alternam entre diferentes modos, dependendo de condições específicas. Esses sistemas estão presentes em diversas áreas de engenharia, como eletrônica de potência, controle de processos, telecomunicações e robótica, onde a capacidade de alternar entre diferentes estados operacionais é fundamental para atender a variados requisitos de desempenho. No entanto, esse comportamento chaveado gera desafios significativos na modelagem, pois demanda que os modelos sejam capazes de capturar transições dinâmicas rápidas e efeitos não lineares.

1.2.1 Desafios na modelagem de sistemas chaveados

Uma das principais dificuldades na modelagem de sistemas chaveados está na natureza intrinsecamente não linear das transições dinâmicas. Quando um sistema alterna de um modo de operação para outro, como em conversores de potência, ocorrem mudanças abruptas que afetam diretamente variáveis como tensão, corrente e outras grandezas relevantes. Essa não linearidade introduz complexidade adicional, dificultando a análise precisa do comportamento do sistema ao longo do tempo^[8]. Modelos lineares tradicionais, que facilitam as análises matemáticas e simulações, geralmente não são capazes de capturar essas mudanças abruptas com precisão, levando a resultados imprecisos em muitas aplicações práticas.

Outro desafio significativo é o fenômeno de dinâmicas múltiplas em sistemas chaveados. Diferentes modos de operação podem apresentar dinâmicas distintas, e a transição entre esses modos pode gerar efeitos de acoplamento que influenciam o comportamento geral do sistema. Em sistemas complexos, o número de modos pode ser grande, e a frequência das comutações pode ser alta, tornando a modelagem ainda mais desafiadora. Em sistemas de controle, por exemplo, o controlador deve ser capaz de responder rapidamente a mudanças de estado e garantir a estabilidade, o que exige uma modelagem detalhada para prever o impacto de cada transição^[9]. No entanto, representar adequadamente todas as possíveis transições e suas respectivas

dinâmicas em um único modelo é um desafio, tanto em termos computacionais quanto de precisão, resultando na necessidade de simplificações que podem comprometer a qualidade da modelagem.

Adicionalmente, a transição entre estados também pode ser sensível a perturbações, e falhas na modelagem dessa sensibilidade podem levar a projeções de comportamento inconsistentes com o sistema real. Por exemplo, em um sistema chaveado de controle de motores, mudanças de carga podem alterar drasticamente o modo de operação^[10], e a falta de uma modelagem adequada para esses cenários pode resultar em falhas operacionais ou degradação do desempenho.

1.2.2 Limitações dos modelos tradicionais

Na modelagem de sistemas chaveados, os métodos tradicionais frequentemente usados, como o modelo médio e o modelo de pequenos sinais, apresentam limitações significativas^[11]. Esses modelos foram desenvolvidos para simplificar a análise e otimização de sistemas não lineares, especialmente em casos onde os sistemas têm comportamento predominantemente linear ou variações de baixa amplitude em regime. No entanto, em sistemas chaveados, que podem ser caracterizados por transições rápidas entre estados de operação e por dinâmicas não lineares complexas, esses métodos tradicionais podem falhar em capturar o comportamento real, levando a resultados que, muitas vezes, são insuficientes para garantir um controle e desempenho precisos.

O modelo médio, um dos métodos mais utilizados, aproxima o comportamento dinâmico do sistema chaveado ao calcular uma média das variáveis ao longo de um período de chaveamento^[12]. Esta técnica permite simplificar a análise, fornecendo uma visão geral do sistema sem considerar o comportamento exato de cada estado chaveado. Embora essa abordagem seja útil para reduzir a complexidade e facilitar a análise em sistemas que operam com mudanças mais suaves, ela não é capaz de representar adequadamente fenômenos críticos que ocorrem em sistemas chaveados, o que pode comprometer a precisão do controle e da estabilidade do sistema^[12, 13].

O modelo de pequenos sinais, outra técnica comum, também apresenta limitações ao lidar com sistemas chaveados. Este modelo assume que o sistema opera em torno de um ponto de operação estável e lineariza o comportamento do sistema próximo a esse ponto. Ele é eficiente para prever a resposta do sistema a pequenas perturbações^[12]. Em sistemas chaveados em que as variações são rápidas e não lineares, o modelo de pequenos sinais falha em representar o comportamento real, pois não consegue capturar as transições súbitas e o impacto de grandes perturbações^[14]. Isso é particularmente problemático em aplicações como a eletrônica de potência, nas quais as transições entre estados de condução e bloqueio das chaves alteram significativamente a dinâmica do sistema, exigindo uma modelagem mais robusta que considere esses efeitos.

Além disso, os modelos tradicionais geralmente dependem de suposições simplificadoras que desconsideram características importantes dos sistemas chaveados. Por exemplo, para reduzir a complexidade, esses modelos frequentemente desconsideram a não linearidade intrínseca do sistema, a interação entre diferentes modos de operação e o acoplamento entre variáveis que se torna mais evidente em sistemas chaveados. Em muitos casos, esses modelos ignoram o impacto de parâmetros que variam ao longo do tempo, como a resistência interna dos componentes e efeitos parasitas, que afetam o desempenho do sistema de forma significativa, especialmente em regimes de alta frequência^[15]. Essas simplificações podem resultar em erros consideráveis na modelagem, levando a projeções que subestimam ou superestimam o comportamento do sistema, o que compromete a confiabilidade das análises.

Outro fator limitante dos métodos tradicionais é a dificuldade de capturar fenômenos dinâmicos de transição, como *chattering* e oscilações transitórias. Como o modelo médio suaviza o comportamento do sistema ao longo de um ciclo e o modelo de pequenos sinais ignora grandes perturbações, ambos falham em representar oscilações que ocorrem nas mudanças de estado. Em controladores de chaveamento, por exemplo, o fenômeno de *chattering* ocorre quando há alternâncias repetitivas e rápidas entre estados, que

os modelos tradicionais podem não conseguem capturar de forma precisa^[16]. Isso pode causar dificuldades na implementação de controles e aumentar o desgaste dos componentes, especialmente em sistemas com chaveamento frequente.

Essas limitações dos modelos tradicionais tornam evidente a necessidade de técnicas de modelagem mais avançadas para sistemas chaveados. Com a evolução das tecnologias e o aumento da complexidade dos sistemas, tornou-se essencial explorar métodos que sejam capazes de representar as dinâmicas rápidas e não lineares desses sistemas. Abordagens como a modelagem híbrida^[17], que combina representações contínuas e discretas, e o uso de modelos adaptativos^[18], que ajustam os parâmetros em resposta a mudanças no sistema, são algumas das técnicas que têm sido empregadas para se tentar resolver os problemas que os modelos lineares não são capazes de representar. Métodos não lineares permitem uma descrição mais precisa dos modos de operação e das transições, melhorando a precisão na previsão do comportamento do sistema.

1.3 Objetivo do trabalho

O objetivo deste trabalho é investigar e analisar a modelagem de sistemas chaveados utilizando equações diferenciais e integrais generalizadas. Dado o comportamento dinâmico e complexo dos sistemas chaveados, busca-se desenvolver uma abordagem de modelagem que supere as limitações dos métodos tradicionais, como o modelo médio e o modelo de pequenos sinais.

Este estudo visa explorar a capacidade dessas técnicas avançadas para capturar de forma precisa as transições abruptas e as dinâmicas não lineares dos estados do sistema, sem depender de suposições simplificadoras e linearizações. Especificamente, o trabalho pretende:

1. Apresentar os modelos existentes de sistemas chaveados, abordando as limitações associadas ao uso de modelos lineares para representar sistemas não lineares e dinâmicos.
2. Aplicar técnicas de equações diferenciais impulsivas e integrais para descrever o comportamento de sistemas chaveados, investigando como essas ferramentas matemáticas podem melhorar a previsão de respostas transitórias e de regime permanente.
3. Validar os modelos propostos através de simulações com foco em aplicações práticas, como o controle de um conversores Boost, motor CC e análise de um sistema elétrico de potência, verificando a capacidade dos novos modelos em descrever o comportamento real dos sistemas chaveados sob diferentes condições operacionais.

Ao alcançar esses objetivos, o trabalho pretende contribuir para o desenvolvimento de métodos mais robustos de análise e controle de sistemas chaveados, oferecendo uma base teórica sólida para futuras aplicações em engenharia elétrica, especialmente em contextos que exigem alta precisão e eficiência energética.

1.4 Estrutura do trabalho

Esta monografia está organizada em cinco capítulos, cada um abordando aspectos específicos relacionados à análise e modelagem de sistemas chaveados via equações diferenciais e integrais generalizadas.

- **Capítulo 1 - Introdução.** Neste capítulo, são apresentados o contexto e a motivação para o estudo dos sistemas chaveados, destacando sua relevância em algumas das aplicações da engenharia elétrica. Além disso, são definidos os objetivos gerais e específicos do trabalho, bem como suas contribuições esperadas para a área de estudo.

- **Capítulo 2 - Sistemas Chaveados.** Este capítulo fornece uma revisão detalhada dos conceitos fundamentais dos sistemas chaveados, abordando sua caracterização e principais aplicações. São apresentados os métodos tradicionais de modelagem, como o modelo médio e o de pequenos sinais, além de uma discussão sobre suas limitações.
- **Capítulo 3 - Equações diferenciais impulsivas.** Neste capítulo, é descrita a metodologia utilizada para a modelagem de sistemas chaveados, utilizando equações diferenciais e integrais generalizadas. São apresentadas as equações matemáticas desenvolvidas e os passos adotados para formular modelos precisos que capturam as dinâmicas de sistemas chaveados.
- **Capítulo 4 - Aplicações.** Este capítulo apresenta as simulações realizadas para validar os modelos desenvolvidos. São analisados os resultados obtidos, demonstrando o desempenho dos modelos obtidos através de equações diferenciais impulsivas. Através de gráficos e análises, são demonstradas as vantagens da abordagem proposta em relação à precisão do comportamento dinâmico dos sistemas.
- **Capítulo 5 - Conclusão** O último capítulo resume as principais conclusões do estudo, destacando as contribuições do trabalho para a área de sistemas chaveados.

A estrutura do trabalho foi planejada para guiar o leitor desde os conceitos fundamentais até a análise prática e teórica dos modelos propostos, proporcionando uma compreensão abrangente da modelagem e análise de sistemas chaveados na engenharia elétrica. Além disso, os Apêndices contêm informações mais detalhadas acerca das ferramentas matemáticas utilizadas no Capítulo 3, como as definições das funções regradas e integral de Henstock-Kurzweil-Stieltjes.

2 SISTEMAS CHAVEADOS

Por ser o conteúdo base desse texto, este capítulo se dedica à explicação do que são e como funcionam os sistemas chaveados. Primeiramente, noções básicas, como definições e abordagens adotadas, serão apresentadas para contextualizar o leitor acerca do assunto. Em sequência, serão apresentados os conceitos gerais dos conversores CC-CC (Corrente Contínua para Corrente Contínua), que formam uma classe particular de sistemas chaveados bastante comum na Engenharia Elétrica.

2.1 Noções básicas

Definição 2.1.1 (Sistemas chaveados^[5]). *A representação em espaço de estados de um sistema chaveado é dada por*

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t), u(t), d(t), t)$$

ou, sem perda de generalidade, por

$$\dot{x} = f_{\sigma(t)}(x, u, d, t),$$

com

- $f_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sendo uma família de operadores, $k \in \mathcal{J} = \{1, 2, \dots, q\}$;
- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o **estado** do sistema;
- $\sigma : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{J}$ o **sinal de chaveamento**;
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ uma **entrada de controle** e
- $d(t) \in \mathbb{R}^p$ é um **sinal externo** ao sistema.

Para sistemas autônomos, isto é, sistemas que não dependem explicitamente da variável independente t , representa-se um sistema chaveado simplesmente por

$$\dot{x} = f_{\sigma(t)}(x, u, d).$$

De forma geral, o sinal de chaveamento é escrito como

$$\sigma(t) = \psi(x(t), \sigma(t^-), t) \tag{2.1}$$

para uma certa **lógica de chaveamento** $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathcal{J} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{J}$. Cada sistema

$$\dot{x} = f_k(x, u, d, t)$$

é chamado de **subsistema** ou **modo** de operação do sistema chaveado. Já os instantes t de descontinuidade de f_k , para $k \in \mathcal{J}$, são chamados de **instantes de chaveamento**.

O sinal de chaveamento $\sigma(t)$ é quem dita qual dos subsistemas f_k estará ativo entre os instantes de chaveamento. Como apresentado em (2.1), o sinal de chaveamento pode depender do estado, do tempo e até mesmo de seu valor anterior; porém, por simplicidade, vamos apenas denotar o sinal de chaveamento por $\sigma(t)$.

O sinal externo $d(t)$, normalmente um distúrbio presente na planta (sistema), é algo que foge do escopo do texto e, por isso, será desconsiderado.

Com respeito à entrada de controle $u(t)$, ela pode ser descrita unicamente como função do tempo $u = \lambda(t)$, mas também pode ser considerada como função do estado $u = \lambda(x)$ (quando o controle envolve realimentação de estado, por exemplo), ou ainda, pode ser função de ambos os casos anteriores, $u = \lambda(x, t)$,

ou sequer estar presente ($u = 0$). Dito isso, é bastante vantajoso trabalharmos apenas com os casos em que $u = \lambda(x)$ ou $u = 0$, pois, assim, podemos considerar f independente de u . Além disso, por simplicidade, serão considerados, apenas, os sistemas autônomos, pois as discussões feitas posteriormente podem, a grosso modo, ser estendidas aos sistemas não-autônomos.

Sendo assim, o restante do texto será, a menos que se diga o contrário, focado apenas nos sistemas chaveados da forma

$$\dot{x} = f_{\sigma(t)}(x).$$

O exemplo a seguir, elaborado pelo autor, mostra como se resolve um sistema chaveado e, a partir dele, algumas características básicas de tais sistemas serão discutidas.

Exemplo 2. Dado o sistema chaveado $\dot{x} = f_{\sigma(t)}(x)$, $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \{1, 2\}$, com

$$f_1(x) = 0 \quad \text{e} \quad f_2(x) = -x, \quad (2.2)$$

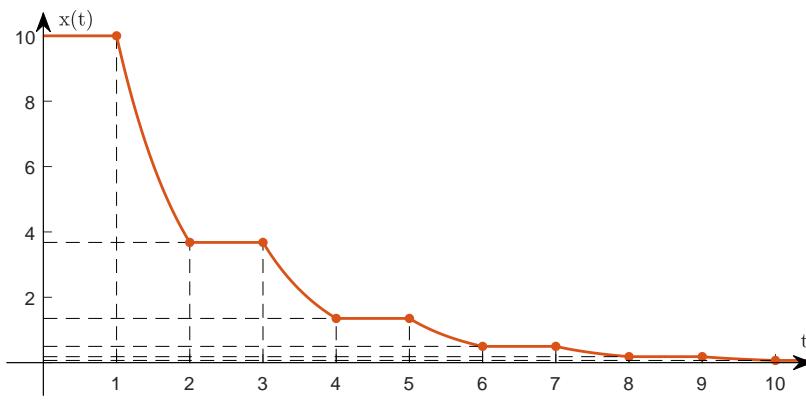
considere que a condição inicial do sistema valha $x(0) = 10$ e que o sinal de chaveamento seja dado por

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t < 1 \\ 2, & \text{se } 1 \leq t < 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \sigma(t+2) = \sigma(t). \quad (2.3)$$

Pela definição de $\sigma(t)$, o primeiro modo de operação do sistema é dado por f_1 . Logo, como a solução de $\dot{x} = 0$ é dada por $c = \text{cte}$, pela condição inicial do sistema, segue que $x(t) = 10$, enquanto o subsistema f_1 continuar ativo. No instante $t_1 = 1$, por (2.3), ocorre o chaveamento e o modo de operação do sistema passa a ser o f_2 . Com isso, o estado do sistema até o próximo instante de chaveamento ($t_2 = 2$) é dado pela solução de $\dot{x} = -x$ nas condições do instante t_1 , isto é,

$$\begin{cases} \dot{x} = -x, & 1 < t \leq 2. \\ x(1) = 10; \end{cases}$$

Figura 2 – Trajetória de $x(t)$, com condição inicial $x(0) = 10$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A obtenção da solução da equação acima é bem simples e o leitor não deve ter dificuldade em obter a expressão

$$x(t) = 10e^{-t+1} \quad \text{para} \quad 1 < t \leq 2.$$

Já no instante de chaveamento $t_2 = 2$, o sistema volta para o modo f_1 e, então, o estado passa a ser dado pela solução de

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, & 2 < t \leq 3, \\ x(2) = 10e^{-1}; \end{cases}$$

que vale $x(t) = 10e^{-1}$. No instante de chaveamento $t_3 = 3$, o sistema volta para o modo f_1 e esse ciclo se repete infinitamente (ver Figura 2).

Perceba que a resolução de um sistema chaveado baseia-se na solução das infinitas equações diferenciais

$$\dot{x} = f_k(x), \quad k \in \{1, \dots, q\}, \quad t \in (t_j, t_j + 1],$$

com condição inicial $x_{t_j} = x(t_j)$. No caso em que os subsistemas são lineares e invariantes no tempo (**LTI**, na sigla em inglês), a resolução fica bem mais simples, pois a linearidade nos permite encontrar uma solução de forma relativamente fácil (utilizando os métodos de resolução no tempo ou frequência estudados em Cálculo) e a invariância no tempo nos permite utilizar a solução de $\dot{x} = f_k(x)$ para $t \in \mathbb{R}_+$, com uma condição inicial arbitrária $x_k(0)$, para encontrar a solução de $\dot{x} = f_k(x)$ para $t \in (t_j, t_j + 1]$, com condição inicial $x(t_j)$. Em outras palavras, se o sistema chaveado for formado por q subsistemas LTI, precisaremos resolver apenas q equações diferenciais, ao invés de infinitas.

Como forma de recordação^[19], considere

- $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador que representa um sistema;
- $u_1(t), u_2(t) \in \mathbb{R}^n$ sinais de entrada e
- $y_1(t) = T(u_1(t)), y_2(t) = T(u_2(t)) \in \mathbb{R}^n$ sinais de saída do sistema T .

Então um sistema será dito **linear**, se

$$T(u_1(t) + u_2(t)) = T(u_1(t)) + T(u_2(t)),$$

e será dito **invariante no tempo**, se

$$T(u_1(t)) = y_1(t) \quad \text{implicar em} \quad T(u_1(t + t_0)) = y_1(t + t_0)$$

para qualquer $t_0 \in \mathbb{R}$.

Já que todo sistema da forma

$$T(x(t)) = \beta_n \frac{d^n}{dt^n} x(t) + \dots + \beta_1 \frac{d}{dt} x(t)$$

é LTI^[19], os subsistemas representados por (2.2) são LTI. Logo, a solução do sistema chaveado descrito pelos modos (2.2) se resume ao cálculo das soluções dos sistemas

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, & t > 0 \\ x_1(0) = \alpha, \end{cases} \tag{2.4}$$

e

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -x_2, & t > 0. \\ x_2(0) = \beta, \end{cases} \tag{2.5}$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Não é difícil concluir que $x_1(t) = x_1(0)$, $t > 0$, é a solução de (2.4), enquanto que $x_2(t) = x_2(0)e^{-t}$, $t > 0$, é a solução de (2.5). Portanto, se o sistema chaveado estiver no modo f_k , $k \in \{1, 2\}$, em

$t \in (t_j, t_{j+1}]$, o estado do sistema será descrito por $x(t) = x_k(t - t_j)$ pela invariância no tempo, sendo a condição inicial $x_k(0)$ substituída por $x(t_j)$, isso é,

$$x(t) = \begin{cases} x(t_j), & \text{se } \sigma(t) = 1 \text{ em } (t_j, t_{j+1}]; \\ x(t_j)e^{t_j-t}, & \text{se } \sigma(t) = 2 \text{ em } (t_j, t_{j+1}]; \end{cases} \quad t > 0, \quad (2.6)$$

em que $t_j = 0, 1, 2, \dots$ e $x(0) = x_0$.

Alguns pontos já podem ser levantados a partir desse simples exemplo. Primeiramente, o estado x do sistema é uma função contínua apesar do chaveamento, e isso ocorre pela transposição do valor final de um modo de operação para o valor inicial do subsequente. Tal fenômeno é uma característica importante dos sistemas chaveados, haja vista que sistemas físicos (sistemas que descrevem comportamentos que acontecem no mundo real) possuem o estado contínuo no tempo intrinsecamente. Entretanto, note que sempre nos referimos à solução $x(t)$ dentro de um intervalo $(t_j, t_{j+1}]$, que é aberto à esquerda e fechado à direita, o que essencialmente falando (pensando como engenheiro) não faz diferença, já que o estado é contínuo. Tal escolha se dá por conta de ferramentas (como o Corolário 3.6.1) utilizadas posteriormente que assumem a continuidade à esquerda.

Outro ponto a se destacar é o fato de que os instantes de chaveamento $t_j \in \{1, 2, \dots\}$ não influenciam a expressão geral da solução do sistema chaveado, pelo menos quando ele é composto somente por subsistemas LTI. Com isso, a inserção de controle em tais sistemas (que nesse caso se resume à escolha da lei $\sigma(t)$ que determina os instantes de chaveamento) não inutiliza a solução do sistema chaveado sem controle. O controle apenas redefine os valores dos instante de chaveamento.

Uma última observação a ser abordada aqui é com relação à solução do sistema. Veja em (2.6) que, para sabermos o valor de x em um determinado instante de tempo t_i , não basta somente substituir o valor de t_i na expressão e calculá-la, pois existe uma parcela na expressão geral que depende do último instante de chaveamento, isso é, $x(t_j)$. Do mesmo modo, para descobrirmos o valor de $x(t_j)$, precisaremos do valor de x no instante de chaveamento anterior a t_j , e esse processo se repete até chegarmos à condição inicial $x(0)$. Isso evidencia o quanto os instantes de chaveamento influenciam a resposta final e o quanto dispendioso é obter, manualmente, o valor de x em um determinado instante t_i .

O exemplo acima foi dado como demonstrativo e não possui nenhum significado prático. A partir de agora, iremos utilizar os conversores CC-CC como nosso sistema chaveado, já que tais circuitos são básicos no curso de Engenharia Elétrica e possuem várias aplicações.

2.2 Conversores CC-CC

Um conversor CC-CC (CC: Corrente Contínua) pode ser considerado o equivalente CC de um transformador CA (Corrente Alternada) com uma relação de espiras continuamente variável. Assim como o transformador, ele pode ser usado para baixar ou elevar uma fonte de tensão CC.

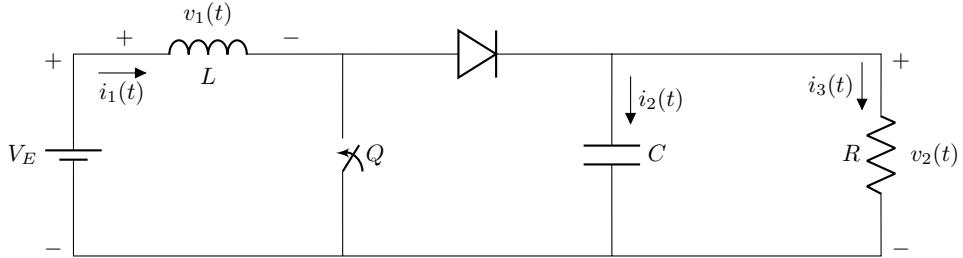
Os conversores CC-CC são amplamente utilizados no controle de tração de motores em automóveis elétricos, guindastes portuários, empilhadeiras e transportadores de mineração. Eles propiciam um controle uniforme (suave) de aceleração, alta eficiência e uma resposta dinâmica rápida. Os conversores CC-CC podem ser utilizados em frenagem regenerativa de motores CC para devolver energia à fonte de alimentação. Os conversores CC-CC são utilizados em reguladores de tensão CC, e também em conjunto com um indutor para gerar uma fonte de corrente CC, em especial para os inversores de fonte de corrente. Os conversores CC-CC também estão presentes na conversão de energia na área da tecnologia de energia renovável^[11].

A seguir, vamos descrever o conversor Boost, um tipo de conversor CC-CC utilizado para elevar a tensão de entrada para um nível de tensão de saída mais alto.

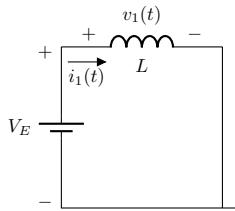
2.2.1 Conversor Boost

Um conversor CC-CC pode ser utilizado para elevar uma tensão CC. Uma estrutura típica de tal conversor, chamado de conversor Boost, é apresentada na Figura 3a. Quando a chave Q é fechada e permanece assim por um tempo T_1 , a corrente no indutor L cresce, e a energia é armazenada nele. Se a chave for aberta e permanecer nessa posição por um tempo T_2 , a energia armazenada no indutor será transferida para a carga^[11].

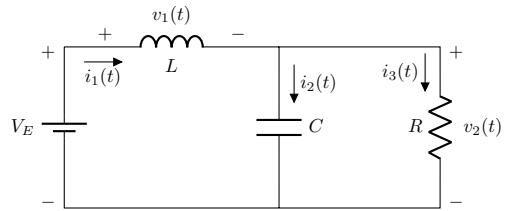
Figura 3 – Circuito do conversor Boost.



(a) Diagrama do circuito.



(b) Modo 1.



(c) Modo 2.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A ideia por trás do funcionamento dos conversores CC-CC é simples: a fonte transfere energia para um (ou mais) elemento armazensor de energia (indutor ou capacitor) no modo de operação 1, e essa energia é transferida para um outro elemento(s) armazensor(es) de energia no modo 2. Após n modos de operação, tal energia é entregue para a carga.

Olhando para o conversor Boost por essa perspectiva, no modo 1 (Figura 3b) a fonte transfere energia para o indutor, enquanto o capacitor fornece energia para a carga, e, no modo 2 (Figura 3c), a energia do indutor é entregue para o capacitor e para a carga, que nesse caso é um resistor. O papel do capacitor, teoricamente, é de absorver toda oscilação na tensão sobre a carga, para que somente o valor médio seja entregue na saída. Na prática, o capacitor é o responsável por fornecer energia para a carga enquanto o indutor estiver recebendo energia da fonte (modo 1), o que implica na diminuição da tensão sobre o capacitor e a carga. Se o capacitor for grande o suficiente, isto é, se o valor da capacitância for grande, tal queda será bem pequena, quando comparada com o valor médio da tensão sobre a carga. Por isso, dizemos que a tensão de saída é idealmente constante. Daí vem o nome conversor CC-CC.

Para conseguirmos entender um pouco melhor como são as formas de onda do circuito Boost, vamos analisá-lo através de seu modelo médio.

2.2.2 Modelo médio

O modelo médio de um conversor CC-CC fornece as principais informações sobre o funcionamento do circuito de forma simples e rápida.

A análise via modelo médio se baseia em duas suposições:

- (S1) Circuito em regime permanente;
- (S2) Tensão nos capacitores e corrente dos indutores são constantes.

A segunda suposição está levando em conta que, em regime, as variações sobre as variáveis de estado do circuito (tensão sobre capacitores e corrente em indutores) são muito pequenas quando comparadas com o valor médio. Para que (S2) seja factível, precisamos de (S1). Com isso, a obtenção do modelo médio do conversor se resume ao cálculo das tensões sobre os indutores e correntes nos capacitores em cada um dos modos de operação, como mostrado no exemplo a seguir.

Exemplo 3 (Conversor Boost). *O circuito do conversor Boost é apresentado na Figura 3a, cujo primeiro modo de operação é dado pela Figura 3b. Dadas as **Leis de Kirchhoff das Correntes** (LKC) e **das Tensões** (LKT), que dizem que^[20]*

(LKC) A soma algébrica das correntes que entram em um nó é igual a zero;

(LKT) A soma algébrica das tensões ao longo de qualquer percurso fechado é zero,

é possível concluir que a tensão $v_1(t)$ sobre o indutor e a corrente $i_2(t)$ que passa pelo capacitor no modo 1 valem

$$v_1(t) = V_E \quad \text{e} \quad i_2(t) = -i_3 = -\frac{v_2(t)}{R}. \quad (2.7)$$

Por outro lado, por LKC e LKT, a tensão $v_1(t)$ sobre o indutor e a corrente $i_2(t)$ que passa pelo capacitor no modo 2 são dadas por

$$v_1(t) = V_E - v_2(t) \quad \text{e} \quad i_2(t) = i_1(t) - i_3(t) = i_1(t) - \frac{v_2(t)}{R}. \quad (2.8)$$

As equações (2.7) e (2.8) são tudo o que precisávamos encontrar. A partir deste ponto, basta realizarmos manipulações algébricas sobre tais equações para obtermos todas as informações referentes ao circuito. A primeira coisa a se fazer é aplicar (S2) em cada uma dessas equações para chegarmos em

$$\begin{array}{ll} \text{Modo 1} & \left[\begin{array}{l} v_1(t) = V_E; \\ i_2(t) = -\frac{V_2}{R}, \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left. \begin{array}{l} v_1(t) = V_E - V_2; \\ i_2(t) = I_1 - \frac{V_2}{R}, \end{array} \right] \\ & \text{Modo 2} \end{array} \quad (2.9)$$

sendo que

- I_1 é o valor constante da corrente que passa pelo indutor e
- V_2 é o valor constante da tensão sobre o capacitor.

Sabendo que o valor médio de uma função $y(t)$, não necessariamente periódica, é

$$\frac{1}{T} \int_a^b y(t) dt, \quad (2.10)$$

com $T = a - b$, por (S1) e pelo princípio da conservação da energia, podemos afirmar que tensão média sobre o indutor é nula, ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{T_s} v_1(t) dt = \int_0^{T_1} V_E dt + \int_{T_1}^{T_s} (V_E - V_2) dt \\ &= V_E t_1 + (V_E - V_2)(T_s - T_1) = V_E T_1 + (V_E - V_2) T_2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

sendo

- T_s o período de chaveamento;
- T_1 o tempo em que o circuito permanece no modo 1;
- $T_2 = T_s - T_1$ o tempo em que o circuito permanece no modo 2.

Observamos, aqui, que considerar que T_1 e T_2 variam ao longo do tempo é particularmente desinteressante no momento. Então, vamos tomá-los fixos por enquanto.

Defina a razão cíclica D ou, do inglês, *duty cycle*, por

$$D_1 = \frac{T_1}{T_s}, \quad \text{de modo que} \quad D_2 = 1 - D_1 = \frac{T_2}{T_s},$$

para que (2.11) seja reescrita como

$$\begin{aligned} 0 &= V_E T_1 + (V_E - V_2) T_2 = V_E D_1 T_s + (V_E - V_2) D_2 T_s \\ &= V_E (D_1 + D_2) T_s - V_2 D_2 T_s = V_E T_s - V_2 D_2 T_s, \end{aligned}$$

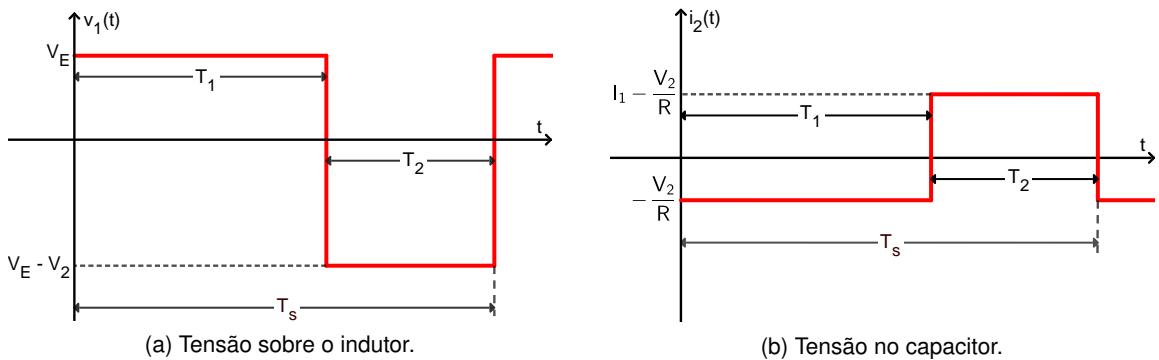
ou seja,

$$V_2 = \frac{V_E}{D_2} = \frac{V_E}{1 - D_1}. \quad (2.12)$$

A expressão (2.12) nos fornece uma relação entre a tensão de entrada e a tensão de saída do conversor. Como $0 \leq D_1, D_2 \leq 1$, por (2.12), segue que $V_2 \geq V_E > 0$ e o conversor é, então, um elevador de tensão. Disso vem o nome conversor Boost. Se paramos para analisar, já sabíamos que a tensão de saída deveria ser maior que a da entrada pelo princípio da conservação da energia, já que $v_1(t) = V_E > 0$ no modo 1. Sendo assim, necessariamente $v_1(t) = V_E - V_2 < 0$ no modo 2 para que seja possível que o valor médio de $v_1(t)$ seja 0.

De forma análoga, segue pelo princípio da conservação da energia, que a corrente média que passa pelo capacitor vale 0 e, como $i_2(t) = -V_2/R < 0$, então, necessariamente, $i_2(t) = I_1 - V_2/R > 0$, o que também implica que $I_1 > 0$ (se não fosse possível obter tal conclusão, bastaria fazer o cálculo do valor médio de $i_2(t)$ de forma análoga ao que foi feito acima para $v_1(t)$). Tais conclusões, juntamente com (2.9), nos permitem esboçar os gráficos de $v_1(t)$ e $i_2(t)$ (ver Figura 4).

Figura 4 – Formas de onda do conversor Boost.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com relação aos gráficos referentes à corrente no indutor e à tensão no capacitor, poderíamos apenas nos valer de (S2) e desenhar uma reta em cada um dos casos. Entretanto, (S2) é uma idealização do comportamento do circuito que, na prática, não acontece. Existe, porém, uma forma de esboçarmos os referidos gráficos de uma forma mais fidedigna mas, ainda assim, aproximada. Basta saber que a tensão $v_L(t)$ sobre um indutor de indutância L e a corrente $i_C(t)$ que passa por um capacitor de capacidade C são dadas, respectivamente, por

$$v_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t) \quad \text{e} \quad i_C(t) = C \frac{d}{dt} v_C(t), \quad (2.13)$$

com

- $i_L(t)$ sendo a corrente que passa por tal indutor e
- $v_C(t)$ a tensão sobre o capacitor^[20].

Substituindo-se (2.13) em (2.9), temos

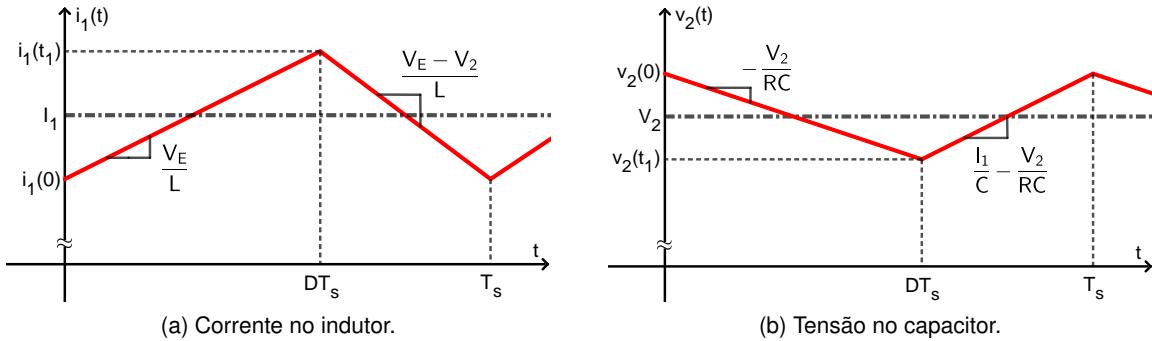
$$\text{Modo 1} \begin{cases} L \frac{d}{dt} i_1(t) = V_E; \\ C \frac{d}{dt} v_2(t) = -\frac{V_2}{R}, \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{Modo 2} \begin{cases} L \frac{d}{dt} i_1(t) = V_E - V_2; \\ C \frac{d}{dt} v_2(t) = I_1 - \frac{V_2}{R}, \end{cases}$$

que, ao serem integradas, são dada por

$$\text{Modo 1} \begin{cases} i_1(t) = \frac{V_E}{L}t + i_1(0); \\ v_2(t) = -\frac{V_2}{RC}t + v_2(0), \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{Modo 2} \begin{cases} i_1(t) = \frac{V_E - V_2}{L}t + i_1(t_1); \\ v_2(t) = \left(\frac{I_1}{C} - \frac{V_2}{RC}\right)t + v_2(t_1). \end{cases} \quad (2.14)$$

A partir de (2.14) e das conclusões obtidas anteriormente ($V_2 > V_E > 0$ e $I_1 > V_2/R > 0$), é possível esboçar os gráficos de $i_1(t)$ e $v_2(t)$ (ver Figura 5).

Figura 5 – Formas de onda do conversor Boost.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Existe uma informação quanto aos gráficos e suposições feitas que não foi mencionada até então: para que as formas de onda das Figuras 4 e 5 sejam válidas, o circuito deve estar operando em **modo de condução contínua**, isto é, a ondulação na corrente dos indutores e a ondulação na tensão sobre os capacitores deve ser pequena o suficiente para que elas não fiquem em zero por mais que um intervalo degenerado. Caso contrário, um ou mais modos de operação apareceriam no circuito e o circuito estaria operando em **modo de condução descontínua**. O modo de condução descontínua normalmente ocorre por conta de uma grande ondulação na corrente de algum indutor de um conversor operando com carga leve e contendo chaves unidirecionais de corrente. Também verifica-se tal modo de operação quando o conversor está operando com a carga removida. Em particular, existem certas topologias de conversores que operam no modo de condução descontínua propositalmente para todas as cargas^[21].

Se supusermos que o circuito opera em modo de condução descontínua, mais modos de operação deverão ser levados em conta, o que só nos dará mais trabalho. No caso do conversor Boost, deseja-se que ele opere em modo de condução contínua, por isso podemos desconsiderar os casos em que o circuito opera no modo descontínuo.

O modelo médio do conversor nos permite entender o seu funcionamento de forma geral e, além disso, também nos permite encontrar os parâmetros de desempenho e definir os valores dos componentes do circuito, dadas algumas especificações. O cálculo dos valores dos componentes não será apresentado nesse texto, mas pode ser visto em^[11, 21]. Apesar desses benefícios proporcionados pelo modelo médio, ele é

insuficiente se desejamos aplicar controle no conversor, por exemplo. Para tal, normalmente utiliza-se o modelo de pequenos sinais do conversor.

2.2.3 Modelo de pequenos sinais

O **modelo de pequenos sinais** baseia-se na substituição de (S2) por

(S2.1) Tensão nos capacitores e corrente dos indutores são valores médios.

Denote por Y^m o valor médio de uma grandeza (tensão ou corrente) $y(t)$ e por Y_1^m, Y_2^m o valor de $y(t)$, representado por grandezas médias, no modo 1 e 2 respectivamente (aqui estamos supondo apenas 2 modos de operação para ilustração). Segue, então, por (2.10) que

$$Y^m = \frac{1}{T_s} \int_a^b y(t) dt = Y_1^m \frac{T_1}{T_s} + Y_2^m \frac{T_s - T_1}{T_s} = Y_1^m \frac{T_1}{T_s} + Y_2^m \frac{T_2}{T_s}, \quad (2.15)$$

com

- T_s sendo o período de chaveamento,
- T_1 o tempo em que o circuito permanece no modo 1 e
- $T_2 = T_s - T_1$ o tempo em que o circuito permanece no modo 2.

Considerando que T_1 pode variar no intervalo $[0, T_s]$ ao longo do tempo (o que essencialmente "quebra" a periodicidade do chaveamento, mas que será relevado aqui), então o *duty cycle*

$$d_1(t) = \frac{T_1(t)}{T_s} \quad (2.16)$$

agora é uma função de t e, portanto, (2.15) se escreve como

$$Y^m = Y_1^m \frac{T_1}{T_s} + Y_2^m \frac{T_2}{T_s} = Y_1^m d_1(t) + Y_2^m d_2(t),$$

com $d_2(t) = 1 - d_1(t)$. Em particular, para o caso em que $y(t)$ é a tensão sobre um indutor ou a corrente que passa por um capacitor, segue por (2.13) que

$$\frac{d}{dt} i_L(t) = \frac{V_L^m}{L} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt} v_C(t) = \frac{I_C^m}{C},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} i_L(t) &= \frac{V_{L,1}^m}{L} d_1(t) + \frac{V_{L,2}^m}{L} d_2(t), \\ \frac{d}{dt} v_C(t) &= \frac{I_{C,1}^m}{C} d_1(t) + \frac{I_{C,2}^m}{C} d_2(t), \end{aligned} \quad (2.17)$$

em que

- V_L^m é o valor médio da tensão $v_L(t)$;
- $V_{L,1}^m$ é o valor de $v_L(t)$ no modo 1 em termos de valores médios e
- $V_{L,2}^m$ no modo 2 (o mesmo ocorre para $i_C(t)$).

Agora, adicione a seguinte hipótese

(S3) Existem oscilações nos sinais, mas elas são muito pequenas,

de modo que, em regime permanente, valham

$$\begin{aligned} i_L(t) &= I_L + \tilde{i}_L(t) \\ v_C(t) &= V_C + \tilde{v}_C(t) \\ v_E(t) &= V_E + \tilde{v}_E(t) \\ d_k(t) &= D_k + \tilde{d}_k(t), \end{aligned} \tag{2.18}$$

sendo

- I_L, V_C, V_E, D_k constantes e
- $\tilde{i}_L(t), \tilde{v}_C(t), \tilde{v}_E(t), \tilde{d}_k(t)$ pequenas oscilações em torno das constantes;

aqui $v_E(t)$ é a tensão de entrada. Substituindo (2.18) em (2.17), separando os termos constantes dos termos que variam no tempo e desprezando os produtos entre duas funções do tempo, obtém-se relações provenientes do modelo médio (através das expressões com os termos constantes) e o modelo de pequenos sinais (através dos termos variantes no tempo)^[21].

O que foi dito acima pode parecer difícil, mas é surpreendentemente simples. Resumindo:

- Calcule $v_L(t)$ e $i_C(t)$ para cada um dos modos de operação do conversor;
- Substitua $v_L(t)$ e $i_C(t)$ por (2.13);
- Multiplique as equações do modo 1 por $d_1(t)$, as do modo 2 por $d_2(t)$ e assim por diante;
- Somas as expressões de $\dot{i}_L(t)$ de todos os modos, assim como para $\dot{v}_C(t)$;
- Substitua (2.18) nas expressões resultantes;
- Separe as expressões em equações envolvendo somente termos contantes e equações contendo termos variantes no tempo e
- Nas equações contendo termos variantes no tempo, despreze os produtos entre duas ou mais funções do tempo.

Para deixar mais claro como seguir as instruções acima, o seguinte exemplo foi elaborado pelo autor.

Exemplo 4 (Conversor Boost). *Aplicando o passo a passo descrito anteriormente no conversor Boost, temos, por (2.7) e (2.8),*

$$\text{Modo 1} \left[\begin{array}{l} v_1(t) = v_E(t); \\ i_2(t) = -\frac{v_2(t)}{R}, \end{array} \right] \quad \text{e} \quad \text{Modo 2} \left[\begin{array}{l} v_1(t) = v_E(t) - v_2(t); \\ i_2(t) = i_1(t) - \frac{v_2(t)}{R}, \end{array} \right]$$

(a diferença com relação às equações (2.7) e (2.8) foi a substituição da tensão de entrada V_E por $v_E(t)$, já que agora ela pode ter pequenas oscilações). Substituindo $v_1(t)$ e $i_2(t)$ por (2.13) e multiplicando as equações do modo 1 por $d_1(t)$ e as do modo 2 por $d_2(t)$, obtém-se

$$\text{Modo 1} \left[\begin{array}{l} d_1(t) \frac{d}{dt} i_1(t) = \frac{v_E(t)}{L} d_1(t); \\ d_1(t) \frac{d}{dt} v_2(t) = -\frac{v_2(t)}{RC} d_1(t), \end{array} \right] \quad \text{e} \quad \text{Modo 2} \left[\begin{array}{l} d_2(t) \frac{d}{dt} i_1(t) = \frac{v_E(t) - v_2(t)}{L} d_2(t); \\ d_2(t) \frac{d}{dt} v_2(t) = \left(\frac{i_1(t)}{C} - \frac{v_2(t)}{RC} \right) d_2(t) \end{array} \right]$$

que, ao serem somadas, se tornam

$$(d_1(t) + d_2(t)) \frac{d}{dt} i_1(t) = \frac{v_E(t)}{L} d_1(t) - \frac{v_E(t) - v_2(t)}{L} d_2(t);$$

$$(d_1(t) + d_2(t)) \frac{d}{dt} v_2(t) = -\frac{v_2(t)}{RC} d_2(t) + \left(\frac{i_1(t)}{C} - \frac{v_2(t)}{RC} \right) d_2(t),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}i_1(t) &= \frac{v_E(t)}{L} - \frac{v_2(t)}{L}d_2(t); \\ \frac{d}{dt}v_2(t) &= \frac{i_1(t)}{C}d_2(t) - \frac{v_2(t)}{RC},\end{aligned}$$

já que $d_1(t) + d_2(t) = 1$. Então, ao substituir (2.18) nas expressões acima, chegamos em

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(I_1 + \tilde{i}_1(t)) &= \frac{V_E + \tilde{v}_E(t)}{L} - \frac{V_2 + \tilde{v}_2(t)}{L}(D_2 + \tilde{d}_2(t)); \\ \frac{d}{dt}(V_2 + \tilde{v}_2(t)) &= \frac{I_1 + \tilde{i}_1(t)}{C}(D_2 + \tilde{d}_2(t)) - \frac{V_2 + \tilde{v}_2(t)}{RC},\end{aligned}$$

que, quando separada em equações somente com termos constantes e equações contendo termos variantes no tempo, nos fornece

$$\frac{d}{dt}I_1 = 0 = \frac{V_E}{L} - \frac{V_2 D_2}{L}; \quad \frac{d}{dt}V_2 = 0 = \frac{I_1 D_2}{C} - \frac{V_2}{RC}, \quad (2.19)$$

e

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\tilde{i}_1(t) &= \frac{\tilde{v}_E(t)}{L} - \frac{V_2 \tilde{d}_2(t) + D_2 \tilde{v}_2(t) + \tilde{v}_2(t) \tilde{d}_2(t)}{L}; \\ \frac{d}{dt}\tilde{v}_2(t) &= \frac{I_1 \tilde{d}_2(t) + D_2 \tilde{i}_1(t) + \tilde{i}_1(t) \tilde{d}_2(t)}{C} - \frac{\tilde{v}_2(t)}{RC}.\end{aligned} \quad (2.20)$$

Basta, agora, desconsiderar os produtos entre funções do tempo em (2.20), baseado em (S3), para obtermos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\tilde{i}_1(t) &= \frac{\tilde{v}_E(t)}{L} - \frac{V_2 \tilde{d}_2(t) + D_2 \tilde{v}_2(t)}{L}; \\ \frac{d}{dt}\tilde{v}_2(t) &= \frac{I_1 \tilde{d}_2(t) + D_2 \tilde{i}_1(t)}{C} - \frac{\tilde{v}_2(t)}{RC},\end{aligned} \quad (2.21)$$

já que a multiplicação entre dois termos pequenos é mais pequena ainda, podendo assim ser desprezada. Por último, note que

$$d_2(t) = D_2 + \tilde{d}_2(t) = 1 - d_1(t) = 1 - D_1 - \tilde{d}_1(t) = D_2 - \tilde{d}_1(t),$$

o que implica em

$$\tilde{d}_2(t) = -\tilde{d}_1(t),$$

que, por sua vez, permite que (2.21) seja reescrita como

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\tilde{i}_1(t) &= \frac{\tilde{v}_E(t)}{L} + \frac{V_2 \tilde{d}_1(t) + D_2 \tilde{v}_2(t)}{L}; \\ \frac{d}{dt}\tilde{v}_2(t) &= -\frac{I_1 \tilde{d}_1(t) + D_2 \tilde{i}_1(t)}{C} - \frac{\tilde{v}_2(t)}{RC}.\end{aligned} \quad (2.22)$$

As equações em (2.19) nos fornecem informações que obtemos ao aplicarmos o modelo médio do conversor, como por exemplo a relação de ganho entre as tensões de entrada e saída utilizando

$$0 = \frac{V_E}{L} - \frac{V_2 D_2}{L}, \quad \text{o que implica em} \quad \frac{V_2}{V_E} = \frac{1}{D_2}$$

(compare com (2.12)). Além disso, também é possível obtermos a relação entre a corrente do indutor (corrente de entrada) e a corrente do resistor (corrente da saída) através de

$$0 = \frac{I_1 D_2}{C} - \frac{V_2}{RC} = \frac{I_1 D_2}{C} - \frac{I_3}{C}, \quad \text{o que implica em} \quad \frac{I_3}{I_1} = D_2, \quad (2.23)$$

com $I_3 = V_2/R$ sendo o valor constante da corrente que passa pelo resistor (isso também pode ser obtido pelo modelo médio, basta aplicar o princípio da conservação de energia na corrente que flui pelo capacitor, assim como foi feito para a tensão sobre o indutor para obtermos (2.12)).

Já as equações em (2.22) formam o modelo de pequenos sinais do conversor Boost. Elas são a representação linearizada em espaço de estados do conversor Boost e são tipicamente utilizadas na prototipagem de controladores no domínio da frequência. Apesar da simplicidade de sua obtenção e de sua utilidade, o modelo de pequenos sinais é ainda uma aproximação do comportamento do circuito e depende muito da veracidade de (S3) para ser uma boa aproximação. Para que tenhamos o comportamento total e completo do conversor, precisamos de sua representação completa em espaço de estados.

2.2.4 Modelo em espaço de estados

O **modelo em espaço de estados** de um conversor normalmente é dado na notação matricial^[21]

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

com

- $x(t)$: vetor de estados (corrente nos indutores e tensão sobre os capacitores);
- A : matriz de coeficientes de estado (pode variar em t);
- $u(t)$: vetor de fontes e
- B : matriz de coeficientes de fonte (pode variar em t).

Ao invés de fazermos a mudança de subsistema quando ocorre o chaveamento, como deveria ser feito de acordo com a Definição 2.1.1, nós podemos juntar todos os modos de operação do conversor em sua representação em espaço de estados através das funções

$$\alpha_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{se o modo de operação ativo for } k; \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

o que nos fornece a representação

$$\dot{x} = \alpha_1 A_1 x + \alpha_1 B_1 u + \dots + \alpha_n A_n x + \alpha_n B_n u.$$

Se cada um dos subsistemas de um conversor CC-CC for formado apenas por fontes e elementos passivos (resistores, capacitores e indutores), eles serão LTI e poderemos encontrar a resposta analítica do problema, assim como foi feito no Exemplo 2.

Exemplo 5 (Conversor Boost). A representação em espaço de estados do conversor Boost é, por (2.7), (2.8) e (2.13), da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \alpha_1(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \alpha_1(t) \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V_E + \alpha_2(t) \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \alpha_2(t) \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V_E,$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\alpha_2(t)}{L} \\ \frac{\alpha_2(t)}{C} & \frac{-1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_E}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

já que $\alpha_1(t) + \alpha_2(t) = 1$.

Quando a chave está ligada (modo 1), $\alpha_2(t) = 0$ e a representação em espaço de estados fica sendo

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_E}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

que é LTI e tem solução dada por

$$\begin{cases} i_1(t) = \frac{V_E}{L} \cdot t + i_1(0) \\ v_2(t) = v_2(0) \cdot \exp\left(\frac{-t}{RC}\right) \end{cases} \quad (2.26)$$

com $i_1(0)$ e $v_2(0)$ sendo as condições iniciais do problema. Já para o caso em que a chave está aberta (modo 2), $\alpha_2(t) = 1$ e, por (2.24), segue que

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_E}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

ou ainda,

$$\begin{cases} \dot{i}_1 = -\frac{1}{L}v_2 + \frac{V_E}{L} \end{cases} \quad (2.28a)$$

$$\begin{cases} \dot{v}_2 = \frac{1}{C}i_1 - \frac{1}{RC}v_2, \end{cases} \quad (2.28b)$$

que também é LTI.

Vamos, primeiramente, encontrar a expressão de $v_2(t)$. Derivando (2.28b) no tempo e substituindo \dot{i}_1 pela expressão em (2.28a), obtemos

$$\ddot{v}_2 = \frac{1}{C}\dot{i}_1 - \frac{1}{RC}\dot{v}_2 = \frac{1}{C}\left(-\frac{1}{L}v_2 + \frac{V_E}{L}\right) - \frac{1}{RC}\dot{v}_2,$$

ou seja,

$$\ddot{v}_2 + \frac{1}{RC}\dot{v}_2 + \frac{1}{LC}v_2 = \frac{V_E}{LC}. \quad (2.29)$$

Para resolver (2.29), vamos calcular a resposta natural $v_2^n(t)$ e a resposta forçada $v_2^f(t)$. Como recordação, a solução $x(t)$ de uma equação diferencial linear não homogênea

$$\beta_n \frac{d^n}{dt^n}x(t) + \cdots + \beta_1 \frac{d}{dt}x(t) = g(t)$$

é dada por

$$x(t) = x^n(t) + x^f(t),$$

sendo $x^n(t)$ a **resposta natural**, obtida quando $g(t) = 0$, e $x^f(t)$ a **resposta forçada**, obtida para uma escolha específica da função $g(x)$ ^[20].

Com relação ao cálculo da resposta natural $v_2^n(t)$, considere

$$\zeta = \frac{1}{2RC} \quad \text{e} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

de modo que (2.29) seja reescrita como

$$\ddot{v}_2^n + 2\zeta\dot{v}_2^n + \omega_0^2 v_2^n = 0$$

(lembre-se que o 0 do lado direito aparece porque estamos calculando a resposta natural). Quando $\zeta = \omega_0$, a solução da equação acima já é bem conhecida^[20] e vale

$$v_2^n(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\zeta t}, \quad (2.30)$$

com A_1, A_2 sendo constantes a serem determinadas através das condições iniciais do circuito.

A resposta forçada $v_2^f(t)$ é obtida ao supormos que $v_2(t) = K_1 = \text{cte}$ em (2.29) (tal escolha é feita, pois a fonte de tensão do circuito é contínua, ou ainda, o lado direito de (2.29) é uma constante). Assim, temos

$$\ddot{K}_1 + \frac{1}{RC}\dot{K}_1 + \frac{1}{LC}K_1 = \frac{1}{LC}K_1 = \frac{V_E}{LC} \quad \text{o que implica que} \quad K_1 = V_E, \quad (2.31)$$

portanto, $v_2^f(t) = K_1 = V_E$. Como $v_2(t) = v_2^n(t) + v_2^f(t)$, segue de (2.30) e (2.31) que

$$v_2(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\zeta t} + V_E. \quad (2.32)$$

A expressão de A_1 sai de (2.32) ao tomarmos $t = 0$:

$$v_2(0) = A_1 e^{-\zeta 0} + V_E = A_1, \quad \text{ou seja,} \quad A_1 = v_2(0) - V_E.$$

Para encontrarmos A_2 , derivamos (2.32), igualamos tal resultado com (2.28b) e fazemos $t = 0$,

$$\dot{v}_2(0) = -A_1\zeta + A_2 = \frac{-v_2(0)}{RC} + \frac{i_1(0)}{C}, \quad \text{o que implica que} \quad A_2 = A_1\zeta - \frac{v_2(0)}{RC} + \frac{i_1(0)}{C}.$$

Seguindo os passos acima para o cálculo de $i_1(t)$, obtém-se, para $\zeta = \omega_0$,

$$i_1(t) = (B_1 + B_2 t)e^{-\zeta t} + \frac{V_E}{R},$$

com

$$B_1 = i_1(0) - \frac{V_E}{R} \quad \text{e} \quad B_2 = B_1\zeta + \frac{V_E - v_2(0)}{L}.$$

Resumindo, dadas as condições iniciais $v_C(0)$ e $i_L(0)$, se $\zeta = \omega_0$ então:

- **Modo 1:** A representação em espaço de estados é dada por (2.26), cuja solução será

$$\begin{cases} i_1(t) = \frac{V_E}{L} \cdot t + i_1(0) \\ v_2(t) = v_2(0) \cdot \exp\left(\frac{-t}{RC}\right) \end{cases}$$

• **Modo 2:** A representação em espaço de estados é dada por (2.28), com solução

$$\begin{cases} i_1(t) = (B_1 + B_2 t)e^{-\zeta t} + \frac{V_E}{R} \\ v_2(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\zeta t} + V_E \end{cases}$$

tal que

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{2RC}, & A_1 &= v_2(0) - V_E, & A_2 &= A_1\zeta - \frac{v_2(0)}{RC} + \frac{i_1(0)}{C}, \\ B_1 &= i_1(0) - \frac{V_E}{R} & \text{e} & & B_2 &= B_1\zeta + \frac{V_E - v_2(0)}{L}. \end{aligned}$$

De forma geral, segue, de forma análoga ao Exemplo 2, que

$$i_1(t) = \begin{cases} \frac{V_E}{L}(t - t_j) + i_1(t_j) & \text{se } d_1(t) = 1 \text{ em } (t_j, t_{j+1}); \\ [B_1(t_j) + B_2(t_j)(t - t_j)]e^{-\zeta(t-t_j)} + \frac{V_E}{R} & \text{se } d_1(t) = 0 \text{ em } (t_j, t_{j+1}), \end{cases} \quad t > 0, \quad (2.33)$$

e

$$v_2(t) = \begin{cases} v_2(t_j) \cdot \exp\left(\frac{-(t-t_j)}{RC}\right) & \text{se } d_1(t) = 1 \text{ em } (t_j, t_{j+1}); \\ [A_1(t_j) + A_2(t_j)(t - t_j)]e^{-\zeta(t-t_j)} + V_E & \text{se } d_1(t) = 0 \text{ em } (t_j, t_{j+1}), \end{cases} \quad t > 0, \quad (2.34)$$

com

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{2RC}, & A_1(t_j) &= v_2(t_j) - V_E, & A_2(t_j) &= A_1(t_j)\zeta - \frac{v_2(t_j)}{RC} + \frac{i_1(t_j)}{C}, \\ B_1(t_j) &= i_1(t_j) - \frac{V_E}{R} & \text{e} & & B_2(t_j) &= B_1(t_j)\zeta + \frac{V_E - v_2(t_j)}{L}, \end{aligned}$$

para $j = 0, 1, 2, \dots$ e $t_j \rightarrow \infty$ (suposição para frequência de chaveamento finita por simplicidade).

Vamos definir valores para as variáveis de (2.33) e (2.34) para que vejamos o processo de cálculo manual da resposta do conversor Boost.

Exemplo 6 (Exemplo numérico). Vamos supor que o conversor Boost seja operado por um PWM (Pulse Width Modulation, da sigla em inglês) de 1 kHz com duty cicle de 50% (na primeira metade do período a onda fica em 1 e na outra em 0). Dados os valores dos componentes $R = 5 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ e $C = 10 \text{ mF}$, da fonte de tensão $V_E = 110 \text{ V}$ e as condições iniciais $v_2(0) = 0 \text{ V}$ e $i_1(0) = 0 \text{ A}$, então

$$\zeta = \frac{1}{2RC} = 10 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0,$$

o que satisfaz a condição imposta para utilizarmos as equações (2.33) e (2.34). O circuito começa a operar no modo 1, permanecendo nele até o chaveamento em $t = 0.5 \text{ ms}$, logo,

$$\begin{cases} i_1(t) = 110 \cdot t & \text{para } 0 < t \leq 0.0005, \\ v_2(t) = 0 & \end{cases}$$

com $i_1(0.0005) = 0.055 \text{ A}$ e $v_2(0.0005) = 0 \text{ V}$. Dentro do próximo período de tempo, ou seja $(0.0005, 0.001]$, o circuito estará no modo 2. Sendo $t_j = 0.0005$, por (2.33) e (2.34), tem-se

$$A_1(0.0005) = v_2(0.0005) - V_E = -110;$$

$$A_2(0.0005) = A_1(0.0005)\zeta - \frac{v_2(0.0005)}{RC} + \frac{i_1(0.0005)}{C} = -110 \cdot 10 - 0 + \frac{0.055}{0.01} = -1094.5;$$

$$B_1(0.0005) = i_1(0.0005) - \frac{V_E}{R} = 0.055 - \frac{110}{5} = -21.945;$$

$$B_2(0.0005) = B_1(0.0005)\zeta + \frac{V_E - v_1(0.0005)}{L} = -21.945 \cdot 10 + \frac{110 - 0}{1} = -109.45;$$

e, então,

$$\begin{cases} i_1(t) = [-21.945 - 109.45 \cdot (t - 0.0005)]e^{-10(t-0.0005)} + 22 \\ v_2(t) = [-110 - 1094.5 \cdot (t - 0.0005)]e^{-10(t-0.0005)} + 110 \end{cases} \quad \text{para } 0.0005 < t \leq 0.001,$$

com $i_1(0.001) \approx 0.110$ A e $v_2(0.001) \approx 0.0041$ V.

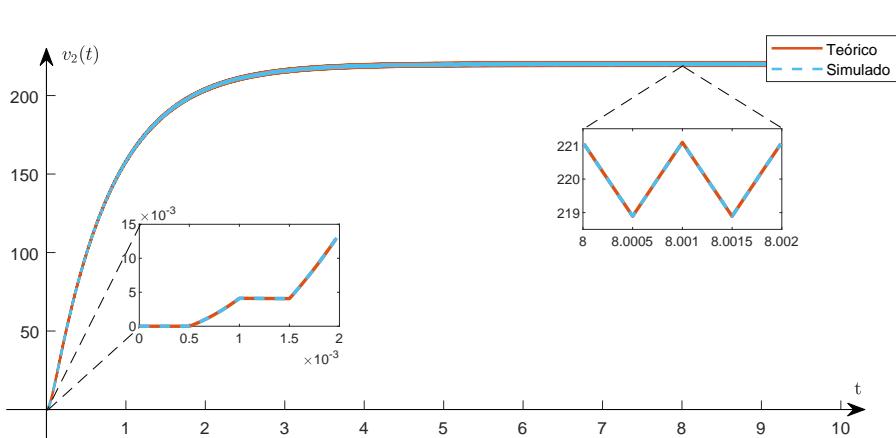
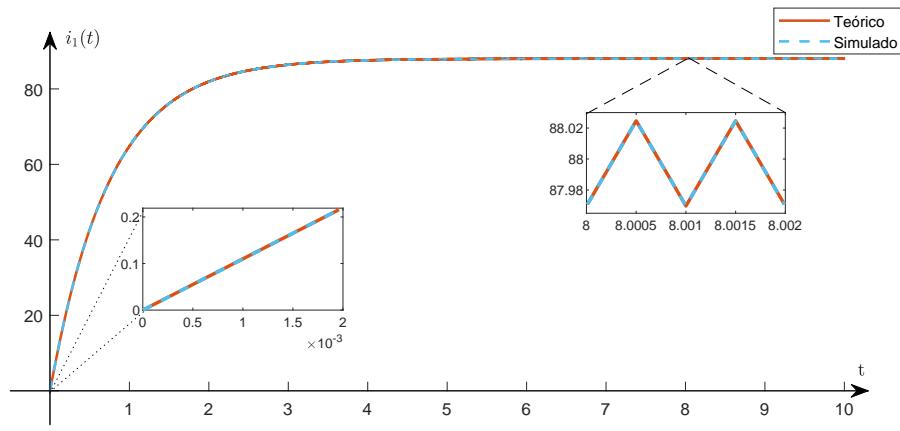
No terceiro período de tempo, dado por $(0.001, 0.0015]$, o circuito voltará ao modo 1. Por (2.33) e (2.34), com $t_j = 0.001$, tem-se

$$\begin{cases} i_1(t) = 110 \cdot (t - 0.001) + 0.11 \\ v_2(t) = 0.0041 \cdot e^{-20(t-0.001)} \end{cases} \quad \text{para } 0.001 < t \leq 0.0015,$$

com $i_1(0.0015) \approx 0.165$ A e $v_2(0.0015) \approx 0.00406$ V.

Poderíamos continuar repetindo esse procedimento, mas acreditamos ter ficado claro como calcular a resposta no tempo do circuito. Para ver como fica o gráfico de $i_1(t)$ e $v_2(t)$, veja a Figura 6.

Figura 6 – Evolução no tempo dos estados do conversor Boost.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A evolução no tempo dos estados do sistema (Figura 6) indica que o valor em regime da corrente no indutor está acima de 80 A e que o valor da tensão no capacitor está acima dos $V_2 = 220$ V, também em regime. Utilizando (2.12) e os valores de $V_E = 110$ V e $D = 0.5$ mencionados anteriormente, conclui-se que

$$V_2 = \frac{V_E}{1 - D} = \frac{110}{0.5} = 220 \text{ V},$$

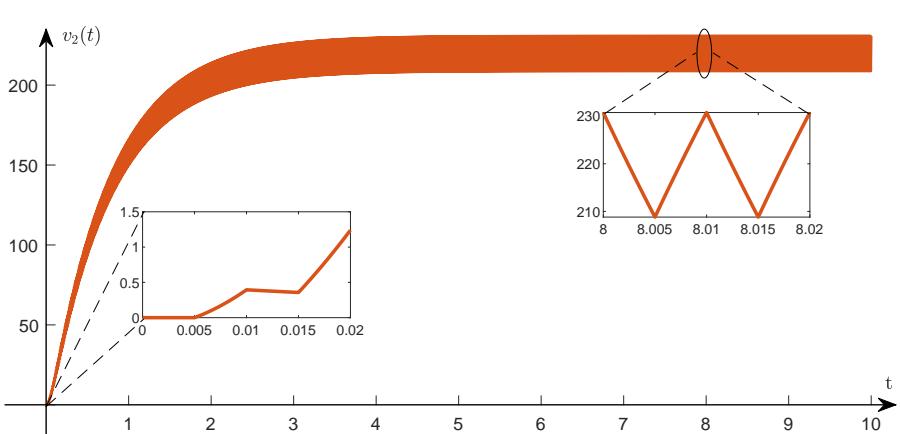
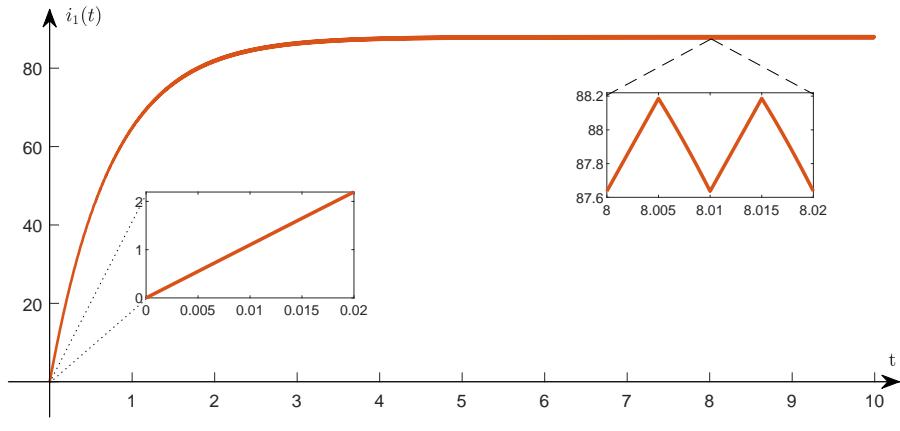
que é o mesmo valor obtido via simulação e modelo em espaço de estados (pela Figura 6).

Da mesma forma, segue de (2.23) e dos valores mencionados no início deste exemplo, que

$$\frac{I_1 I_3}{D_2} = \frac{V_2}{(1 - D)R} = \frac{220}{0.5 \cdot 5} = 88 \text{ A},$$

estando também de acordo com os valores da Figura 6. Vale ressaltar que os valores escolhidos para os componentes, frequência de chaveamento e duty cycle são meramente ilustrativos (foram escolhidos apenas com o intuito de satisfazer a condição $\zeta = \omega_0$). Uma corrente dessa magnitude passando pelo indutor não é muito factível (tal valor está atrelado aos valores dos componentes, que foram escolhidos com o objetivo de simplificar as contas) e, além disso, a pequena oscilação em volta do valor médio visto nos gráficos da Figura 6 se deve à frequência escolhida (baseada nos componentes). Se, por exemplo, a frequência fosse 100 Hz, a ondulação seria bem maior e seu efeito poderia ser percebido, mesmo sem a ampliação da imagem, principalmente na tensão neste caso; ver Figura 7.

Figura 7 – Evolução no tempo dos estados do conversor Boost para $f = 100$ Hz.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A forma como foi encontrada a solução do conversor Boost no Exemplo 5 se assemelha bastante com o que se faz para encontrar a solução de equações diferenciais impulsivas. O próximo capítulo apresenta ao leitor tais equações e faz a ligação dessas com os sistemas chaveados.

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS IMPULSIVAS

Uma **Equação Diferencial Impulsiva** (EDI) possui como estrutura básica

- Uma equação diferencial

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (3.1)$$

com $f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto;

- Subconjuntos $M(t), N(t) \subset \Omega$, $t \in \mathbb{R}_+$ e
- Operadores $A(t) : M(t) \rightarrow N(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$.

A interação entre os itens descritos acima ocorre da seguinte forma. Suponha que $x(t) = x(t, x_0, t_0)$ seja a solução de (3.1) passando por $(x_0, t_0) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$. Então $x(t)$ evolui no tempo até um instante $t_1 > t_0$ em que $x(t_1)$ intercepta o conjunto $M(t_1)$. Nesse instante de tempo $t = t_1$, o operador $A(t)$ transfere $x(t)$ para um novo ponto $(x_1^+, t_1) \in N(t_1)$, sendo $x_1^+ = A(t_1)x_1(t_1)$. Desse modo, $x(t) = x(t, x_1^+, t_1)$ agora evolui no tempo a partir da condição inicial (x_1^+, t_1) , com $t > t_1$. Do mesmo modo, a solução de (3.1) avança sobre $x(t) = x(t, x_1^+, t_1)$ até que ela intercepte novamente o conjunto $M(t)$ em um instante $t = t_2 > t_1$ e, de forma análoga, o operador $A(t)$ transfere a solução $x(t)$ para um ponto $(x_2^+, t_2) \in N(t_2)$, $x_2^+ = A(t_2)x(t_2)$. A solução de (3.1) agora é dada por $x(t) = x(t, x_2^+, t_2)$, $t > t_2$, até que $x(t)$ intercepte novamente $M(t)$ em um instante $t = t_3$ e, então, o processo se repetirá, caso a solução exista.

A solução $x(t)$, $t > t_0$, descreve uma curva em \mathbb{R}^n chamada de **curva integral**. Os instantes de tempo $t = t_k$ nos quais $x(t)$ intercepta o conjunto $M(t)$ são chamados de **momentos de impulso**. Assumiremos, a partir desse ponto, que a solução $x(t)$ da EDI seja contínua à esquerda em t_k , $k = 1, 2, \dots$, isto é,

$$x(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} x(t) = x(t_k).$$

Além disso, a solução de uma EDI será:

- Contínua, se a curva integral não interceptar $M(t)$ ou se ela atingir $M(t)$ somente nos instantes de tempo em que $A(t)x(t) = x(t)$;
- Contínua por partes com uma quantidade finita de saltos, se a curva integral encontrar $M(t)$ em uma quantidade finita de vezes, sendo que nem todos esses instantes de tempo satisfazem $A(t)x(t) = x(t)$;
- Contínua por partes com uma quantidade enumerável de saltos, se a curva integral interceptar $M(t)$ em uma quantidade enumerável de instantes de tempo t tais que $A(t)x(t) \neq x(t)$ ^[22].

Poderíamos ainda considerar os casos em que ocorrem infinitos saltos não enumeráveis, mas, para simplificar, não o faremos (na verdade, uma frequência de chaveamento infinita é um problema para sistemas físicos e, por isso, evita-se tal situação).

A seguir, são apresentados alguns tipos clássicos de sistemas diferenciais com impulso.

3.1 Sistemas com impulsos em tempos fixados

Tais sistemas são os mais simples e são caracterizados pelo conhecimento prévio dos momentos de impulso t_k , $k = 1, 2, \dots$. Aqui, $\{t_k\}$ representa uma sequência de tempos tal que $t_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$.

Definição 3.1.1 (Sistemas com impulsos em tempos fixados^[22, 23]). *Dados os momentos de impulsos $\{t_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, a sequência $\{A(t_k)\}$ será dada por*

$$A(t_k) : \Omega \rightarrow \Omega, \quad x \rightarrow A(t_k)x(t_k) = x(t_k) + I_k(x(t_k)),$$

em que $I_k : \Omega \rightarrow \Omega$ é uma aplicação para cada k . Como resultado, o conjunto $N(t)$ também será definido para os instantes $t = t_k$ e $N(t_k) = A(t_k)M(t_k)$. Dessa forma, um **sistema com impulsos em tempos fixados** será descrito por

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), & t \neq t_k, \\ \Delta x = I_k(x), & t = t_k, \end{cases} \quad (3.2)$$

sendo $k = 1, 2, \dots$ e

$$\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k) \quad \text{com} \quad x(t_k^+) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} x(t), \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

Vemos, de imediato, que uma solução $x(t)$ de (3.2) satisfaz

- (i) $\dot{x} = f(x(t), t)$ para $t \in (t_k, t_{k+1}]$ e
- (ii) $\Delta x(t_k) = I_k(x(t_k))$ para $t = t_k, k = 1, 2, \dots$

O comportamento da solução é influenciado pelo efeito impulsivo, principalmente sua existência e continuidade. Os exemplos a seguir mostram esses comportamentos.

Exemplo 7 (Existência da solução^[22]). Considere a EDI dada por

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, & t \neq k, \\ \Delta x = \frac{1}{x-1}, & t = k, \end{cases} \quad (3.3)$$

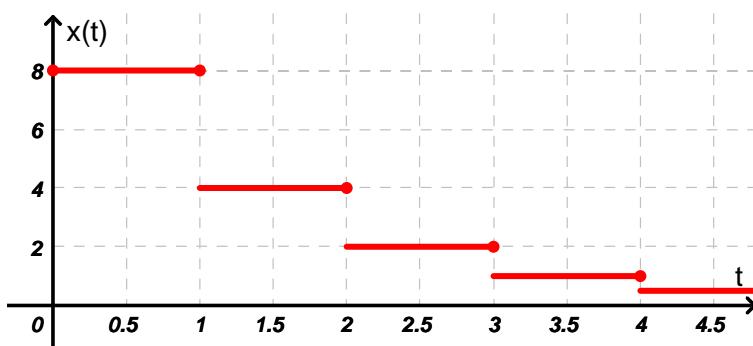
com $k = 1, 2, \dots$ A equação diferencial $\dot{x} = 0$ possui solução contínua para todo t , independente do valor inicial. Porém, para a condição inicial $x(0) = 1$, o sistema impulsivo de tempos fixados (3.3) só possui solução $x(t) = 1$ dentro do intervalo $0 \leq t \leq 1$, já que $I_k(1), k \in \mathbb{N}$, não está definido.

Exemplo 8 (Continuidade da solução^[22]). Considere a EDI dada por

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, & t \neq k, \\ \Delta x = -\frac{x}{2}, & t = k, \end{cases} \quad (3.4)$$

com $k = 1, 2, \dots$ A equação diferencial $\dot{x} = 0$ possui solução contínua para todo t , independente do valor inicial. Entretanto, o sistema impulsivo de tempos fixados (3.4) possuirá solução contínua por partes com uma quantidade enumerável de saltos caso a condição inicial do problema seja $x(0) \neq 0$ (ver Figura 8).

Figura 8 – Trajetória de $x(t)$, com condição inicial $x(0) = 8$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.2 Sistemas com impulsos em tempos variáveis

Diferentemente do que foi apresentado na seção anterior, em que os momentos de impulso eram pré-determinados, agora, iremos considerar uma função como definidora dos momentos de impulso.

Definição 3.2.1 (Sistemas com impulsos em tempos variáveis^[22,23]). *Seja $\{S_k\}$ uma sequência de superfícies dadas por $S_k : t = \tau_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, tais que $\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x)$ e $\tau_k(x) \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Definimos, então, um **sistema com impulsos em tempos variáveis** por*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), & t \neq \tau_k(x), \\ \Delta x = I_k(x), & t = \tau_k(x), \end{cases} \quad (3.5)$$

sendo $k = 1, 2, \dots$ e $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-)$.

Algumas situações interessantes podem ocorrer quando consideramos sistemas da forma (3.5). Por exemplo, diferentes condições iniciais podem levar a soluções com diferentes pontos de descontinuidade. Também é possível que uma solução atinja a mesma superfície S_k várias vezes, o que é chamado de **fenômeno de pulso**. Além disso, diferentes soluções podem assumir o mesmo valor após algum tempo, o que é conhecido como **confluência**.

O exemplo a seguir ilustra alguns desses casos.

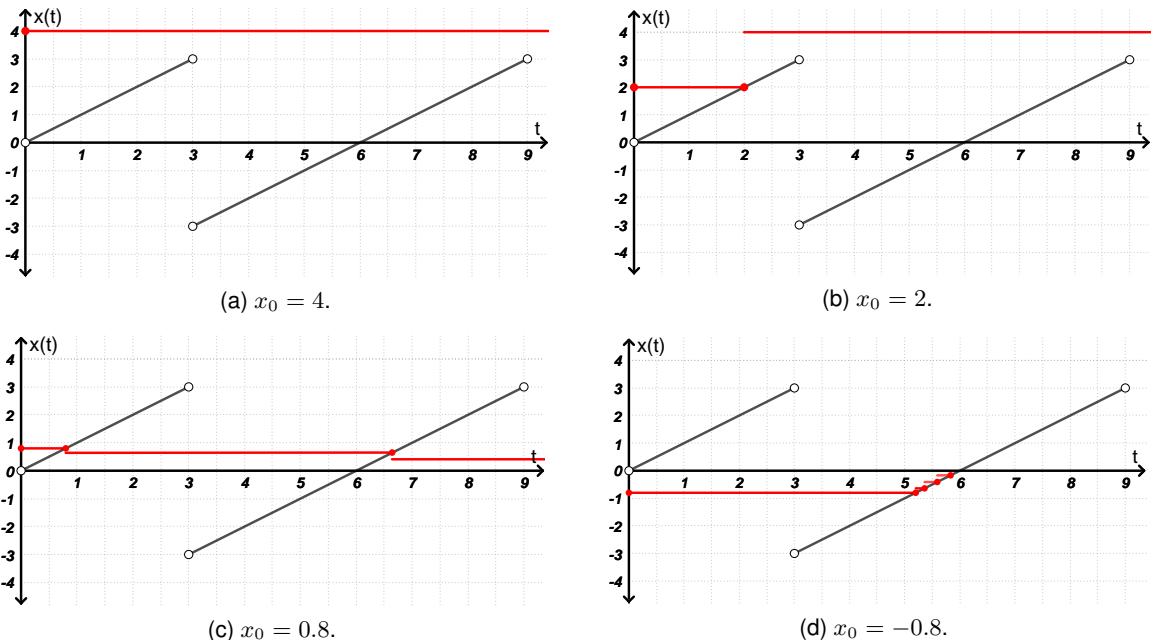
Exemplo 9 (Sistemas com impulsos em tempos variáveis^[22]). *Considere a EDI dada por*

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, & t \neq \tau_k(x), t \geq 0 \\ \Delta x = x^2 \operatorname{sgn}(x) - x, & t = \tau_k(x), \end{cases} \quad (3.6)$$

com $k = 0, 1, 2, \dots$, sendo $\tau_k(x) = x + 6k$ para $|x| < 3$ e

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Figura 9 – Trajetórias do sistema impulsivo (3.6) para diferentes condições iniciais.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para uma condição inicial $x(0) = x_0 > |3|$, a solução nunca atingirá nenhuma das superfícies S_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, como mostra a Figura 9a para $x_0 = 4$. Já se $x_0 = 2$, a solução $x(t) = 2$, $t \in [0, 2]$, sofrerá o efeito impulsivo em $t_1 = 2$, o que resultará em $\Delta x = 2$ e $x(t_k^+) = 4$. Logo, a solução não interceptará mais nenhuma das superfícies S_k e $x(t) = 4$ para todo $t > 2$ (ver Figura 9b).

Se a condição inicial for dada por $x_0 = 0.8$, então a solução $x(t)$ encontrará uma vez cada uma das superfícies S_k , $t_k \rightarrow \infty$ e $x(t_k) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ (ver Figura 9c). Porém, se $x_0 = -0.8$, a solução interceptará S_1 em um número infinito de tempos t_k , $k = 0, 1, \dots$, sendo que $t_k \rightarrow 6$ e $x(t_k) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ (ver Figura 9d).

3.3 Sistemas autônomos com impulsos

Agora, iremos considerar sistemas independentes do tempo. Os instantes de chaveamento serão, então, baseados no estado do sistema.

Definição 3.3.1 (Sistemas autônomos com impulso^[22,23]). Seja $A : M \rightarrow N$ um operador, com M, N sendo conjuntos independentes de t , definido por

$$Ax = x + I(x),$$

sendo $I : \Omega \rightarrow \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Um **sistema autônomo com impulsos** será definido como

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), & x \notin M, \\ \Delta x = I(x), & x \in M, \end{cases} \quad (3.8)$$

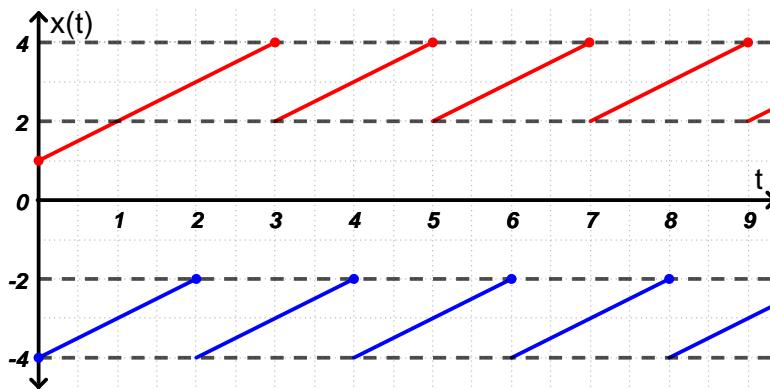
Quando uma solução $x(t)$ de (3.8) atingir o conjunto M em algum tempo t , o operador A transferirá a solução para algum ponto do conjunto N . O exemplo a seguir apresenta um simples sistema autônomo com impulsos.

Exemplo 10 (Sistema autônomo com impulsos). Considere a EDI dada por

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, & x \notin M, \\ \Delta x = -2, & x \in M, \end{cases} \quad (3.9)$$

com $M = \{-2, 4\}$ e $N = \{-4, 2\}$. Sendo $x(t) = t + x_0$, $x_0 = x(0)$, a solução da equação diferencial $\dot{x} = 1$, vemos que a solução nunca interceptará o conjunto M quando $x_0 > 4$. Caso contrário, a solução apresentará um comportamento periódico a partir do primeiro momento impulsivo (ver Figura 10).

Figura 10 – Trajetórias de $x(t)$ com condição inicial $x(0) = 1$ (em vermelho) e $x(0) = -4$ (em azul).



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.4 Sistemas autônomos impulsivos com retardo

Diferente dos sistemas autônomos com impulsos descritos anteriormente, agora iremos considerar que existe um atraso embutido no sistema.

Definição 3.4.1 (Sistemas autônomos impulsivos com retardo^[24]). *Seja $A : M \rightarrow N$ um operador, com M, N sendo conjuntos independentes de t , definido por*

$$Ax = x + I(x),$$

sendo $I : \Omega \rightarrow \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, chamado de condição de **autossustentação**. Um **sistema autônomo impulsivo com retardo** será definido como

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x^{(t)}), & x^{(t)} \notin M, \\ \Delta x^{(t)} = I(x^{(t)}), & x^{(t)} \in M, \end{cases} \quad (3.10)$$

sendo

- $x^{(t)}(\theta) = x(t + \theta)$ a **função memória**,
- $\theta \in [-r, 0]$ o **atraso** e
- $x_0 = \phi$ a **condição inicial do problema**,

em que $\phi : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, $r > 0$.

Desse modo, tanto o sistema quanto o operador impulsivo estão em função do valor do estado x de θ instantes de tempo atrás. Quando x atingir o conjunto M , só após um instante de tempo θ que o momento impulsivo ocorrerá. A notação usual do estado com retardo é x_t , mas para não causar confusão com o índice dos subsistemas, adotamos a notação $x^{(t)}$.

Exemplo 11 (Sistema autônomo impulsivo com retardo). *Considere a EDI dada por*

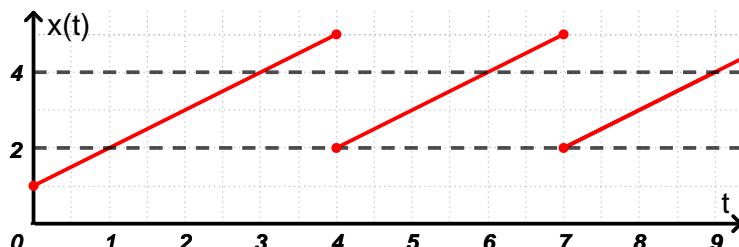
$$\begin{cases} \dot{x} = 1, & x^{(t)} \neq 4, \\ \Delta x = -2, & x^{(t)} = 4, \end{cases} \quad (3.11)$$

sendo $x^{(t)} = x(t - 1)$ (aqui $M = \{4\}$ e $N = \{2\}$). Note que foi considerado atraso somente no operador impulsivo, por simplicidade.

Sendo $x(t) = t + x_0$, $x_0 = 1$, a solução da equação diferencial $\dot{x} = 1$, vemos que a solução nunca interceptará o conjunto M quando $x_0 > 4$. Caso contrário, a solução apresentará um comportamento periódico a partir do primeiro momento impulsivo. Neste caso, por conta do atraso presente no operador impulsivo, o momento impulsivo só ocorrerá 1 instante de tempo após a interceptação (ver Figura 11).

Comparando a Figura 11 com a 10, conclui-se que poderíamos considerar esse problema simplesmente como uma EDI autônoma se tomarmos $M = \{5\}$.

Figura 11 – Trajetória de $x(t)$ com condição inicial $x(0) = 1$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.5 Sistemas chaveados e sistemas impulsivos

E. Joelianto e H. Y. Sutarto^[25] representam um sistema chaveado usando equações diferenciais impulsivas lineares. Alguns autores, como Liberzon^[26], apresentam uma representação dos sistemas chaveados que lembra os sistemas impulsivos e, inclusive, utilizam resultados obtidos para sistemas impulsivos no contexto dos chaveados. Outros, como R. Goebel, R. G. Sanfelice e A. R. Teel^[17], apresentam uma formulação unificada que inclui EDI's e sistemas chaveados como subclasses dos sistemas híbridos. Existe também aqueles que juntam os dois para formar um sistema chaveado impulsivo^[27,28], que não só muda de subsistema quando ocorre o chaveamento, mas também impõe um salto no estado. Entretanto, nenhum se dedicou a fazer uma ligação entre os sistemas chaveados e os sistemas impulsivos utilizando o devido rigor matemático.

O objetivo, aqui, é obter uma formulação inédita e escrever um sistema chaveado através de um sistema impulsivo, e vice-versa. Para isso, vamos primeiro descrever o que é uma solução de um sistema chaveado.

3.5.1 A resposta de um sistema chaveado

Seja $\dot{x} = f_{\sigma(t)}(x)$ um sistema chaveado, com $\sigma(t) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{J} = \{1, 2, \dots, q\}$ sendo contínua à esquerda e $f_a(x)$ sendo LTI, para todo $a \in \mathcal{J}$. Se $\sigma(t) = m \in \mathcal{J}$ dentro de um período $(t_k, t_{k+1}]$, a solução $x(t)$ do sistema chaveado, dentro desse mesmo intervalo de tempo, será, a menos do deslocamento temporal, igual à solução $x_m(s)$ da equação diferencial $\dot{x}_m = f_m(x_m)$ com condição inicial $x_k = x(t_k)$ dentro do intervalo $0 < s \leq (t_{k+1} - t_k)$.

De fato, ao somarmos t_k na desigualdade $0 < s \leq (t_{k+1} - t_k)$, nós obtemos que $t_k < s + t_k \leq t_{k+1}$. Como $t_k < t \leq t_{k+1}$, segue que $s = t - t_k$ e, então, $\dot{x}_m = f_m(x_m) = f_{\sigma(t)}(x) = \dot{x}$, se $\sigma(t) = m$ dentro do intervalo $t_k < t \leq t_{k+1}$, sendo x_k a condição inicial. Logo,

$$x(t) = x_m(s, x_k) = x_m(t - t_k, x_k) \quad \text{para todo } t_k < t \leq t_{k+1},$$

tal que $x_m(s, x_k) = x_m(t)$ (colocar x_k como variável de x_m é uma estratégia adotada para deixar explícita a dependência da solução com relação à condição inicial). Fazendo a extensão para todos os intervalos $(t_j, t_{j+1}]$ em que $\sigma(t) = m$, obtém-se

$$x(t) = x_m(t - t_j, x_j) \quad \text{para todo } (t_j, t_{j+1}] \quad \text{tal que } \sigma(t) = m.$$

Agora, defina a função x_m^* para todo $t > 0$ da seguinte maneira:

$$x_m^*(t) = \begin{cases} x_m(t - t_k, x_k), & \text{se } \sigma(t) = m \text{ (em } (t_k, t_{k+1}]) \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.12)$$

o que nos leva a

$$x(t) = x(t, x_0) = \sum_{i=1}^q x_i^*(t) \quad (3.13)$$

com $x_0 = x(0)$ sendo a condição inicial do sistema chaveado.

Note que foi isso o que fizemos na Seção 2.2.4. Nós descrevemos a solução de cada um dos subsistemas do conversor Boost para uma condição inicial x_0 qualquer e para $t > 0$. Depois, a solução do sistema chaveado foi escrita em função dessas soluções dos subsistemas deslocadas no tempo e com a condição inicial substituída por $x(t_k)$, com t_k sendo os instantes de chaveamento (ver equações (2.33) e (2.34)), para $k = 0, 1, 2, \dots$

Vamos, agora, obter a solução de um sistema chaveado a partir das equações diferenciais impulsivas.

3.5.2 Equivalência entre sistemas chaveados e impulsivos

Considere, para cada $m \in \mathcal{J} = \{1, 2, \dots, q\}$, o seguinte sistema impulsivo em tempos fixados

$$\begin{cases} \dot{y}_m = f_m(y_m), & t \neq t_k \\ \Delta y_m = I_{k,m}(y_m), & t = t_k \end{cases}$$

com $k = 0, 1, 2, \dots$, em que $t_0 = 0$ e os operadores de impulsos são dados por

$$I_{k,m}(y_m) = \begin{cases} y_{\sigma(t)}(t_k) - y_m(t_k), & \text{se } \sigma(t_k^+) = m \\ y_m^e - y_m(t_k) & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

sendo y_m^e um ponto de equilíbrio fixo qualquer de $\dot{y}_m = f_m(y_m)$, $\sigma(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{J}$ uma função contínua à esquerda e $y_{\sigma(t)}(t_k) = y_r(t_k)$ o valor da solução $y_r(t)$ de $\dot{y}_r = f_r(y_r)$ em t_k , com $\sigma(t_k) = r$.

Com os operadores de impulsos $I_{k,m}$, $m = 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, \dots$, o valor de $y_m(t_k^+)$, que é a condição inicial do intervalo $(t_k, t_{k+1}]$, será $y_{\sigma(t)}(t_k)$ quando $\sigma(t_k^+) = m$ e será y_m^e quando $\sigma(t_k^+) \neq m$.

Supondo que os momentos impulsivos t_k , $k = 0, 1, \dots$, sejam iguais aos instantes de chaveamento do sistema chaveado descrito na subseção 3.5.2 e que as funções σ sejam as mesmas, a solução $y_m(t)$ do sistema impulsivo nos intervalos $(t_k, t_{k+1}]$, em que $I_{k,m}(y_m) = y_{\sigma(t)}(t_k) - y_m(t_k)$, será igual à solução $x_m(t)$ do subsistema do sistema chaveado deslocada no tempo de t_k quando $y_{\sigma(t)}(t_k) = x(t_k)$, com $x(t)$ sendo a solução do sistema chaveado, e será $y_m(t) = y_m^e$ nos demais instantes de tempo (pois y_m^e é ponto de equilíbrio). Como as funções σ são as mesmas para todos os m e k , a equação diferencial $\dot{y}_m = f_m(y_m)$ retirada do sistema impulsivo será igual ao modo $\dot{x}_m = f_m(x_m)$ do sistema chaveado, ou seja, $x_m(t) = y_m(t)$. Segue, então, que $y_{\sigma(t)}(t_k) = y_r(t_k) = x_q(t_k) = x(t_k) = x_k$, para $\sigma(t) = r$, pois o subsistema ativo do sistema chaveado será o r . Logo,

$$y_m(t) = \begin{cases} x_m(t - t_k, x_k), & \text{se } \sigma(t_k^+) = m \\ y_m^e & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Agora, considere a função

$$\alpha_m(t) = \frac{1}{p_m} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^q (\sigma(t) - i), \quad \text{com} \quad p_m = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^q (m - i). \quad (3.14)$$

Se $\sigma(t) = m$, então

$$\alpha_m(t) = \frac{1}{p_m} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^q (\sigma(t) - i) = \frac{1}{p_m} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^q (m - i) = \frac{p_m}{p_m} = 1,$$

Entretanto, se $\sigma(t) = r \neq m$, então

$$\alpha_m(t) = \frac{1}{p_m} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^q (\sigma(t) - i) = \frac{1}{p_m} (r - 1) \cdot \dots \cdot (r - r) \cdot \dots \cdot (r - q) = 0.$$

Logo, $\alpha_m(t) = 1$ quando $\sigma(t) = m$, e $\alpha_m(t) = 0$ nas demais situações (note que essa é a mesma função α definida na seção 2.2.4). Note que também é possível obter a função $\sigma(t)$ a partir das funções $\alpha_m(t)$, já que

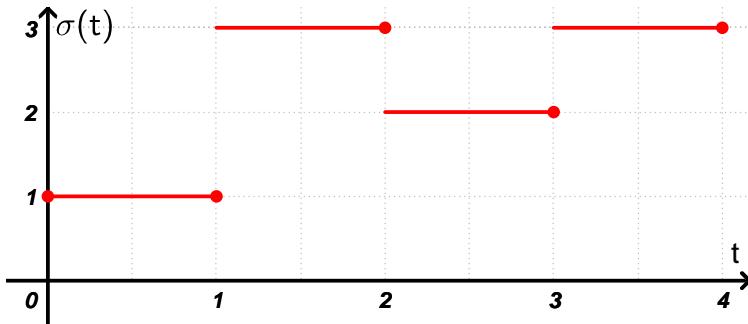
$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^q i \cdot \alpha_i(t). \quad (3.15)$$

Exemplo 12 (Exemplo numérico). Seja $\sigma(t)$ uma função dada por

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq t \leq 1; \\ 3, & \text{para } 1 < t \leq 2; \\ 2, & \text{para } 2 < t \leq 3; \\ 3, & \text{para } 3 < t \leq 4 \end{cases}$$

(ver Figura 12).

Figura 12 – Gráfico da função $\sigma(t)$ do Exemplo 12.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como a imagem de $\sigma(t)$ é o conjunto $\{1, 2, 3\}$, então $q = 3$. Por (3.14), temos

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{p_1} \prod_{i=2}^3 (\sigma(t) - i) = \frac{(\sigma(t) - 2)(\sigma(t) - 3)}{(1 - 2)(1 - 3)} = \frac{(\sigma(t) - 2)(\sigma(t) - 3)}{2}.$$

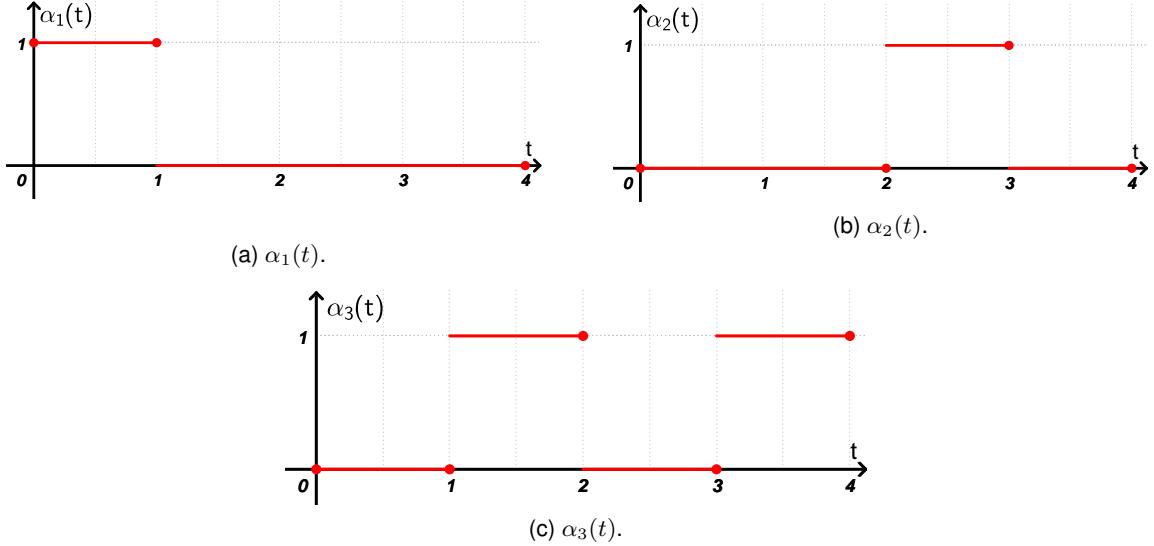
Analizando o valor de $\alpha_1(t)$ em cada um dos intervalos de tempo em que $\sigma(t)$ permanece constante, temos

$$\alpha_1(t) = \begin{cases} \frac{(1 - 2)(1 - 3)}{2} = \frac{2}{2} = 1, & \text{para } 0 \leq t \leq 1; \\ \frac{(3 - 2)(3 - 3)}{2} = \frac{0}{2} = 0, & \text{para } 1 < t \leq 2; \\ \frac{(2 - 2)(2 - 3)}{2} = \frac{0}{2} = 0, & \text{para } 2 < t \leq 3; \\ \frac{(3 - 2)(3 - 3)}{2} = \frac{0}{2} = 0, & \text{para } 3 < t \leq 4. \end{cases}$$

De forma análoga, segue que

$$\alpha_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t \leq 1; \\ 0, & \text{para } 1 < t \leq 2; \\ 1, & \text{para } 2 < t \leq 3; \\ 0, & \text{para } 3 < t \leq 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad \alpha_3(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t \leq 1; \\ 1, & \text{para } 1 < t \leq 2; \\ 0, & \text{para } 2 < t \leq 3; \\ 1, & \text{para } 3 < t \leq 4, \end{cases}$$

como pode ser visto na Figura 13.

Figura 13 – Gráfico das funções $\alpha_m(t)$, do Exemplo 12.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Agora, supondo que tivéssemos somente as funções $\alpha_m(t)$, $m = 1, 2, 3$, por (3.15), teríamos

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1\alpha_1(t) + 2\alpha_2(t) + 3\alpha_3(t) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 1, & \text{para } 0 \leq t \leq 1; \\ 1\alpha_1(t) + 2\alpha_2(t) + 3\alpha_3(t) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3, & \text{para } 1 < t \leq 2; \\ 1\alpha_1(t) + 2\alpha_2(t) + 3\alpha_3(t) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 2, & \text{para } 2 < t \leq 3; \\ 1\alpha_1(t) + 2\alpha_2(t) + 3\alpha_3(t) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3, & \text{para } 3 < t \leq 4. \end{cases}$$

Voltando para a investigação inicial, basta utilizar as funções α_m definidas em (3.14) para obtermos

$$x_m^*(t) = y_m(t) \cdot \alpha_m(t),$$

em que $x_m^*(t)$ é dado por (3.12) e, daí, por (3.13), segue que

$$x(t) = \sum_{i=1}^q x_i^*(t) = \sum_{i=1}^q y_i(t) \cdot \alpha_i(t). \quad (3.16)$$

Portanto, é possível encontrar a solução $x(t)$ de um sistema chaveado $\dot{x} = f_{\sigma(t)}(x)$, $\sigma(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{J} = \{1, 2, \dots, q\}$, com condição inicial $x(0)$ através das soluções $y_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, q$, obtidas por meio da resolução do sistema de EDI's

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{y}_1 = f_1(y_1), & t \neq t_k \\ \Delta y_1 = I_{k,1}(y_1) & t = t_k, \\ \vdots \\ \dot{y}_q = f_n(y_q), & t \neq t_k \\ \Delta y_q = I_{k,q}(y_q) & t = t_k, \end{array} \right. \quad (3.17)$$

com operadores de impulsos dados por

$$I_{k,m}(y_m) = \begin{cases} y_{\sigma(t)}(t_k) - y_m(t_k), & \text{se } \sigma(t_k^+) = m \\ y_m^e - y_m(t_k) & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.18)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$, para $t_k \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathcal{J}$, $y_m(0) = x(0)$, para todo $m \in \mathcal{J}$.

Note que também é possível fazer o contrário, isto é, obter a solução do sistema de EDI's, dado por (3.17) e (3.18), por meio da solução do sistema chaveado, descrito na subseção 3.5.1. Para isso, basta utilizar

$$y_m(t) = \begin{cases} x(t), & \text{se } \sigma(t_k^+) = m \\ y_m^e, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Uma outra abordagem para representar o sistema de EDI's seria colocar as funções α para dentro do sistema e trocar o ponto de equilíbrio por 0:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(y_1) \cdot \alpha_1(t), & t \neq t_k \\ \Delta y_1 = I_{k,1}(y_1) & t = t_k, \\ \vdots \\ \dot{y}_q = f_n(y_q) \cdot \alpha_n(t), & t \neq t_k \\ \Delta y_q = I_{k,q}(y_q) & t = t_k, \end{cases}$$

com operadores de impulsos dados por

$$I_{k,m}(y_m) = \begin{cases} y_{\sigma(t)}(t_k) - y_m(t_k), & \text{se } \sigma(t_k^+) = m \\ -y_m(t_k), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Além disso, também é possível definirmos um sistema impulsivo estendido da seguinte forma^[25]:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), & t \neq t_k \\ \Delta x = I_k(x), & t = t_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (3.19)$$

em que

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2(x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_n(x_q) \end{bmatrix}$$

e

$$I_k(x) = \begin{bmatrix} I_{k,1}(x_1) \\ I_{k,2}(x_2) \\ \vdots \\ I_{k,q}(x_q) \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad I_{k,i}(x_i) = \begin{cases} x_{\sigma(t)}(t_k) - x_i(t_k), & \text{se } \sigma(t_k^+) = i \\ -x_i(t_k), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

3.6 Equações integrais e sistemas chaveados

A representação do sistema impulsivo via equações diferenciais carrega consigo uma estrutura a mais, o operador impulsivo. O operador impulsivo é pouco usual quando se trata da representação de sistemas, e é algo que não existe na representação básica dos sistemas chaveados (Definição 2.1.1).

A ideia, aqui, é utilizar o Corolário 3.6.1 dado a seguir para escrever um sistema chaveado (sistema impulsivo estendido) na forma de uma **equação integral do tipo Volterra** (escreveremos simplesmente **EIV**), para incorporarmos o operador impulsivo na própria equação integral e, assim, obtermos uma outra representação, também inédita, para os sistemas chaveados.

Algumas das ferramentas matemáticas utilizadas no Corolário 3.6.1, como a **integral de Henstock-Kurzweil-Stieltjes**, que é uma generalização das integrais de Riemann e Lebesgue, e as noções de **funções regradas**, que são funções mais gerais que as contínuas por partes, são pouco usuais na engenharia. Por isso, a definição e explicação dessas ferramentas foram deixadas para o Apêndice (veja o Apêndice A para as funções regradas e o Apêndice B para a integral de Henstock-Kurzweil-Stieltjes. Um esboço da prova do Corolário 3.6.1 é apresentado no Apêndice C.

Corolário 3.6.1.^[29]

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $T > 0$. Assuma que, para cada $k \in \{1, \dots, m\}$, $t_k \in [t_0, t_0 + T]$, com $t_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_0 + T$, e $I_k : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja um operador impulsivo tal que $I + I_k : B \rightarrow B$, em que $B \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e $I : B \rightarrow B$ é o operador identidade. Suponha que $f : B \times [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja Henstock-Kurzweil-Stieltjes integrável com respeito à função regrada $g : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}$ que é contínua em cada t_k . Defina a função $\tilde{f} : B \times [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\tilde{f}(z, t) = \begin{cases} f(z, t), & t \in [t_0, t_0 + T] \setminus \{t_1, \dots, t_m\} \\ I_k(z), & t = t_k, k \in \{1, \dots, m\}. \end{cases}$$

Além disso, para todo $k \in \{1, \dots, m\}$, seja $c_k \in \mathbb{R}_+$ uma constante, com $c_k \leq c_{k+1}$, e defina $\tilde{g} : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} g(t), & t \in [t_0, t_1] \\ g(t) + c_k, & t \in (t_k, t_{k+1}], k \in \{1, \dots, m-1\} \\ g(t) + c_m, & t \in (t_m, t_0 + T] \end{cases}$$

satisfazendo $\Delta^+ \tilde{g}(t_k) = \tilde{g}(t_k^+) - \tilde{g}(t_k) = 1$ para todo $k \in \{1, \dots, m\}$. Então $x : [t_0, t_0 + T] \rightarrow B$ será uma função regrada e uma solução da EIV

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(s), s) dg(s) + \sum_{k \in \{1, \dots, m\}} I_k(x(t_k)), & t \in [t_0, t_0 + T], \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

se, e somente se, x for solução da seguinte EIV^[29]

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \tilde{f}(x(s), s) d\tilde{g}(s), & t \in [t_0, t_0 + T], \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Considere o sistema chaveado (3.19) representado na sua forma estendida, com os subsistemas f_m sendo lineares e contínuos, $m = 1, 2, \dots, n$. Como sabemos, a linearidade de $\dot{x}_m = f_m(x_m)$ implica na existência da solução que, junto à continuidade, nos leva à Riemann integrabilidade com relação a t . Portanto, o sistema $\dot{x} = f(x)$ é também Riemann integrável com relação a t . Dito isso, segue que f é Henstock-Kurzweil integrável com respeito à função $g(t) = t$, já que a integral de Henstock-Kurzweil é uma extensão da integral de Riemann. Tomando o conjunto B de forma apropriada, nossas funções f , g e o operador I_k satisfazem as premissas do Corolário 3.6.1. Sendo assim, considere a função

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & t \in [t_0, t_0 + T] \setminus \{t_1, \dots, t_m\} \\ I_k(x), & t = t_k, k = 1, \dots, m, \end{cases}$$

e a função

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} t, & t \in [t_0, t_1] \\ t + k, & t \in (t_k, t_{k+1}], k \in \{1, \dots, m-1\} \\ t + m, & t \in (t_m, t_0 + T], \end{cases}$$

em que $c_k = k$, $k = 1, \dots, m$. Note que, aqui,

$$\Delta^+ \tilde{g}(t_k) = \tilde{g}(t_k^+) - \tilde{g}(t_k) = t + k - (t + k - 1) = 1,$$

satisfazendo a condição referente à escolha dos c_k . Portanto, a solução do sistema chaveado pode ser obtida através da solução de

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + \int_0^t \tilde{f}(x(s)) d\tilde{g}(s), & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

4 APLICAÇÕES

Os sistemas chaveados são fundamentais em diversas aplicações tecnológicas que demandam controle eficiente e confiável. Neste capítulo, abordamos exemplos práticos, como:

- O conversor Boost, utilizado para elevar a tensão em sistemas de potência;
- O controle de motores CC, essencial para regulação de velocidade e torque e
- A isolamento de falhas em redes elétricas, onde a rápida comutação garante a continuidade e segurança do fornecimento.

Essas aplicações ilustram a importância e versatilidade dos sistemas chaveados em diversos setores tecnológicos. Vamos iniciar as aplicações pelo conversor Boost, amplamente explorado neste texto.

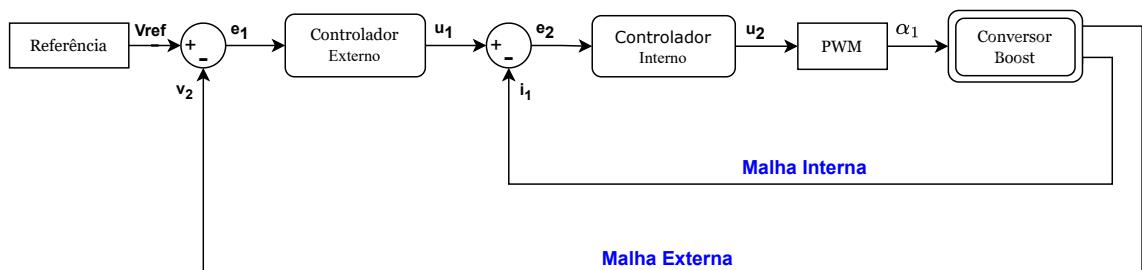
4.1 Conversor Boost com controle de dupla malha

A aplicação de conversores CC-CC, como o Boost, em inversores fotovoltaicos é essencial para otimizar a conversão de energia em sistemas solares. Eles são particularmente úteis para ajustar a tensão de entrada dos painéis solares, que pode variar significativamente de acordo com condições ambientais como a irradiação solar e a temperatura. Isso ocorre porque a tensão de saída dos painéis solares nem sempre corresponde à tensão ideal para o inversor, responsável pela conversão de corrente contínua para corrente alternada usada na rede elétrica.

Os conversores CC-CC, especialmente aqueles que integram algoritmos de rastreamento do ponto de máxima potência (MPPT; do inglês *Maximum Power Point Tracking*), são fundamentais para maximizar a extração de energia dos painéis. O MPPT ajusta a tensão de entrada para garantir que o sistema opere sempre no ponto de maior eficiência, considerando as variações de iluminação e temperatura ao longo do dia. Esses conversores também ajudam a estabilizar a tensão fornecida ao inversor, garantindo uma operação eficiente e segura mesmo em condições variáveis de operação^[30,31].

Para que os requisitos de projeto sejam atendidos e para que a saída do conversor CC-CC esteja sempre seguindo o valor estipulado pelo algoritmo do MPPT, é necessário que se tenha um controlador atuando sobre o chaveamento do circuito. No nosso exemplo, iremos aplicar um controle em malha dupla, sendo a malha externa a de tensão e a interna a de corrente, ver Figura 14.

Figura 14 – Estratégia de controle em cascata para o conversor Boost.



Fonte: Adaptado de Campos e Teixeira^[32].

Para a malha externa, vamos controlar a tensão de saída utilizando um **PID** (Proporcional Integral Derivativo), que é dado pela seguinte equação integrodiferencial

$$u_1(t) = K_P e_1(t) + K_I \int_0^t e_1(s) ds + K_D \frac{d}{dt} e_1(t), \quad (4.1)$$

sendo^[7]

- $e_1(t) = v_{ref}(t) - v_2(t)$ o erro entre a tensão de referência $v_{ref}(t)$ e a de saída $v_2(t)$ (ver Figura 3),
- K_P o ganho proporcional,
- K_I o ganho integral e
- K_D o ganho derivativo.

Já para a malha interna, vamos utilizar um ganho proporcional K , de modo que $e_2(t) = u_1(t) - i_1(t)$ e

$$u_2(t) = Ke_2(t) = K[u_1(t) - i_1(t)], \quad (4.2)$$

que, ao ser inserido no PWM, gera o sinal de controle $\alpha_1(t)$ da chave, como mostra a Figura 14.

Desse modo, podemos representar o conversor Boost através de um sistema de EDI's com impulsos em tempos variáveis da seguinte forma:

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1), & t \neq \tau_k(u) \\ \Delta x_1 = I_{k,1}(x_1), & t = \tau_k(u), \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{x}_2 = f_2(x_2), & t \neq \tau_k(u) \\ \Delta x_2 = I_{k,2}(x_2), & t = \tau_k(u), \end{cases} \end{cases} \quad (4.3)$$

com operadores de impulsos dados por

$$\begin{aligned} I_{k,1}(x_1) &= \begin{cases} x_2(t_k) - x_1(t_k), & \text{se } \alpha(t_k^+) = 1, \\ -x_1(t_k) & \text{caso contrário;} \end{cases} \\ I_{k,2}(x_2) &= \begin{cases} x_1(t_k) - x_2(t_k), & \text{se } \alpha(t_k^+) = 0, \\ -x_2(t_k) & \text{caso contrário,} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4)$$

com $k = 0, 1, 2, \dots$, sendo $\dot{x}_1 = f_1(x_1)$ igual a (2.25), $\dot{x}_2 = f_2(x_2)$ igual a (2.27), $\tau_k(u) = T(u_2 + k)$ para $0 < u_2 \leq 1$ e para um período de chaveamento T . Por 3.16, sabemos que a solução de (4.3) será

$$x(t) = \alpha_1(t)x_1(t) + \alpha_2(t)x_2(t),$$

sendo $\alpha_2(t) = 1 - \alpha_1(t)$.

Bem, apresentar essa representação para o leitor e deixar por isso mesmo, ficará parecendo que obtê-la é algo trivial, o que não é necessariamente verdade. Explicaremos alguns pontos sobre a modelagem para que fique mais claro.

Primeiramente, perceba que estamos levando x_1 e x_2 para 0 quando $I_{k,1}(x_1) = -x_1(t_k)$ e $I_{k,2}(x_2) = -x_2(t_k)$ em (4.4), respectivamente. E por quê? Não há nenhum motivo em especial. Foi uma escolha arbitrária para deixar os operadores mais simples. Além disso, a substituição de $\sigma(t)$ por $\alpha_1(t)$ como condição de (4.4) foi realizada, pois já sabemos quem é α_1 (se utilizássemos σ , precisaríamos de (3.15), o que introduziria um passo a mais sem necessidade).

Outro ponto a ser destacado é que, essencialmente falando, u_2 é função de x , já que possui v_2 e i_1 em sua expressão, por (4.2) e (4.1), então estamos de acordo com a Definição 3.2.1.

Por fim, fica fácil perceber o motivo da escolha das superfícies τ_k , $k = 0, 1, \dots$ quando se sabe que o funcionamento do **PWM** baseia-se na comparação entre o valor da entrada e uma onda triangular, sendo sua saída igual a 1 se a entrada for maior ou igual ao valor da onda dente de serra e 0 caso contrário^[33,34], ver Figura 15. Logo, as superfícies τ_k são, na verdade, a onda dente de serra do PWM (a união das superfícies forma a onda dente e serra). De fato, como

$$\tau_0(u_2 = 0) = 0, \quad \tau_0(u_2 = 1) = T$$

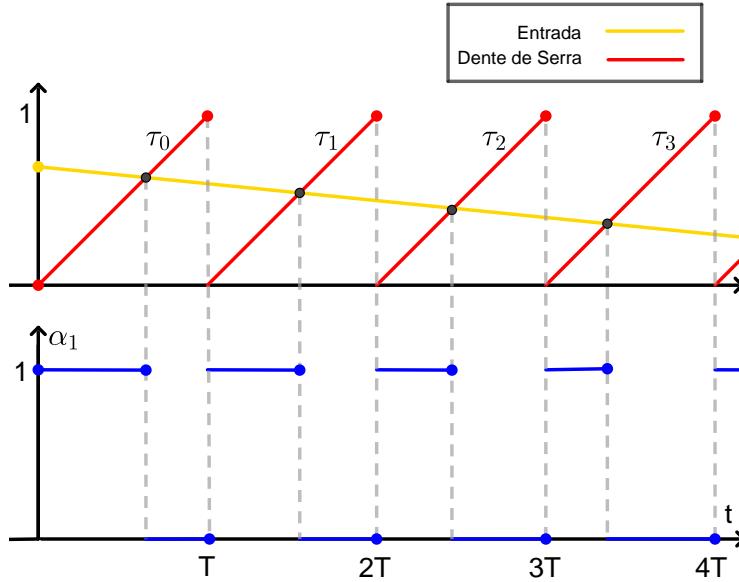
e como que as superfícies são segmentos de reta, então $\tau_0(u_2) = Tu_2$, para $0 < u \leq 1$. Extrapolando essa análise para as demais superfícies, chega-se em $\tau_k(u_2) = T(u_2 + k)$ para $0 < u_2 \leq 1$. Unindo todas esses segmentos de retas formados pelas superfícies, obtém-se a onda dente de serra.

Perceba, por (2.16), que o primeiro instante de chaveamento t_0 ocorrerá quando

$$t_0 = Tu_2(t_0), \quad \text{ou seja,} \quad u_2(t_0) = \frac{t_0}{T} = d_1(t_0),$$

isto é, o sinal de entrada do PWM é o *duty cycle*. Sendo assim, o que o controle faz é alterar o valor do *duty cycle* para que a tensão de saída seja igual ao valor de referência e, como sabemos por (2.12), o valor da tensão de saída está intrinsecamente atrelado ao valor do *duty cycle*.

Figura 15 – Lógica do sinal de saída α_1 do PWM.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O exemplo a seguir simula o funcionamento do circuito com o controlador atuando para manter a tensão de saída do conversor CC-CC seguindo a referência a ser especificada.

Exemplo 13. Vamos tomar como parâmetro os valores da Tabela 1 para a simulação, que define a referência da tensão de saída como sendo 200 V. Para vermos o controle atuando, em $t = 5$ s, a resistência do resistor foi abaixada para 25Ω , enquanto que a tensão de entrada foi aumentada para 150 V em $t = 10$ s. Como condição inicial, foi adotado $x_0 = [0 \ 0]^T$ para ambos os subsistemas (o T indica transposto). O resultado pode ser visto na Figura 16.

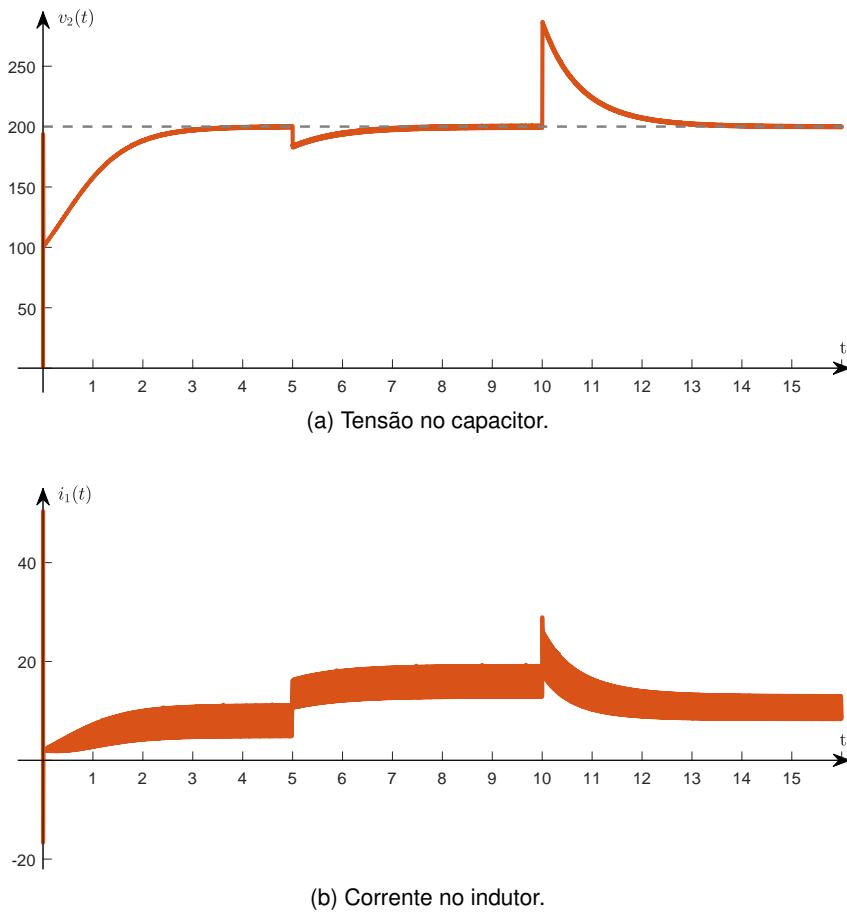
Tabela 1 – Parâmetros de simulação do conversor Boost com controlador.

Parâmetros	Valores
Tensão de entrada	100 V
Tensão de saída	200 V
Indutor	400 μ H
Capacitor	100 μ F
Resistor	50 Ω
Freq. PWM	20 kHz
K_P	0.0033
K_I	6.43
K_D	0.0027
K	0.0008

Fonte: Adaptado de ADNAN^[35].

Note, pela Figura 16a, que a tensão de saída volta ao patamar de 200V após ambas as perturbações (variação no valor da resistência e tensão de entrada do conversor), mostrando que o controlador conseguiu levar a tensão de saída para o valor desejado, mesmo após perturbações no sistema. Quanto à corrente no indutor, percebe-se que existe uma grande oscilação sobre ela, causada principalmente pelas características do sistema e do PWM. Poderíamos aumentar a frequência de chaveamento para diminuirmos a oscilação, mas isso muitas vezes não é possível na prática, por conta do limite físico da chave (transistor).

Figura 16 – Evolução no tempo dos estados do conversor Boost com controle.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Esse exemplo mostra que é possível modelar um sistema chaveado controlado sem que seja necessário inserir a lei de controle dentro da modelagem do sistema. Isso facilita bastante o nosso trabalho, dado que, uma vez modelado, não é mais necessário refazer o modelo por causa da troca de controlador. Note que a mesma modelagem apresentada na Seção 2.2.4 foi utilizada aqui, a diferença está nos momentos impulsivos, que antes eram fixos e agora são variáveis e dependentes do controle.

É natural modelar de um conversor CC-CC como um sistema chaveado, dado a sua forma de funcionamento. Entretanto, existem sistemas que, a princípio, não são chaveados, mas que se tornam um, se o método de controle empregado envolver chaveamento.

4.2 Controle de velocidade de um motor CC

Não há dúvidas de que máquinas elétricas são elementos indispensáveis no mundo contemporâneo, desde a indústria de processos até aplicações domésticas. Motores elétricos têm muitas vantagens sobre outros tipos de motores, não se limitando a, mas incluindo: baixo custo, alta densidade de potência, requisitos

simples de construção e instalação, robustez, versatilidade (pode ser facilmente adaptado a vários tipos de cargas), alta eficiência e simplicidade de controle. Em relação aos vários tipos de motores elétricos, os motores de corrente contínua são muito atraentes e amplamente utilizados em aplicações de velocidade variável^[36], devido à facilidade de seu controle.

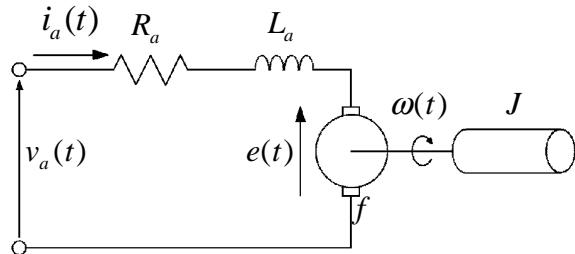
Uma representação em espaço de estados de um motor CC (Figura 17) é^[37]

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_g}{L_a} \\ \frac{K_m}{J} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} v_a(t), \quad (4.5)$$

sendo

- $i_a(t)$ a corrente de armadura;
- $\omega(t)$ a velocidade angular;
- R_a a resistência do circuito de armadura;
- L_a a indutância do circuito de armadura;
- K_g a constante de força contra-eletromotriz;
- K_m a constantes de torque;
- J momento de inércia da carga;
- f o coeficiente de atrito viscoso e
- $v_a(t)$ a tensão de armadura.

Figura 17 – Circuito equivalente de um motor CC.



Fonte: BASILIO e MOREIRA^[37].

O motor CC por si só não é um sistema chaveado. Entretanto, uma técnica muito comum de controle da velocidade de um motor CC é a de modular a tensão de armadura $v_a(t)$ via controlador e PWM, por exemplo^[38], o que torna o sistema (4.5) chaveado.

Dado que já utilizamos a técnica de controle com PWM no exemplo anterior, vamos controlar a velocidade angular do motor CC utilizando a técnica de ***sliding mode*** com retardo.

O ***sliding mode*** se destaca pela sua capacidade de lidar com incertezas e não linearidades, proporcionando desempenho confiável, mesmo em condições adversas^[39]. A técnica baseia-se na escolha de uma **superfície de chaveamento** $s(e)$, sendo e o erro, cujo sistema deve seguir. Se o erro estiver acima da superfície e se distanciando dela, o chaveamento ocorre para que o erro vá até a superfície e , caso o erro esteja abaixo da superfície e esteja se afastando dela, o chaveamento ocorre para que o erro encontre a superfície. Para o nosso problema, vamos utilizar a superfície^[39]

$$s(e) = \dot{e} + e \quad \text{com} \quad e = \omega_r - \omega,$$

em que ω_r é o valor de referência da velocidade angular. Desse modo, podemos tomar o sinal de controle por

$$u(t) = \frac{1}{2}[1 + \text{sgn}(s^{(t)}(\theta))], \quad (4.6)$$

sendo $s^t(\theta) = s(e(t + \theta))$, $\theta < 0$, e sgn dado por (3.7). O objetivo do retardo na lei de chaveamento é impedir que a frequência de chaveamento cresça indefinidamente, fenômeno esse chamado de **chattering**^[39].

Podemos, então, representar (4.5) em malha fechada com o controlador (4.6) por

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1), & s^{(t)} \neq 0 \\ \Delta x_1 = I_{k,1}(x_1), & s^{(t)} = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{x}_2 = f_2(x_2), & s^{(t)} \neq 0 \\ \Delta x_2 = I_{k,2}(x_2), & s^{(t)} = 0, \end{cases} \end{cases}$$

com operadores de impulsos dados por

$$\begin{aligned} I_{k,1}(x_1) &= \begin{cases} x_2(t_k) - x_1(t_k), & \text{se } u(t_k^+) = 1, \\ -x_1(t_k) & \text{caso contrário;} \end{cases} \\ I_{k,2}(x_2) &= \begin{cases} x_1(t_k) - x_2(t_k), & \text{se } u(t_k^+) = 0, \\ -x_2(t_k) & \text{caso contrário,} \end{cases} \end{aligned}$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$, sendo $\dot{x}_1 = f_1(x_1)$ igual a

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_g}{L_a} \\ \frac{K_m}{J} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} V_a,$$

com V_a constante, e $\dot{x}_2 = f_2(x_2)$ igual a

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_g}{L_a} \\ \frac{K_m}{J} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \end{bmatrix}.$$

Assim como no caso do conversor Boost, vamos simular o funcionamento do motor CC controlado e alterar alguns dos valores do modelo durante a simulação para vermos a ação do controlador para manter o sistema na referência a ser especificada.

Exemplo 14. Assumindo os valores da Tabela 2 para os parâmetros de simulação, $\theta = -0.001\text{s}$, $x_0 = [0 \ 0]^T$ como condição inicial para ambos os subsistemas e $u(t) = 1$, $t \in [\theta, 0]$, como condição inicial do sinal de controle, é possível simular a ação do controle sobre o sistema para manter a velocidade angular seguindo a referência dada, que aqui assumiremos ser $\omega_r = 100\text{ rad/s}$.

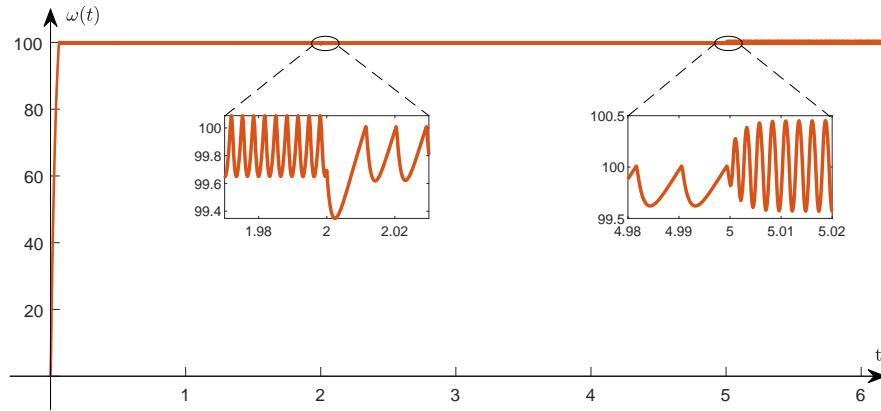
Tabela 2 – Parâmetros de simulação.

Parâmetros	Valores
R_a	2.3Ω
L_a	3.4 mH
K_g	0.0453 V/rad/s
K_m	0.0453 V/rad/s
J	$3.72 \times 10^{-5}\text{ kgm}^2$
f	$5.23 \times 10^{-5}\text{ kgm/rad/s}$
V_a	6 V

Fonte: Adaptado de BASILIO e MOREIRA^[37].

Para melhor visualizarmos a ação de controle atuando, em $t = 2\text{s}$, o coeficiente de atrito viscoso f valerá $26.15 \times 10^{-5}\text{ kgm/rad/s}$, enquanto que, em $t = 5\text{s}$, a tensão V_a passará a ser 12 V , ver Figura 18.

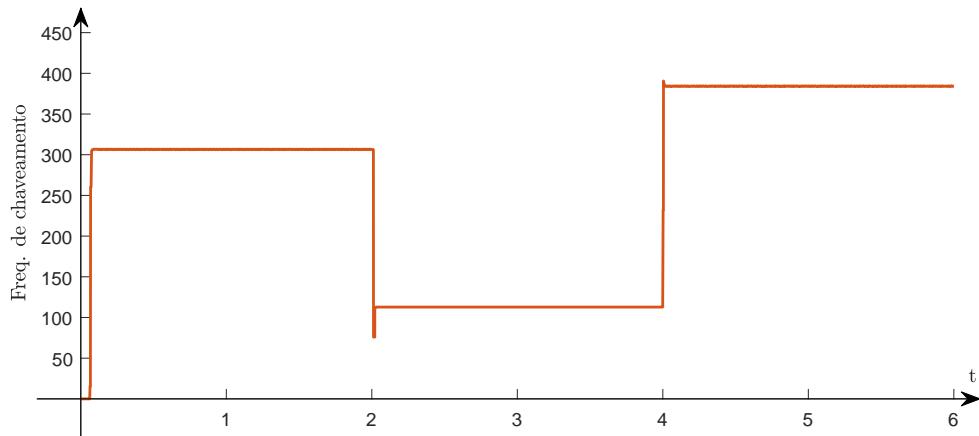
Figura 18 – Evolução no tempo da velocidade angular do motor CC.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Um ponto a ser destacado, caso não tenha percebido pela Figura 18, é que o controlador empregado não possui um método para fixar a frequência de chaveamento. Quando o valor de f foi alterado, em $t = 2\text{ s}$, a frequência de chaveamento, que estava por volta dos 305 rad/s , caiu para 115 rad/s , aproximadamente. Já em $t = 5\text{ s}$, a frequência aumentou para um valor próximo à 385 rad/s , ver Figura 19.

Figura 19 – Frequência de chaveamento da chave de controle da velocidade angular do motor CC.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A aplicação do *sliding mode* no controle de velocidade do motor CC transforma o sistema em malha fechada em um sistema chaveado, mesmo o motor CC não sendo um, ou seja, se fizer sentido para a aplicação, é possível tornar um sistema não chaveado em um chaveado utilizando técnicas baseadas em PWM ou *sliding mode*, por exemplo.

Os exemplos abordados até então trataram de apresentar sistemas chaveados com subsistemas lineares e simples, e com chaveamento intermitente. Tais exemplos são bastante didáticos e representam bem a modelagem e o comportamento dos sistemas chaveados. Entretanto, existem problemas bem mais complexos que também podem ser estudados a partir da abordagem de sistemas chaveados.

4.3 Tempo de abertura dos disjuntores isoladores de falhas

A estabilidade de sistemas elétricos de potência é fundamental para garantir a operação confiável de redes de transmissão e distribuição, sendo composta por três fatores principais^[40]:

- Tempo (curto, médio ou longo prazo);

- Variáveis (ângulo, tensão ou frequência);
- Perturbação (grandes, pequenas, previsíveis e/ou imprevisíveis).

Para entender os diferentes tipos de estabilidade em sistemas elétricos de potência, é importante diferenciar entre estabilidade transitória, estabilidade de tensão e estabilidade a pequenas perturbações. A estabilidade transitória avalia a capacidade do sistema de manter o sincronismo quando ocorre uma grande perturbação, como um curto-círcito ou a desconexão súbita de uma linha de transmissão. Essas perturbações exigem que o sistema reaja rapidamente, e seu comportamento depende das condições de operação e do tempo de resposta dos controles envolvidos.

A estabilidade de tensão está relacionada à capacidade do sistema de manter níveis adequados de tensão, principalmente em resposta a variações de carga mais lentas, enquanto a estabilidade a pequenas perturbações considera oscilações pequenas, em que as equações do sistema podem ser linearizadas para prever o comportamento após pequenas mudanças. Essas análises são fundamentais para a operação segura e eficiente dos sistemas de potência, garantindo que o sistema retorne ao estado de equilíbrio de forma controlada^[41].

O modelo dinâmico de um sistema de n geradores, sem amortecimento, que descreve o comportamento dos ângulos no tempo em função dos parâmetros da rede é^[42]

$$\begin{cases} \dot{\delta}_i = \omega_i \\ M_i \ddot{\delta}_i = P_{m_i} - P_{e_i}(\delta) \end{cases} \quad (4.7)$$

$i = 1, 2, \dots, n$, com

$$P_{e_i}(\delta) = |E_i|^2 G_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n C_{ik} \sin(\delta_i - \delta_k) + D_{ik} \cos(\delta_i - \delta_k)$$

para

$$C_{ik} = |E_i| |E_k| B_{ik} \quad \text{e} \quad D_{ik} = |E_i| |E_k| G_{ik},$$

sendo, para cada um dos geradores:

- δ_i o ângulo do rotor em relação a um referencial síncrono;
- ω_i a velocidade síncrona;
- M_i a constante de inércia;
- P_{m_i} a potência mecânica fornecida pela turbina;
- P_{e_i} a potência elétrica fornecida à rede;
- $E_i = |E_i| \angle \delta_i$ é a tensão do gerador e
- $Y_{ik} = G_{ik} + jB_{ik}$ sendo o elemento ik da matriz de admitância reduzida do sistema.

A análise de estabilidade transitória a grandes perturbações (análise de sincronismo) dos geradores se resume a descobrir quanto tempo os disjuntores podem demorar para atuarem e isolarem a falta (curto-círcuito) do restante da rede elétrica. Dado que a topologia da rede muda quando em falta e quando em pós-falta, o que implica na mudança da matriz Y , podemos modelar a rede da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1), & t \neq t_a \\ \Delta x_1 = I_1(x), & t = t_a, \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{x}_2 = f_2(x_2), & t \neq t_a \\ \Delta x_2 = I_2(x), & t = t_a, \end{cases} \end{cases}$$

com operadores de impulsos dados por

$$\begin{aligned} I_1(x) &= x_2(t_a) - x_1(t_a), \\ I_2(x) &= x_1(t_a) - x_2(t_a), \end{aligned}$$

sendo t_a o tempo de abertura dos disjuntores e $\dot{x}_1 = f_1(x_1)$, $\dot{x}_2 = f_2(x_2)$ iguais a (4.7).

O exemplo a seguir ilustra uma forma de se determinar o tempo máximo de abertura dos disjuntores para isolar uma falha mantendo o sincronismo entre os geradores.

Exemplo 15. Aqui, iremos analisar o sincronismo de geradores via análise de estabilidade transitória à ocorrência de um curto-círcuito em uma linha de transmissão. O objetivo é descobrir qual o tempo máximo de abertura dos disjuntores para isolamento da falha que garante a estabilidade (sincronismo) do sistema.

Para tal, considere o sistema de 3 máquinas e 3 geradores da Figura 20. Iremos supor que um curto sólido trifásico ocorra na linha 1-2 nas proximidades da barra 2, tal que possamos considerar que o curto tenha ocorrido na própria barra. O que ocorre, então, é uma ligação entre a barra 2 com a barra de referência (terra) durante a falta e, após a abertura dos disjuntores da linha 1-2, a rede perde a conexão direta que havia antes entre as barras 1 e 2. A modelagem do sistema em falta e pós-falta, com base na Figura 20, é dada por^[42]:

- Em falta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\delta}_1 = \omega_1 \\ \dot{\delta}_2 = \omega_2 \\ \dot{\delta}_3 = \omega_3 \\ 0.053\dot{\omega}_1 = 2.49 - 0.7138 - 2.09 \sin(\delta_1 - \delta_3) - 0.485 \cos(\delta_1 - \delta_3) \\ 0.079\dot{\omega}_2 = 4.21 \\ 0.318\dot{\omega}_3 = 8.20 - 9.5468 - 2.06 \sin(\delta_3 - \delta_1) - 0.480 \cos(\delta_3 - \delta_1) \end{array} \right.$$

- Pós-falta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\delta}_1 = \omega_1 \\ \dot{\delta}_2 = \omega_2 \\ \dot{\delta}_3 = \omega_3 \\ 0.053\dot{\omega}_1 = 2.49 - 0.9441 - 0.28 \sin(\delta_1 - \delta_2) - 0.078 \cos(\delta_1 - \delta_2) - 2.47 \sin(\delta_1 - \delta_3) - 0.63 \cos(\delta_1 - \delta_3) \\ 0.079\dot{\omega}_2 = 4.21 - 0.5921 - 0.28 \sin(\delta_2 - \delta_1) - 0.078 \cos(\delta_2 - \delta_1) - 6.84 \sin(\delta_2 - \delta_3) - 1.29 \cos(\delta_2 - \delta_3) \\ 0.318\dot{\omega}_3 = 8.20 - 9.5468 - 2.47 \sin(\delta_3 - \delta_1) - 0.630 \cos(\delta_3 - \delta_1) - 6.84 \sin(\delta_3 - \delta_2) - 1.29 \cos(\delta_3 - \delta_2) \end{array} \right.$$

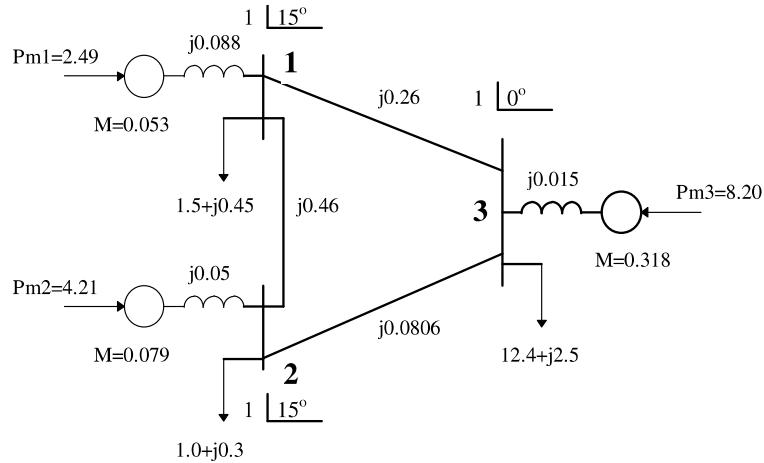
A condição inicial do sistema em falta é obtida através do fluxo de carga (resolução do circuito para obtenção dos ângulos das tensões nas barras, que serão os valores dos δ) do sistema pré-falta. Neste caso, temos $\omega_0 = [0 \ 0 \ 0]$, pois o sistema está em equilíbrio, e $\delta_0 = [26.8^\circ \ 26.5^\circ \ 6.71^\circ] = [0.4677 \ 0.4625 \ 0.1171]$ rad, ou seja, $x_0 = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3 \ \delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3] = [0 \ 0 \ 0 \ 0.4677 \ 0.4625 \ 0.1171]$.

A simulação do problema se dará via cálculo numérico, utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, com passo de integração igual a 0,002 s. Para melhor visualizar os resultados, vamos alterar o referencial da sistema para o referencial do centro de ângulo (COA), cuja fórmula é^[43]

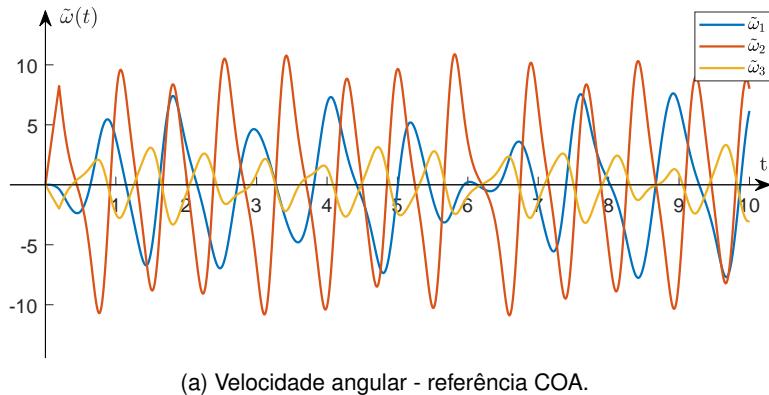
$$\tilde{\omega}_i = \omega_i - \frac{1}{M_T} \sum_{k=1}^n M_k \omega_k, \quad \tilde{\delta}_i = \delta_i - \frac{1}{M_T} \sum_{k=1}^n M_k \delta_k,$$

sendo M_T a soma das constantes de inércia.

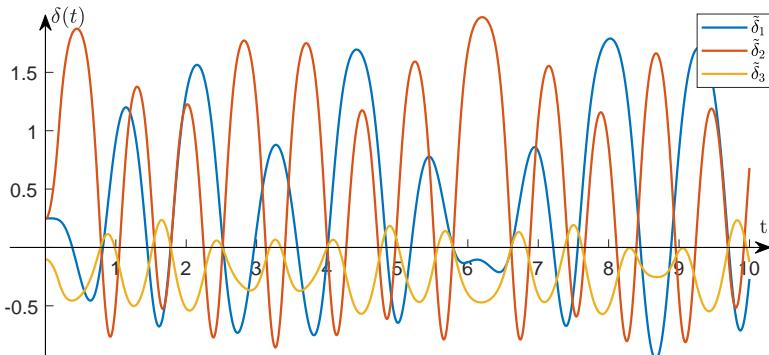
Figura 20 – Sistema de 3 barras e 3 geradores.

Fonte: BRETAS e ALBERTO^[42].

Os resultados da Figura 21 são relativos ao tempo de abertura de $t_a = 0.194$ s, enquanto que os resultados apresentados na Figura 22 foram obtidos com um tempo de abertura igual a $t_a = 0.195$ s.

Figura 21 – Evolução no tempo dos estados do sistema de 3 barras e 3 geradores para $t_a = 0.194$ s.

(a) Velocidade angular - referência COA.



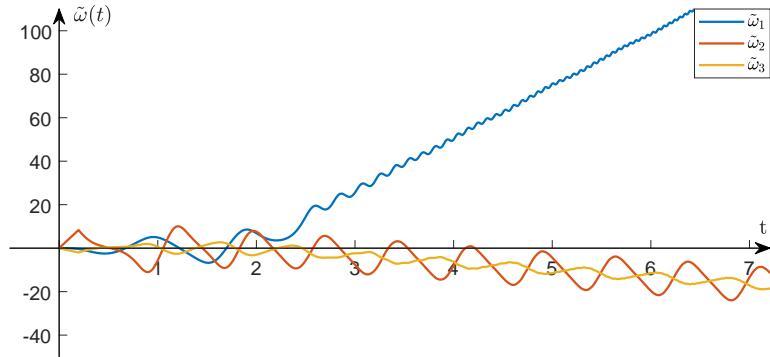
(b) Ângulo - referência COA.

Fonte: Elaborado pelo autor.

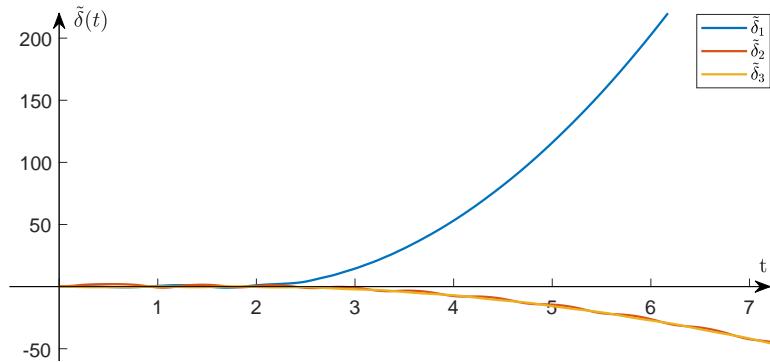
Na Figura 21, vemos que os ângulos $\tilde{\delta}$ dos geradores estão oscilando em torno da origem, indicando que eles estão em torno da trajetória do centro de ângulo. Já na Figura 22, percebe-se que o $\tilde{\delta}_1$ divergiu do trajeto dos demais geradores, indicando que houve perda de sincronismo entre os geradores. O que conclui-se através das Figuras 21 e 22 é que o tempo crítico de abertura t_{cr} , que é o máximo tempo de abertura dos disjuntores que mantém o sistema em equilíbrio, está entre 0.194 e 0.195 s. Vale ressaltar que, para chegar

no intervalo $0.194 < t_{cr} < 0.195$, intervalo esse que também foi obtido por Bretas e Alberto^[42], é necessário utilizar números com mais precisão. Os valores apresentados estão arredondados.

Figura 22 – Evolução no tempo dos estados do sistema de 3 barras e 3 geradores para $t_a = 0.195$ s.



(a) Velocidade angular - referência COA.



(b) Ângulo - referência COA.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Aqui temos um exemplo de um sistema que em que normalmente não se emprega uma modelagem utilizando a abordagem dos sistemas chaveados. Apesar da complexidade desse exemplo ser maior quando comparado com os demais, dado que temos seis variáveis de estado e os subsistemas não são lineares, esse sistema de 3 barras e 3 geradores é extremamente simples. Tal problema, de estudar a estabilidade transitória de um sistema elétrico de potência, aparece em sistemas de geração e distribuição extremamente longos e complexos, como o próprio Sistema Interligado Nacional (SIN) brasileiro, que cobre praticamente todo o país.

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo analisar sistemas chaveados por meio de uma abordagem matemática baseada em equações diferenciais e integrais generalizadas. A modelagem e a análise desses sistemas são fundamentais para a compreensão de diversos dispositivos amplamente utilizados na engenharia elétrica, como conversores de corrente contínua (CC-CC), motores de corrente contínua (CC), e outros sistemas de controle e automação. Através de uma abordagem sistemática, foi possível explorar os principais conceitos teóricos e validar, por meio de simulações, a eficácia dos modelos desenvolvidos.

O modelo médio e o modelo de pequenos sinais baseiam-se em linearizações e suposições simplificadoras, o que pode levar a uma descrição imprecisa do comportamento dinâmico em condições nas quais os efeitos não lineares são predominantes, como em mudanças rápidas de carga ou variações abruptas na tensão de entrada. Isso evidenciou a necessidade de métodos alternativos e mais robustos para capturar a dinâmica completa dos sistemas chaveados, especialmente em aplicações em que a precisão é essencial.

O estudo das equações diferenciais impulsivas e integrais generalizadas ofereceu uma abordagem complementar, permitindo uma análise mais detalhada do comportamento dinâmico desses sistemas, sem depender de suposições lineares. Essa metodologia mostrou-se eficaz na descrição das transições rápidas e das mudanças abruptas nos estados do sistema, proporcionando uma visão mais realista dos fenômenos envolvidos. As simulações realizadas confirmaram a capacidade da modelagem de representar de forma precisa o comportamento tanto transiente quanto em regime permanente dos dispositivos estudados, mesmo diante de variações nos parâmetros.

A análise realizada contribui para a compreensão dos desafios e das limitações das técnicas tradicionais de modelagem, sugerindo que a utilização de métodos baseados em equações diferenciais generalizadas pode oferecer uma alternativa mais robusta para a análise de sistemas chaveados. As descobertas reforçam a importância de se buscar metodologias que capturem com maior precisão a dinâmica intrínseca dos sistemas, especialmente em contextos de alta complexidade, como nos conversores de eletrônica de potência.

Os resultados obtidos também reforçam a aplicabilidade das técnicas propostas em diferentes áreas da engenharia elétrica, como sistemas de potência e eletrônica de potência. A precisão dos modelos desenvolvidos oferece uma base sólida para o desenvolvimento de novos dispositivos e sistemas mais eficientes e robustos. Além disso, o trabalho abre caminho para pesquisas futuras, sugerindo a aplicação das técnicas estudadas em outros tipos de conversores e sistemas chaveados, bem como a integração com métodos de controle baseados em chaveamento.

Em conclusão, esta monografia não apenas alcança seus objetivos ao demonstrar a eficácia das técnicas de modelagem, mas também contribui para o avanço do conhecimento na área de sistemas chaveados. Ao proporcionar uma base teórica e prática para o estudo desses sistemas, o trabalho oferece recursos valiosos para engenheiros e pesquisadores que buscam desenvolver soluções inovadoras e eficientes para problemas complexos em engenharia elétrica.

REFERÊNCIAS

- 1 LIU, Y.-F.; EBERLE, W. Developments in switching mode power supply technologies. *IEEE Canadian Review*, IEEE, v. 61, p. 9–13, 2009.
- 2 ZHU, Y.; YAO, M.; SUN, X. A review on predictive control technology for switched reluctance motor system. *World Electric Vehicle Journal*, v. 14, n. 8, 2023. Disponível [aqui](#). Acesso em 05 de novembro de 2024.
- 3 HAGHBIN, S.; RABIEI, A.; GRUNDITZ, E. Switched reluctance motor in electric or hybrid vehicle applications: A status review. In: *2013 IEEE 8th Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA)*. Melbourne, Austrália: IEEE, 2013. p. 1017–1022.
- 4 YAFAOUI, A.; WU, B.; CHEUNG, R. Photovoltaic energy systems part 2: System control technology. *IEEE Canadian Review*, IEEE, v. 61, p. 14–17, 2009.
- 5 MAZANTI, G. A. *Sistemas Chaveados: Estudo Geral*. Trabalho de Conclusão de Curso — Universidade de São Paulo, 2011.
- 6 LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 54, n. 2, p. 308–322, 2009.
- 7 FRANKLIN, J. D. P. G. F.; EMAMI-NAEINI, A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education, 2009. v. 6.
- 8 TSE, C.; BERNARDO, M. D. Complex behavior in switching power converters. *Proceedings of the IEEE*, v. 90, n. 5, p. 768–781, 2002.
- 9 XU, X.; ANTSAKLIS, P. Optimal control of switched systems: new results and open problems. In: *Proceedings of the 2000 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No.00CH36334)*. Chicago, IL: IEEE, 2000. v. 4, p. 2683–2687.
- 10 ZHANG, Z.; GULTEKIN, M. A.; BAZZI, A. M. State-space modeling of multi-mode-controlled induction motor drive. In: *2021 IEEE International Electric Machines & Drives Conference (IEMDC)*. Columbus, OH: IEEE, 2021. p. 1–5.
- 11 RASHID, M. H. . *ELETRÔNICA DE POTÊNCIA: Dispositivos, circuitos e aplicações*. 4. ed. São Paulo, SP: Pearson Education do Brasil, 2014.
- 12 YAN, D. et al. Review of general modeling approaches of power converters. *Chinese Journal of Electrical Engineering*, v. 7, n. 1, p. 27–36, 2021.
- 13 EL-EBIARY, D. et al. Average behavioral modeling technique for switched-capacitor voltage converters. In: *2006 IEEE International Behavioral Modeling and Simulation Workshop*. San Jose, CA: IEEE, 2006. p. 109–114.
- 14 COFFEY, S. et al. Limitations and comparisons of small signal modelling techniques in converter dominated medium voltage networks. In: *2023 25th European Conference on Power Electronics and Applications (EPE'23 ECCE Europe)*. Aalborg, Dinamarca: IEEE, 2023. p. 1–8.
- 15 SEDRA, A. S.; SMITH, K. C. *Microelectronic Circuits*. 8th. ed. [S.I.]: Oxford University Press, 2020.
- 16 NGUYEN, D. G.; TRAN, D. T.; AHN, K. K. Disturbance observer-based chattering-attenuated terminal sliding mode control for nonlinear systems subject to matched and mismatched disturbances. *Applied Sciences*, v. 11, n. 17, 2021. ISSN 2076-3417. Disponível [aqui](#). Acesso em 03 de novembro de 2024.
- 17 GOEBEL, R.; SANFELICE, R. G.; TEEL, A. R. *Hybrid Dynamical Systems: Modeling, Stability, and Robustness*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2012.
- 18 YUAN, S.; SCHUTTER, B. D.; BALDI, S. Adaptive tracking control of switched linear systems using mode-dependent average dwell time. In: *2018 Eighth International Conference on Information Science and Technology (ICIST)*. Cordoba, Espanha: IEEE, 2018. p. 1–7.
- 19 MARTINS, E. R. *ESSENTIALS OF SIGNALS AND SYSTEMS*. 1. ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2023.

- 20 JOHNSON, D. E.; HILBURN, J. L.; JOHNSON, J. R. *FUNDAMENTOS DE ANÁLISE DE CIRCUITOS ELÉTRICOS*. 4. ed. Rio de Janeiro, RJ: Prentice-Hall do Brasil, 1994.
- 21 ERICKSON, R. W. *Fundamentals of Power Electronics*: Second edition. 2. ed. Secaucus, NJ: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- 22 BONOTTO, E. de M. *Sistemas semidinâmicos impulsivos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005. Disponível [aqui](#). Acesso em 29 de setembro de 2024.
- 23 LAKSHMIKANTHAN, V.; BAINOV, D. D.; SIMEONOV, P. S. *Theory of Impulsive Differential Equations*. New York: World Scientific, 1989. v. 6. (Modern Applied Mathematics, v. 6).
- 24 GADOTTI, M. C.; TÁBOAS, P. Z. Periodic and backset solutions of differential delay systems with self-supporting condition. *Journal of Differential Equations*, v. 229, n. 1, p. 138–153, 2006. Disponível [aqui](#). Acesso em 04 de outubro de 2024.
- 25 JOELIANTO, E.; SUTARTO, H. Y. Controlled switching dynamical systems using linear impulsive differential equations. *Intelligent Unmanned Systems: Theory and Applications*, v. 192, p. 227–244, 2009.
- 26 LIBERZON, D. *Switching in Systems and Control*. Boston, MA: Birkhäuser, Boston, 2003. (Systems and Control).
- 27 LIAN, J.; LI, C.; ZHAI, G. Stability of impulsive switched systems with sampled-data control. *IET Control Theory & Applications*, John Wiley & Sons Ltd on behalf of The Institution of Engineering and Technology, v. 15, n. 3, p. 523–533, 2021. Disponível [aqui](#). Acesso em 14 de outubro de 2024.
- 28 XU, H.; LIU, X.; TEO, K. L. Robust H_∞ stabilisation with definite attenuance of an uncertain impulsive switch system. *The ANZIAM Journal*, v. 46, n. 4, p. 471–484, 2005.
- 29 BONOTTO, E. M.; FEDERSON, M.; MESQUITA, J. G. *Generalized Ordinary Differential Equations in Abstract Spaces and Applications*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2021.
- 30 RAGHAVENDRA, K. V. G. et al. A comprehensive review of dc–dc converter topologies and modulation strategies with recent advances in solar photovoltaic systems. *Electronics*, v. 9, n. 1, p. 31, 2020. Disponível [aqui](#). Acesso em 10 de outubro de 2024.
- 31 TUMINO, P. *An Introduction to Inverters for Photovoltaic (PV) Applications*. 2020. Disponível [aqui](#). Acesso em 10 de outubro de 2024.
- 32 CAMPOS, M. C. M. M. de; TEIXEIRA, H. C. G. *Controles típicos de equipamentos e processos industriais*. São Paulo, SP: Edgard Blucher, 2006. v. 1. 122 p.
- 33 CHATTEJEE, C. C. a. S. D. D. A comprehensive review of dc–dc converter topologies and modulation strategies with recent advances in solar photovoltaic systems. *Power Electronics and Drives*, v. 8, n. 1, p. 335–367, 2023. Disponível [aqui](#). Acesso em 13 de outubro de 2024.
- 34 MATHWORKS. *PWM Generator*. 2017. Disponível [aqui](#). Acesso em 13 de outubro de 2024.
- 35 ADNAN, M. F. et al. Design and simulation of a dc - dc boost converter with pid controller for enhanced performance. *International Journal of Engineering Research & Technology*, p. 27–32, 2017.
- 36 MONTEIRO, J. R. B. A.; CASTRO, A. G. de; ALMEIDA, T. E. P. de. Sliding mode vector control of non-sinusoidal permanent magnet synchronous machine. In: *2017 Brazilian Power Electronics Conference (COBEP)*. Juiz de Fora, MG: Brazilian Power Electronics Society, 2017. p. 1–7. Disponível [aqui](#). Acesso em 08 de outubro de 2024.
- 37 BASILIO, J. C.; MOREIRA, M. V. Experimentos para estimação dos parâmetros de motores de corrente contínua. *VII Encontro de Educação em Engenharia*, p. 298–307, 2001.
- 38 YU, H. Application of in dc motor control method in intelligent vehicles and robots. *2022 IEEE 5th International Conference on Automation, Electronics and Electrical Engineering (AUTEEE)*, p. 1018–1021, 2022.
- 39 SLOTINE, J.-J. E.; LI., W. *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1991.

- 40 KUNDUR, P. et al. Definition and classification of power system stability ieee/cigre joint task force on stability terms and definitions. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 19, n. 3, p. 1387–1401, 2004. Disponível [aqui](#). Acesso em 27 de outubro de 2024.
- 41 HATZIARGYRIOU, N. et al. Definition and classification of power system stability – revisited & extended. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 36, n. 4, p. 3271–3281, 2021. Disponível [aqui](#). Acesso em 27 de outubro de 2024.
- 42 BRETAS, N. G.; ALBERTO, L. F. C. *Estabilidade Transitória em Sistemas Eletroenergéticos*. [S.I.]: Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 2020.
- 43 ALJARRAI, K. A.; SHERWALI, H. H. Using wacs algorithm based on center of angle (coa) technique in assessing the stability of the libyan grid. In: *2021 IEEE 1st International Maghreb Meeting of the Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering MI-STA*. Tripoli, Líbia: IEEE, 2021. p. 585–590. Disponível [aqui](#). Acesso em 28 de outubro de 2024.
- 44 SILVA, F. A. da. *Controlabilidade e observabilidade em equações diferenciais ordinárias generalizadas e aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. Disponível [aqui](#). Acesso em 29 de setembro de 2024.
- 45 SCHECHTER, E. *An Introduction to The Gauge Integral*. 2009. Disponível [aqui](#). Acesso em 27 de junho de 2024.
- 46 GORDONT, R. A. *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock*. Walla Walla, WA: American Mathematical Society, 1994. v. 4. 107 p.

APÊNDICE A - FUNÇÃO REGRADA

Definição A.1 (Partição^[29]). Seja $[a, b]$ um intervalo compacto de \mathbb{R} . O conjunto de pontos $d = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ tais que

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$$

é chamado de **partição** de $[a, b]$. Denotaremos por $|d|$ o número de intervalos em que $[a, b]$ é dividido pela partição d . O conjunto formado por todas as partições d de $[a, b]$ será denotado por $D_{[a,b]}$.

Definição A.2 (Função de Variação Limitada^[29]). Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função e $d \in D_{[a,b]}$ uma partição. A **variação** de f será dada por

$$\text{var}(f) = \text{var}_a^b(f) = \sup_{d \in D_{[a,b]}} \sum_{i=1}^{|d|} |f(t_i) - f(t_{i-1})|.$$

Se $\text{var}(f) < \infty$, então f será dita de **variação limitada** e, nesse caso, escreveremos $f \in BV([a, b], \mathbb{R}^n)$.

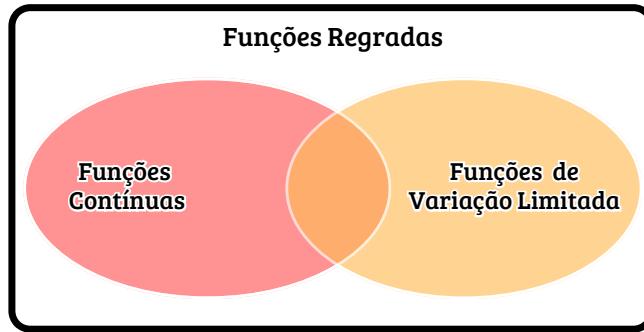
Definição A.3 (Função Regrada^[29]). Seja $[a, b]$ um intervalo compacto de \mathbb{R} . Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ será chamada **regrada**, se os limites laterais

$$f(t^-) = \lim_{s \rightarrow t^-} f(s), \quad t \in (a, b], \quad \text{e} \quad f(t^+) = \lim_{s \rightarrow t^+} f(s), \quad t \in [a, b),$$

existirem. O espaço vetorial formado por tais funções regradas f será denotado por $G([a, b], \mathbb{R}^n)$. Já o subespaço de $G([a, b], \mathbb{R}^n)$ formado pelas funções contínuas à esquerda será denotado por $G^-([a, b], \mathbb{R}^n)$.

Note que o espaço das funções contínuas, assim como o espaço das funções de variação limitada, são subespaços de $G([a, b], \mathbb{R}^n)$; ver Figura 23.

Figura 23 – Diagrama de Venn do espaço de $G([a, b], \mathbb{R}^n)$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Funções contínuas são as mais usuais e o leitor deve ter conhecimento de várias delas. Para não deixar em branco, podemos citar as funções seno, cosseno, a função constante e a função afim. Já como exemplo de funções de variação limitada e que também são contínuas, podemos considerar qualquer função contínua, crescente e limitada. Para exemplos de funções que pertencem ao conjunto das funções de variação limitada, mas que não estão no conjunto das funções contínuas, basta tomar uma função limitada e crescente que possui uma descontinuidade de primeira espécie (de salto) em algum ponto. Uma função que é contínua, mas que não é de variação limitada é a função

$$f(t) = \begin{cases} t \sin(\frac{1}{t}), & t \in (0, 1] \\ 0 & t = 0, \end{cases}$$

pois ela é muito oscilatória perto da origem. Por fim, insira alguma descontinuidade na função $f(t)$ definida acima (como $f(0) = 1$, por exemplo), para obter uma função regrada (já que seus limites laterais existem) que não é contínua e nem de variação limitada.

APÉNDICE B - INTEGRAL DE HENSTOCK-KURZWEIL

Seja $[a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto, com $a < b$. Uma **partição marcada** de $[a, b]$ é uma coleção finita de pares $D = \{(\tau_i, [t_{i-1}, t_i]), i = 1, 2, \dots, n\}$ para algum inteiro $n > 0$, tal que $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ e $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Os elementos τ_i são chamados de **marcas** dos subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, de $[a, b]$.

Qualquer função positiva $\delta : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ será chamada de **calibre** de $[a, b]$. Uma partição marcada

$$D = \{(\tau_i, [t_{i-1}, t_i]), i = 1, 2, \dots, n\} = \{t_0, \tau_1, t_1, \dots, t_{n-1}, \tau_n, t_n\}$$

será dita **δ -fina**, se

$$[t_{i-1}, t_i] \subset (\tau_i - \delta(\tau_i), \tau_i + \delta(\tau_i)) \quad (\text{B.1})$$

para cada $i = 1, 2, \dots, n$, com δ sendo um calibre de $[a, b]$ ^[44].

Definição B.1 (Integral de Henstock-Kurzweil-Stieltjes^[29]). *Diremos que uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ será Henstock-Kurzweil-Stieltjes integrável com respeito a g , sendo $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função, ou Henstock-Kurzweil-Stieltjes g -integrável, se existir uma função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, tal que para todo $\epsilon > 0$, existirá um calibre δ de $[a, b]$ tal que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{|D|} f(\tau_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})] - F \right\| < \epsilon$$

para toda partição marcada δ -fina de $[a, b]$, $D = \{t_0, \tau_1, t_1, \dots, t_{n-1}, \tau_n, t_n\}$. A função F será chamada de **integral de Henstock-Kurzweil-Stieltjes** de f com respeito a g no intervalo $[a, b]$ e será denotada por

$$F = \int_b^a f(t) dg(t). \quad (\text{B.2})$$

A garantia de que a integral de Henstock-Kurzweil-Stieltjes esteja bem definida segue do lema seguinte.

Lema B.2 (Lema de Cousin^[44]). *Dado um calibre δ de $[a, b]$, existe uma partição marcada δ -fina de $[a, b]$.*

Alguns casos particulares da integral de Henstock-Kurzweil-Stieltjes surgem ao assumirmos certas condições. Por exemplo, tome $g(t) = t$ na Definição B.1 para (B.2) tornar-se a integral usual de Henstock-Kurzweil

$$\int_b^a f(t) dt.$$

Ao invés disso, considere que o calibre $\delta = \text{cte}$ em (B.2) para obter a integral de Riemann-Stieltjes

$$\int_b^a f(t) dg(t)$$

e a integral de Riemann

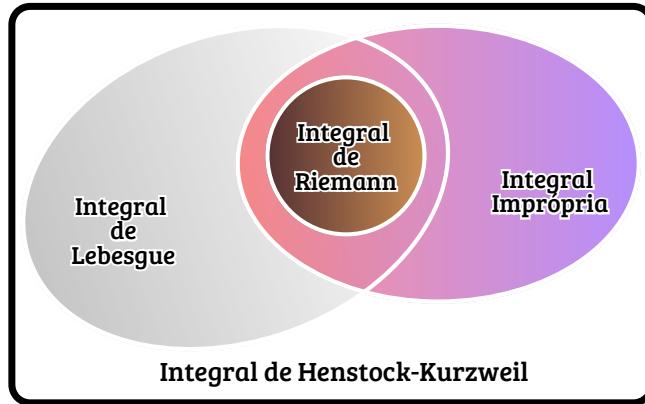
$$\int_b^a f(t) dt,$$

se também for considerado que $g(t) = t$ (ver Figura 24).

Por outro lado, suponha que f assuma valores reais e tome partições "semi-marcadas" $(\tau_i, [t_{i-1}, t_i])$ no lugar de (B.1) (a diferença aqui é que não é preciso que $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$) para obter a integral de Lebesgue

$$\int_b^a f(t) dt.$$

Figura 24 – Diagrama de Venn referente à integral de Henstock-Kurzweil.



Fonte: Eric Schechter [45].

De outro modo, ao considerar que $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, diremos que a integral em (B.2) trata-se da *Perron–Stieltjes* (ou integral vetorial de Henstock-Kurzweil-Stieltjes)

$$\int_b^a f(t) dg(t).$$

Funções contínuas e limitadas no intervalo $[a, b]$ são todas *Riemann* integráveis (em $[a, b]$). Um exemplo de função que não é *Riemann* integrável é a função

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}}, & t \in (0, 1] \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

pois ela não é limitada neste intervalo. Entretanto, $f(t)$ é integrável no sentido da integral imprópria de Riemann.

Já a função de Dirichlet no intervalo $[0, 1]$

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é *Lebesgue* integrável, mas não possui integral imprópria de Riemann, por ser descontínua em todos os pontos do intervalo.

Como exemplo de função que só é integrável via integral de *Henstock-Kurzweil*, podemos citar a derivada da função

$$f(t) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right), & \text{para } 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{para } t = 0, \end{cases}$$

por conta da $f(t)$ não ser absolutamente contínua^[46].

APÊNDICE C - ESBOÇO DA PROVA DO COROLÁRIO 3.6.1

Aqui será apresentada um esboço da prova do resultado que dá origem ao Corolário 3.6.1. Para a demonstração completa, consulte^[29].

O nosso ponto de partida será o corolário seguinte.

Corolário C.1. *Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que g é regrada e a integral de Perron-Stieltjes*

$$\int_a^b f(s) dg(s)$$

existe. Então a função

$$h(t) = \int_a^t f(s) dg(s)$$

é regrada em $[a, b]$ e satisfaz

$$\begin{aligned} h(t^+) &= h(t) + f(t)\Delta^+ g(t), & t \in [a, b) \\ h(t^-) &= h(t) + f(t)\Delta^- g(t), & t \in (a, b] \end{aligned}$$

com

$$\Delta^+ g(t) = g(t^+) - g(t) \quad \text{e} \quad \Delta^- g(t) = g(t^-) - g(t).$$

Vale ressaltar que o mesmo vale ao colocar o t no limite inferior da integral. Perceba que se g não possuir descontinuidade em t , então $h(t^+) = h(t) = h(t^-)$, como normalmente acontece. Já se g possuir uma descontinuidade em t , tal descontinuidade será contabilizada através do valor de $f(t)\Delta^+ g(t)$ e/ou $f(t)\Delta^- g(t)$, a depender do tipo de descontinuidade. Pensando na integral em sua concepção inicial, isto é, através de uma soma de áreas da forma $f(\tau)[g(t_{i+1}) - g(t_i)]$, como foi apresentado em B.1, intui-se que a área referente ao instante t não será nula (pelo menos não por conta de g) pois $g(t^+) - g(t) \neq 0$ e/ou $g(t^-) - g(t) \neq 0$.

Convencidos de que o Corolário C.1 é válido, é possível provar o próximo lema.

Lema C.2. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Suponha que para cada $k \in \{1, \dots, m\}$, $t_k \in [t_0, t_0 + \lambda]$, $t_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_0 + \lambda$, e $g : [t_0, t_0 + \lambda] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função regrada, contínua à esquerda em $[t_0, t_0 + \lambda]$ e contínua em t_k para todo k . Seja $f : [t_0, t_0 + \lambda] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, uma função qualquer e considere que $\tilde{f} : [t_0, t_0 + \lambda] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é tal que $\tilde{f}(t) = f(t)$ para todo $t \in [t_0, t_0 + \lambda] \setminus \{t_1, \dots, t_m\}$, e tome $\tilde{g} : [t_0, t_0 + \lambda] \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que $\tilde{g} - g$ seja constante em cada um dos intervalos $[t_0, t_1], (t_1, t_2], \dots, (t_{m-1}, t_m], (t_m, t_0 + \lambda]$. Então a integral (de Henstock-Kurzweil-Stieltjes)*

$$\int_{t_0}^{t_0 + \lambda} \tilde{f}(s) d\tilde{g}(s)$$

existirá, e somente se, a integral (de Henstock-Kurzweil-Stieltjes)

$$\int_{t_0}^{t_0 + \lambda} f(s) dg(s)$$

existir. Nesse caso, teremos

$$\int_{t_0}^{t_0 + \lambda} \tilde{f}(s) d\tilde{g}(s) = \int_{t_0}^{t_0 + \lambda} f(s) dg(s) + \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, m\} \\ t_k < t_0 + \lambda}} \tilde{f}(t_k) \Delta^+ \tilde{g}(t_k).$$

Prova: Como $\tilde{g} - g$ é constante nos intervalos $[t_0, t_1], (t_1, t_2], \dots, (t_{m-1}, t_m], (t_m, t_0 + \lambda]$, vale

$$\int_{t_0}^{t_1} \tilde{f}(s) d(\tilde{g} - g)(s) = \lim_{\tau \rightarrow t_k^+} \int_{\tau}^{t_{k+1}} \tilde{f}(s) d(\tilde{g} - g)(s) = \lim_{\tau \rightarrow t_m^+} \int_{\tau}^{t_0+\lambda} \tilde{f}(s) d(\tilde{g} - g)(s) = 0 \quad (\text{C.3})$$

com $k \in \{1, \dots, m-1\}$. Sendo assim, pelo Corolário C.1 e por (C.3), segue que

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \tilde{f}(s) d(\tilde{g} - g)(s) &= \lim_{\tau \rightarrow t_k^+} \int_{\tau}^{t_{k+1}} \tilde{f}(s) d(\tilde{g} - g)(s) + \lim_{\tau \rightarrow t_k^+} \int_{t_k}^{\tau} \tilde{f}(s) d(\tilde{g} - g)(s) \\ &= 0 + \tilde{f}(t_k) \Delta^+(\tilde{g} - g)(t_k) = \tilde{f}(t_k) \Delta^+(\tilde{g} - g)(t_k) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

para $k \in \{1, \dots, m-1\}$. Quando $t_m \neq t_0 + \lambda$ obtém-se, de maneira análoga, que

$$\int_{t_m}^{t_0+\lambda} \tilde{f}(s) d(\tilde{g} - g)(s) = \tilde{f}(t_k) \Delta^+(\tilde{g} - g)(t_k), \quad (\text{C.5})$$

caso contrário, (C.5) será igual a 0.

Juntando (C.3), (C.4) e (C.5) chega-se em

$$\int_{t_0}^{t_0+\lambda} \tilde{f}(s) d(\tilde{g} - g)(s) = \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, m\} \\ t_k < t_0 + \lambda}} \tilde{f}(t_k) \Delta^+ \tilde{g}(t_k) \quad (\text{C.6})$$

o que prova a existência da integral (de Henstock-Kurzweil-Stieltjes) acima.

Agora, pela continuidade de g nos instantes t_k e pela definição de \tilde{f} , segue que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \tilde{f}(s) dg(s) &= \lim_{\tau \rightarrow t_1^-} \int_{t_0}^{\tau} \tilde{f}(s) dg(s) = \lim_{\tau \rightarrow t_1^-} \int_{t_0}^{\tau} f(s) dg(s) = \int_{t_0}^{t_1} f(s) dg(s); \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \tilde{f}(s) dg(s) &= \lim_{\substack{\sigma \rightarrow t_k^+ \\ \tau \rightarrow t_{k+1}^-}} \int_{\sigma}^{\tau} \tilde{f}(s) dg(s) = \lim_{\substack{\sigma \rightarrow t_k^+ \\ \tau \rightarrow t_{k+1}^-}} \int_{\sigma}^{\tau} f(s) dg(s) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s) dg(s); \\ \int_{t_m}^{t_0+\lambda} \tilde{f}(s) dg(s) &= \lim_{\tau \rightarrow t_m^+} \int_{t_0}^{\tau} \tilde{f}(s) dg(s) = \lim_{\tau \rightarrow t_m^+} \int_{t_0}^{\tau} f(s) dg(s) = \int_{t_m}^{t_0+\lambda} f(s) dg(s) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

para todo $k \in \{1, \dots, m-1\}$.

Nas igualdades acima, as integrais do lado esquerdo existirão se e somente se as do lado direito existirem. Consequentemente, obtém-se

$$\int_{t_0}^{t_0+\lambda} \tilde{f}(s) dg(s) = \int_{t_0}^{t_0+\lambda} f(s) dg(s) \quad (\text{C.8})$$

e a integral (de Henstock-Kurzweil-Stieltjes) da esquerda existirá se, e somente se, a integral (de Henstock-Kurzweil-Stieltjes) da direita existir e elas terão o mesmo valor. Além disso,

$$\int_{t_0}^{t_0+\lambda} \tilde{f}(s) d\tilde{g}(s) = \int_{t_0}^{t_0+\lambda} \tilde{f}(s) dg(s) + \int_{t_0}^{t_0+\lambda} \tilde{f}(s) d(\tilde{g} - g)(s) = \int_{t_0}^{t_0+\lambda} f(s) dg(s) + \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, m\} \\ t_k < t_0 + \lambda}} \tilde{f}(t_k) \Delta^+ \tilde{g}(t_k)$$

por (C.8) e (C.6), o que implica o resultado.

Utilizando o Lema C.2, é fácil mostrar o teorema a seguir.

Teorema C.3. Seja $m, n \in \mathbb{N}$. Assuma que, para cada $k \in \{1, \dots, m\}$, $t_k \in [t_0, t_0 + \lambda]$, com $t_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_0 + \lambda$, e $I_k : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja um operador impulsivo tal que $I + I_k : B \rightarrow B$, em que $B \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e $I : B \rightarrow B$ é o operador identidade. Suponha que $f : \mathbb{R}^n \times [t_0, t_0 + \lambda] \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja Henstock-Kurzweil-Stieltjes integrável com respeito à função $g \in G^-([t_0, t_0 + \lambda], \mathbb{R})$ que é contínua em cada t_k . Defina

$$\tilde{f}(y, t) = \begin{cases} f(y, t), & t \in [t_0, t_0 + \lambda] \setminus \{t_1, \dots, t_m\} \\ I_k(y(t)), & t = t_k, k \in \{1, \dots, m\}. \end{cases}$$

Além disso, para todo $k \in \{1, \dots, m-1\}$, seja $c_k \in \mathbb{R}_+$ uma constante com $c_k \leq c_{k+1}$ e defina $\tilde{g} : [t_0, t_0 + \lambda] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} g(t), & t \in [t_0, t_1] \\ g(t) + c_k, & t \in (t_k, t_{k+1}], k \in \{1, \dots, m-1\} \\ g(t) + c_m, & t \in (t_m, t_0 + \lambda] \end{cases}$$

satisfazendo $\Delta^+ \tilde{g}(t_k) = 1$ para todo $k \in \{1, \dots, m\}$. Então $x \in G([t_0, t_0 + \lambda], B)$ será uma solução do problema de valor inicial para a Equação Integral do tipo Volterra-Stieltjes (EIV)

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(s), s) dg(s) + \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, m\} \\ t_k < t}} I_k(x(t_k)), & t \in [t_0, t_0 + \lambda], \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

se, e somente se, x for solução da EIV^[29]

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \tilde{f}(x(s), s) d\tilde{g}(s), & t \in [t_0, t_0 + \lambda], \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Prova: Pelo Lema C.2, vale

$$\int_{t_0}^t \tilde{f}(x(s), s) d\tilde{g}(s) = \int_{t_0}^t f(x(s), s) dg(s) + \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, m\} \\ t_k < t}} \tilde{f}(x_{t_k}, t_k) \Delta^+ \tilde{g}(t_k).$$

Logo, pelas definições das funções \tilde{f} e \tilde{g} , segue que

$$\int_{t_0}^t \tilde{f}(x(s), s) d\tilde{g}(s) = \int_{t_0}^t f(x(s), s) dg(s) + \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, m\} \\ t_k < t}} I_k(x(t_k)),$$

provando o resultado.

O Corolário 3.6.1 é obtido de imediato a partir do Teorema C.3.

ÍNDICE

A

atraso , 45
autossustentação , 45

C

calibre , 73
centro de ângulo , 61
chattering , 58
COA , 61
confluência , 43
contínua a esquerda , 41
conversor CC-CC , 26
curva integral , 41

D

δ -fina , 73
duty cycle , 29

E

EDI , 41
EIV , 50
entrada de controle , 23
equação
 diferencial impulsiva , 41
 integral do tipo Volterra , 50
estado , 23

F

fenômeno de pulso , 43
função
 de variação limitada , 71
 regrada , 71
função memória , 45
funções
 regradas , 51

G

$G([a, b], \mathbb{R}^n)$, 71
 $G^-([a, b], \mathbb{R}^n)$, 71

I

instante de chaveamento , 23
integral
 de Henstock-Kurzweil-Stieltjes , 51
 de Henstock-Kurzweil , 73
 de Henstock-Kurzweil-Stieltjes , 73
 de Lebesgue , 73
 de Perron-Stieltjes , 74
 de Riemann , 73
 de Riemann-Stieltjes , 73
 imprópria de Riemann , 74

invariante no tempo , 25

L

Lei de Kirchhoff das Correntes , 28
Lei de Kirchhoff das Tensões , 28
linear , 25
LKC , 28
LKT , 28
LTI , 25
lógica de chaveamento , 23

M

marcas , 73
modelo
 de pequenos sinais , 31
 em espaço de estados , 34
 médio , 27
modo , 23
 de condução contínua , 30
 de condução descontínua , 30
momentos de impulso , 41

P

partição , 71
partição marcada , 73
PID , 53
PWM , 37, 54

R

razão cíclica , 29
resposta
 forçada , 36
 natural , 36

S

sinal
 de chaveamento , 23
externo , 23
sistema
 autônomo , 23
 autônomo com impulsos , 44
 autônomo impulsivo com retardo , 45
 chaveado , 23
 com impulsos em tempos fixados , 42
 com impulsos em tempos variáveis , 43
 sliding mode , 57
subsistema , 23
superfície de chaveamento , 57

V

variação limitada , 71