

Bianca Ortelã André Novo

GESTÃO DE FUNDOS DE PENSÃO DE BENEFÍCIO DEFINIDO E
APLICAÇÃO DE ALM

São Paulo
2013

Bianca Ortelã André Novo

GESTÃO DE FUNDOS DE PENSÃO DE BENEFÍCIO DEFINIDO E APLICAÇÃO DE ALM

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade Estadual de São Paulo para obtenção do título de *Master of Business Administration*

Área de concentração: Engenharia Financeira

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo de Barros Nabholz

São Paulo
2013

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Rodrigo de Barros Nabholz, não só pelo auxílio e paciência como também por ser uma inspiração profissional e pessoal.

Aos meus colegas Lucas Furlan Coletti, Thatiane Célia Miyahira Coletti e Ricardo Hideo Sahara pela companhia ao longo do curso.

Ao meu noivo, Thales Macedo Garitezi, pelo incentivo e compreensão ao longo do curso, e especialmente por me auxiliar com a formatação e revisão do texto.

À minha família: meu pai Carlos, minha mãe Elaine e minha irmã Priscila, por me dar apoio em mais uma etapa.

Resumo

Este trabalho é dedicado a apresentar algumas etapas da Gestão de um Fundo de Pensão, da elaboração da Política de Investimentos a aplicação de um modelo de Gestão de Ativos e Passivos. Criamos um plano de benefícios hipotético para apresentar as etapas da gestão. Nosso interesse era definir as variáveis de entrada de um modelo de Gestão de Ativos e Passivos (*Asset Liability Management*, na sigla em inglês), isto é, o valor das obrigações do plano, a estimativa de retorno dos investimentos e da volatilidade dos mesmos e também apresentar um modelo com base na Teoria de Carteiras.

Formulamos o problema com o objetivo de obter a melhor alocação de ativos na carteira do fundo de pensão ao longo de um horizonte de tempo determinado e que estivesse de acordo com as restrições legais e da Política de Investimentos. Neste processo, ainda exploramos o método de Imunização para determinar a carteira do plano de benefícios criado na data de avaliação. A partir destes dados, simulamos a alocação dos ativos para o horizonte de tempo escolhido.

Na seção 3.1 apresentamos o modelo utilizado e na seção 3.2 apresentamos os resultados do modelo proposto para o Plano de Benefícios Hipotético.

Palavras-chave: Fundos de Pensão. Gestão de Ativos e Passivos. Modelo Multi-Período. Moderna Teoria de Carteiras.

Abstract

This work is dedicated to present some of the steps in the management of a Pension Fund, from Policy drafting to the application of an Asset and Liability Management Model. We have created an hypothetical benefit plan to present the management criteria. We were interested in defining the input variables of an Asset and Liability Management Model, that is, the value of plan obligations, the estimated return on investment and volatility, and also present a model based on the Theory of Portfolios.

We have formulated the problem focusing on obtaining the best asset allocation in the portfolio of a pension fund over a given time horizon, and at the same time complying with the legal restrictions and Investment Policy. During the development of this work, we have further explored the method of immunization to determine the portfolio's benefit plan created at the evaluation date. From these data, we have simulated the allocation of assets for the chosen time horizon.

In section 3.1 we have presented the model used, in section 3.2 we have presented the results of the proposed model for the Hypothetical Benefit Plan.

Keywords: Pension Funds. Asset Liability Management (ALM). Multiperiod Model. Modern Portfolio Theory.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivos	1
1.2	Os fundos de pensão no Brasil	2
1.3	Os Planos de Benefício	5
1.3.1	Benefício Definido	7
1.3.2	Contribuição Definida	8
1.3.3	Contribuição Variável	8
1.4	A Importância da Gestão de Riscos	9
1.5	Definição de ALM	11
1.6	Avaliação Atuarial	14
1.6.1	Regime de Repartição Simples	16
1.6.2	Regime de Repartição de Capitais de Cobertura	16
1.6.3	Regime de Capitalização	17
2	Desenvolvimento	19
2.1	Apresentação do Caso	19
2.2	O Fundo de pensão	20
2.2.1	Regras do Regulamento	21
2.2.2	Política de Investimentos	22
2.2.3	Características da População do Plano	24
2.3	Premissas atuariais	24
2.4	Carteira Atual	28
2.4.1	Imunização da Carteira	30
2.5	Modelo de Alocação Ótima	32
2.5.1	Modelo Uni-Período	35
2.5.2	Modelo Multi-Período	38
3	Modelo Proposto & Resultados	40
3.1	Modelo para o Fundo de Pensão	40
3.2	Resultados	43

4	Conclusões	45
A	Estimando a inflação	47
B	Premissas Atuariais	51
C	Imunização	53
D	Modelo de Markowitz	54
E	Dados de Entrada - ALM	56
F	Montagem do Modelo no Excel	57
	Referências Bibliográficas	58

Lista de Figuras

1.1	Ativo Total das EFPC	4
1.2	Benefícios das EFPC	5
1.3	Modalidades das EFPC	6
1.4	Ativo Total por Modalidade	7
1.5	Evolução dos Modelos de ALM	14
1.6	Métodos de Custeio	17
2.1	Investimentos das EFPC	29
3.1	Dados de Entrada do Modelo	43
3.2	Percentual de Alocação ao Longo dos Anos	44
A.1	Estimativa da Inflação (IPCA) pelo modelo AR(1)	49
A.2	Previsão do IPCA por modelo AR(1)	50
B.1	Cálculo da Reserva - previsão da inflação pelo AR(1)	51
B.2	Cálculo da Reserva - usando taxa 6%	52
C.1	Imunização do Passivo	53
C.2	Índices IMA - Anbima	53
D.1	Modelo de Markowitz - Risco	54
D.2	Modelo de Markowitz - Retorno	55
D.3	Modelo de Markowitz - Aprimoramentos	55
E.1	Estimativa de retorno: Ativos	56
F.1	Montagem do Modelo no Excel	57

Lista de Tabelas

1.1	Quantidade de Entidades Fechadas de Previdência Complementar, por tipo de patrocínio predominante - (PREVIC, 2013)	3
1.2	Relação das 10 maiores EFPC, segundo os seus ativos. (em milhões) - (PREVIC, 2013)	4
2.1	Limites de Alocação por Segmento	23
2.2	Alocação nos ativos que imunizam o passivo	32
2.3	Composição Financeira da Carteira de Investimentos	32
3.1	Composição da Carteira ao Longo dos Anos	43
3.2	Comparação: Valor da Carteira x Meta Atuarial	44
3.3	Cálculo do Risco	44

Capítulo 1

Introdução

1.1 Objetivos

Um dos objetivos deste trabalho é analisar o processo de Gestão de Fundos de Pensão do ponto de vista da estruturação da Política de Investimentos, uma vez que as Entidades Fechadas de Previdência Complementar (EFPC) fazem parte da carteira de clientes com a qual trabalho atualmente e é de grande interesse entender a dinâmica por trás de suas atividades gerenciais.

Outro objetivo é estudar a gestão destes fundos no que diz respeito aos métodos matemáticos utilizados que devem estar em consonância com a regulação imposta pela Superintendência Nacional de Previdência Complementar - PREVIC. Notadamente, a Gestão de Ativos e Passivos (*Asset Liability Management*, ALM, em inglês), definida como a revisão de estratégias relacionadas a ativos e passivos para atingir as metas financeiras, pagamento de fluxos de caixa e requisitos de capital, é uma ferramenta amplamente utilizada pelos gestores de fundos de pensão para definição das diretrizes dos investimentos e será objeto de estudo deste trabalho.

Nesse sentido, vamos trabalhar com a aplicação do ALM sobre Planos Previdenciários de Benefício Definido. Estes, como veremos a seguir, têm diminuído sua participação no mercado de previdência complementar, em termos de número de planos, principalmente pelo fato de possuírem risco atuarial. Por outro lado, estes são os planos que em volume de ativos totais possuem participação de mais de 70% do mercado, atualmente.

Além disso, os planos de Contribuição Variável têm crescido em importância e possuem em determinado momento as características de um plano de Benefício Definido.

Portanto, estudar estes fundos é relevante visto que a segurança do mercado depende em grande medida da gestão destes fundos de pensão.

1.2 Os fundos de pensão no Brasil

Segundo dados da Secretaria de Previdência Complementar do Ministério da Previdência Social, a primeira entidade destinada a oferecer benefícios considerados hoje como de previdência complementar foi a PREVI, em 1904, a maior EFPC atualmente em termos de investimentos e participação de ativos e assistidos, conforme dados estatísticos da ABRAPP, referentes ao mês de março de 2013 (ABRAPP, 2013).

A PREVI foi criada por um grupo de 52 empregados do Banco da República do Brasil sob a forma de associação com o intuito de garantir aos herdeiros dos funcionários que fizessem parte da entidade o pagamento de uma pensão mensal.

A segunda entidade classificada em termos de investimentos e participação de ativos e assistidos até o primeiro trimestre deste ano é a Fundação Petrobrás de Seguridade Social - PETROS, fundada em 1970. Já a Fundação CESP, que hoje é a quarta colocada em volume de investimentos surgiu em 1974. Todas foram criadas antes mesmo da primeira lei sobre previdência complementar. Nota-se portanto, que o modelo teve suas origens em grandes empresas estatais.

Apenas em 1977 surgiu a primeira lei para o setor: Lei n.º 6.435, de 15 de julho de 1977. Esta lei visava regulamentar e estimular o crescimento do número de planos. Com base nesta lei, surgiu a FUNCEF - Fundação dos Economiários Federais que administra o plano de previdência complementar dos empregados da Caixa Econômica Federal, hoje terceira colocada em termos de ativos. Mais recentemente, em 2001, duas leis complementares vieram com o movimento de "modernização da legislação" segundo (Paixão, 2006): a Lei Complementar n.º 109, de 29 de maio de 2001; e a Lei Complementar n.º 108, de 29 de maio de 2001. Esta:

Dispõe sobre a relação entre a União, os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, suas autarquias, fundações, sociedades de economia mista e outras entidades públicas e suas respectivas entidades fechadas de previdência complementar, e dá outras providências.

Isto é, regulamenta as entidades fechadas de previdência complementar patrocinadas pela administração pública, criando normas especiais de custeio dos planos de benefício com patrocínio estatal.

E aquela determina de forma geral as regras sobre os planos de benefício, sobre as entidades abertas e fechadas de previdência complementar, a fiscalização das mesmas, intervenção e liquidação extrajudicial e sobre o regime disciplinar.

Estas duas leis regulamentam o art. 202 da Constituição Federal, que prevê um dos três regimes de previdência autorizados a funcionar no Brasil: o regime de previdência complementar, que é privado e facultativo, operado por entidades abertas (ou seguradoras autorizadas a operar no ramo vida) ou fechadas de previdência complementar (fundos de pensão).

Art. 202. O regime de previdência privada, de caráter complementar e organizado de forma autônoma em relação ao regime geral de previdência social, será facultativo, baseado na constituição de reservas que garantam o benefício contratado, e regulado por lei complementar. (Redação dada pela Emenda Constitucional nº 20, de 1998)

Nosso foco neste trabalho será o estudo da gestão de um plano de benefício de Entidade Fechada de Previdência Complementar (EFPC), esta definida como operadora de um ou mais planos de benefícios, constituída na forma de sociedade civil ou fundação, estruturada no art. 35 da Lei Complementar n.º 109 de 2001, sem fins lucrativos e com o objetivo de operar plano de benefício de caráter previdenciário.

As EFPC podem ser qualificadas de acordo com os planos de benefício que administram, estes podendo ser:

- de plano comum: quando administram um ou mais planos acessíveis ao universo de participantes;
- multiplano: quando administram planos para diversos grupos de participantes, com independência patrimonial.

E também podem ser classificadas segundo seus patrocinadores ou instituidores:

- singulares: quando possuem um único patrocinador ou instituidor;
- multipatrocinadas: quando possuem vários patrocinadores ou instituidores.

Atualmente as EFPC representam 14,9% do PIB, dados referentes à março deste ano (ABRAPP, 2013). Segundo dados estatísticos da PREVIC relativas ao primeiro trimestre deste ano, existem 324 EFPC cujos os investimentos somam mais do que 648 milhões de reais, sendo que a maior parte dos patrocinadores das EFPC são da iniciativa privada, tal como apresentado na Tabela 1.1 Isso porque, muitas empresas patrocinam os planos com o intuito de oferecer benefícios a seus colaboradores para melhor contratar e reter pessoas.

Patrocínio Predominante	Quantidade EFPC
Instituidor	19
Privada	222
Pública Estadual	44
Pública Federal	37
Pública Municipal	2
Total	324

Tabela 1.1: Quantidade de Entidades Fechadas de Previdência Complementar, por tipo de patrocínio predominante - (PREVIC, 2013)

Porém, em termos de Ativo total, verificamos na Figura 1.1 que o patrocínio do setor público se destaca, o que pode ser explicado pela origem da Previdência Complementar estar ligada à atuação das empresas estatais.

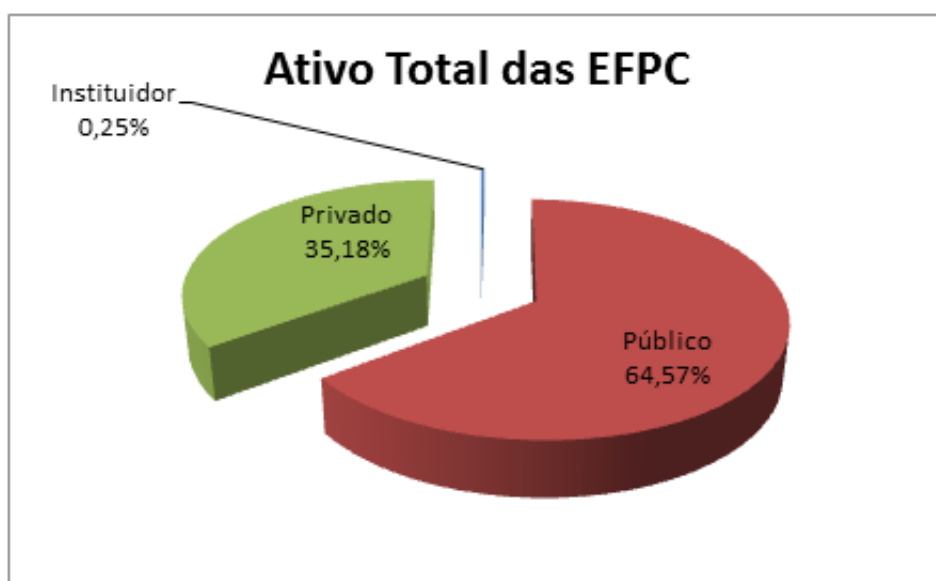


Figura 1.1: Ativo Total das EFPC, segundo patrocínio predominante - (PREVIC, 2013)

Verificamos que das 10 maiores EFPC segundo seus ativos, metade delas patrocinadas predominantemente por instituição pública federal e metade pela iniciativa privada, conforme mostra a Tabela 1.2.

Posição	EFPC	Ativos	Porcentagem	Patrocínio Predominante
1	PREVI/BB	169.546	25,0%	Pública Federal
2	PETROS	74.784	11,0%	Pública Federal
3	FUNCEF	52.540	7,8%	Pública Federal
4	FUNCESP	23.744	3,5%	Privada
5	ITAU UNIBANCO	17.143	2,5%	Privada
6	VALIA	16.887	2,5%	Privada
7	SISTEL	15.030	2,2%	Privada
8	BANESPREV	14.090	2,1%	Privada
9	FORLUZ	12.670	1,9%	Pública Federal
10	REAL GRANDEZA	12.088	1,8%	Pública Federal
TOTAL 10+		408.522	60,3%	
TOTAL Geral		677.720	100,0%	

Tabela 1.2: Relação das 10 maiores EFPC, segundo os seus ativos. (em milhões) - (PREVIC, 2013)

Seguindo na apresentação dos dados estatísticos, segundo dados da ABRAPP, havia 685.538 pessoas assistidas pelos planos de previdência complementar, 2.225.739 participantes ativos e ainda 3.619.209 dependentes até dezembro de 2012.

1.3 Os Planos de Benefício

Os fundos de pensão têm como função inicial disponibilizar um complemento da renda do participante durante a sua aposentadoria, porém há outros benefícios fornecidos pelos planos como nos casos de invalidez e morte e também benefício proporcional diferido. De qualquer forma, o benefício da aposentadoria é o que mais impacta na gestão do fundo de pensão, uma vez que é o mais significativo financeiramente e pago enquanto o participante estiver vivo (excetuando-se cláusulas em que a esposa e dependentes possuem o direito de recebê-lo quando da morte do participante). Por isso, nos concentraremos neste benefício. Na Figura 1.2 observamos a participação de cada benefício sobre o total dos benefícios oferecidos pelas EFPC.

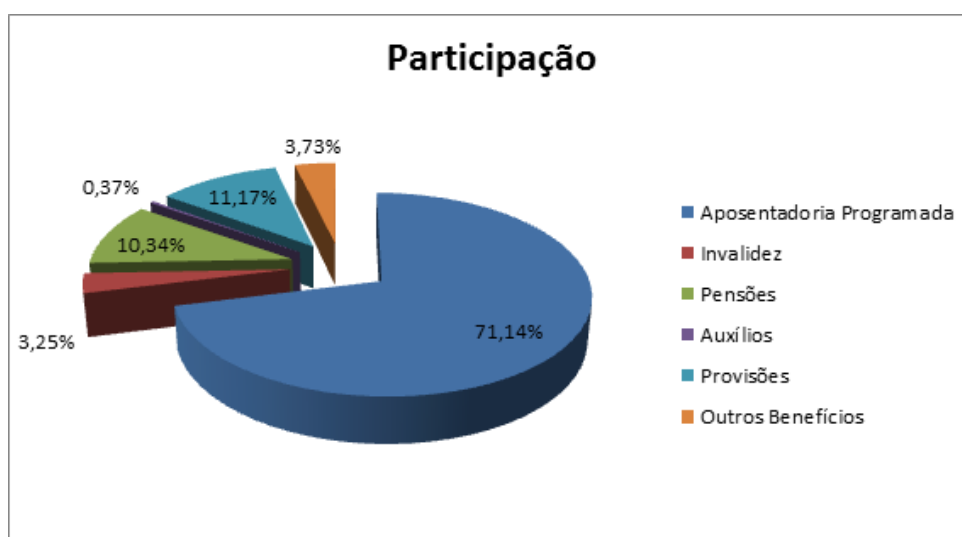


Figura 1.2: Benefícios de Prestação Continuada das EFPC em 2013 - (PREVIC, 2013)

Os Planos Previdenciais podem ser constituídos sob a forma de uma das três modalidades de pagamento das aposentadorias aos participantes:

- Benefício Definido (BD);
- Contribuição Definida (CD);
- Contribuição Variável (CV).

No relatório estatístico da PREVIC de março deste ano, nota-se que a maioria dos planos de benefício são da modalidade Contribuição Definida, como mostrado da Figura 1.3.

Em 1993 a hegemonia era dos planos BD, com os CV em segundo e os CD em último lugar. Nestes dez anos, a tendência foi a diminuição gradual dos planos BD, com o aumento da participação dos CV e CD. E a partir de 2006, os CD passaram à liderança da participação que vem aumentando constantemente.

Esse crescimento pode ser explicado por algumas questões importantes:

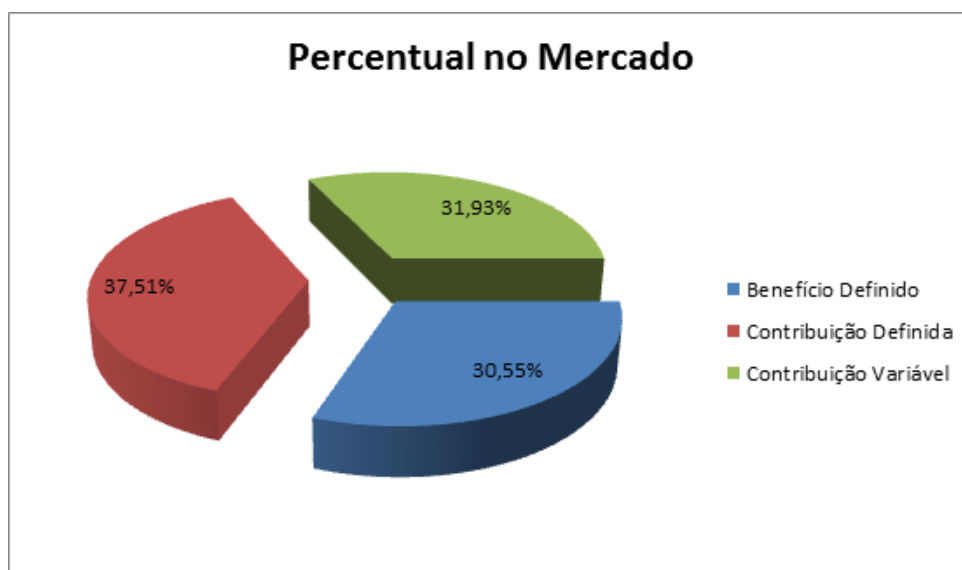


Figura 1.3: Modalidade dos Planos Previdenciais em Número de EFPC - (PREVIC, 2013)

- A previdência associativa ganhou espaço. Foram criados planos de previdência instituídos por entidades de classe, cooperativas ou sindicatos. Segundo a Cartilha do Instituidor (PREVIC, 2008), esses planos devem ser obrigatoriamente da modalidade Contribuição Definida. Portanto, à medida que aumenta o número de EFPC cujo o patrocínio predominante seja Instituidor, há o aumento do número de planos CD. Como mostrado na Tabela 1.1, a participação desta classe de patrocinadores ainda é pequena contando com apenas dezenove EFPC.
- No Reino Unido, cerca de 90% dos planos BD foram fechados para novos participantes e vários fundos de pensão nos Estados Unidos e Europa têm tido dificuldades para honrar seus fluxos de caixa, de acordo com (Yermo, 2009). Uma das principais razões para que os patrocinadores substituam os planos BD por planos CD é a volatilidade das contribuições requeridas ao plano e os custos do acerto nos balanços das empresas patrocinadoras. Em momentos de crise, os planos CD podem ser melhor administrados, pois as contribuições são previsíveis e elas podem ser reduzidas ou suspensas por parte do patrocinador em situações extremas. No Brasil, há casos de algumas falências de fundos de pensão como o caso da AERUS, fundo de pensão da Varig e da PORTUS, fundo de pensão de trabalhadores portuários. A AERUS está sob intervenção da PREVIC e a intervenção na PORTUS foi prorrogada até 2014 pelo mesmo órgão. Embora o caso dessas falências não tenha sido o benefício definido, mas sim a inadimplência das patrocinadoras, como destaca (Witgen, 2012), vê-se também no Brasil que os fundos de pensão têm abandonado a modalidade Benefício Definido para evitar déficits estruturais.

- Ainda segundo (Witgen, 2012), a modalidade de Contribuição Definida é mais segura tanto para a patrocinadora quanto para o participante do que a modalidade de Benefício Definido.

Por outro lado, em termos de Ativos Totais, a modalidade Benefício Definido tem a maior participação do mercado, conforme mostrado na Figura 1.4.

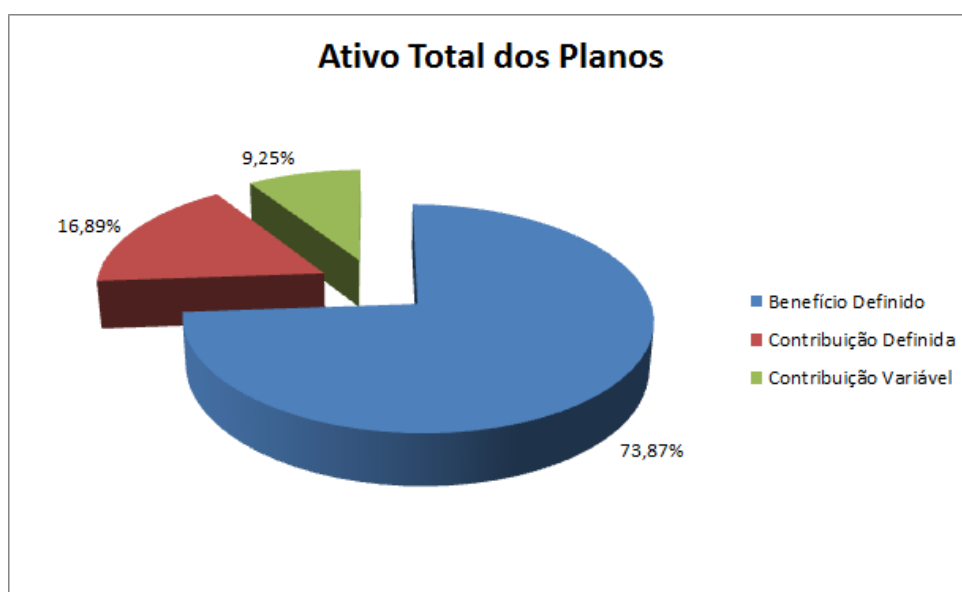


Figura 1.4: Ativo Total dos Planos por modalidade em 31/12/2012 - (PREVIC, 2013)

A seguir, apresentamos os detalhes de cada uma das modalidades, para evidenciar as diferenças que devem ser consideradas para a popularidade de uma em detrimento de outra.

1.3.1 Benefício Definido

Em um Plano de Benefício Definido o valor do benefício é predeterminado, por exemplo, em função do tempo de serviço e do salário do participante. Para que haja garantia de que o pagamento definido pelo regulamento do plano seja realizado pela EFPC no momento devido, é necessário que as contribuições sejam definidas atuarialmente de forma a garantir que o patrimônio acumulado possa assegurar a concessão e manutenção dos benefícios.

Assim, o fundo deve garantir acumulação de capital suficiente para honrar seus pagamentos no momento em que o participante exercer a opção de começar a receber o benefício. Com isso, neste modelo de pagamento, tem-se a expressão para o valor do benefício, ao passo que as contribuições variam de acordo com as premissas atuariais para casar com as expectativas de pagamentos futuros. Ou seja, o valor da contribuição pode ser alterado sempre que necessário. Mas por outro lado o exce-

dente dos pagamentos previstos é rebatido à EFPC. Além disso, estes planos são de caráter mutualista, isto é, o patrimônio é um bem comum compartilhado por todos.

Nesta modalidade de pagamentos, verificamos a existência de diversos riscos, sendo os principais elencados a seguir:

- Risco de mercado: os ativos do plano podem não alcançar a rentabilidade necessária para fazer frente às metas atuariais.
- Risco de crédito: por um lado, como ocorreu no caso da AERUS, a patrocinadora ou a EFPC pode não ter recursos para cobrir o déficit atuarial, repassando o prejuízo aos participantes, por outro lado, existe o risco associado aos investimentos em renda fixa associado à qualidade da contraparte dos mesmos.
- Risco de descasamento de ativos e passivos: na ocorrência conjunta dos anteriores.

1.3.2 Contribuição Definida

Nesta modalidade de plano, define-se qual a contribuição que a empresa (patrocinadora) e o empregado (participante) irão disponibilizar ao fundo, sendo essa contribuição geralmente dada por uma porcentagem do salário deste último.

As contribuições de ambos são acumuladas e valorizadas, sendo que o valor exato do benefício não é conhecido pelo participante até que exerça a opção de recebê-lo. Ou seja, neste caso a fórmula da contribuição é conhecida, sendo o benefício dependente das contribuições. Além disso, cada participante possui uma conta individual no plano, ao contrário do BD em que o patrimônio é compartilhado.

O principal risco existente em um plano de Contribuições Definidas não reside na variação do custo de seus benefícios, como é o caso do plano de benefícios definidos, mas sim na possibilidade de não se alcançar o objetivo traçado inicialmente para o plano de benefícios. A contrapartida natural dessa situação é a possibilidade de se ultrapassar esse objetivo com um bom resultado de retorno de investimentos obtido pelo fundo do plano. Portanto, aqui não há risco de crédito ou descasamento de ativos e passivos, pois o benefício é função do que foi acumulado.

1.3.3 Contribuição Variável

Nos fundos de pensão de contribuição variável, durante a fase de capitalização dos recursos, o plano geralmente segue a modalidade CD. Porém, na fase em que o participante recebe o pagamento dos benefícios, ele atua como um plano BD. Assim, a contribuição é definida tanto para a patrocinadora como para o participante e acumulada em contas individuais em nome dos participantes. Na data da aposentadoria,

não existe a individualização, prevalecendo o mutualismo do plano BD. Neste caso, oferece-se um benefício mínimo ao participante e, portanto, tem-se os mesmos riscos que em um plano BD.

1.4 A Importância da Gestão de Riscos

Como define (Gabas, 2008):

Pode-se entender gestão de riscos como o processo sistemático de identificar, avaliar, classificar e mitigar os fatores de risco que poderiam atrapalhar os objetivos estratégicos de uma organização. Não se trata simplesmente de reduzir o trade-off entre risco e retorno, mas de otimizá-lo.

Os fundos de pensão administram recursos de terceiros e, portanto, devem gerir os riscos de forma a otimizar o *trade-off* entre risco e retorno, garantindo o equilíbrio atuarial e a solvência em suas atividades. Nesse sentido, as EFPC devem zelar pelos recursos garantidores, isto é, a parcela destinada à cobertura dos benefícios oferecidos pelo plano. O Banco Central do Brasil dispõe sobre as diretrizes de aplicação dos recursos garantidores dos planos administrados pela EFPC na Resolução nº 3792, de 24 de setembro de 2009. No Capítulo I - DA ABRANGÊNCIA no Art.4º, temos:

Art. 4º Na aplicação dos recursos dos planos, os administradores da EFPC devem:

- I. observar os princípios de segurança, rentabilidade, solvência, liquidez e transparência;
- II. exercer suas atividades com boa fé, lealdade e diligência;
- III. zelar por elevados padrões éticos;
- IV. adotar práticas que garantam o cumprimento do seu dever fiduciário em relação aos participantes dos planos de benefícios.

Com relação à gestão de riscos temos o Art. 9º do Capítulo III - DOS CONTROLES INTERNOS E DA AVALIAÇÃO DE RISCO:

Art. 9º Na aplicação dos recursos, a EFPC deve identificar, avaliar, controlar e monitorar os riscos, incluídos os riscos de crédito, de mercado, de liquidez, operacional, legal e sistêmico, e a segregação das funções de gestão, administração e custódia.

Para avaliar os riscos citados e gerenciar o retorno esperado, a resolução determina que a EFPC utilize um modelo que limite a probabilidade de perdas, conforme Art. 13:

Art. 13. A EFPC deve acompanhar e gerenciar o risco e o retorno esperado dos investimentos diretos e indiretos com o uso de modelo que limite a probabilidade de perdas máximas toleradas para os investimentos.

Por um lado, as regulamentações sobre o gerenciamento de riscos buscam reduzir a incapacidade das EFPC realizarem os pagamentos de benefício, como ocorreu com

a AERUS e a PORTUS recentemente. Por outro lado, uma boa gestão de riscos pode levar a um maior retorno dos investimentos, sendo benéfico tanto para os participantes quanto para a EFPC.

Assim, a PREVIC determina algumas práticas de gestão de riscos, um exemplo está no GUIA PREVIC - MELHORES PRÁTICAS DE GOVERNANÇA PARA ENTIDADES FECHADAS DE PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR (PREVIC, 2012), na seção GESTÃO DE RISCOS, item 71:

- Adequação da estrutura organizacional (capacitação técnico-gerencial e tecnológica);
- Formulação da política de gestão de riscos (alinhamento com a política de investimentos, definição de procedimentos internos, monitoramento e controles, registrados em códigos, regimentos e manuais);
- Implementação de metodologias de análise e quantificação de risco (precificação e gestão de ativos e passivos - ALM);
- Implementação de instância interna de conformidade (adequação das análises e do processo decisório aos requisitos constantes nos regulamentos internos e às exigências da regulação aplicável à EFPC);
- Implementação de sistemas de informação e comunicação; e
- Elaboração e implementação de um código de conduta e ética.

Como vemos, o órgão regulador sugere a implantação de metodologias que permitam a análise e a quantificação do risco. Cabe aqui uma reflexão sobre a utilização de medidas de risco como o *Value-at-Risk* (VaR) ou o ALM para Fundos de Pensão.

Segundo (Weiskopf, 2013), o ALM tradicional foi criticado pelo Riskmetrics pelo fato de utilizar os valores contábeis dos ativos e não o valor marcado a mercado. Para solucionar este problema, o Riskmetrics sugeria a utilização do VaR como medida de risco no lugar do ALM. Como bem nota (Weiskopf, 2013), uma boa gestão de riscos pode e deve conter as duas abordagens. Enquanto o VaR é prático, pois mostra em um único número a perda máxima que a carteira pode sofrer e serve para a tomada de decisão de curto prazo, dado que geralmente é calculado para pequenos horizontes de tempo (1 a 10 dias), o ALM tem como base integrar outros tipos de risco na análise, como risco de liquidez, risco de crédito e de descasamento de ativos e passivos, para um horizonte de tempo médio ou longo. Além disso, com avanço dos modelos de ALM passou-se a considerar os ativos marcados a mercado e basear-se em análises de simulação e geração de cenários, o que enriqueceu o método e em certa medida respondeu à crítica do Riskmetrics.

Assim, uma boa gestão de investimentos deve passar por diversas análises e controles que envolvam as decisões de curto, médio e longo prazos e, portanto, devem ser utilizados os modelos mais adequados para tais análises. Mais do que isso, as instituições devem estar atentas à evolução ao longo dos anos das medidas de risco, principalmente por conta do nível de exigência dos órgãos reguladores.

Com isso posto, a seção a seguir apresenta a definição *Asset Liability Management* (ALM) e procura mostrar um pouco da evolução dos modelos.

1.5 Definição de ALM

O ALM é, de forma geral, um processo de elaboração, execução, acompanhamento e revisão de estratégias relacionadas a ativos e passivos para atingir as metas financeiras, pagamento de fluxos de caixa e requisitos de capital dada a tolerância ao risco da organização e outras restrições, segundo a Society of Actuaries, (ACTUARIES, 2003). Este processo é fundamental para a boa gestão de qualquer organização que faz investimentos para atender necessidades futuras de fluxo de caixa e capital regulatório.

Ainda segundo a Society of Actuaries, o ALM em sua origem estava focado principalmente nas variações da taxa de juros, mas atualmente tem sido aplicado a uma gama mais ampla de riscos, incluindo risco de liquidez, risco de capital, risco legal e risco soberano. Assim, ele é aplicado em diversos segmentos:

- *Traders* de derivativos gerenciam suas posições *long* e *short*;
- Os bancos coordenam os horizontes de reapreçamento de seus ativos e passivos;
- Os fundos de pensão ajustam seus investimentos para espelhar as características de seus objetivos com relação às taxas de juros e retorno de capital;
- Seguradoras selecionam estratégias de investimento para garantir que possam apoiar preços competitivos e estratégias de obtenção de créditos.

Embora cada uma delas envolva a aplicação de técnicas de ALM para um determinado problema financeiro, as implementações nessas situações podem ser bem diferentes.

De forma geral, podemos considerar três grupos de modelos de ALM, quais sejam:

1. Determinísticos
2. Estocásticos
3. Controle estocástico dinâmico

Dentro da primeira categoria podemos citar alguns modelos caracterizados como "Modelos ALM anteriores" por (Rachev and Tokat, 2012):

- a) Modelo de Imunização: este modelo é utilizado para carteiras de renda fixa. A ideia central é casar as taxas de juros dos ativos com os passivos de uma carteira. Os modelos tradicionais assumem que a estrutura a termo da taxa de juros é *flat* e só se desloca em paralelo. Extensões foram realizadas para controlar a convexidade dos fluxos de caixa do dólar, risco de liquidez e risco de crédito.
- b) Modelo *cash flow matching* ou *dedication*: também utilizado para gestão de carteiras de renda fixa. Este modelo baseia-se na premissa de que é possível obter fluxos de caixa de ativos que casem com o passivo. Se uma taxa de juros conservadora o suficiente é escolhida, essa estratégia elimina o risco com exceção do risco de crédito. Presume-se que o passivo é conhecido com boa estimativa para o período de avaliação.
- c) Modelo de média-variância: a análise de média-variância foi proposta por Markowitz. Embora seja um modelo muito utilizado, possui premissas restritivas: os retornos possuem distribuição normal multivariada e a preferência do investidor pode ser representada por uma função de utilidade sobre a média e a variância do retorno da carteira. O modelo gera como resultado uma fronteira eficiente, de forma que o tomador de decisão deve selecionar o ponto da fronteira que melhor satisfaça suas expectativas. O modelo é simples, porém não é facilmente estendido para problemas com vários estágios.

Já os modelos estocásticos fornecem uma estrutura de modelagem de uso geral que pode incluir variáveis mais realistas tais como os custos de transação, impostos, restrições políticas e legais e grande número de variáveis de decisão. Cabe mencionar aqui que os modelos estocásticos não só agem sobre a modelagem dos ativos, como também sobre modelagem do passivo, o que os torna modelos mais complexos. Citamos aqui algumas abordagens de modelagem desenvolvidas neste âmbito:

- a) Modelo com restrições de escolha: conforme apresenta (Rachev and Tokat, 2012), Dert desenvolveu um modelo ALM multi-estágio com restrições de escolha, presente em (William T. Ziemba, 1998), para um plano de benefício definido. O modelo utiliza cenários e minimiza o custo de financiamento, assegurando a estabilidade das contribuições e possibilitando que o plano faça o pagamento das obrigações no prazo e com um nível de solvência aceitável. O fato de o valor do patrimônio ser inferior ao nível exigido é considerado no modelo como sendo uma restrição probabilística. Uma vez que a incerteza é modelada através de cenários, variáveis binárias são necessárias para formular as restrições. Supõe-se que as contribuições extraordinárias são realizadas, no caso de o plano não ter o capital mínimo necessário para a cobertura das obrigações.

- b) Programação Dinâmica: a principal ideia por trás da programação dinâmica é resolver o problema por partes, isto é, um estágio de cada vez. O procedimento produz uma solução possível por estágio em cada etapa. Se há muitas variáveis de estado ou a função objetivo depende de forma arbitrária em cada estágio, este método não é muito apropriado. Ele pode lidar com pequeno número de instrumentos financeiros simultaneamente. Por isto, é de uso limitado na prática.
- c) Análise de Decisões Sequenciais: este tipo de modelagem utiliza enumeração implícita para encontrar uma solução ótima. Isso resulta em problemas muito grandes de programação linear, uma vez que enumera todas as possíveis estratégias de carteira para todos os cenários em todos os períodos de análise. O método garante viabilidade do primeiro período para todos os cenários possíveis, encolhe o conjunto viável e dá uma importância substancial para cenários com baixa probabilidade de ocorrência.

Por último, há os modelos de controle estocástico dinâmico. De forma geral, estes tipos de modelo capturam a incerteza, permitindo que um conjunto de estágios contínuos possa ser caracterizado por um pequeno número de variáveis de estado que seguem um processo de cadeia de Markov. Devido ao crescimento exponencial do problema com o número de variáveis de estado, um pequeno número de estados e títulos podem ser utilizados para descrever o estado do mundo. Como limitações, podemos citar que os intervalos de confiança são difíceis de calcular e as proporções dos ativos são muito sensíveis aos parâmetros de entrada.

Há outros modelos e abordagens possíveis dentro das categorias aqui apresentadas. A ideia foi selecionar alguns a título de exemplo. O modelo utilizado neste estudo será apresentado em detalhes na seção 2.5. A Figura 1.5 nos mostra os diversos modelos de ALM propostos e também sua evolução ao longo do tempo.

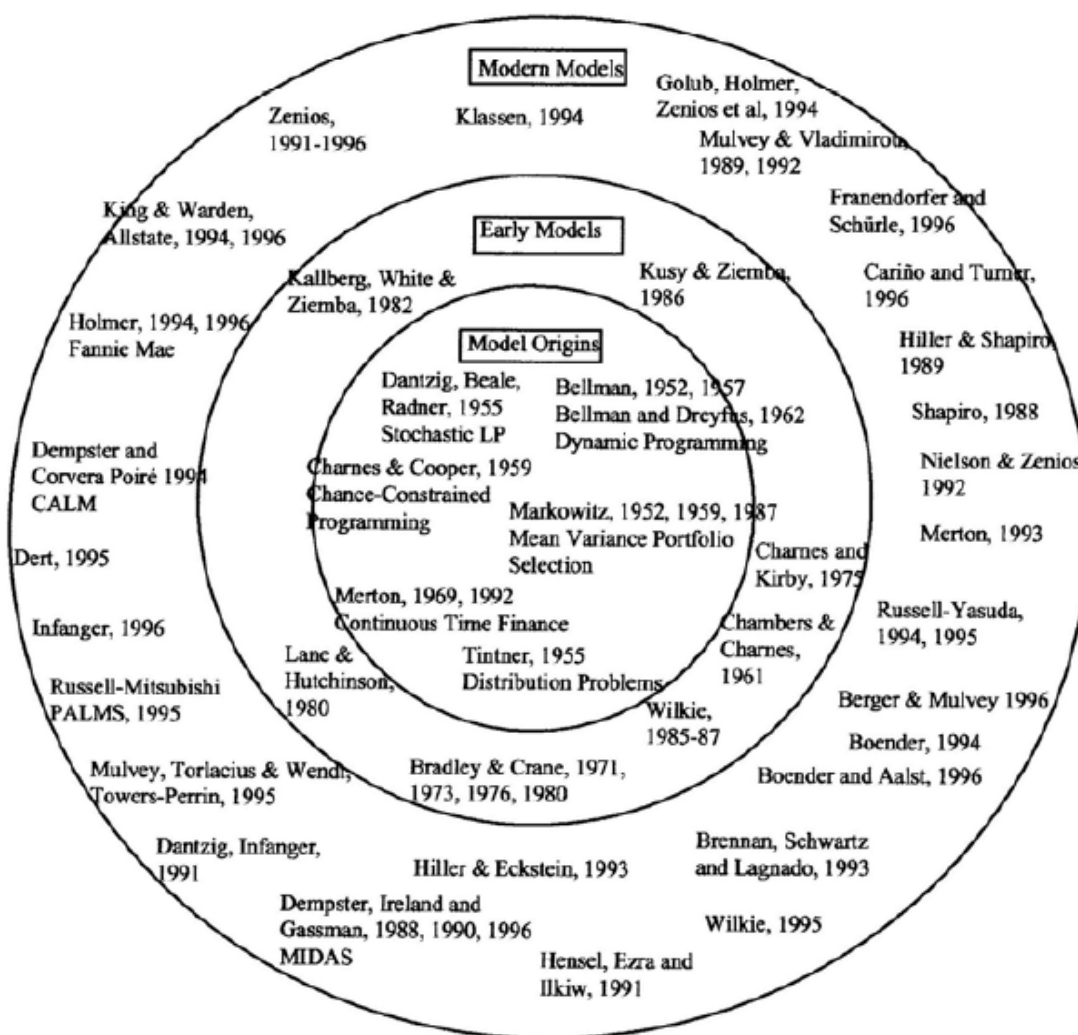


Figura 1.5: Esquema representando a evolução dos modelos de ALM - (William T. Ziemba, 1998)

1.6 Avaliação Atuarial

Como um dos objetivos deste trabalho é analisar o processo de Gestão de Fundos de Pensão, se faz necessário uma pequena introdução sobre a avaliação atuarial que deve ser realizada periodicamente (geralmente a cada ano), pois mostra a situação atual do fundo e fornece dados como o valor dos benefícios que ainda serão pagos e qual deve ser a contribuição a ser recolhida do participante e da patrocinadora para garantir o pagamento dos benefícios futuros. Desta forma, introduziremos aqui conceitos e modelos utilizados pelos atuários para tal fim.

O principal objetivo da avaliação atuarial de um plano de benefícios é estabelecer, na data de cálculo, o valor do compromisso do plano em relação aos pagamentos futuros dos benefícios por ele oferecido aos seus participantes e demais beneficiários, bem como as fontes de recursos necessárias para a cobertura do compromisso.

Para a realização de uma avaliação atuarial, o atuário deve considerar alguns aspectos:

- Bases técnicas atuariais;
- Desenho do plano de benefícios vigente na data de avaliação;
- Hipóteses selecionadas em conjunto com a patrocinadora;
- Dados sobre o grupo coberto pelo plano.

Vamos nos concentrar nesta seção no item bases técnicas atuariais. Aqui devemos estudar os regimes financeiros e os métodos atuariais que definem a forma de acumulação das reservas para garantir o pagamento dos benefícios do plano. Estes métodos definem como os recursos são financiados para que seja possível realizar o pagamento dos benefícios no futuro. Os demais itens dependem das características do fundo de pensão sobre o qual será feita a avaliação.

De forma geral, os regimes utilizados para financiamento dos benefícios são:

- Regime de Repartição Simples;
- Regime de Repartição de Capitais de Cobertura;
- Regime de Capitalização.

Este último possui alguns métodos atuariais associados como:

- Método Agregado;
- Crédito Unitário;
- Crédito Unitário Projetado;
- Capitalização Individual.¹

Antes de explicarmos cada um dos regimes apresentados acima, é importante definir duas variáveis de interesse: o Custo Normal e o Passivo Atuarial.

- Custo Normal = valor atual da parcela do benefício acumulada durante um exercício, a partir da data de avaliação atuarial, de acordo com as hipóteses e o método adotado;
- Passivo Atuarial = valor atual das parcelas do benefício já acumuladas até a data da avaliação atuarial, de acordo com as hipóteses e o método adotados.

¹ Utilizado em Planos de Benefício de Contribuição Definida e, portanto, não entraremos em detalhes.

Segundo (Hurtado, 2008), o Custo Normal descreve o nível de contribuição que seria aplicado se todas as hipóteses da avaliação fossem verificadas na experiência atual. Em geral, ele é calculado no início ou no fim do ano para o qual está sendo realizada a avaliação atuarial. Já o Passivo Atuarial para (Hurtado, 2008) seria o valor da reserva matemática e a fração do valor presente atuarial dos benefícios futuros que não é fornecida pelos custos normais futuros.

1.6.1 Regime de Repartição Simples

No regime de repartição simples, os recursos que serão utilizados para o pagamento de benefícios futuros são oriundos de contribuições realizadas no exato valor dos benefícios devidos imediatamente. Assim, temos:

- Custo Normal = valor das despesas com benefícios previstas para o período seguinte.
- Passivo Atuarial = 0. Não é constituída reserva para a concessão ou manutenção dos benefícios.

Neste caso, portanto, os custos tendem a ser nivelados apenas para os benefícios pagos em uma única prestação ou por um certo período de tempo e cujas despesas se mostrem estáveis. Em situações em que os benefícios são devidos por longos períodos de tempo, as prestações devidas a várias gerações se acumulam para somar ao valor devido a cada exercício o que gera custos crescentes.

1.6.2 Regime de Repartição de Capitais de Cobertura

No regime de financiamento de repartição de capitais de cobertura, assim como no de repartição simples, a constituição de reservas só ocorre no início do pagamento do benefício. Porém neste caso, no momento da concessão do benefício é previsto o aporte de recursos suficientes para sua cobertura. Sendo assim, nossas duas variáveis de interesse seriam dadas por:

- Custo Normal = valor presente dos benefícios cujos pagamentos se iniciarão no período seguinte à avaliação.
- Passivo Atuarial = valor presente dos benefícios já em curso de pagamento.

Desta forma, o regime de repartição de capitais de cobertura apresenta custos estáveis para benefícios cuja ocorrência e custeio registrem pouca variação ao longo do tempo, mesmo que os pagamentos ocorram por um maior período. Contudo, à medida que a população envelhece e o número de benefícios a se iniciar no próximo exercício aumentar, os custos do plano também irão crescer.

1.6.3 Regime de Capitalização

No regime de capitalização, o financiamento do compromisso é feito ao longo da carreira ativa do participante. Desta forma, quando o participante solicita o benefício, todas as reservas necessárias para sua cobertura devem estar constituídas. Segundo (Hurtado, 2008), os planos BD em geral utilizam o regime de capitalização para financiar os recursos, ou seja, a reserva matemática é constituída a partir do momento em que o participante entra no plano. Isso ocorre pois o impacto do pagamento das aposentadorias é grande. Sendo assim, a constituição de reserva matemática se torna imprescindível para garantir a solvência do fundo.

A Figura 1.6 ilustra o regime de capitalização em um plano de benefício definido com relação ao pagamento das aposentadorias:

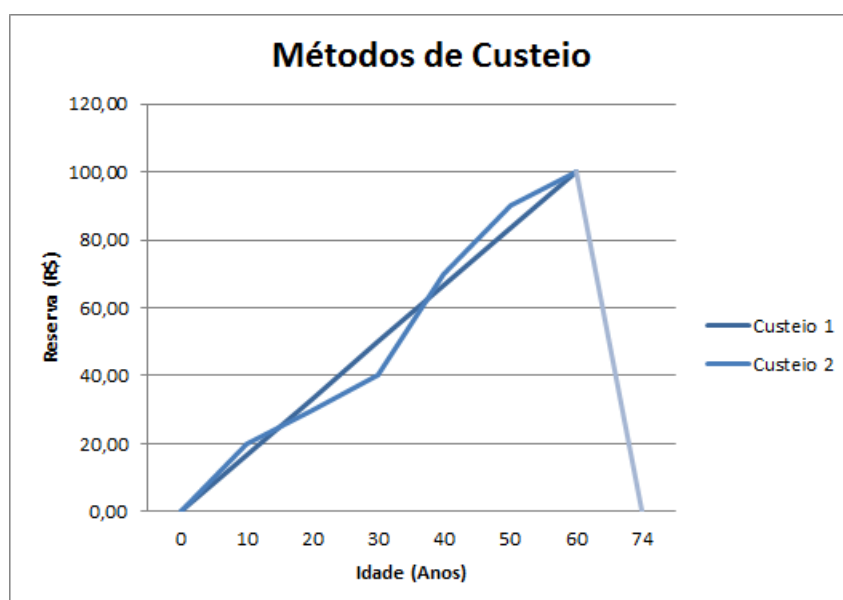


Figura 1.6: Métodos de custeio de Plano de Benefício (Aposentadoria aos 60 anos)

Dentro do regime de capitalização, podemos ter diversos métodos de custeio como sugere a Figura 1.6 e, para cada método, há uma forma de definir nossas duas variáveis de interesse.

Para o Método Agregado, temos:

- Custo Normal = percentual uniforme do valor presente dos salários.
- Passivo Atuarial = ao patrimônio alocado para fazer face à obrigação com o plano ou com o benefício que está sendo avaliado.

No Modelo Agregado, vale a seguinte expressão:

$$VPCN = VPBF - PA$$

Dado que:

VPCN = valor presente dos custos normais futuros; VPBF = valor presente dos benefícios futuros; PA = passivo atuarial.

Com o método agregado há uma expectativa de custos estáveis, uma vez que o custo é determinado já considerando a hipótese de crescimento salarial e que todos os compromissos futuros já são considerados na determinação do custo.

Já para o método de Crédito Unitário Projetado, temos:

- Custo Normal = valor atual da parcela do benefício projetado a ser acumulada no próximo exercício.
- Passivo Atuarial = valor atual das parcelas do benefício projetado já acumuladas entre a data de admissão na empresa e a data de avaliação.

O método de crédito unitário projetado pressupõe a acumulação do valor presente do benefício projetado em parcelas iguais, no período decorrido entre a data de admissão do participante na patrocinadora do plano e a data provável da concessão de cada benefício. Assim, o benefício projetado é calculado considerando-se a projeção até a data de concessão do benefício do participante, de todas as variáveis que compõem o cálculo.

Em termos de custos, espera-se que haja uma estabilização do custo do plano em caso de manutenção do perfil da massa avaliada, devendo o custo ser crescente quando a população do fundo for fechada.

O modelo de Crédito Unitário é análogo ao anterior, porém nesse caso utiliza-se o benefício acumulado em cada instante (t). Desta forma, temos:

- Custo Normal = valor atual do compromisso a ser acumulado no próximo exercício, considerando as variáveis que entram no cálculo do benefício posicionadas ao final do próximo exercício;
- Passivo Atuarial = valor atual das parcelas de benefício acumulado entre a data de ingresso na empresa e a data de avaliação.

Para este caso, espera-se que o custo do plano seja crescente, mas em pequena proporção e com a possibilidade de o crescimento ser amenizado com a renovação da massa avaliada.

Não vamos entrar em detalhe no caso da Capitalização Individual, pois esta é utilizada para planos de benefício de Contribuição Definida, que fogem ao escopo deste trabalho.

Capítulo 2

Desenvolvimento

2.1 Apresentação do Caso

Estamos focados neste trabalho em analisar a gestão dos fundos de pensão de Benefício Definido e também os métodos matemáticos utilizados para auxiliar essa gestão e que, conforme já vimos, devem estar em linha com as solicitações dos órgãos reguladores.

Desta forma, criamos um Plano de Benefícios Hipotético que será apresentado na seção 2.2. Sobre ele, faremos uma avaliação atuarial simplificada e aplicaremos um modelo de ALM com o intuito de obter a alocação ótima dos ativos financeiros para o plano. O objetivo é fazer uma alocação para o plano por meio de uma programação dinâmica, conforme apresentamos na seção 1.5, ou seja, incluindo vários estágios representados pelos anos à frente para os quais queremos avaliar o fundo. O modelo será melhor detalhado na seção 2.5.

A criação de um Fundo de Pensão passa pela definição de um regulamento. O regulamento estabelece os direitos e as obrigações da Fundação, da Patrocinadora, dos Participantes e de seus Beneficiários em relação ao plano. Destacaremos na seção 2.2.1 apenas as regras gerais do plano sobre os participantes.

Além do regulamento, devemos definir de que forma é composto o nosso plano, isto é, quais as características dos participantes. Essa etapa é importante, pois dependendo de qual a condição da população do fundo, as premissas da avaliação atuarial se alteram. O objetivo aqui não é entrar em detalhes sobre a avaliação atuarial, mas dar uma noção de como ela funciona no contexto da análise da gestão. A análise atuarial nos trará como resultado o valor dos benefícios futuros calculados que serão dados de entrada do modelo de ALM.

Com o regulamento do plano e a população definidos, é necessário estabelecer uma Política de Investimentos para o fundo. A Política de Investimentos (PI) compreende um conjunto de medidas que norteiam a gestão de longo prazo dos ativos

dos planos de benefícios. Ela deve ser definida de forma a garantir a solvência do fundo, ou seja, garantir o pagamento dos pensionistas sem que haja a necessidade de aportes extra dos participantes ativos ou da patrocinadora. A PI é válida para um certo período de tempo, por exemplo 5 (cinco) anos, e apresenta: a missão do fundo, qual o nível de risco aceitável, os objetivos do investimento, os limites de alocação nas classes de ativos e a estrutura de gestão de investimentos. Em geral, na seção relacionada aos limites de alocação apresenta-se uma composição ótima para a carteira de ativos do plano. No nosso caso, a PI não conterá a alocação ótima para o fundo hipotético, pois ela será o resultado da aplicação do modelo e será apresentada na seção 3.2. Além disso, apenas nos concentraremos em apresentar os pontos principais de uma PI para a gestão do fundo e elencaremos outras informações que ela poderia conter.

Com isso posto, faremos a avaliação atuarial do fundo em 31/12/2012 para definir os valores dos benefícios que serão pagos ao longo dos anos posteriores, o que será utilizado no modelo multi-período de ALM. Com o intuito de estabelecermos o nível de risco a ser utilizado no modelo, faremos uma alocação prévia com base na situação do fundo na data de avaliação e calcularemos a variância (risco) desta carteira. Essa alocação utilizará o método de Imunização descrito na seção 1.5, que é um modelo simples e tem como principal objetivo eliminar o risco do passivo, utilizando para isso a alocação em ativos cujo o indexador esteja atrelado às alterações no valor do passivo (inflação) e que tenham prazos que casem com os prazos do passivo.

Em seguida, apresentaremos o modelo de alocação ótima de ativos; os dados de entrada do nosso modelo e por fim os resultados obtidos.

2.2 O Fundo de pensão

No nosso estudo, estamos considerando um fundo de pensão hipotético. As informações necessárias para a construção do plano se baseiam em dados divulgados por fundos de pensão de entidades consolidadas no mercado e as informações dos participantes foram geradas de maneira aleatória para simular o caso.

Iremos trabalhar apenas com o benefício da aposentadoria programada que, conforme já comentamos na seção 1.3, é o que mais impacta na gestão do fundo de pensão por ser o de maior valor.

Nesta seção definiremos as características do fundo de pensão que será estudado, isto é, apresentaremos qual o perfil dos participantes do plano, bem como as características específicas do mesmo. Além disso definiremos uma Política de Investimentos (PI) para o plano seguindo algumas das diretrizes impostas pela Resolução nº 3792:

Art. 16. A EFPC deve definir a política de investimento para a aplicação dos recursos de cada plano por ela administrado.

...

§ 3º A política de investimento de cada plano deve conter, no mínimo, os seguintes itens:

I - a alocação de recursos e os limites por segmento de aplicação;

II - os limites por modalidade de investimento, se estes forem mais restritivos que os estabelecidos nesta Resolução;

III - a utilização de instrumentos derivativos;

IV - a taxa mínima atuarial ou os índices de referência, observado o regulamento de cada plano de benefícios;

V - a meta de rentabilidade para cada segmento de aplicação;

VI - a metodologia ou as fontes de referência adotadas para apuração dos ativos financeiros;

VII - a metodologia e os critérios para avaliação dos riscos de crédito, de mercado, de liquidez, operacional, legal e sistêmico; e

VIII - a observância ou não de princípios de responsabilidade socioambiental.

2.2.1 Regras do Regulamento

As regras gerais para os participantes são elencadas a seguir.

- a) o participante deve ter pelo menos 55 (cinquenta e cinco) anos de idade se for do sexo feminino e 60 (sessenta) anos de idade se for do sexo masculino;
- b) deve ter realizado 120 (cento e vinte) contribuições para o plano, o que equivale a 10 anos de contribuições;
- c) deve possuir 10 (dez) anos de vinculação empregatícia com o patrocinador;
- d) deve contar com 35 (trinta e cinco) anos de vinculação ao regime de Previdência Social, se do sexo masculino, e de 30 (trinta), se do sexo feminino, desde que lhe tenha sido concedida a aposentadoria por tempo de contribuição pelo INSS;
- e) A idade máxima para a entrada no plano é 60 anos;
- f) A porcentagem do salário final que será considerada para o pagamento do benefício será 80%;
- g) Este plano considera que a idade máxima de um participante ativo será de 74 anos, pois esta é a expectativa de vida do brasileiro segundo (Governo Brasileiro, 2012). O participante que tiver a idade mínima para a aposentadoria e tiver atingido o tempo mínimo de contribuição, poderá optar por se aposentar ou continuar trabalhando até a idade máxima de 74 anos;
- h) Para os participantes que não contribuírem pelo tempo máximo de aposentadoria, receberão um salário proporcional ao tempo de contribuição. Por exemplo, se o

tempo de contribuição foi de 10 anos (120 meses) que é o tempo mínimo, o participante receberá a fração 10/30 se mulher e 10/35 se homem;

- i) Os participantes que entrarem muito jovens receberão, por outro lado, o valor integral do salário e nada a mais mesmo se contribuírem mais do que o tempo mínimo para o gênero.

2.2.2 Política de Investimentos

A seguir, apresentamos a Política de Investimentos do Plano de Benefícios Hipotético.

Política de Investimentos - Plano de Benefícios Hipotético

Esta Política de Investimentos foi elaborada visando atingir e preservar o equilíbrio atuarial e a solvência do Plano de Benefícios Hipotético e estabelece os princípios e diretrizes a serem seguidos na gestão dos recursos correspondentes às reservas técnicas, fundos e provisões da entidade, em conformidade com a legislação vigente, seguindo a Resolução Nº 3792, de 24 de setembro de 2009, do Conselho Monetário Nacional.

As diretrizes desta política de investimentos devem ser avaliadas em conjunto com as estabelecidas pela legislação aplicável, sendo os administradores e gestores responsáveis por avaliá-las em conjunto.

Os princípios, metodologias e parâmetros estabelecidos por esta Política buscam garantir ao longo do tempo a segurança, liquidez e rentabilidade necessários e suficientes para o equilíbrio entre ativos e passivos do plano, bem como procuram evitar a exposição excessiva aos riscos.

Esta Política de Investimentos entrará em vigor em 1 de janeiro de 2012.

Identificação do Plano

Esta Política de Investimentos apresenta as diretrizes e normas para a aplicação dos recursos do Plano de Benefícios Hipotético, cujas características são:

- Modalidade: Benefício Definido (BD)
- Meta de Rentabilidade: IPCA + 6% a.a.

Características do Plano

O Plano de Benefícios Hipotético tem como principal objetivo suplementar a renda futura de seus participantes.

Os participantes e a Patrocinadora contribuem durante o período de custeio com uma fração dos salários de cada participante ativo o que forma uma poupança coletiva que será destinada ao pagamento dos benefícios.

Os salários dos participantes crescem ao longo do tempo enquanto estão ativos. Isso faz com que as contribuições no início da carreira incidam sobre salários geralmente mais baixos que a média dos salários finais, sobre os quais calculam-se os benefícios. Por isso, a premissa sobre o crescimento salarial pode ser uma fonte potencial de problemas de solvência dos Planos de Benefício Definido.

As contribuições para o plano são calculadas de forma que o volume dos recursos acumulados ao longo do tempo seja suficiente para arcar com os custos dos benefícios futuros projetados para todo o grupo.

As premissas utilizadas nos cálculos das contribuições podem ou não se confirmar e, portanto, anualmente é realizada a reavaliação do fundo. Periodicamente, ajustam-se as contribuições, podendo ser aumentadas ou reduzidas dependendo do cenário econômico, visando o equilíbrio do plano.

Atualmente, as regras contábeis atuariais das EFPCs estabelecem que o fluxo de caixa das obrigações futuras do plano deve ser descontado por meio de uma taxa atuarial máxima de 6% ao ano.

Alocação dos Investimentos

A tabela a seguir mostra os limites de alocação em cada um dos segmentos definidos pela Resolução N° 3792.

Segmento	Limite Legal	Limite Inferior	Limite Superior
Renda Fixa	100%	60%	100%
Renda Variável	70%	5%	50%
Investimentos Estruturados	20%	0%	10%
Investimentos no Exterior	10%	0%	5%
Imóveis	8%	0%	5%
Operações com participantes	15%	0%	5%

Tabela 2.1: Limites de Alocação por Segmento

Política de Investimentos: demais informações

Além das informações apresentadas, as PI também podem conter:

- Apresentação do Processo de Avaliação e Revisão de Gestores;
- Apreçamento dos Ativos Financeiros;
- Restrições sobre operações de empréstimos e derivativos;

- Gestão de Riscos: controle e avaliação;
- Outras informações relevantes.

2.2.3 Características da População do Plano

O Plano de Benefício Hipotético possui a seguinte base de dados com relação à população:

- a) Há 100 participantes no plano;
- b) Assume-se que todos os indivíduos estão aposentados no momento da avaliação do plano, ou seja, o plano a partir de agora deverá apenas fazer pagamentos, não haverá novas contribuições ao longo dos anos vindouros. Isso significa que eles estão inativos;
- c) As mulheres se aposentam aos 55 anos;
- d) Os homens se aposentam aos 60 anos;
- e) A população é composta por 58% homens e 42% mulheres;
- f) O Salário mensal médio é dos homens de R\$ 4.498,31;
- g) O Salário mensal médio das mulheres é de R\$ 4.287,34;
- h) A população do plano é fechada, isto é, não se admite a entrada de novos participantes no plano.

2.3 Premissas atuariais

As premissas atuariais estão intimamente ligadas à modelagem dos pagamentos dos benefícios futuros do plano, além do valor das contribuições necessárias para assegurar o pagamento dos mesmos, no caso de um plano BD. Nesse sentido, é importante definirmos as premissas que utilizaremos para calcular o valor do passivo do nosso plano.

Apresentamos os regimes utilizados para financiar o pagamento dos benefícios dos fundos de pensão na seção 1.6. Para um plano de Benefício Definido, que é o caso do nosso fundo, o regime mais indicado é o Regime de Capitalização, dado que segundo a RESOLUÇÃO CGPC Nº 18, DE 28 DE MARÇO DE 2006, temos:

5. Serão admitidos os seguintes regimes financeiros:

5.1 Capitalização - nas suas diversas modalidades, sendo obrigatório para o financiamento dos benefícios que sejam programados e continuados, e facultativo para os demais, na forma de renda ou pagamento único.

Além disso, a resolução também orienta que:

6. No plano na modalidade de benefício definido, o método de financiamento mínimo dos encargos atuariais, no Regime Financeiro de Capitalização, será o de crédito unitário.

Assim, é necessário estabelecer o passivo atuarial, também chamado de reserva atuarial, que é o valor já acumulado ao longo dos anos a partir das contribuições dos participantes e rendimento dos ativos do plano de forma que seja possível pagar os benefícios aos participantes que estão em fase de recebimento.

Como nossa população está completamente na fase de recebimento, então a reserva constituída deverá ser um montante considerável, até porque o salário médio da população é razoável.

Uma das variáveis necessárias para o cálculo do passivo atuarial do fundo e do valor dos benefícios futuros é a probabilidade de um participante sobreviver a cada ano, dada por uma tábua de mortalidade. A tábua de mortalidade é uma premissa atuarial pois, caso o participante venha a falecer, o benefício da aposentadoria programada pode ser suspenso, excetuando-se casos de pagamento de pensão, vitalícia ou não, ou pecúlio para os beneficiários escolhidos pelo participante. Como neste estudo nos restringimos à aposentadoria programada, no nosso caso a morte do participante elimina a obrigação do fundo para com o mesmo.

Assim, o primeiro passo é definir a tábua de mortalidade que melhor representa a população do fundo de pensão a ser estudado. No presente estudo utilizaremos a tábua de mortalidade at-83 M e at-83 F. Segundo (Hurtado, 2008), os fundos de pensão utilizam diversas tábuas de mortalidade, muitas delas internacionais e acabam fazendo alguns ajustes para a população do fundo de pensão em questão. Alguns exemplos de tábuas de mortalidade são: at-55, eb7-75, gam-71, gam-83, up-84, up-94, cso-58, cso-80, gkm-70, gkm-80, gkm-95, at-83 M, at-83 F, at-49 M, at-49 F, at-2000 M, at-2000 F e gkf-95. Note que há algumas específicas para o gênero, como a que utilizaremos.

Como o objetivo deste trabalho é analisar o processo de Gestão do Fundos de Pensão e dar uma ideia geral de como são utilizadas as ferramentas, não estamos preocupados em analisar qual a melhor tábua de mortalidade. Porém esta deve ser uma das atividades de um atuário para modelagem do passivo atuarial, como prevê a RESOLUÇÃO CGPC Nº 18, DE 28 DE MARÇO DE 2006:

A tábua biométrica utilizada para projeção da longevidade dos participantes e assistidos do plano de benefícios será sempre aquela mais adequada à respectiva massa, não se admitindo, exceto para a condição de inválidos, tábua biométrica que gere expectativas de vida completa inferiores às resultantes da aplicação da tábua AT-83.

Outra premissa é como estimar o Benefício projetado do participante. O Benefício a

ser pago para o participante do plano é dependente da evolução do salário do mesmo ao longo dos anos. Desta forma, é necessário modelar como será o crescimento do salário. Em geral, o aumento salarial está atrelado ao desempenho do funcionário e também à variação da taxa de inflação do país.

A variável inflação é a que mais impacta no valor do aumento salarial, principalmente porque para os participantes que trabalham em regime CLT, há regras dos sindicatos para que haja aumento salarial a cada ano devido à inflação e à perda do poder de compra. Além disso, o aumento salarial devido à inflação não está diretamente atrelado à idade do indivíduo, ao passo que, o aumento salarial devido ao desempenho tem uma influência maior da idade do mesmo. É intuitivo supor que dependendo da idade do participante e também da experiência dele na empresa patrocinadora, o reajuste por desempenho será diferente. No nosso caso, como toda a população está aposentada, podemos supor que não haverá reajustes salariais.

Outra variável importante para o cálculo do valor do passivo atuarial é o fator anual de desconto. Este fator deve ser calculado com base em uma taxa de desconto, que será aquela que trará a valor presente os valores dos benefícios futuros, de forma a obtermos o tamanho da reserva matemática necessária para o pagamento dos benefícios. A legislação impõe que esta taxa seja limitada a no máximo 6% ao ano, conforme já citado na seção 2.2.2. Porém, a inflação pode ser considerada constante ao longo dos anos ou ser modelada por um processo auto-regressivo.¹ Optamos por utilizar um modelo autorregressivo, notadamente o modelo de (Wilkie, 1995) que é muito utilizado em estudos atuariais. Este modelo propõe que se $Q(t)$ é a taxa de inflação do ano t , então:

$$Q(t) = Q(t-1) \times \exp(I(t))$$

de tal forma que $I(t) = \ln Q(t) - \ln Q(t-1)$ é a taxa (força estrita) da inflação ao longo do ano $(t-1, t)$:

$$I(t) = \mu + \phi \times (I(t-1) - \mu) + \sigma \times \epsilon(t)$$

sendo que:

- μ = é a média de $I(t)$, que é a força da inflação;
- ϕ = é a covariância;
- σ = desvio padrão do termo no erro não-padronizado;
- ϵ = é o ruído branco (termo do erro). $\epsilon \sim i.i.d N(0, 1)$.

¹Um processo auto-regressivo é baseado na informação dos eventos anteriores, que proporcionam dados do processo, que são armazenados e processados para obter informação do próximo evento.

O modelo indica que a diferença entre os logaritmos da série da inflação a cada ano pode ser modelada como um modelo autorregressivo de primeira ordem. Na literatura de séries temporais isto é denotado como um modelo AR(1), isto é, $I(t)$ é uma série estatisticamente estacionária: a longo prazo a média e a variância são constantes.

Portanto, utilizaremos o modelo apresentado para realizar a estimativa da inflação. No Apêndice A registramos os dados gerados pela estimativa, bem como o código para Matlab utilizado.

Sendo assim, para o nosso plano trabalhamos com as seguintes expressões para o Valor dos Benefícios Futuros e para o Passivo Atuarial (reserva matemática):

$$VBF_t = 13 \times SM_a \times (1 + tx_{rs})^t \times \frac{p_i}{p_a}$$

$$PA_t = \frac{VBF_t}{(1 + tx_{at})^t}$$

De forma que:

- VBF_t = Valor do Benefício Futuro para o ano t ;
- 13 = é o número de salários mensais pagos anualmente, considerando o 13º salário;
- SM_a = é o Salário Mensal do participante, considerado para o cálculo do benefício de acordo com as regras do plano;
- a = idade de aposentadoria;
- tx_{rs} = é a taxa de reajuste dos salários;
- p_i = é a probabilidade de sobrevivência na idade $i = a + t$, obtida a partir da tábua de mortalidade;
- p_a = é a probabilidade de sobrevivência no ano da aposentadoria, obtida a partir da tábua de mortalidade;
- PA_t = é o valor presente do Benefício Futuro do ano t , que compõe a reserva matemática necessária para cobrir o ano t ;
- tx_{at} = é a taxa de desconto atuarial;

Aplicamos estas fórmulas à população do plano. Simplificamos o caso considerando que todas as mulheres do plano tem 55 anos e os homens 60 anos e todos estão aposentados, isto é, o plano começará a fazer o pagamento dos benefícios no próximo ano a todos os participantes. Assim, aplicamos as fórmulas para um homem

e uma mulher, utilizando o salário mensal médio de cada gênero e multiplicamos o valor obtido pela porcentagem de participação de cada gênero no plano. Para a taxa atuarial, fizemos a projeção do IPCA para os 15 anos à frente. Para os demais anos foi utilizada o último dado obtido pelo modelo AR(1).

Com isso, calculamos que a reserva atuarial do Plano de Benefícios Hipotético é de R\$ 80.621.882,23. Note que ao utilizarmos a projeção da inflação via o modelo autorregressivo, obtivemos valores bem menores para a taxa atuarial, de forma que a reserva matemática calculada ficou mais conservadora do que a que seria obtida pela taxa atuarial máxima sugerida pela legislação. Esta resultou em uma reserva de R\$ 63.210.564,51. Muitos fundos de pensão utilizam a taxa atuarial máxima de 6% para realizar o cálculo da reserva matemática, sem fazer projeções, o que podemos verificar lendo as Políticas de Investimento. No apêndice B apresentamos os cálculos das reservas utilizando as duas taxas atuariais. Para nos aproximar das práticas de mercado, vamos assumir a reserva de R\$ 63.210.564,51, que é menor.

Outra premissa é a de que o nosso fundo de pensão possui R\$ 70.000.000,00 em Ativos Totais, dessa forma podemos classificá-lo como superavitário, cujo resultado técnico é de R\$ 6.789.435,48 (Ativos Totais menos Reserva).

2.4 Carteira Atual

Nesta seção, aplicaremos o método de Imunização, por dois motivos: o primeiro é explorar uma das formas que os gestores dos fundos de pensão utilizam para eliminar os riscos sobre o passivo e o segundo é para obter a composição da carteira do Plano de Benefícios Hipotético que será utilizada como referência de valor de risco no modelo de ALM que será aplicado.

Algumas simplificações serão realizadas para facilitar o estudo. A primeira decisão simplificadora que tomamos é restringir a aplicação sobre as classes de ativos que a legislação permite para as EFPC, isto é, não trabalharemos com todas as classes de ativos possíveis. Segundo a Resolução N° 3792, as regras de alocação seguem a seguinte premissa:

Art. 17. Os investimentos dos recursos dos planos administrados pela EFPC devem ser classificados nos seguintes segmentos de aplicação:

- i - renda fixa;
- ii - renda variável;
- iii - investimentos estruturados;
- iv - investimentos no exterior;
- v - imóveis; e
- vi - operações com participantes.

Verificando a fotografia das alocações atuais temos que, segundo dados estatísticos divulgados (PREVIC, 2013), os investimentos das EFPC no primeiro trimestre deste ano eram compostos principalmente de cota de fundos de investimento conforme mostra a Figura 2.1. Essa alocação nos mostra a tentativa dos gestores dos fundos de pensão em buscar alternativas de investimento aos títulos públicos tradicionalmente presentes nas carteiras destes fundos e ao mesmo tempo atender aos limites regulatórios.

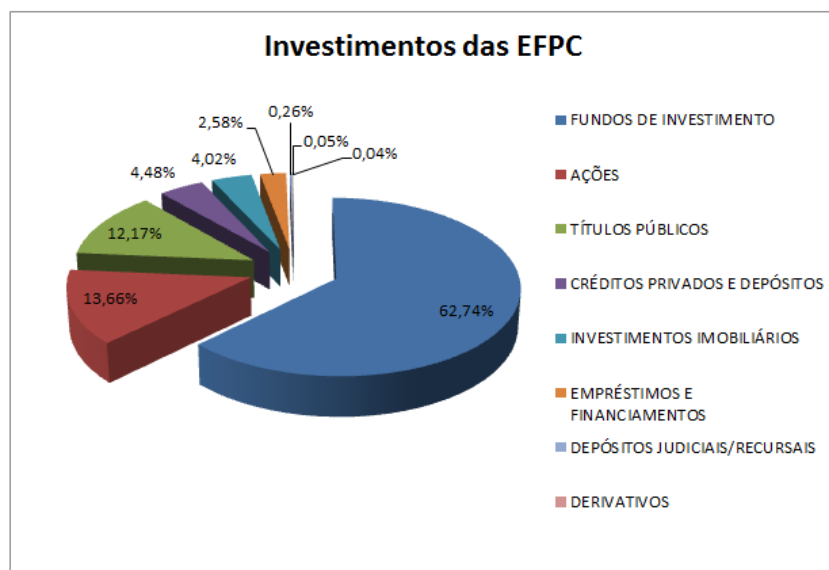


Figura 2.1: Composição dos Investimentos das EFPC em 31/03/2013

Nota-se, portanto, que 93,36% da composição dos investimentos das EFPC provêm de Renda Variável e Renda Fixa. Como os investimentos em estruturados, no exterior, imóveis e operações com participantes não são expressivos, iremos desconsiderá-los da composição da carteira que montaremos para o nosso Plano de Benefícios Hipotético, até porque alguns destes investimentos não possuem cotação no mercado o que aumenta a dificuldade em analisá-los.

Sendo assim, podemos estabelecer a composição da nossa carteira com títulos de Renda Fixa e Renda Variável. No segmento de Renda Variável, buscaremos aplicar em um índice de ações. Nossa escolha é o IBOVESPA,² um dos mais representativos

²O Índice Bovespa é o mais importante indicador do desempenho médio das cotações do mercado de ações brasileiro. Sua relevância advém do fato do Ibovespa retratar o comportamento dos principais papéis negociados na BM&FBOVESPA e também de sua tradição, pois o índice manteve a integridade de sua série histórica e não sofreu modificações metodológicas desde sua implementação em 1968. É o valor atual, em moeda corrente, de uma carteira teórica de ações constituída em 02/01/1968 (valor-base: 100 pontos), a partir de uma aplicação hipotética. Supõe-se não ter sido efetuado nenhum investimento adicional desde então, considerando-se somente os ajustes efetuados em decorrência da distribuição de proventos pelas empresas emissoras (tais como reinversão de dividendos recebidos e do valor apurado com a venda de direitos de subscrição, e manutenção em carteira das ações recebidas em bonificação). Dessa forma, o índice reflete não apenas as variações dos preços das ações, mas também o impacto da distribuição dos proventos, sendo considerado um indicador que avalia o retorno total de suas ações componentes. (BM&FBovespa, 2013)

para o mercado de Renda Variável. Já no segmento de Renda Fixa, utilizaremos os índices IMA-B 5 e IMA-B 5+, da família de índices IMA.³ Escolhemos os índices IMA-B 5 e IMA-B 5 + pois estes são compostos dos ativos indexados ao IPCA, que foi utilizado neste trabalho como a série de inflação e, como pretendemos realizar a imunização, devemos utilizar títulos que estejam relacionados com a variação do valor do passivo.

2.4.1 Imunização da Carteira

A ideia da imunização é o casamento dos fluxos de caixa, isto é, monta-se uma carteira em que os pagamentos de cupom dos ativos estão casados com as obrigações do fundo. Esta abordagem é simples, porém pode gerar um problema em termos de investimento, uma vez que há a possibilidade de ser necessário investir em muitos ativos para obter o casamento dos fluxos, sendo que alguns destes ativos podem nem ser vantajosos do ponto de vista do mercado (falta de liquidez, por exemplo). A alternativa para este problema é procurar investir em poucos ativos que sejam os mais rentáveis e que ao mesmo tempo cumpram a função de cobrir o passivo.

Para criar a carteira que faça o *hedge* do passivo, é necessário escolher ativos que capturem a variação no valor dos pagamentos dos benefícios futuros. No nosso caso, como os benefícios futuros estão atrelados ao IPCA, então nossa carteira de *hedge* deve conter ativos indexados a esse índice de inflação. Nesse sentido, selecionamos as NTN-B para realizar o estudo.

Outra justificativa para a escolha de ativos indexados ao IPCA é a prática do mercado. Verifica-se que os gestores dos fundos de pensão em geral se utilizam de títulos públicos atrelados à inflação para imunizar o passivo. Em princípio eram utilizados os títulos indexados a IGP-M. Porém, como estes títulos não são mais emitidos pelo governo brasileiro, as NTN-B passaram a ser os ativos principais para tal aplicação.

Assim, para realizarmos a imunização é necessário calcular a *duration* tanto dos ativos como do passivo e, posteriormente encontrar o percentual a ser investido em cada ativo que gera o *hedge* sobre o fluxo de pagamentos do passivo.

Este problema pode ser modelado por um problema de programação linear cujo objetivo é minimizar o custo ponderado pela *duration* de cada ativo, de forma que o valor presente da soma dos ativos ponderado pela sua *duration* seja igual ao valor presente do passivo ponderado pela respectiva *duration*.

³O IMA é uma família de índices de renda fixa que representa a evolução da carteira de títulos públicos federais a preços de mercado, com abrangência aproximada de 97% desse segmento de mercado (dados de junho/11). Os índices são determinados pelos indexadores a que são atrelados os títulos: prefixados (IRF-M), indexados ao IPCA (IMA-B), indexados ao IGP-M (IMA-C) e pós-fixados, que respondem à taxa Selic (IMA-S). Para atender aos diferentes perfis de maturidade das carteiras de investimentos, IRF-M e IMA-B são ainda segmentados segundo o prazo de seus componentes: IRF-M 1 e IRF-M 1+; IMA-B 5 e IMA-B 5 +.(Anbima, 2013)

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{i=1}^n Q_i \times VPA_i \times DA_i \\
& \quad \text{sujeito a} \\
& \sum_{i=1}^n VPA_i \times Q_i - VPP = 0 \\
& \sum_{i=1}^n Q_i \times VPA_i \times DA_i - VPP \times DP = 0
\end{aligned}$$

Cada uma das variáveis do modelo são definidas a seguir:

- n = número de ativos utilizados para imunizar a carteira;
- Q_i = quantidade do ativo i . Cada ativo i é um contrato de NTN-B de vencimento especificado;
- VPA_i = valor presente do ativo i ;
- DA_i = *duration* do ativo i ;
- VPP = valor presente do passivo;
- DP = *duration* do passivo.

Para o cálculo da *duration*, utilizamos a *duration* Fisher-Weil ⁴ que é definida como:

$$D = \sum_{t=1}^n \frac{t \times VP(FC_t)}{VPFCT}$$

Neste caso, temos:

- D = *duration* de Fisher-Weil;
- n = número de fluxos de caixa;
- $VP(FC_t)$ = valor presente do fluxo de caixa no instante t ;
- $VPFCT$ = valor presente do fluxo de caixa total.

Neste estudo, a *duration* foi calculada em anos para os índices e também para o valor presente das obrigações futuras que representa o passivo. Estes valores são apresentados no Apêndice C, assim como os dados dos índices disponíveis na data de avaliação do plano, isto é, em 31/12/2012, data da aplicação da imunização.

Contrato	Participação em R\$	Participação em %
IMA-B 5	R\$ 2.102.507,94	3,33%
IMA-B 5+	R\$ 61.108.056,58	96,67%
Total	R\$ 63.210.564,51	100%

Tabela 2.2: Alocação nos ativos que imunizam o passivo

Como resultado da imunização, obtivemos a seguinte alocação nos títulos de renda fixa:

Na seção 2.2.2, que o nosso fundo hipotético é superavitário e possui: R\$ 70.000.000,00 em ativos. Desta forma, como utilizaremos o montante de R\$ 63.210.564,51 para compor nossa carteira de imunização, devemos ter a seguinte composição de investimentos para o plano:

Descrição	Valor	Participação em %
IMA-B 5	R\$ 2.102.507,94	3,00%
IMA-B 5+	R\$ 61.108.056,58	87,30%
IBOVESPA	R\$ 6.789.435,48	9,70%
Ativos Totais	R\$ 70.000.000,00	100%

Tabela 2.3: Composição Financeira da Carteira de Investimentos

Ou seja, o montante não investido nos ativos para a imunização pode ser investido em Renda Variável, pois a porcentagem está dentro do permitido pela Legislação que é de 70% no máximo e também está dentro do limite estabelecido pela Política de Investimentos do Plano de Benefícios Hipotético. No nosso caso, faremos o investimento no IBOVESPA.

2.5 Modelo de Alocação Ótima

Uma alocação ótima indica a melhor escolha possível dadas algumas premissas. Do ponto de vista do nosso problema, que é sugerir uma alocação para a carteira de ativos de um fundo de pensão, estamos interessados em obter quanto devemos aplicar em cada ativo para que o objetivo do plano seja alcançado.

Nesse sentido, vamos iniciar o assunto com a apresentação de um modelo genérico:

⁴A *duration* de Fisher-Weil é uma generalização da *duration* de Macaulay e considera os valores presentes dos fluxos de caixa calculados usando uma estrutura a termo não *flat*.

Maximizar o Retorno

Sujeito a:

Risco $\leq$ Limite máximo de Risco

Retorno $\geq$ Limite mínimo de Retorno

Demais Limites

Neste modelo, a política de alocação, que é a solução obtida, tem por objetivo maximizar o retorno esperado dos investimentos dado um nível de risco de mercado determinado pelo limite de risco. Há ainda um limite de retorno mínimo, que no contexto do fundo de pensão é representado pela meta atuarial. Para o plano de benefícios deste estudo, definimos a meta atuarial na seção 2.2.2. Além destes dois limites, podemos citar outros importantes como:

- Limite inferior e superior de alocação nos ativos (ou classe de ativos);
- Limite de liquidez;
- Limite de crédito;
- Demais restrições legais.

A escolha do nível de risco aceitável e o nível de retorno são itens importantes do modelo e vale lembrar que, dependendo da escolha destes limites, o problema pode não ter uma solução factível.

O modelo que pretendemos utilizar para obter a alocação ótima de ativos do Plano de Benefícios Hipotético é baseado na Moderna Teoria de Carteiras. Essa teoria surgiu em 1952 com a publicação do artigo "*Portfolio Selection*" de Harry Markowitz (ver (Markowitz, 1952)). A proposta de Markowitz é utilizar um modelo de programação quadrática para resolver o problema de alocação ótima de ativos para uma carteira de investimentos considerando um único período de análise.

Segundo (de Barros Nabholz, 2006), as principais questões que surgiram por conta do trabalho de Markowitz foram:

- função utilidade e as medidas de risco;
- investimentos de longo prazo e os modelos multi-período;
- otimização robusta e geração de cenários;
- ALM e a gestão dos passivos para os sistemas bancário e previdenciário.

Estamos interessados no segundo e último itens, pois queremos fazer a gestão de passivos para o fundo de pensão utilizando um modelo multi-período. Para isso, faz-se necessário uma introdução ao modelo de Markowitz que é uni-período e base para o multi-período. Neste modelo, o autor segue algumas premissas:

1. Os investidores avaliam suas carteiras com base no valor esperado e na variância das taxas de retorno sobre o horizonte de análise;
2. Os investidores são insatisfeitos, isto é, quando postos a escolher entre duas carteiras de mesmo risco, sempre escolhem a de maior retorno;
3. Os investidores são avessos ao risco, ou seja, quando postos a escolher entre duas carteiras de mesmo retorno, sempre escolhem a de menor risco.

Com essas premissas, o autor define as variáveis de controle do problema: valor esperado, que é o retorno da carteira, e variância, que é o risco da mesma, além das condições para que a solução seja ótima. Essas condições são tais que quando fixamos uma das variáveis de controle, comparamos a outra para fazer a tomada de decisão. No caso da comparação de duas carteiras em que uma tem menor risco e também menor retorno que a outra, a escolha dos investimentos ficaria a cargo do investidor.

Estas são as principais hipóteses do modelo. Porém, há mais considerações que são levadas em conta. Uma delas é que o investidor poderia investir em qualquer fração de um ativo se assim preferisse, porém na prática isso não é verdade uma vez que o mercado negocia os ativos em lotes padrões e só é possível obter múltiplos destes lotes. O fato é que esta premissa facilita o trabalho do ponto de vista da programação, pois nos exime de trabalhar com um problema de programação inteira que é de resolução mais complexa. Outra consideração é a de que existe um ativo livre de risco, no qual um investidor pode tanto emprestar como tomar emprestado. No Brasil, podemos considerar a Selic como taxa de referência para o livre de risco.

No aspecto da liquidez, Markowitz simplifica o modelo considerando que não há restrição com relação à liquidez dos ativos, isto é, seria possível comprar e vender qualquer quantidade de um ativo ao seu preço justo. Sabemos que esta premissa não acontece na realidade, pois dependendo do ativo a ser negociado não há um mercado que possa absorver grandes movimentações de quantidade. Mais um aspecto simplificador é não considerar os custos de transação e impostos. Na prática esta premissa deveria ser considerada, porque dependendo da alocação que se planeja realizar os custos de transação podem ser um impeditivo para que alocação seja bem sucedida e traga os resultados esperados.

Por último, temos a seguinte hipótese: os investidores estão de acordo quanto à distribuição de probabilidades das taxas de retorno dos ativos, o que assegura a

existência de um único conjunto de carteiras eficientes. Esta é uma premissa forte, não restritiva na realidade, mas que chama a atenção para os dados de entrada do modelo. Dependendo de como foi modelada a distribuição de probabilidades das taxas de retorno, a seleção ótima de ativos pode ser diferente tanto para o caso uni-período como para o caso multi-período.

Dadas estas hipóteses, passaremos para a apresentação formal do modelo uni-período.

2.5.1 Modelo Uni-Período

Com as hipóteses apresentadas anteriormente, Markowitz desenvolveu um modelo de otimização para obter o conjunto de carteiras eficientes a partir das expectativas de retorno e risco dos ativos individualmente e da matriz de covariância entre eles. Apresentamos aqui o modelo que minimiza o risco, dado um retorno desejável. Mas também é possível olhar o modelo pensando em maximizar o retorno dado um nível de risco desejado.

$$\text{Min } w' \Sigma w$$

$$\text{Sujeito a :}$$

$$w' r = \mu$$

$$w' e = 1$$

$$w \in \mathbb{R}^n = 1$$

Os parâmetros do modelo são:

- w é o vetor com o pesos dos ativos na carteira: $\begin{pmatrix} w1 \\ w2 \\ \vdots \\ wn \end{pmatrix}$;
- Σ é a matriz de covariância entre os ativos da carteira: $\Sigma = \text{cov}(R) = E((R - r)(R - r)')$;
- R é o retorno dos ativos;
- r é o vetor com o retorno esperado dos ativos da carteira:

$$\begin{pmatrix} r1 \\ r2 \\ \vdots \\ rn \end{pmatrix} = E(R) = \begin{pmatrix} E(R1) \\ E(R2) \\ \vdots \\ E(Rn) \end{pmatrix};$$

- μ é retorno pretendido para a carteira;

- e é o vetor de 1 com mesma dimensão de w : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$;

- n é o número de ativos.

O problema nos retorna como solução o valor de w , ou seja, o peso que deve ser alocado em cada ativo para uma carteira eficiente com expectativa de retorno μ . Apresentamos um exemplo numérico que pode ser visto no apêndice D, utilizando o *solver* do Microsoft Excel, em que aplicamos o modelo acima descrito.

Neste momento é importante definirmos melhor alguns parâmetros do modelo.

Definimos o retorno financeiro de um ativo como sendo a variação do seu preço entre dois instantes de tempo distintos, t e $t+j$, $j \geq 1$, ou seja:

$$R_i(t) = \frac{S_i(t+j)}{S_i(t)}$$

Considerando que $S_i(t)$ é o preço do ativo i no instante t . Assim, a taxa de retorno do ativo será dada por:

$$r_i(t) = \frac{S_i(t+j) - S_i(t)}{S_i(t)} = \frac{S_i(t+j)}{S_i(t)} - 1 = R_i(t) - 1$$

Se considerarmos pequenas variações de preço dos ativos, podemos utilizar a aproximação de Taylor de primeira ordem para a taxa de retorno:

$$r_i(t) = \frac{S_i(t+j)}{S_i(t)} - 1 \approx \ln\left(\frac{S_i(t+j)}{S_i(t)}\right)$$

O retorno logaritmico é muito utilizado na prática, pois para se obter o retorno para qualquer período de tempo, basta somá-los. O vetor de retornos presente no modelo deve ser construído desta forma.

Se modificarmos um pouco o modelo anterior, podemos ao invés de minimizar o risco, maximizar o retorno esperado da carteira. Isso é importante para o caso do fundo de pensão, pois o objetivo do fundo é maximizar o retorno da carteira de forma a cumprir com as obrigações futuras e atender a meta atuarial. Com essa visão o problema se torna:

$$\text{Max } w'r$$

$$\text{Sujeito a :}$$

$$w'\Sigma w = \sigma^2$$

$$w'e = 1$$

$$w \in \mathbb{R}^n = 1$$

Neste caso temos:

- w é o vetor com o pesos dos ativos na carteira;
- Σ é a matriz de covariância entre os ativos da carteira;
- r é o vetor com o retorno esperado dos ativos da carteira;
- $\sigma^2 =$ é a variância esperada para carteira (limite de risco);
- e é o vetor de 1 com mesma dimensão de w ;
- n é o número de ativos.

Para este modelo também apresentamos um exemplo numérico disponível no apêndice D.

A partir do modelo proposto por Harry Markowitz, surgiram aprimoramentos ao longo do tempo:

- Inclusão de um ativo livre de risco⁵ na lista dos ativos disponíveis para investimento;
- Inclusão de restrições de não-negatividade nas variáveis de controle, isto é, nos pesos dos ativos. O modelo original permite a venda a descoberto de ativos financeiros;
- Inclusão de limites inferiores e superiores para as variáveis de controle.

O resultado do exemplo numérico de um modelo com os aprimoramentos citados pode ser visto no apêndice D.

Assim, apresentamos o modelo de Markowitz que é restrito para um único período de análise. Porém para o caso que queremos trabalhar, precisamos de uma abordagem multi-período, a qual trataremos a seguir.

⁵Definimos um ativo livre de risco como sendo um ativo financeiro que possui um retorno determinístico, ou seja, seu retorno financeiro é conhecido a priori. Desta forma, a covariância do ativo livre de risco com os demais ativos com risco é 0.

2.5.2 Modelo Multi-Período

Vamos trabalhar com um modelo multi-período discreto. Este problema é formulado da seguinte forma: o investidor possui um período de tempo (horizonte de investimento) no qual busca maximizar o retorno dos investimentos. Este horizonte de tempo pode ser subdividido em períodos, sendo que ao final de cada período o investidor pode medir o retorno da carteira e realizar novas alocações com o capital disponível para o próximo período. Ou seja, o investidor com um capital inicial V_0 , alocará o capital nos ativos escolhidos e esperará até o final do período quando o capital tiver rendido e se tornado $V(1)$ e ele poderá rebalancear a carteira.

Se tratarmos este problema como vários problemas uni-período, isto é, tratando cada rebalanceamento de forma independente e sucessiva, dificilmente encontraremos uma solução ótima. Para resolver este problema, diversos pesquisadores passaram a utilizar técnicas de programação dinâmica e programação estocástica. Uma referência importante neste sentido é (Li and Ng, 1998).

Considerando a programação dinâmica o problema do investidor é modelado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } E(V(T)) \\
 & \text{Sujeito a :} \\
 & \text{Var}(V(T)) \leq \sigma^2 \\
 & V(t+1) = \sum_{i=1}^n R_i(t)U_i + \left(V(t) - \sum_{i=1}^n U_i(t) \right) R_0(t) \\
 & t = 0, \dots, T-1
 \end{aligned}$$

Neste caso temos:

- T é o horizonte de investimento;
- $E(V(T))$ é o valor esperado da carteira ao final do horizonte de investimento;
- $\text{Var}(V(T))$ é variância da carteira ao final do horizonte de investimento;
- σ^2 é a variância esperada para carteira (limite de risco);
- $V(t)$ é o valor da carteira no período t ;
- $R_i(t)$ é o retorno financeiro do ativo i no período t , definido em 2.5.1;
- $U_i(t)$ é o montante de capital investido no ativo i no período t ;
- $R_0(t)$ é o retorno financeiro do ativo livre de risco no período t ;

Mais especificamente, o montante de capital investido no ativo i no período t é definido como:

$$U_i(t) = H_i(t) \times S_i(t)$$

Considerando que $H_i(t)$ é a quantidade alocada do ativo i no instante t e $S_i(t)$ é o preço do ativo i no instante t .

Este problema nos dá como resposta a melhor estratégia de investimento, dada pelos $U_i(t)$ tal que o valor esperado da carteira ao final do período, isto é, em T , seja maximizado e que a variância da carteira não seja maior do que um nível predeterminado por σ^2 .

A partir desta abordagem, vamos formular o problema que utilizaremos para obter a alocação dos ativos na carteira do Plano de Benefícios Hipotético ao longo de um horizonte de tempo estipulado.

Capítulo 3

Modelo Proposto & Resultados

3.1 Modelo para o Fundo de Pensão

Vamos agora voltar ao caso do nosso fundo de pensão. Queremos obter a alocação ótima nos ativos para o Plano de Benefícios Hipotético, de forma a atender a Política de Investimentos do fundo, as restrições legais e o nível de risco aceitável pelo plano. Para isso, vamos utilizar a base do modelo multi-período da seção anterior e incluiremos algumas restrições.

No universo dos fundos de pensão, trabalhamos com a questão das receitas e despesas: as contribuições dos participantes a cada período e também os pagamentos dos benefícios aos participantes aposentados. Para o nosso caso, precisamos nos preocupar apenas com o pagamento dos benefícios, dado que toda a população já está em fase de recebimento. Assim, para o horizonte de investimentos que avaliaremos, temos que ter qual o valor dos pagamentos que o plano pretende fazer para os pensionistas. Na seção 2.3, calculamos o valor dos benefícios futuros que o nosso plano deverá pagar ao longo dos próximos anos. Desta forma, deduziremos do valor da carteira no instante t , o valor da despesa do fundo no instante t . O risco da carteira também será calculado descontando-se o valor das obrigações.

Além do passivo, devemos nos preocupar com os limites de alocação nos ativos (ou classe de ativos), pois estes devem seguir a legislação e também a Política de Investimentos do plano. Em geral, os limites de alocação das PI são mais restritivas que os limites da legislação e isso não é diferente para o nosso plano. Assim, vamos incluir como restrições do modelo a porcentagem de participação dos ativos de acordo com o que foi especificado na política de investimentos na tabela 2.1. Como estamos trabalhando com dois índices do segmento de Renda Fixa, IMA-B 5 e IMA-B 5+, as restrições com relação à Renda Fixa foram aplicadas à soma da participação de ambos na carteira.

Outra restrição importante é que ao final de cada período o fundo de pensão atinja

a meta atuarial. Dessa forma, inserimos a restrição de que o valor da carteira no próximo período deve ser maior ou igual ao valor da carteira no período atual corrigido pela taxa referente à meta atuarial. De acordo com a nossa PI apresentada na seção 2.2.2, a meta atuarial (meta de rentabilidade) para o fundo é IPCA + 6% a.a..

Com isso, podemos modelar o nosso problema como:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } E(V(T)) \\
 & \text{Sujeito a :} \\
 & \text{Var}(V(T)) \leq \sigma^2 \\
 & V(t+1) = \sum_{i=1}^n R_i(t)U_i(t) + \left(V(t) - \sum_{i=1}^n U_i(t) \right) R_0(t) - D(t) \\
 & \text{limite inferior}_i \leq \frac{U_i(t+1)}{V(t+1)} \leq \text{limite superior}_i \\
 & V(t+1) \geq V(t) \times (1 + tx_{MA}(t+1)) \\
 & t = 0, \dots, T-1
 \end{aligned}$$

Neste caso temos:

- T é o horizonte de investimento;
- $V(T)$ é o valor da carteira ao final do horizonte de investimento;
- $\text{Var}(V(T))$ variância da carteira ao final do horizonte de investimento;
- σ^2 é a variância esperada para carteira (limite de risco);
- $V(t)$ é o valor da carteira no período t ;
- $R_i(t)$ é o retorno financeiro do ativo i no período t , definido em 2.5.1;
- $U_i(t)$ é o montante de capital investido no ativo i no período t ;
- $R_0(t)$ é o retorno financeiro do ativo livre de risco no período t ;
- $D(t)$ é o valor da despesa (obrigação) do plano no ano t ;
- limite inferior_i é o limite mínimo de alocação do ativo i , em percentual;
- limite superior_i é o limite máximo de alocação do ativo i , em percentual;
- $tx_{MA}(t)$ é a taxa que representa a meta atuarial para o ano t ;

Para aplicarmos o modelo acima proposto, precisamos determinar outros dados de entrada além das restrições. Vamos começar com o horizonte de investimento. Como apresentamos na seção 2.2.2, as Políticas de Investimento dos fundos de pensão são confeccionadas para valer por um período de tempo, por exemplo cinco anos. Assim, vamos utilizar como horizonte de investimento o período de cinco anos, isto é, $T = 5$ para o nosso estudo.

A variância que utilizaremos como limite de risco σ^2 é a variância da nossa carteira atual, definida na seção 2.4. Fazendo $w'\Sigma w$ para a carteira atual, obtemos um risco de aproximadamente 0,0036 e este será o limite de risco para cada ano. Da mesma forma, o valor V_0 que é o valor inicial da carteira do nosso Plano de Benefícios Hipotético será R\$ 70.000.000,00.

Os retornos dos ativos foram estimados para o horizonte de tempo T , ou seja, cinco anos. Assim como fizemos com a inflação (IPCA), utilizamos um modelo AR(1) para estimar o preço de cada ativo para o próximo ano. Estamos trabalhando com os índices IBOVESPA, IMA-B 5 e IMA-B 5+ e, portanto, estimamos o valor destes índices. Utilizamos como série de dados históricos o valor médio anual de cada índice, com o intuito de obter um retorno anual. No apêndice E são apresentados os valores simulados. Escolhemos o CDI¹ como um ativo livre de risco e, portanto, estimamos o retorno esperado também deste ativo, seguindo a mesma metodologia utilizada para os demais.

Para o cálculo da variância utilizamos a série histórica dos retornos para calcular a estimativa de risco. Existem diversos métodos estatísticos razoavelmente robustos para tal fim. Para elencar alguns temos: Média Móvel Simples, Média Móvel Exponencial (EWMA), modelos do tipo ARCH e GARCH e modelos de volatilidade estocástica. No presente trabalho utilizamos o modelo de Média Móvel Simples.

Para o passivo, utilizamos a previsão de pagamentos resultante do cálculo atuarial apresentado na seção 2.3 para os cinco próximos anos. Já para a meta atuarial, consideramos o IPCA simulado via o AR(1), cujos dados são apresentados no apêndice A.

Na figura 3.1 apresentamos os dados de entrada utilizados.

¹ CDI significa Certificado de Depósito Interbancário e corresponde aos títulos de emissão das instituições financeiras, que lastreiam as operações do mercado interbancário. Suas características são idênticas às de um CDB, mas sua negociação é restrita ao mercado interbancário. Sua função é, portanto, transferir recursos de uma instituição financeira para outra. Em outras palavras, para que o sistema seja mais fluido, quem tem dinheiro sobrando empresta para quem não tem. Os CDIs negociados por um dia, também são denominados Depósitos Interfinanceiros (DI) e detém a característica de funcionarem como um padrão de taxa média diária, a CDI *over*. As taxas do CDI *over* vão estabelecer os parâmetros das taxas referentes às operações de empréstimos de curtíssimo prazo, conhecidas como *hot money*.

Dados de Entrada

Covariância - Ativos de Risco (Cov)				
	CDI	IBOVESPA	IMA-B 5	IMA-B 5 +
CDI	0	0	0	0
IBOVESPA	0	0,026258823	0,000362979	0,002216646
IMA-B 5	0	0,000362979	0,000771621	0,001463656
IMA-B 5 +	0	0,002216646	0,001463656	0,003814946

Retorno esperado					
	R(1)	R(2)	R(3)	R(4)	R(5)
CDI	1,0000832	1,0000429	1,0000443	1,0000458	1,0000461
IBOVESPA	1,0447148	1,1056856	1,0964569	1,0984149	1,0988586
IMA-B 5	1,2306546	1,2211086	1,2236120	1,2250555	1,2264692
IMA-B 5 +	1,3086551	1,2918953	1,2935057	1,2865572	1,2914956

Despesas do Plano: passivo para os próximos anos

D(1)	D(2)	D(3)	D(4)	D(5)
R\$ 2.340.887,64	R\$ 2.333.598,12	R\$ 2.325.551,87	R\$ 2.316.656,63	R\$ 2.306.820,11

Inflação Estimada: IPCA AR(1)

IPCA (1)	IPCA (2)	IPCA (3)	IPCA (4)	IPCA (5)
5,3684%	5,3625%	5,2035%	5,0139%	4,8027%

Meta atuarial: IPCA + 6%

MA (1)	MA (2)	MA (3)	MA (4)	MA (5)
11,3684%	11,3625%	11,2035%	11,0139%	10,8027%

Figura 3.1: Dados de Entrada do Modelo

3.2 Resultados

O modelo descrito foi implementado no Microsoft Excel, como pode ser verificado no apêndice F onde apresentamos a montagem do modelo. Foi utilizada a função *GRG Nonlinear* para resolvê-lo, com critério de convergência 0,0001, Derivadas *forward*, *Multistart* selecionado com o tamanho da população igual a 100.

Como resultado do problema, obtivemos o valor a ser aplicado em cada um dos ativos propostos em cada ano de avaliação, de forma a atender as restrições impostas. Na tabela 3.1 apresentamos os valores financeiros aplicados em cada ativo a cada ano.

Ativo	Ano 0 - 2012	Ano 1 - 2013	Ano 2 - 2014	Ano 3 - 2015	Ano 4 - 2016	Ano 5 - 2017
CDI	-	-	-	R\$ 22.973.113,26	R\$ 10.080.793,89	R\$ 34.708.408,62
IBOVESPA	R\$ 6.789.435,48	R\$ 4.788.849,91	R\$ 33.593.671,54	R\$ 19.527.116,84	R\$ 41.318.121,31	R\$ 21.655.874,71
IMA-B 5	R\$ 2.102.507,94	R\$ 2.282.778,77	R\$ 54.307.101,86	R\$ 73.168.715,37	R\$ 63.731.113,83	R\$ 93.324.710,40
IMA-B 5+	R\$ 61.108.056,58	R\$ 88.705.369,39	R\$ 33.662.656,80	R\$ 31.690.105,59	R\$ 52.051.372,70	R\$ 49.808.015,51
TOTAL	R\$ 70.000.000,00	R\$ 95.776.998,17	R\$ 121.563.430,21	R\$ 147.359.051,06	R\$ 173.164.787,96	R\$ 198.981.567,27

Tabela 3.1: Composição da Carteira ao Longo dos Anos

Na figura 3.2 apresentamos o percentual de alocação em cada ativo ao longo dos anos.

Note que a participação do IMA-B 5 aumenta ao longo dos anos, enquanto que a

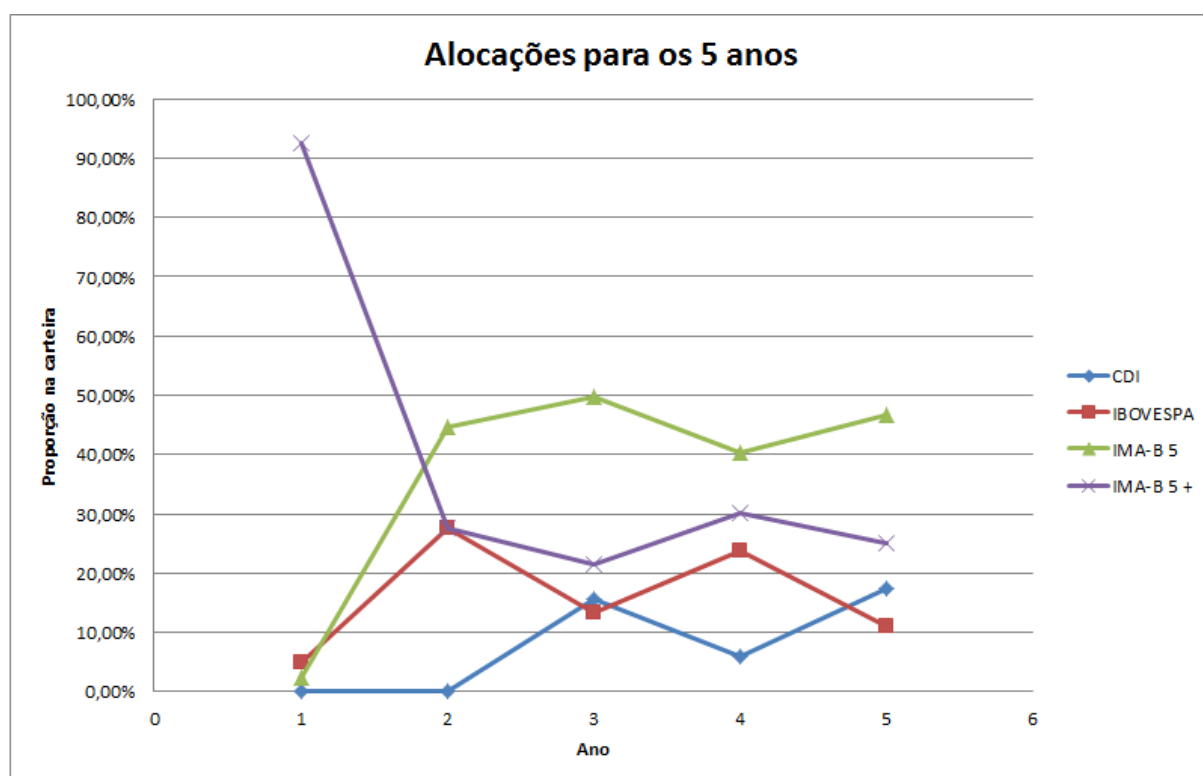


Figura 3.2: Percentual de Alocação ao Longo dos Anos

do IMA-B 5+ diminui drasticamente, para dar lugar a investimentos no IMA-B 5, IBOVESPA e, posteriormente ao ativo livre de risco. Os ativos de Renda Fixa dominaram a carteira tendo sua participação sempre acima de 70%.

Em termos da meta atuarial, verificamos que em todo o período o plano ficou acima da meta, conforme apresentado na tabela 3.2.

Ativo	Ano 1 - 2013	Ano 2 - 2014	Ano 3 - 2015	Ano 4 - 2016	Ano 5 - 2017
Financeiro	R\$ 95.776.998,17	R\$ 121.563.430,21	R\$ 147.359.051,06	R\$ 173.164.787,96	R\$ 198.981.567,27
Meta Atuarial	R\$ 77.957.880,07	R\$ 106.659.697,77	R\$ 135.182.807,68	R\$ 163.589.071,45	R\$ 191.871.219,98
Diferença	R\$ 17.819.118,00	R\$ 14.903.732,44	R\$ 12.176.243,38	R\$ 9.592.330,29	R\$ 7.110.299,93

Tabela 3.2: Comparação: Valor da Carteira x Meta Atuarial

Isso nos mostra que durante os próximos cinco anos o fundo conseguirá, além de pagar suas obrigações com os participantes, atingir a meta atuarial.

Para o risco, o resultado do cálculo $w'\Sigma w$ para cada ano é mostrado na tabela 3.3. Notamos que à medida que a participação do ativo livre de risco cresce na carteira, o risco da mesma diminui, como esperado. O limite de risco utilizado no nosso modelo foi dado pelo valor de risco do Ano 0 - 2012, a partir da carteira apresentada na seção 2.4.

Ano 0 - 2012	Ano 1 - 2013	Ano 2 - 2014	Ano 3 - 2015	Ano 4 - 2016	Ano 5 - 2017
0,0036	0,0036	0,0032	0,0013	0,0027	0,0012

Tabela 3.3: Cálculo do Risco

Capítulo 4

Conclusões

Um dos objetivos deste trabalho era analisar o processo de Gestão de Fundos de Pensão. Nesse sentido, apresentamos um estudo de caso com o intuito de passar por algumas das fases do processo de gerenciamento de um plano de benefícios. Apresentamos as diretrizes legais as quais as Instituições devem seguir para manter a segurança do mercado: confecção de Regulamento e Política de Investimento, além de definirmos as características da população do plano a ser estudado.

Também apresentamos alguns aspectos da avaliação atuarial: modelos de financiamento dos planos, cálculo dos benefícios futuros e da reserva atuarial, pois esta é uma etapa importante da gestão. Há diversas empresas que prestam consultoria às Entidades com o objetivo de fazer a avaliação atuarial e, assim, obter os dados de entrada para utilizarem em um modelo de ALM.

Como vimos, os órgãos reguladores exigem que sejam medidos o risco de mercado, de crédito, de liquidez e também de descasamento de ativos e passivos dos Planos de Benefícios visando garantir que o plano consiga cumprir sua obrigação de suplementar a renda dos participantes quando estes solicitam os benefícios.

Com o objetivo de explorar alguns métodos de ALM, aplicamos um método muito utilizado pelos gestores de fundos de pensão que é a imunização do passivo e utilizamos a carteira obtida como referência de risco para o modelo de ALM Multi-Período. A aplicação de um modelo de ALM a um Plano de Benefícios Definido era o outro objetivo deste trabalho. Alguns modelos de ALM foram brevemente apresentados e escolhemos trabalhar com um modelo multi-período baseado na Teoria de Carteiras cujo maior expoente é Harry Markowitz. O objetivo era formular um problema de ALM para o Plano de Benefícios Hipotético e aplicá-lo. O problema foi formulado na seção 3.1 e os resultados obtidos foram apresentados na seção 3.2. Encontramos que, seguindo tais premissas, o valor da carteira ficou acima da meta atuarial em todos os períodos do horizonte de investimento.

O intuito não era avaliar a alocação gerada pelo modelo formulado, mas sim, apresentar uma sugestão de modelo de ALM simples, que englobasse as restrições legais

e da entidade para auxiliá-la na tomada de decisão.

Concluimos que a Gestão de um Fundo de Pensão é uma tarefa complexa que envolve diversas etapas desde a criação do plano até o término de suas atividades, quando todos os pagamentos aos beneficiários se extingue. Além disso, reforçamos que os modelos matemáticos são imprescindíveis para que os gestores tenham informações boas e suficientes para a tomada de decisão. Desde a modelagem dos dados de entrada do modelo de ALM até a sua concepção, há diversas técnicas matemáticas que podem ser aplicadas e a escolha dessas técnicas também é uma tarefa da gestão, pois os resultados podem variar bastante dependendo dos métodos utilizados. Dessa forma, podemos citar como possibilidades de trabalhos futuros avaliar como os métodos para as estimativas dos dados de entrada (retorno e volatilidade dos ativos, por exemplo) podem influenciar na alocação objetivo dos ativos ao longo dos anos em um fundo de pensão e exploração de outros modelos de ALM para a comparação de resultados.

Apêndice A

Estimando a inflação

```
% Modelo de Previsão em Série Temporal
% IPCA: série temporal que representa o índice de inflação e corresponde ao
% Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA)
% Forca_IPCA: série temporal que representa o logaritmo da razão entre o
% IPCA do ano t e o IPCA do ano t-1

clear all
clc
close all

% Geração de um modelo AR(1) com os primeiros 16 dados mais recentes
% da série temporal.

load Forca_IPCA.txt
T = 16; % número de dados da série histórica da força do IPCA
N = 15; % número de anos para os quais quero prever o IPCA (inflação)

mi = mean(Forca_IPCA(1:T)); % média da série
dados = iddata(Forca_IPCA - mi, [], 1);
p = 1; % ordem da série temporal

% O Matlab não possui modelo AR, somente ARX.
mod_AR = arx(dados(1:T), p)

% Avaliação do modelo
AIC_AR = aic(mod_AR)
phi1 = mod_AR.a(2);
```

```
c = mi * (1 + mod_AR.a(2));

% Previsão dos períodos à frente
Q0 = 5.84; % taxa anual do IPCA para 2012
ypi = predict(mod_AR, dados(1:T), 1);
yp(1) = ypi.outputdata(T) + c;
Q(1) = Q0 * exp(yp(1));

for i=2:N
    ypi = predict(mod_AR, dados(1:T), i);
    yp(i) = ypi.outputdata(T) + c;
    Q(i) = Q(i-1) * exp(yp(i));
end
yp % Força_IPCA estimada
Q % IPCA estimado

% Impressão dos resultados
figure(2)
plot(1:T, IPCA(1:T), 'r', T+1:T+N, Q, 'r-.')
xlabel('Data t (ano)')
ylabel('Saída r_t')
legend('Série temporal', 'Previsão pelo Matlab', 1)
title('Previsões realizadas por modelo AR(1)')
```

Estimando a Inflação				
Ano	IPCA _t (Q(t))	Ln(Q(t))	Força da Inflação	Q(t) Calculado
Série Histórica	1996	9,56	2,257587727	
	1997	5,22	1,652497402	-0,605090325
	1998	1,65	0,500775288	-1,151722114
	1999	8,94	2,190535589	1,689760301
	2000	5,97	1,786746927	-0,403788662
	2001	7,67	2,037316615	0,250569688
	2002	12,53	2,528125769	0,490809154
	2003	9,3	2,2300144	-0,298111369
	2004	7,6	2,028148247	-0,201866153
	2005	5,69	1,738710248	-0,289437999
	2006	3,14	1,1442228	-0,594487448
	2007	4,46	1,495148766	0,350925966
	2008	5,9	1,774952351	0,279803585
	2009	4,31	1,460937904	-0,314014447
	2010	5,91	1,776645831	0,315707927
	2011	6,5	1,871802177	0,095156345
Série Estimada	2012	5,84	1,764730797	-0,10707138
	2013	5,3684		-0,084200866
	2014	5,3625		-0,001092212
	2015	5,2035		-0,030103307
	2016	5,0139		-0,037114689
	2017	4,8027		-0,043046336
	2018	4,6043		-0,042176377
	2019	4,4187		-0,041158375
	2020	4,2398		-0,041326971
	2021	4,0683		-0,041279472
	2022	3,9038		-0,041285005
	2023	3,7459		-0,041297987
	2024	3,5943		-0,041296882
	2025	3,4489		-0,041297401
	2026	3,3094		-0,041296289
	2027	3,1755		-0,041295916

Figura A.1: Estimativa da Inflação (IPCA) pelo modelo AR(1) - dados (IPEADATA, 2013)

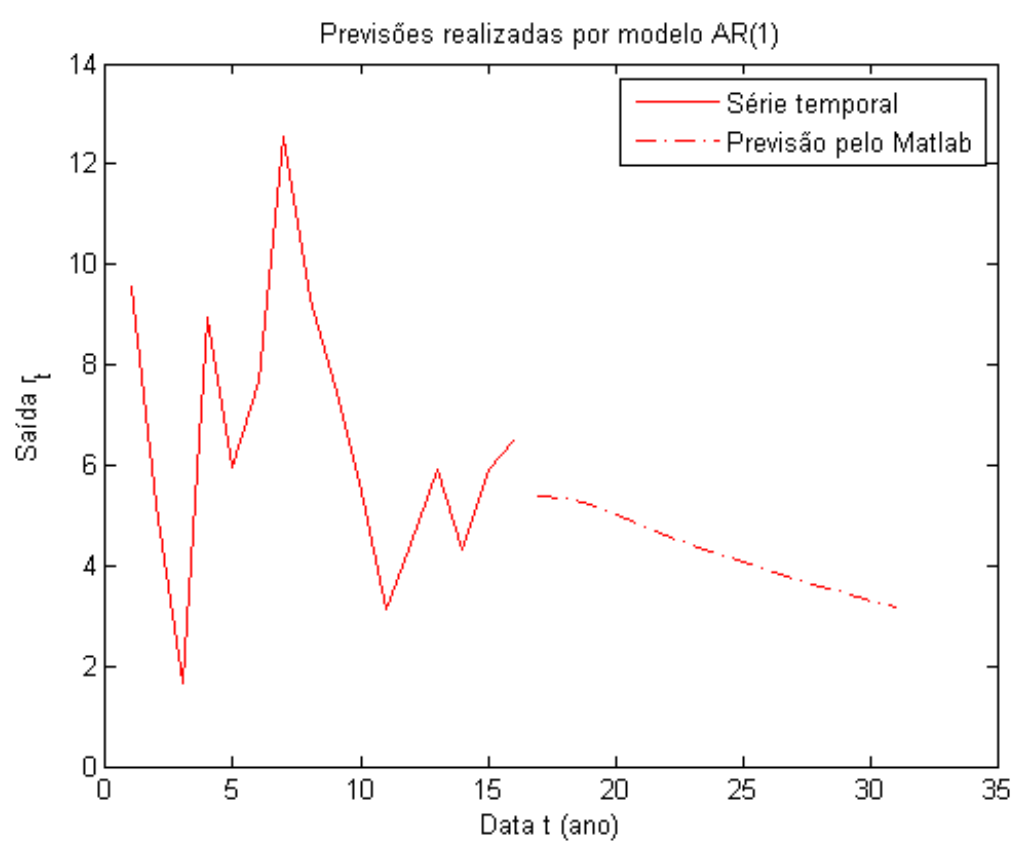


Figura A.2: Previsão do IPCA por modelo AR(1)

Apêndice B

Premissas Atuariais

Reserva Matemática (VPP)	R\$ 87.513.552,69
Duration (D)	14,31
VPP x D	1252635716,97

Ano	Ano	Idade	Unitário M	Unitário H	Mulheres	Homens	Total	Tx Atuarial AR(1)	Valor Presente	VP x Tempo
0	2013	55	R\$ 55.735,42	R\$ -	R\$ 2.340.887,64	R\$ -	R\$ 2.340.887,64	5,3684%	R\$ 2.340.887,64	0
1	2014	56	R\$ 55.561,86	R\$ -	R\$ 2.333.598,12	R\$ -	R\$ 2.333.598,12	5,3625%	R\$ 2.214.827,13	2214827,128
2	2015	57	R\$ 55.370,28	R\$ -	R\$ 2.325.551,87	R\$ -	R\$ 2.325.551,87	5,2035%	R\$ 2.101.190,98	4202381,956
3	2016	58	R\$ 55.158,49	R\$ -	R\$ 2.316.656,63	R\$ -	R\$ 2.316.656,63	5,0139%	R\$ 2.000.418,92	6001256,764
4	2017	59	R\$ 54.924,29	R\$ -	R\$ 2.306.820,11	R\$ -	R\$ 2.306.820,11	4,8027%	R\$ 1.912.160,01	7648640,036
5	2018	60	R\$ 54.665,49	R\$ 58.478,03	R\$ 2.295.950,37	R\$ 3.391.725,74	R\$ 5.687.676,11	4,6043%	R\$ 4.541.366,60	22706833
6	2019	61	R\$ 54.379,86	R\$ 57.990,32	R\$ 2.283.954,03	R\$ 3.363.438,75	R\$ 5.647.392,78	4,4187%	R\$ 4.356.914,76	26141488,55
7	2020	62	R\$ 54.065,05	R\$ 57.469,57	R\$ 2.270.732,22	R\$ 3.333.235,07	R\$ 5.603.967,29	4,2398%	R\$ 4.190.454,74	29333183,16
8	2021	63	R\$ 53.718,50	R\$ 56.909,82	R\$ 2.256.176,83	R\$ 3.300.769,36	R\$ 5.556.946,19	4,0683%	R\$ 4.039.127,50	32313020,02
9	2022	64	R\$ 53.337,36	R\$ 56.304,87	R\$ 2.240.169,25	R\$ 3.265.682,18	R\$ 5.505.851,43	3,9038%	R\$ 3.900.695,84	35106262,55
10	2023	65	R\$ 52.918,72	R\$ 55.648,35	R\$ 2.222.586,17	R\$ 3.227.604,33	R\$ 5.450.190,49	3,7459%	R\$ 3.773.151,55	37731515,48
11	2024	66	R\$ 52.459,07	R\$ 54.933,27	R\$ 2.203.280,78	R\$ 3.186.129,61	R\$ 5.389.410,39	3,5943%	R\$ 3.654.654,16	40201195,79
12	2025	67	R\$ 51.953,05	R\$ 54.153,22	R\$ 2.182.027,94	R\$ 3.140.886,57	R\$ 5.322.914,51	3,4489%	R\$ 3.543.553,87	42522646,46
13	2026	68	R\$ 51.392,99	R\$ 53.301,93	R\$ 2.158.505,68	R\$ 3.091.511,83	R\$ 5.250.017,51	3,3094%	R\$ 3.438.304,52	44697958,76
14	2027	69	R\$ 50.769,34	R\$ 52.373,94	R\$ 2.132.312,21	R\$ 3.037.688,61	R\$ 5.170.000,82	3,1755%	R\$ 3.337.481,82	46724745,44
15	2028	70	R\$ 50.070,70	R\$ 51.363,12	R\$ 2.102.969,46	R\$ 2.979.061,22	R\$ 5.082.030,68	3,1755%	R\$ 3.179.721,10	47695816,5
16	2029	71	R\$ 49.284,69	R\$ 50.265,49	R\$ 2.069.957,05	R\$ 2.915.398,68	R\$ 4.985.355,73	3,1755%	R\$ 3.023.231,11	48371697,83
17	2030	72	R\$ 48.399,78	R\$ 49.076,72	R\$ 2.032.790,97	R\$ 2.846.449,50	R\$ 4.879.240,47	3,1755%	R\$ 2.867.813,26	48752825,39
18	2031	73	R\$ 47.405,94	R\$ 47.794,34	R\$ 1.991.049,64	R\$ 2.772.071,78	R\$ 4.763.121,42	3,1755%	R\$ 2.713.399,54	48841191,77
19	2032	74	R\$ 46.294,99	R\$ 46.415,95	R\$ 1.944.389,39	R\$ 2.692.125,23	R\$ 4.636.514,62	3,1755%	R\$ 2.559.983,57	48639687,87
20	2033	75	R\$ 45.060,85	R\$ 44.940,39	R\$ 1.892.555,86	R\$ 2.606.542,57	R\$ 4.499.098,42	3,1755%	R\$ 2.407.656,29	48153125,85
41	2054	96	R\$ 4.727,61	R\$ 4.912,47	R\$ 198.559,67	R\$ 284.922,98	R\$ 483.482,65	3,1755%	R\$ 134.196,85	5502070,956
42	2055	97	R\$ 3.561,24	R\$ 3.906,79	R\$ 149.572,02	R\$ 226.593,55	R\$ 376.165,57	3,1755%	R\$ 101.196,14	4250237,682
43	2056	98	R\$ 2.596,15	R\$ 3.050,73	R\$ 109.038,15	R\$ 176.942,37	R\$ 285.980,52	3,1755%	R\$ 74.566,68	3206367,121
44	2057	99	R\$ 1.822,54	R\$ 2.334,60	R\$ 76.546,64	R\$ 135.406,92	R\$ 211.953,55	3,1755%	R\$ 53.563,94	2356813,225
45	2058	100	R\$ 1.224,77	R\$ 1.746,54	R\$ 51.440,41	R\$ 101.299,27	R\$ 152.739,68	3,1755%	R\$ 37.411,67	1683525,225
46	2059	101	R\$ 782,19	R\$ 1.273,38	R\$ 32.851,85	R\$ 73.856,28	R\$ 106.708,14	3,1755%	R\$ 25.332,39	1165290,097
47	2060	102	R\$ 470,27	R\$ 901,42	R\$ 19.751,39	R\$ 52.282,12	R\$ 72.033,51	3,1755%	R\$ 16.574,36	778994,8558
48	2061	103	R\$ 263,43	R\$ 616,72	R\$ 11.064,23	R\$ 35.769,86	R\$ 46.834,10	3,1755%	R\$ 10.444,50	501336,0769
49	2062	104	R\$ 135,12	R\$ 405,57	R\$ 5.675,21	R\$ 23.522,98	R\$ 29.198,19	3,1755%	R\$ 6.311,10	309243,7993
50	2063	105	R\$ 61,88	R\$ 254,66	R\$ 2.599,14	R\$ 14.770,31	R\$ 17.369,46	3,1755%	R\$ 3.638,80	181940,22
51	2064	106	R\$ 24,35	R\$ 151,45	R\$ 1.022,66	R\$ 8.784,20	R\$ 9.806,86	3,1755%	R\$ 1.991,25	101553,7712
52	2065	107	R\$ 7,73	R\$ 84,47	R\$ 324,63	R\$ 4.899,12	R\$ 5.223,75	3,1755%	R\$ 1.028,02	53457,07395
53	2066	108	R\$ 1,76	R\$ 43,64	R\$ 73,98	R\$ 2.530,84	R\$ 2.604,82	3,1755%	R\$ 496,85	26332,79157
54	2067	109	R\$ 0,22	R\$ 20,55	R\$ 9,09	R\$ 1.192,05	R\$ 1.201,14	3,1755%	R\$ 222,05	11990,91265
55	2068	110	R\$ -	R\$ 8,65	R\$ -	R\$ 501,44	R\$ 501,44	3,1755%	R\$ 89,85	4941,603231
56	2069	111	R\$ -	R\$ 3,16	R\$ -	R\$ 183,12	R\$ 183,12	3,1755%	R\$ 31,80	1780,883607
57	2070	112	R\$ -	R\$ 0,96	R\$ -	R\$ 55,72	R\$ 55,72	3,1755%	R\$ 9,38	534,6231581
58	2071	113	R\$ -	R\$ 0,23	R\$ -	R\$ 13,24	R\$ 13,24	3,1755%	R\$ 2,16	125,3084758
59	2072	114	R\$ -	R\$ 0,04	R\$ -	R\$ 2,18	R\$ 2,18	3,1755%	R\$ 0,35	20,37764094
60	2073	115	R\$ -	R\$ 0,00	R\$ -	R\$ 0,19	R\$ 0,19	3,1755%	R\$ 0,03	1,723914436

Figura B.1: Cálculo da reserva matemática usando a previsão da inflação pelo AR(1)

Reserva Matemática (VPP)	R\$ 63.210.564,52
Duration (D)	12,05
VPP x D	761674223,03

Ano	Ano	Idade	Unitário M	Unitário H	Mulheres	Homens	Total	Tx Atuarial Legislação	Valor Presente	VP x Tempo
0	2013	55	R\$ 55.735,42	R\$ -	R\$ 2.340.887,64	R\$ -	R\$ 2.340.887,64	6,0000%	R\$ 2.340.887,64	0
1	2014	56	R\$ 55.561,86	R\$ -	R\$ 2.333.598,12	R\$ -	R\$ 2.333.598,12	6,0000%	R\$ 2.201.507,66	2201507,656
2	2015	57	R\$ 55.370,28	R\$ -	R\$ 2.325.551,87	R\$ -	R\$ 2.325.551,87	6,0000%	R\$ 2.069.732,88	4139465,77
3	2016	58	R\$ 55.158,49	R\$ -	R\$ 2.316.656,63	R\$ -	R\$ 2.316.656,63	6,0000%	R\$ 1.945.109,58	5835328,745
4	2017	59	R\$ 54.924,29	R\$ -	R\$ 2.306.820,11	R\$ -	R\$ 2.306.820,11	6,0000%	R\$ 1.827.217,59	7308870,364
5	2018	60	R\$ 54.665,49	R\$ 58.478,03	R\$ 2.295.950,37	R\$ 3.391.725,74	R\$ 5.687.676,11	6,0000%	R\$ 4.250.162,46	21250812,3
6	2019	61	R\$ 54.379,86	R\$ 57.990,32	R\$ 2.283.954,03	R\$ 3.363.438,75	R\$ 5.647.392,78	6,0000%	R\$ 3.981.189,07	23887134,4
7	2020	62	R\$ 54.065,05	R\$ 57.469,57	R\$ 2.270.732,22	R\$ 3.333.235,07	R\$ 5.603.967,29	6,0000%	R\$ 3.726.958,31	26088708,18
8	2021	63	R\$ 53.718,50	R\$ 56.909,82	R\$ 2.256.176,83	R\$ 3.300.769,36	R\$ 5.556.946,19	6,0000%	R\$ 3.486.496,78	27891974,28
9	2022	64	R\$ 53.337,36	R\$ 56.304,87	R\$ 2.240.169,25	R\$ 3.265.682,18	R\$ 5.505.851,43	6,0000%	R\$ 3.258.905,00	29330145,04
10	2023	65	R\$ 52.918,72	R\$ 55.648,35	R\$ 2.222.586,17	R\$ 3.227.604,33	R\$ 5.450.190,49	6,0000%	R\$ 3.043.357,90	30433579,04
11	2024	66	R\$ 52.459,07	R\$ 54.933,27	R\$ 2.203.280,78	R\$ 3.186.129,61	R\$ 5.389.410,39	6,0000%	R\$ 2.839.074,16	31229815,8
12	2025	67	R\$ 51.953,05	R\$ 54.153,22	R\$ 2.182.027,94	R\$ 3.140.886,57	R\$ 5.322.914,51	6,0000%	R\$ 2.645.325,43	31743905,21
13	2026	68	R\$ 51.392,99	R\$ 53.301,93	R\$ 2.158.505,68	R\$ 3.091.511,83	R\$ 5.250.017,51	6,0000%	R\$ 2.461.413,07	31998369,97
14	2027	69	R\$ 50.769,34	R\$ 52.373,94	R\$ 2.132.312,21	R\$ 3.037.688,61	R\$ 5.170.000,82	6,0000%	R\$ 2.286.696,35	32013748,88
15	2028	70	R\$ 50.070,70	R\$ 51.363,12	R\$ 2.102.969,46	R\$ 2.979.061,22	R\$ 5.082.030,68	6,0000%	R\$ 2.120.553,84	31808307,62
16	2029	71	R\$ 49.284,69	R\$ 50.265,49	R\$ 2.069.957,05	R\$ 2.915.398,68	R\$ 4.985.355,73	6,0000%	R\$ 1.962.466,76	31399468,09
17	2030	72	R\$ 48.399,78	R\$ 49.076,72	R\$ 2.032.790,97	R\$ 2.846.449,50	R\$ 4.879.240,47	6,0000%	R\$ 1.811.976,30	30803597,11
18	2031	73	R\$ 47.405,94	R\$ 47.794,34	R\$ 1.991.049,64	R\$ 2.772.071,78	R\$ 4.763.121,42	6,0000%	R\$ 1.668.730,01	30037140,26
19	2032	74	R\$ 46.294,99	R\$ 46.415,95	R\$ 1.944.389,39	R\$ 2.692.125,23	R\$ 4.636.514,62	6,0000%	R\$ 1.532.428,40	29116139,68
20	2033	75	R\$ 45.060,85	R\$ 44.940,39	R\$ 1.892.555,86	R\$ 2.606.542,57	R\$ 4.499.098,42	6,0000%	R\$ 1.402.840,16	28056803,11
41	2054	96	R\$ 4.727,61	R\$ 4.912,47	R\$ 198.559,67	R\$ 284.922,98	R\$ 483.482,65	6,0000%	R\$ 44.344,57	1818127,232
42	2055	97	R\$ 3.561,24	R\$ 3.906,79	R\$ 149.572,02	R\$ 226.593,55	R\$ 376.165,57	6,0000%	R\$ 32.548,63	1367042,408
43	2056	98	R\$ 2.596,15	R\$ 3.050,73	R\$ 109.038,15	R\$ 176.942,37	R\$ 285.980,52	6,0000%	R\$ 23.344,48	1003812,735
44	2057	99	R\$ 1.822,54	R\$ 2.334,60	R\$ 76.546,64	R\$ 135.406,92	R\$ 211.953,55	6,0000%	R\$ 16.322,35	718183,3069
45	2058	100	R\$ 1.224,77	R\$ 1.746,54	R\$ 51.440,41	R\$ 101.299,27	R\$ 152.739,68	6,0000%	R\$ 11.096,55	499344,7094
46	2059	101	R\$ 782,19	R\$ 1.273,38	R\$ 32.851,85	R\$ 73.856,28	R\$ 106.708,14	6,0000%	R\$ 7.313,54	336422,9118
47	2060	102	R\$ 470,27	R\$ 901,42	R\$ 19.751,39	R\$ 52.282,12	R\$ 72.033,51	6,0000%	R\$ 4.657,57	218905,5561
48	2061	103	R\$ 263,43	R\$ 616,72	R\$ 11.064,23	R\$ 35.769,86	R\$ 46.834,10	6,0000%	R\$ 2.856,81	137126,6411
49	2062	104	R\$ 135,12	R\$ 405,57	R\$ 5.675,21	R\$ 23.522,98	R\$ 29.198,19	6,0000%	R\$ 1.680,23	82331,22268
50	2063	105	R\$ 61,88	R\$ 254,66	R\$ 2.599,14	R\$ 14.770,31	R\$ 17.369,46	6,0000%	R\$ 942,96	47147,96639
51	2064	106	R\$ 24,35	R\$ 151,45	R\$ 1.022,66	R\$ 8.784,20	R\$ 9.806,86	6,0000%	R\$ 502,26	25615,39106
52	2065	107	R\$ 7,73	R\$ 84,47	R\$ 324,63	R\$ 4.899,12	R\$ 5.223,75	6,0000%	R\$ 252,39	13124,44064
53	2066	108	R\$ 1,76	R\$ 43,64	R\$ 73,98	R\$ 2.530,84	R\$ 2.604,82	6,0000%	R\$ 118,73	6292,789529
54	2067	109	R\$ 0,22	R\$ 20,55	R\$ 9,09	R\$ 1.192,05	R\$ 1.201,14	6,0000%	R\$ 51,65	2789,133032
55	2068	110	R\$ -	R\$ 8,65	R\$ -	R\$ 501,44	R\$ 501,44	6,0000%	R\$ 20,34	1118,807959
56	2069	111	R\$ -	R\$ 3,16	R\$ -	R\$ 183,12	R\$ 183,12	6,0000%	R\$ 7,01	392,4586414
57	2070	112	R\$ -	R\$ 0,96	R\$ -	R\$ 55,72	R\$ 55,72	6,0000%	R\$ 2,01	114,677129
58	2071	113	R\$ -	R\$ 0,23	R\$ -	R\$ 13,24	R\$ 13,24	6,0000%	R\$ 0,45	26,16255638
59	2072	114	R\$ -	R\$ 0,04	R\$ -	R\$ 2,18	R\$ 2,18	6,0000%	R\$ 0,07	4,141182025
60	2073	115	R\$ -	R\$ 0,00	R\$ -	R\$ 0,19	R\$ 0,19	6,0000%	R\$ 0,01	0,341001906

Figura B.2: Cálculo da reserva matemática usando a taxa da legislação: 6%

Apêndice C

Imunização

<i>Minimizar o custo ponderado pela duration dos IMAs, de forma que todo o valor do passivo fique coberto pelos ativos escolhidos para a imunização.</i>					
CUSTO PONDERADO = SOMA(Qi x VPAi x DAi)			R\$	761.674.223,03	
SOMA(VPAi x Qi) - VPP = 0				0,000011	
SOMA(VPAi x Qi x DAi) - VPP x DP = 0				-0,000632	
Ativo					
Índice	DAi	VPAi	Quantidade (Q)	Participação Financeira	Peso
IMA-B 5	2,31	3014,912064	697,37	R\$ 2.102.507,94	3,33%
IMA-B 5+	12,38	4204,599634	14.533,62	R\$ 61.108.056,58	96,67%
Valor Investido				R\$ 63.210.564,52	100,00%
VALOR PRESENTE PASSIVO (VPP)			R\$	63.210.564,52	
DURATION PASSIVO (DP)				12,05	
VPP x DP				761.674.223,03	

Figura C.1: Imunização do passivo pela aplicação em NTN-B

Data Referência	Índice	Número Índice	Duration (d.u.)	Duration (ano)	Peso(%)	Peso (Geral)(%)	Carteira a Mercado (R\$ mil)
31/12/2012	IRF-M 1	5.737,46	53	0,21	28,61%	11,26%	230.468.655,26
31/12/2012	IRF-M 1+	6.758,72	644	2,56	71,39%	28,11%	575.188.743,84
31/12/2012	IRF-M TOTAL	6.268,52	475	1,88	100,00%	39,37%	805.657.399,10
31/12/2012	IMA-C TOTAL	3.669,41	2.196	8,71	100,00%	5,29%	108.221.462,29
31/12/2012	IMA-B 5	3.014,91	582	2,31	40,67%	14,19%	290.370.602,62
31/12/2012	IMA-B 5+	4.204,60	3.121	12,38	59,33%	20,70%	423.606.507,87
31/12/2012	IMA-B TOTAL	3.478,38	2.089	8,29	100,00%	34,89%	713.977.110,50
31/12/2012	IMA-S TOTAL	2.430,98	479	1,90	100,00%	20,45%	418.539.649,71
31/12/2012	IMA-GERAL ex-C TOTAL	2.861,17	--	--		94,71%	1.938.174.159,31
31/12/2012	IMA-GERAL TOTAL	2.894,09	--	--		100,00%	2.046.395.621,60

Figura C.2: Dados dos Índices IMA (Anbima, 2013)

Apêndice D

Modelo de Markowitz

Dados de Entrada

Retorno esperado

IBOVESPA	0,043743932
IMA-B 5	0,207546245
IMA-B 5 +	0,268999965

Covariância

IBOVESPA	0,026258823	0,000362979	0,002216646
IMA-B 5	0,000362979	0,000771621	0,001463656
IMA-B 5 +	0,002216646	0,001463656	0,003814946

Variáveis

Pesos

IBOVESPA	-11,95%
IMA-B 5	74,73%
IMA-B 5 +	37,22%

Modelo

Função Objetivo

0,19%

Restrições

Retorno Esperado	25,00%
Somatória Pesos	1,00

Minimizar o risco

Retorno

25,00%

Retorno pretendido

Soma dos pesos = 1

Figura D.1: Modelo de Markowitz: minimizar o risco da carteira dado um retorno esperado

Dados de Entrada

Retorno esperado

IBOVESPA	0,043743932
IMA-B 5	0,207546245
IMA-B 5 +	0,268999965

Covariância

IBOVESPA	0,026258823	0,000362979	0,002216646
IMA-B 5	0,000362979	0,000771621	0,001463656
IMA-B 5 +	0,002216646	0,001463656	0,003814946

Variáveis

Pesos

IBOVESPA	-20,03%
IMA-B 5	40,41%
IMA-B 5 +	79,62%

Modelo

Retorno Esperado

28,928%

Maximizar o retorno

Restrições

Risco Esperado

0,19%

Somatória Pesos

1,00

Risco

0,19%

Risco pretendido

Soma dos pesos = 1

Figura D.2: Modelo de Markowitz: maximizar o retorno da carteira dado um limite de risco

Dados de Entrada				Livre de risco		
Retorno esperado		Covariância	CDI	IBOVESPA	IMA-B 5	IMA-B 5 +
CDI	8,31846E-05	CDI	-	-	-	-
IBOVESPA	0,043743932	IBOVESPA	-	0,0262588	0,0003630	0,0022166
IMA-B 5	0,207546245	IMA-B 5	-	0,0003630	0,0007716	0,0014637
IMA-B 5 +	0,268999965	IMA-B 5 +	-	0,0022166	0,0014637	0,0038149
Variáveis						
Pesos		Limite Inf.		Limite Sup.		
CDI	8,58%	0%		100%		
IBOVESPA	5,00%	5%		70%		
IMA-B 5	56,42%	30%		100%		
IMA-B 5 +	30,00%	30%		100%		
Modelo						
Função Objetivo	0,12%	Minimizar o risco				
Restrições		Retorno				
Retorno Esperado	20,00%	Retorno pretendido				
Somatória Pesos	1,00	Soma dos pesos = 1				
		20,00%				

Figura D.3: Modelo de Markowitz: Aprimoramentos

Apêndice E

Dados de Entrada - ALM

CDI

Ano	Média	Retorno	Retorno Financeiro
2005	0,999307213	-9,81108E-05	
2006	0,999437919	0,000130787	1,000130796
2007	0,999553369	0,000115508	1,000115515
2008	0,999540602	-1,27726E-05	0,999987227
2009	0,999623316	8,27483E-05	1,000082752
2010	0,999629378	6,06498E-06	1,000006065
2011	0,999563011	-6,63945E-05	0,999933608
2012	0,999678797	0,00011583	1,000115837
2013	0,999761958	8,31846E-05	1,000083188
2014	0,99980487	4,29209E-05	1,000042922
2015	0,99984917	4,43078E-05	1,000044309
2016	0,999894981	4,58169E-05	1,000045818
2017	0,999941098	4,61208E-05	1,000046122

IBOVESPA

Ano	Média	Retorno	Retorno Financeiro
2005	27560,86454	0,210122832	
2006	38073,03213	0,323109398	1,381416467
2007	53213,12	0,334798769	1,397659105
2008	55056,07087	0,034047154	1,034633392
2009	52912,512	-0,039712304	0,961065895
2010	67251,4502	0,23979875	1,270993337
2011	61221,31474	-0,093943174	0,910334492
2012	59593,54582	-0,026948132	0,973411729
2013	62258,25947	0,043743932	1,044714803
2014	68838,06214	0,100465612	1,105685619
2015	75477,96881	0,092083989	1,096456909
2016	82906,12532	0,093868138	1,098414897
2017	91102,10983	0,094272016	1,098858612

IMA-B 5

Ano	Média	Retorno	Retorno Financeiro
2005	1030,380485	0,096715574	
2006	1208,855563	0,15974596	1,17321279
2007	1434,832757	0,1713742	1,186934817
2008	1587,461291	0,101087771	1,106373745
2009	1870,8051	0,164232805	1,178488642
2010	2098,834559	0,115013346	1,12188841
2011	2395,476075	0,132199771	1,141336302
2012	2796,27487	0,154706138	1,167314882
2013	3441,248606	0,207546245	1,230654627
2014	4202,138306	0,199759144	1,221108611
2015	5141,787061	0,20180718	1,223612049
2016	6298,974572	0,202986158	1,22505551
2017	7725,498352	0,204139479	1,226469208

IMA-B 5 +

Ano	Média	Retorno	Retorno Financeiro
2005	1035,872533	0,11654168	
2006	1249,596337	0,18757647	1,206322494
2007	1631,233462	0,266515885	1,305408326
2008	1738,681851	0,063790816	1,065869412
2009	2088,686032	0,183407906	1,201304328
2010	2456,618857	0,162250781	1,176155162
2011	2859,764275	0,151953244	1,164105806
2012	3668,482674	0,249038936	1,282791979
2013	4800,778541	0,268999965	1,308655095
2014	6202,103375	0,256110388	1,291895329
2015	8022,456086	0,257356132	1,293505703
2016	10321,34879	0,251969829	1,286557219
2017	13329,97665	0,255800934	1,29149561

Figura E.1: Estimativa de Retorno: Ativos

Apêndice F

Montagem do Modelo no Excel

Modelo

Alocação em cada ativo						
	U(0)	U(1)	U(2)	U(3)	U(4)	U(5)
CDI	R\$ -	R\$ -	R\$ -	R\$ 22.973.113,26	R\$ 10.080.793,89	R\$ 34.708.408,62
IBOVESPA	R\$ 6.789.435,48	R\$ 4.788.849,91	R\$ 33.593.671,54	R\$ 19.527.116,64	R\$ 41.318.121,31	R\$ 21.809.221,07
IMA-B 5	R\$ 2.102.507,94	R\$ 2.282.778,77	R\$ 54.307.101,86	R\$ 73.168.715,37	R\$ 69.731.113,83	R\$ 92.655.874,71
IMA-B 5 +	R\$ 61.108.056,58	R\$ 88.705.369,39	R\$ 33.662.656,80	R\$ 31.690.105,59	R\$ 52.051.372,70	R\$ 49.808.015,51
Financeiro V(t)	R\$ 70.000.000,00	R\$ 95.776.998,07	R\$ 121.563.430,21	R\$ 147.359.051,06	R\$ 173.181.401,74	R\$ 198.981.519,91
Meta Atuarial	R\$ 70.000.000,00	R\$ 77.957.880,07	R\$ 106.659.697,77	R\$ 135.182.807,68	R\$ 163.589.071,45	R\$ 191.871.219,98
Ganho	R\$ -	R\$ 17.819.118,00	R\$ 14.903.732,44	R\$ 12.176.243,38	R\$ 9.592.330,29	R\$ 7.110.299,93

Valor da carteira					
V(0)	V(1)	V(2)	V(3)	V(4)	V(5)
R\$ 70.000.000,00	R\$ 95.776.998,17	R\$ 121.563.430,21	R\$ 147.359.051,06	R\$ 173.164.787,96	R\$ 198.981.567,27

Pesos						
W(0)	W(1)	W(2)	W(3)	W(4)	W(5)	
CDI	0,00%	0,00%	0,00%	15,59%	5,82%	17,44%
IBOVESPA	9,70%	5,00%	27,63%	13,25%	23,86%	10,96%
IMA-B 5	3,00%	2,38%	44,67%	49,65%	40,27%	46,57%
IMA-B 5 +	87,30%	92,62%	27,69%	21,51%	30,06%	25,03%
TOTAL	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,01%	100,00%

Peso em RF		90,301%	95,000%	72,365%	71,159%	70,328%	71,597%
------------	--	---------	---------	---------	---------	---------	---------

Risco		0,0036	0,0036	0,0032	0,0013	0,0027	0,0012
-------	--	--------	--------	--------	--------	--------	--------

		Limite inf	Limite sup
		0%	100%
		5%	50%
		0%	100%
		0%	100%
		100%	100%

Peso em RF		60%	100%
------------	--	-----	------

Figura F.1: Montagem do Modelo no Excel

Referências Bibliográficas

- ABRAPP. Consolidado Estatístico, 2013. URL http://www.abrapp.org.br/Documentos%20Pblicos/ConsolidadoEstatistico_03_2013.pdf. Portal Abrapp. Acessado em 25 de Agosto de 2013.
- SOCIETY OF ACTUARIES. Professional Actuarial Specialty Guide - Asset-Liability Management, 2003. URL <http://www.soa.org/>. Acessado em 15 de Setembro de 2013.
- Anbima. Ima - Índice de mercado anbima, 11 2013. URL <http://portal.anbima.com.br/informacoes-tecnicas/indices/ima/Pages/sobre.aspx>.
- BM&FBovespa. Índice bovespa - ibovespa, 11 2013. URL <http://www.bmfbovespa.com.br/indices/ResumoIndice.aspx?Indice=Ibovespa&Idioma=pt-BR>.
- Rodrigo de Barros Nabholz. *Seleção Ótima de Ativos Multi-Período com Restrições Intermediárias Utilizando o Critério de Média-Variância*. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle, 2006.
- Carlos Eduardo Gabas. Portal MPS. Aspectos Gerais da Gestão dos Fundos de Pensão, 2008. URL http://www.mpas.gov.br/arquivos/office/3_090420-113416-054.pdf. Acessado em 01 de Setembro de 2013.
- Natalie Haanwinckel Hurtado. *ANÁLISE DE METODOLOGIAS DE GESTÃO DE ATIVOS E PASSIVOS DE PLANOS DE BENEFÍCIO DEFINIDO EM FUNDOS DE PENSÃO: UMA ABORDAGEM FINANCEIRO-ATUARIAL*. Tese (Doutorado) - Instituto de Pós-Graduação e Pesquisa em Administração da Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2008.
- IPEADATA. Inflação: Ipca, 1 2013. URL <http://www.ipeadata.gov.br/>.
- Duan Li and Wan-Lung Ng. *Optimal Dynamic Portfolio Selection Multiperiod Mean-Variance Formulation*. Departament of Systems Engineering and Engineering Management, Julio 1998.

- Harry Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1):77–91, Março 1952.
- Leonardo André Paixão. Portal MPS. A previdência complementar fechada: uma visão geral, 2006. URL http://www.mpas.gov.br/arquivos/office/3_090420-113416-054.pdf. Acessado em 25 de Agosto de 2013.
- PREVIC. Secretaria de Previdência Complementar. Previdência associativa : cartilha do instituidor, 2008.
- PREVIC. Previdência Social. PREVIC - MELHORES PRÁTICAS DE GOVERNANÇA PARA ENTIDADES FECHADAS DE PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR, 2012. URL http://www.previdencia.gov.br/arquivos/office/1_121011-103451-807.pdf. Acessado em 15 de Setembro de 2013.
- PREVIC. Portal MPS. Informe Estatístico - 1º Trimestre de 2013, 2013. URL http://www.mpas.gov.br/arquivos/office/1_130625-115648-562.pdf. Acessado em 25 de Agosto de 2013.
- Svetlozar Rachev and Yesim Tokat. *Asset and Liability Management: Recent Advances*. Institute of Statistics and Mathematical Economics, School of Economics, Karlsruhe, 2012.
- Marcelo Weiskopf. *Imunização de Carteiras de Renda Fixa*. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação Engenharia de Produção do Departamento de Engenharia Industrial da PUC-Rio, 2013.
- David Wilkie. *More on a Stochastic Asset Model for Actuarial Use*. *British Actuarial Journal*, 1(5):777–964, 1995.
- Jonh M. Mulvey Willian T. Ziemba. *Worldwide Asset and Liability Modeling*. Publications of Newton Institute, 1998.
- Julia Witgen. Exame.com. Fundos de pensão também têm riscos - saiba como se proteger, 2012. URL <http://exame.abril.com.br/seu-dinheiro/aposentadoria/noticias/fundos-de-pensao-tambem-tem-riscos-saiba-como-se-proteger?page=1>. Acessado em 1 de Setembro de 2013.
- Colin Yermo, Juan e Pugh. Portal MPS. IMPACTO DA CRISE FINANCEIRA SOBRE OS PLANOS DE BENEFÍCIO DEFINIDO E A NECESSIDADE POR REGRAS DE FUNDEAMENTO ANTICÍCLICAS, 2009. URL http://www.mpas.gov.br/arquivos/office/4_091203-111104-205.pdf. Acessado em 31 de Agosto de 2013.