

DAVID RODRIGUES NETO

Modelagem da Dinâmica de Passes no Futebol  
com Cadeias de Markov: Uma Abordagem para  
Análise Tática

São Paulo  
2025

DAVID RODRIGUES NETO

**Modelagem da Dinâmica de Passes no Futebol  
com Cadeias de Markov: Uma Abordagem para  
Análise Tática**

Trabalho de Conclusão do Curso de  
Matemática Aplicada e Computacional  
do Instituto de Matemática e Estatística  
da Universidade de São Paulo para a  
obtenção do título de Bacharel em  
Matemática Aplicada e Computacional.

São Paulo  
2025

DAVID RODRIGUES NETO

**Modelagem da Dinâmica de Passes no Futebol  
com Cadeias de Markov: Uma Abordagem para  
Análise Tática**

Versão Definitiva

Trabalho de Conclusão do Curso de  
Matemática Aplicada e Computacional  
do Instituto de Matemática e Estatística  
da Universidade de São Paulo para a  
obtenção do título de Bacharel em  
Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador:

Prof. Dr. Bruno Luiz de Souza Bedo

São Paulo  
2025

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 06 de MARÇO de 2025

Assinatura do autor: Nand Rodrigues Neto

Assinatura do orientador: [Assinatura]

## Dedicatória

Dedico este trabalho à Deus, aos meus pais, ao meu irmão, à minha esposa, aos meus verdadeiros amigos, ao meu cachorro, e à minha avó (*in memoriam*), por acreditarem no meu potencial e por me ajudarem em todos os momentos, cada um a sua maneira. Dedico também, por fim, a mim mesmo, pela coragem de enfrentar meus medos e superá-los para alcançar esta importante etapa.

# AGRADECIMENTOS

Agradeço pela oportunidade de concluir esta etapa no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Expresso minha gratidão aos professores que tive ao longo do curso de graduação, com destaque especial aos Professores Doutores: Pedro Peixoto, que ministrou de forma brilhante a disciplina de conclusão de curso, orientando os alunos com dedicação exemplar, e Bruno Bedo, da Escola de Educação Física e Esporte da Universidade de São Paulo, por me proporcionar a oportunidade de escrever sobre um tema que sempre foi meu sonho trabalhar, unindo minhas paixões pela Matemática e pelo Futebol.

*“O homem está condenado a ser livre;  
porque, uma vez lançado ao mundo, ele  
é responsável por tudo o que faz.”*

— Jean-Paul Sartre

# RESUMO

A análise de jogos visa observar, coletar e avaliar os eventos que ocorrem durante uma partida, podendo focar tanto em um jogador individual quanto no comportamento coletivo dos jogadores em torno da bola. No entanto, a análise de jogos de futebol não se limita apenas à correção de erros e à exploração de pontos fracos dos adversários. No futebol, a dinâmica de jogo é marcada por um constante equilíbrio e desequilíbrio entre as equipes, resultando em um ritmo que oscila frequentemente e em períodos de estabilidade que surgem de forma imprevisível. Essa natureza variável e imprevisível levou os pesquisadores a considerar o futebol como um dos tipos de sistema dinâmico não linear. Diante disso, o uso de modelos de Markov no futebol apresenta-se como uma ferramenta eficaz para a análise das dinâmicas de jogo. Formalmente, um processo de Markov é um processo estocástico em que o próximo estado depende apenas do estado atual. Quando as variáveis aleatórias  $\{X(t)\}$  estão definidas em um espaço de estados discreto e quando as transições ocorrem em instantes  $0, 1, 2, \dots, k$ , temos uma Cadeia de Markov em Tempo Discreto. Neste caso,  $\mathbb{P}(X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_k = x_k, X_{k-1} = x_{k-1}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_k = x_k)$ . A propriedade de Markov é essencial porque simplifica a análise de sistemas complexos ao eliminar a necessidade de considerar o histórico completo do sistema. Assim sendo, este estudo aplicou um modelo de cadeia de Markov para analisar a dinâmica de passes no futebol, identificando os jogadores-chave e otimizando a estratégia de jogo para melhorar o desempenho da equipe. O objetivo foi utilizar a teoria das cadeias de Markov para entender a estrutura probabilística das sequências de passes entre jogadores durante uma partida de futebol. Ao modelar as trocas de passes como um processo estocástico, o estudo forneceu perspectivas úteis para a elaboração de estratégias mais eficazes. A matriz de passes do jogador  $i$  para o jogador  $j$ , foi obtida por meio da página FootStats, onde as matrizes de adjacência foram fornecidas. Posteriormente, com base nas matrizes, foi desenvolvido um modelo de cadeia de Markov, em tempo discreto e com número finito de estados, para representar o comportamento de passes entre jogadores de uma equipe de futebol.

**Palavras-chave:** Cadeias de Markov, Análise de Passes, Futebol.

# ABSTRACT

Game analysis aims to observe, collect, and evaluate events occurring during a match, focusing either on an individual player or the collective behavior of players around the ball. However, the analysis of football games is not limited only to the correction of errors and the exploration of opponents' weaknesses. In football, game dynamics are characterized by a constant balance and imbalance between teams, resulting in a rhythm that frequently oscillates and periods of stability that emerge unpredictably. This variable and unpredictable nature led researchers to consider football as a type of nonlinear dynamic system. Considering this, the use of Markov models in football emerges as an effective tool for analyzing game dynamics. Formally, a Markov process is a stochastic process in which the next state depends only on the current state. When the random variables  $\{X(t)\}$  are defined in a discrete state space and transitions occur at time instants  $0, 1, 2, \dots, k$ , we have a Discrete-Time Markov Chain. In this case,  $\mathbb{P}(X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_k = x_k, X_{k-1} = x_{k-1}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_k = x_k)$ . The Markov property is essential as it simplifies the analysis of complex systems by eliminating the need to consider the complete history of the system. Therefore, this study applied a Markov chain model to analyze passing dynamics in football, identifying key players and optimizing game strategy to improve team performance. The objective was to use Markov Chains Theory to understand the probabilistic structure of pass sequences between players during a football match. By modeling passing game as a stochastic process, the study provided valuable insights for the development of more effective strategies. The passing matrix from player  $i$  to player  $j$ , was obtained through the FootStats platform, where adjacency matrices are provided. Subsequently, based on these matrices, a Discrete-Time Markov Chain model with a finite number of states was developed to represent the passing behavior between players on a football team.

**Keywords:** Markov Chains, Passing Analysis, Football.

## LISTA DE FIGURAS

1	Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 1 do Real Madrid . . . . .	39
2	Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 2 do Real Madrid . . . . .	39
3	Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 3 do Real Madrid . . . . .	40
4	Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 4 do Real Madrid . . . . .	40
5	Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 5 do Real Madrid . . . . .	41
6	Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 6 do Real Madrid . . . . .	41
7	Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 7 do Real Madrid . . . . .	42
8	Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 8 do Real Madrid . . . . .	42
9	Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 9 do Real Madrid . . . . .	43
10	Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 10 do Real Madrid . . . . .	43
11	Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 11 do Real Madrid . . . . .	44
12	Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 12 do Real Madrid . . . . .	44
13	Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 13 do Real Madrid . . . . .	45

14	Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 1 do Borussia Dortmund . . . . .	45
15	Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 2 do Borussia Dortmund . . . . .	46
16	Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 3 do Borussia Dortmund . . . . .	46
17	Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 4 do Borussia Dortmund . . . . .	47
18	Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 5 do Borussia Dortmund . . . . .	47
19	Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 6 do Borussia Dortmund . . . . .	48
20	Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 7 do Borussia Dortmund . . . . .	48
21	Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 8 do Borussia Dortmund . . . . .	49
22	Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 9 do Borussia Dortmund . . . . .	49
23	Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 10 do Borussia Dortmund . . . . .	50
24	Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 11 do Borussia Dortmund . . . . .	50
25	Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 12 do Borussia Dortmund . . . . .	51
26	Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 13 do Borussia Dortmund . . . . .	51
27	Exemplo de algumas simulações de passes do Real Madrid na final . . . . .	52
28	Gráfico de barras do número médio de passes do Real Madrid na final . . .	53
29	Exemplo de algumas simulações de passes do Borussia Dortmund na final .	54
30	Gráfico de barras do número médio de passes do Borussia Dortmund na final	55

31	Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 1 do Real Madrid . . . . .	74
32	Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 2 do Real Madrid . . . . .	75
33	Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 3 do Real Madrid . . . . .	75
34	Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 4 do Real Madrid . . . . .	76
35	Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 5 do Real Madrid . . . . .	76
36	Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 6 do Real Madrid . . . . .	77
37	Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 7 do Real Madrid . . . . .	77
38	Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 8 do Real Madrid . . . . .	78
39	Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 9 do Real Madrid . . . . .	78
40	Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 10 do Real Madrid . . . . .	79
41	Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 11 do Real Madrid . . . . .	79
42	Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 12 do Real Madrid . . . . .	80
43	Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 13 do Real Madrid . . . . .	80
44	Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 1 do Borussia Dortmund . . .	81
45	Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 2 do Borussia Dortmund . . .	82
46	Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 3 do Borussia Dortmund . . .	82
47	Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 4 do Borussia Dortmund . . .	83
48	Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 5 do Borussia Dortmund . . .	83
49	Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 6 do Borussia Dortmund . . .	84
50	Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 7 do Borussia Dortmund . . .	84
51	Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 8 do Borussia Dortmund . . .	85
52	Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 9 do Borussia Dortmund . . .	85
53	Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 10 do Borussia Dortmund . .	86
54	Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 11 do Borussia Dortmund . .	86
55	Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 12 do Borussia Dortmund . .	87
56	Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 13 do Borussia Dortmund . .	87

## LISTA DE TABELAS

1	Jogos do Real Madrid na UEFA Champions League 2023/24 . . . . .	36
2	Jogos do Borussia Dortmund na UEFA Champions League 2023/24 . . . .	37
3	Jogadores mais influentes em cada jogo do Real Madrid na UEFA Cham- pions League 2023/24 . . . . .	38
4	Jogadores mais influentes em cada jogo do Borussia Dortmund na UEFA Champions League 2023/24 . . . . .	38
5	Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 1 do Real Madrid . . . . .	60
6	Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 2 do Real Madrid . . . . .	60
7	Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 3 do Real Madrid . . . . .	61
8	Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 4 do Real Madrid . . . . .	61
9	Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 5 do Real Madrid . . . . .	62
10	Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 6 do Real Madrid . . . . .	62
11	Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 7 do Real Madrid . . . . .	63
12	Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 8 do Real Madrid . . . . .	63
13	Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 9 do Real Madrid . . . . .	64
14	Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 10 do Real Madrid . . . . .	64

15	Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 11 do Real Madrid . . . . .	65
16	Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 12 do Real Madrid . . . . .	65
17	Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 13 do Real Madrid . . . . .	66
18	Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 1 do Borussia Dortmund . . . . .	67
19	Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 2 do Borussia Dortmund . . . . .	67
20	Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 3 do Borussia Dortmund . . . . .	68
21	Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 4 do Borussia Dortmund . . . . .	68
22	Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 5 do Borussia Dortmund . . . . .	69
23	Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 6 do Borussia Dortmund . . . . .	69
24	Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 7 do Borussia Dortmund . . . . .	70
25	Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 8 do Borussia Dortmund . . . . .	70
26	Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 9 do Borussia Dortmund . . . . .	71
27	Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 10 do Borussia Dortmund . . . . .	71
28	Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 11 do Borussia Dortmund . . . . .	72
29	Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 12 do Borussia Dortmund . . . . .	72

30	Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 13 do Borussia Dortmund . . . . .	73
31	Comparação entre diferentes abordagens para modelagem de passes no fu- tebol. . . . .	88

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>16</b>
1.1	Objetivo Geral . . . . .	18
1.2	Objetivos Específicos . . . . .	19
1.3	Justificativa . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Fundamentos Matemáticos das Cadeias de Markov</b>	<b>20</b>
2.1	Introdução aos Processos Estocásticos . . . . .	20
2.2	Cadeia de Markov: Definição . . . . .	21
2.3	Classificação dos Estados em Cadeias de Markov . . . . .	23
2.4	Ergodicidade e Distribuição Estacionária . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Aplicações das Cadeias de Markov</b>	<b>27</b>
3.1	Aplicações em Algumas Áreas . . . . .	27
3.1.1	Engenharia: Sistemas de Filas de Espera . . . . .	27
3.1.2	Biologia: Processos de Evolução Genética . . . . .	27
3.1.3	Mercado Financeiro: Processos de Preços de Ações . . . . .	28
3.1.4	Esportes: Interações entre atletas de uma equipe . . . . .	28
3.2	Aplicações no Futebol . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Metodologia</b>	<b>32</b>
4.1	Coleta dos Dados . . . . .	32
4.2	Estruturação e Tratamento dos Dados . . . . .	32
4.3	Construção do Modelo de Cadeia de Markov . . . . .	33
4.4	Validação do Modelo de Cadeia de Markov . . . . .	34
4.5	Ferramentas Utilizadas . . . . .	35

<b>5</b>	<b>Estudo de Caso e Resultados</b>	<b>36</b>
5.1	Seleção dos Jogos . . . . .	36
5.2	Jogadores Mais Influentes na Rede de Passes . . . . .	37
5.3	Mapas de Calor das Matrizes de Transição . . . . .	39
5.4	Simulação de Sequências de Passes e Gráficos de Rede . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Discussão</b>	<b>56</b>
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>58</b>
	<b>Apêndice A</b>	<b>60</b>
A.1	Tabelas das Distribuições Estacionárias . . . . .	60
A.1.1	Jogos do Real Madrid . . . . .	60
A.1.2	Jogos do Borussia Dortmund . . . . .	67
	<b>Apêndice B</b>	<b>74</b>
B.1	Gráficos das Distribuições Estacionárias . . . . .	74
B.1.1	Jogos do Real Madrid . . . . .	74
B.1.2	Jogos do Borussia Dortmund . . . . .	81
	<b>Apêndice C</b>	<b>88</b>
C.1	Comparação das Abordagens . . . . .	88
	<b>Referências</b>	<b>89</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Ao longo da história, os seres humanos têm documentado seus comportamentos de várias maneiras. Exemplos disso incluem os hieróglifos dos antigos egípcios, que representavam gestos e movimentos da época, e o estudo dos movimentos de dança por Laban, conhecido como Laban Notation. Mais recentemente, a análise de movimentos e seus impactos no esporte tornou-se uma área importante de estudo ([CARLING et al., 2007](#)). A análise de jogos visa observar, coletar e avaliar os eventos que ocorrem durante uma partida, podendo focar tanto em um jogador individual quanto no comportamento coletivo dos jogadores em torno da bola. Isso permite a geração de dados, que podem variar em complexidade, para determinar se o plano de jogo está sendo executado conforme planejado ([CARLING et al., 2007](#); [GARGANTA, 2001](#)). Entretanto, com os avanços tecnológicos presentes, a precisão na análise de jogos melhorou significativamente, graças ao aperfeiçoamento contínuo dos métodos de análise e à utilização de softwares automatizados que facilitam a avaliação de grandes volumes de dados coletados ([MEMMERT; RAABE, 2018](#)). Essas análises permitem uma melhor preparação para partidas futuras, ajudando tanto na correção de erros quanto na exploração das fraquezas dos adversários, além de proporcionar benefícios na aprendizagem dos jogadores sobre a eficácia de suas performances esportivas ([GARGANTA, 2001](#)).

A análise de jogos de futebol, no entanto, não se limita apenas à correção de erros e à exploração de pontos fracos dos adversários. No futebol, a dinâmica de jogo é marcada por um constante equilíbrio e desequilíbrio entre as equipes, resultando em um ritmo que oscila frequentemente e períodos de estabilidade que surgem de forma imprevisível. Essa natureza variável e imprevisível levou os pesquisadores a considerar o futebol como um dos tipos de sistema dinâmico não linear, ressaltando sua complexidade. Estudos sob a perspectiva dos sistemas complexos mostram que atletas e equipes são entidades adaptativas que interagem de forma dinâmica e não linear com o ambiente em constante evolução do jogo ([CARLING et al., 2008](#)). Essas interações são influenciadas por diversas restrições e oportunidades, que impactam a tomada de decisão dos jogadores. Portanto, é crucial entender que uma equipe é mais do que a soma de seus membros; é uma entidade

coletiva complexa. A análise do jogo pode ser realizada em vários níveis, incluindo a partida, a equipe, subgrupos e até interações diádicas (GARGANTA, 2009). A aquisição precisa de informações posicionais é fundamental para compreender como o jogo, como um sistema dinâmico, e os atletas, como componentes, contribuem para a estratégia coletiva.

Ademais, os sistemas dinâmicos, como o futebol, oferecem uma área interessante para a aplicação de análises complexas, especialmente quando se considera a adaptação contínua das equipes a variáveis instáveis e imprevisíveis. A natureza do futebol, com suas rápidas mudanças de estado entre equilíbrio e desequilíbrio, reflete as propriedades intrínsecas de tais sistemas, onde pequenas variações nas condições iniciais podem levar a resultados drasticamente diferentes (ARAÚJO et al., 2006). Isso ressalta a importância de interação dinâmica e adaptativa entre os atletas.

Diante disso, o uso de modelos de Markov no futebol apresenta-se como uma ferramenta eficaz para a análise das dinâmicas de jogo. Com a crescente disponibilidade de dados e o avanço das técnicas analíticas, a modelagem de processos de Markov oferece uma abordagem robusta para capturar a complexidade das trocas de passes, transições de posse e a probabilidade de gols. Um modelo de Markov é um modelo matemático que descreve um sistema que transita entre estados de acordo com probabilidades de transição específicas, as quais dependem exclusivamente do estado atual, não dos estados anteriores (propriedade de Markov).

Formalmente, um processo de Markov é um processo estocástico em que o próximo estado depende apenas do estado atual. Quando as variáveis aleatórias  $\{X(t)\}$  estão definidas em um espaço de estados discreto e quando as transições ocorrem em instantes  $0, 1, 2, \dots, k$ , temos uma Cadeia de Markov em Tempo Discreto. Neste caso,  $\mathbb{P}(X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_k = x_k, X_{k-1} = x_{k-1}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_k = x_k)$ . A propriedade de Markov é essencial porque simplifica a análise de sistemas complexos ao eliminar a necessidade de considerar o histórico completo do sistema. Em muitas aplicações práticas, essa simplificação permite a construção de modelos que são computacionalmente viáveis e teoricamente sólidos (ROSS, 2014). Na prática, a construção de um modelo de Markov requer a definição precisa dos estados e a matriz de transição  $\mathbf{P}$ ,  $M \times M$ , onde  $M$  é o número de estados, e cada entrada  $P_{ij}$ , representa a probabilidade de transição do estado  $i$  para o estado  $j$  em um único passo. A soma de todas as probabilidades de transição de um estado deve ser 1:  $\sum_j P_{ij} = 1$ . A simulação de cenários envolve iterar o processo de Markov ao longo do tempo, utilizando a matriz de transição para determinar a probabilidade de se mover de um estado a outro. Isso permite prever distribuições de estados futuros com base nas condições iniciais, utilizando a matriz de

transição ([GRIMMETT; STIRZAKER, 2020](#)).

Na aplicação ao futebol, os modelos de Markov permitem capturar diferentes níveis das equipes, considerando aspectos como a tendência de marcar ou sofrer gols, bem como a variação na posse de bola, que pode depender da posição do jogo no campo. Estudos recentes utilizam discretizações diversas do campo, desde uma divisão simples em zonas até divisões mais detalhadas, para refletir melhor as forças das equipes e suas estratégias em diferentes áreas do campo. Essa granularidade é crucial para aprimorar a precisão das previsões e análises, permitindo uma avaliação mais refinada das estratégias táticas e dos desempenhos das equipes. Além disso, modelos log-lineares são empregados para estimar as forças das equipes com base em variáveis como vantagem de jogar em casa, força ofensiva e defensiva, ajustando-se aos dados de partidas reais para validar a precisão e a aplicabilidade dos modelos.

No contexto do futebol, por exemplo, um estado pode representar a posse de bola por uma determinada posição (como atacantes, meio-campistas, defensores, ou goleiro), enquanto as transições refletem os passes entre essas posições ([KIM; CHA, 2022](#)). Esta modelagem envolve a construção de uma matriz estocástica que define a probabilidade de cada transição com base em dados empíricos coletados, como os padrões de passe de um time durante uma temporada. A análise desses padrões nos permite estimar a distribuição estável da posse de bola após um número suficiente de transições, fornecendo uma aproximação satisfatória da realidade, mesmo que a dinâmica do jogo seja intrinsecamente complexa.

## 1.1 Objetivo Geral

Desenvolver um modelo de cadeia de Markov para analisar a dinâmica de passes no futebol, com o objetivo de identificar os jogadores-chave em cada partida. Esse modelo visa avaliar a importância de cada jogador durante o jogo, permitindo compreender seu impacto nas transições de posse de bola.

## 1.2 Objetivos Específicos

- **Modelar a Dinâmica dos Passes:** Desenvolver um modelo de cadeia de Markov, em tempo discreto e com número finito de estados, para representar o comportamento de passes entre jogadores de uma equipe de futebol.
- **Analisar as Probabilidades de Transição:** Calcular as probabilidades de transição entre jogadores para entender a probabilidade de ocorrerem passes entre pares específicos de jogadores.
- **Identificar Jogadores-chave:** Usar o modelo para destacar os jogadores que mais influenciam as transições de posse de bola, identificando os jogadores-chave e otimizando a estratégia de jogo para melhorar o desempenho da equipe.

## 1.3 Justificativa

Este trabalho propõe a utilização da teoria das cadeias de Markov para modelar a dinâmica de passes no futebol, representando as transições entre jogadores de forma probabilística. Essa abordagem permite: identificar jogadores-chave de uma determinada partida, entender a organização tática das equipes e sugerir melhorias nos desempenhos individuais e coletivos.

A justificativa está na necessidade de ferramentas objetivas para análise de desempenho, auxiliando treinadores e analistas na elaboração de estratégias. Além disso, a aplicação de métodos matemáticos ao esporte promove a interdisciplinaridade e demonstra o potencial científico no entendimento do futebol.

## 2 FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DAS CADEIAS DE MARKOV

### 2.1 Introdução aos Processos Estocásticos

Os processos estocásticos são definidos como uma coleção de variáveis aleatórias indexadas por um parâmetro  $t \in \mathbb{R}$ , frequentemente representando tempo.

$$X = \{X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_n)\}.$$

A variável aleatória  $X(t)$  é definida em um espaço de estados. A natureza do índice (discreto ou contínuo), do espaço amostral e da distribuição determina a classificação do processo em diferentes categorias ([MEDHI, 1994](#)), como por exemplo:

- **Processos de Poisson:** Modelam eventos que ocorrem aleatoriamente ao longo do tempo, como a chegada de clientes em filas, com base em distribuições exponenciais.
- **Processos gaussianos:** Fundamentais em estatística e aprendizado de máquina, sendo utilizados em previsões baseadas em distribuições normais.
- **Cadeias de Markov:** Caracterizadas pela propriedade de “falta de memória”, são particularmente úteis para modelar sistemas dinâmicos com transições entre estados.

Um processo de Markov é um processo estocástico em que o próximo estado depende apenas do estado atual. Essa “falha de memória” é garantida pela propriedade de Markov, expressa como:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X(t_{k+1}) = x_{k+1} \mid X(t_k) = x_k, X(t_{k-1}) = x_{k-1}, \dots, X(t_1) = x_1, X(t_0) = x_0) = \\ \mathbb{P}(X(t_{k+1}) = x_{k+1} \mid X(t_k) = x_k), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\forall t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq t_{k+1}.$$

Quando as variáveis aleatórias  $\{X(t)\}$  estão definidas em um espaço de estados discreto e quando as transições ocorrem em instantes  $0, 1, 2, \dots, k$ , temos uma *Cadeia de Markov em Tempo Discreto*. Neste caso:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_k = x_k, X_{k-1} = x_{k-1}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) = \\ \mathbb{P}(X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_k = x_k). \end{aligned} \quad (2.2)$$

## 2.2 Cadeia de Markov: Definição

Considere uma sequência de variáveis aleatórias  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_k$ , com  $k \in \mathbb{N}$ , e suponha que o conjunto de valores possíveis dessas variáveis seja  $\{0, 1, \dots, M\}$ . É útil interpretar  $X_k$  como o estado de algum sistema no tempo  $k$  e, de acordo com essa interpretação, dizer que o sistema está no estado  $j$  no tempo  $k$  se  $X_k = j$ . Diz-se que a sequência de variáveis aleatórias forma uma *cadeia de Markov* se, cada vez que o sistema estiver no estado  $i$ , existir alguma probabilidade fixa, a qual chamaremos de  $P_{ij}$ , de que o sistema esteja a seguir no estado  $j$  (ROSS, 2014). Isto é, para  $i_0, \dots, i_{k-1}, i, j$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{k+1} = j \mid X_k = i, X_{k-1} = i_{k-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \\ \mathbb{P}(X_{k+1} = j \mid X_k = i) = P_{ij}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Cada valor  $P_{ij}$  representa a *probabilidade de transição* do estado  $i$  para o estado  $j$  da cadeia de Markov, obedecendo à condição de que a soma das probabilidades em cada linha da matriz seja igual a 1 (ANTON; RORRES, 2012).

$$P_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=0}^M P_{ij} = 1, \quad i = 0, 1, \dots, M. \quad (2.4)$$

Essa definição nos diz que as probabilidades de transição podem ser arranjadas por uma matriz estocástica  $\mathbf{P}$ , em que cada entrada  $P_{ij}$  representa a probabilidade de transição do estado  $i$  para o estado  $j$ :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \cdots & P_{0M} \\ P_{10} & P_{11} & \cdots & P_{1M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{M0} & P_{M1} & \cdots & P_{MM} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Em geral, definimos a probabilidade de transição de  $n$  passos, representada por  $P_{ij}^{(n)}$ , como:

$$P_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_{n+k} = j \mid X_k = i) \quad , \quad \forall n \geq 0 \quad i, j \geq 0. \quad (2.6)$$

**Proposição 2.1.** (*Equação de Chapman-Kolmogorov*)

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^M P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)} \quad , \quad \forall n, m \geq 0 \quad i, j \geq 0. \quad (2.7)$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(n+m)} &= \mathbb{P}(X_{n+m} = j \mid X_0 = i) \\ &= \sum_k \mathbb{P}(X_{n+m} = j, X_n = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_k \mathbb{P}(X_{n+m} = j \mid X_n = k, X_0 = i) \mathbb{P}(X_n = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_k P_{kj}^{(m)} P_{ik}^{(n)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

□

Se  $\mathbf{P}^{(n)}$  denota a matriz de probabilidades de transição de  $n$  passos, então a equação (2.7) nos diz que:

$$\mathbf{P}^{(n+m)} = \mathbf{P}^{(n)} \cdot \mathbf{P}^{(m)}. \quad (2.9)$$

Isso significa que a matriz  $\mathbf{P}^{(n)}$  comuta com a matriz  $\mathbf{P}^{(m)}$ , e em particular,

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^{(1+1)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^2.$$

e por indução

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(n-1+1)} = \mathbf{P}^{n-1} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^n. \quad (2.10)$$

Logo, a matriz de probabilidades de transição de  $n$  passos é obtida multiplicando a matriz  $\mathbf{P}$  por ela mesma  $n$  vezes.

## 2.3 Classificação dos Estados em Cadeias de Markov

Os estados podem ser classificados como acessíveis, recorrentes, transientes e absorventes, ou ainda, avaliados quanto à irreduzibilidade e periodicidade da cadeia (MEYN; TWEEDIE, 2012).

- **Estado Acessível:** Um estado  $j$  é considerado *acessível* a partir de um estado  $i$  se existe pelo menos um número finito de passos  $n > 0$  tal que a probabilidade de transição de  $i$  para  $j$  em  $n$  passos seja positiva, isto é,

$$P_{ij}^{(n)} > 0. \quad (2.11)$$

A acessibilidade é uma relação unidirecional, isto é,  $i$  pode acessar  $j$ , mas  $j$  pode não acessar  $i$ .

- **Comunicabilidade:** Dois estados  $i$  e  $j$  são ditos *comunicáveis* se são acessíveis entre si. Isso significa que é possível transitar de  $i$  para  $j$  em um número finito de passos, e vice-versa.

$$P_{ij}^{(n)} > 0 \quad , \quad P_{ji}^{(m)} > 0 \quad , \quad \forall n, m > 0. \quad (2.12)$$

O conjunto de todos os estados comunicáveis com  $i$ , forma uma classe de comunicação que particiona o espaço de estados.

- **Estado Recorrente e Estado Transiente:** Um estado  $i$  é dito *recorrente* se, dado que o processo entra no estado  $i$ , a probabilidade de retornar a  $i$  é igual a 1. Caso contrário, o estado é classificado como *transiente*, indicando que existe uma probabilidade positiva de que o processo nunca retorne a  $i$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty. \quad (2.13)$$

Para estados transientes, esta soma é finita. Essa distinção pode ser justificada pelo *Lema de Borel-Cantelli*, mas a demonstração não será abordada aqui.

- **Estado Absorvente:** Um estado  $i$  é classificado como *absorvente* se, uma vez alcançado, o processo não pode sair desse estado.

$$\begin{cases} P_{ii} = 1, \\ P_{ij} = 0, \quad j \neq i. \end{cases} \quad (2.14)$$

- **Irredutibilidade:** Uma cadeia de Markov é classificada como *irredutível* se for possível transitar de qualquer estado  $i$  para qualquer outro estado  $j$  em um número finito de passos. Isto é, existe um  $n > 0$  tal que:

$$P_{ij}^{(n)} > 0 \quad , \quad \forall 0 \leq i, j \leq M. \quad (2.15)$$

A irredutibilidade garante que todos os estados da cadeia são acessíveis entre si, o que é uma condição necessária para a ergodicidade da cadeia, assunto que será discutido na próxima seção.

- **Periodicidade:** Um estado  $i$  é considerado *periódico* se as visitas a  $i$  ocorrerem apenas em tempos múltiplos de um período  $d > 1$ . O período  $d$  de um estado  $i$  é definido como o máximo divisor comum de todos os  $n > 0$  para os quais  $P_{ii}^{(n)} > 0$ .

$$d = \text{mdc} \left\{ n > 0 : P_{ii}^{(n)} > 0 \right\}. \quad (2.16)$$

Se  $d = 1$ , o estado é classificado como *aperiódico*, indicando que ele pode ser revisitado em intervalos irregulares de tempo. A periodicidade é um fator relevante para

determinar a convergência da cadeia para a distribuição estacionária, pois cadeias aperiódicas facilitam esse comportamento.

## 2.4 Ergodicidade e Distribuição Estacionária

Para um grande número de cadeias de Markov,  $P_{ij}^{(n)}$  converge, à medida que  $n \rightarrow \infty$ , para um valor  $\pi_j$  que depende somente de  $j$ . Isto é, para grandes valores de  $n$ , a probabilidade de se estar em um estado  $j$  após  $n$  passos é aproximadamente igual a  $\pi_j$  não importando qual tenha sido o estado inicial. As cadeias de Markov que satisfazem as equações (2.15) e (2.16) quando  $d = 1$  são chamadas de *ergódicas*. A ergodicidade de uma cadeia de Markov é uma propriedade importante que implica na existência de uma distribuição estacionária.

**Teorema 2.1.** *Para uma cadeia de Markov ergódica, existe uma distribuição estacionária  $\pi_j > 0$ ,  $0 \leq j \leq M$  tal que*

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} \quad (2.17)$$

*são as únicas soluções não negativas de*

$$\pi_j = \sum_{k=0}^M \pi_k P_{kj} \quad , \quad \sum_{j=0}^M \pi_j = 1.$$

*Demonstração.* Como a Proposição (2.1) resulta em

$$P_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=0}^M P_{ik}^{(n)} P_{kj}$$

note que existe um limite em (2.17), e para cadeias ergódicas

$$\pi_j = \sum_{k=0}^M \pi_k P_{kj}.$$

Além disso, como  $1 = \sum_{k=0}^M P_{ik}^{(n)}$ , também obtemos, a partir de (2.17), que

$$\sum_{j=0}^M \pi_j = 1.$$

Para provar que essa distribuição estacionária  $\pi_j$  é única, vamos supor, por contradição, que existam duas distribuições estacionárias  $\pi_j$  e  $\pi'_j$ , diferentes. Ambas satisfazem

$$\pi_j = \sum_{k=0}^M \pi_k P_{kj} \quad e \quad \pi'_j = \sum_{k=0}^M \pi'_k P_{kj}.$$

A diferença entre essas duas distribuições é definida por:

$$\delta_j = \pi_j - \pi'_j.$$

Agora temos:

$$\sum_{k=0}^M \delta_k P_{kj} = \sum_{k=0}^M \pi_k P_{kj} - \sum_{k=0}^M \pi'_k P_{kj} = \pi_j - \pi'_j = \delta_j.$$

Ou seja, a diferença entre as duas distribuições também é uma solução da equação

$$\sum_{k=0}^M \delta_k P_{kj} = \delta_j.$$

Como  $\pi_j$  e  $\pi'_j$  são diferentes,  $\delta_j$  não é o vetor nulo. Porém pela irredutibilidade e aperiodicidade da cadeia,  $\delta_j$  deve ser o vetor nulo, pois a única solução não-trivial para  $\sum_{k=0}^M \delta_k P_{kj} = \delta_j$  é  $\delta_j = 0$ , o que significa que  $\pi_j = \pi'_j$ . Logo, não pode haver duas distribuições estacionárias diferentes.

□

## 3 APLICAÇÕES DAS CADEIAS DE MARKOV

### 3.1 Aplicações em Algumas Áreas

#### 3.1.1 Engenharia: Sistemas de Filas de Espera

Em engenharia, especialmente em sistemas de filas de espera, as cadeias de Markov são empregadas para modelar a chegada de clientes a um sistema, o tempo de espera e o serviço prestado. Por exemplo, em uma fila de atendimento, pode-se modelar o número de clientes no sistema como um processo de Markov. As transições entre os diferentes estados da fila, como o número de clientes atendidos e o tempo de espera, são regidas por probabilidades que dependem apenas do número atual de clientes na fila, e não do histórico anterior. O modelo mais comum utilizado nesses sistemas é o processo de Poisson<sup>1</sup> em conjunto com uma cadeia de Markov, para modelar a chegada de clientes e o tempo de serviço. O uso de cadeias de Markov permite calcular métricas de desempenho, como o tempo médio de espera, a probabilidade de uma fila estar cheia, e a utilização do sistema, sendo essencial para o dimensionamento de recursos e a otimização de processos (ROSS, 2014).

#### 3.1.2 Biologia: Processos de Evolução Genética

No ramo da biologia, as cadeias de Markov têm sido amplamente aplicadas para modelar processos de evolução genética. Um exemplo clássico é uma sequência de DNA, que pode ser representada por uma cadeia de Markov em tempo discreto, onde os estados são definidos pelos quatro tipos de nucleotídeos: Adenina (A), Timina (T), Citosina (C) e Guanina (G). As transições entre esses estados refletem a probabilidade de mutação

---

<sup>1</sup>processo estocástico que descreve eventos que ocorrem de forma aleatória ao longo do tempo, com a característica de que os eventos são independentes e ocorrem a uma taxa constante média. A principal característica desse processo é a ocorrência de um número de eventos em um intervalo de tempo fixo, com uma distribuição de probabilidades que segue a distribuição de Poisson.

genética ao longo do tempo ([GAGNIUC, 2017](#)). Esse modelo é essencial para prever padrões evolutivos e compreender mecanismos genéticos que influenciam a biodiversidade.

### 3.1.3 Mercado Financeiro: Processos de Preços de Ações

No contexto do mercado financeiro, a dinâmica dos preços de ativos, como ações, também pode ser modelada utilizando cadeias de Markov. Nesse modelo, os estados representam diferentes faixas de preço, e as probabilidades de transição descrevem as chances do preço de uma ação mudar de uma faixa para outra ao longo de um determinado período. Ao identificar padrões recorrentes nessas transições, é possível fazer uma análise das flutuações dos preços, o que pode ser fundamental para a formulação de estratégias de investimento e até prever as condições do futuro do mercado ([FILHO, 2022](#)).

### 3.1.4 Esportes: Interações entre atletas de uma equipe

As interações entre atletas em esportes coletivos representam um desafio analítico, sendo um campo promissor para a aplicação de modelos matemáticos que capturam a dinâmica tática e comportamental, como as cadeias de Markov. Esses modelos fornecem uma base sólida para compreender dinâmicas táticas e comportamentais, permitindo análises detalhadas dos padrões de jogo e dos processos de tomada de decisão. A utilização de cadeias de Markov transcende o futebol, podendo ser aplicada a uma ampla variedade desses esportes, como basquete, vôlei e handebol, adaptando-se às características específicas de cada modalidade.

No basquete, a análise de sequências de posses de bola pode ser representada como uma cadeia de estados que incorpora passes, dribles e tentativas de arremesso. Nesse contexto, a abordagem de estados absorventes, pode ser usada para estimar a probabilidade de uma jogada resultar em um ponto no basquete ([WOODFIELD; FELLINGHAM, 2018](#)). No vôlei, a aplicação desses modelos, pode auxiliar na análise das sequências de toques na bola, identificando padrões entre recepção, levantamento e ataque. Assim, uma boa base quantitativa é obtida para otimizar decisões táticas e formações em quadra ([ROY et al., 2023](#)). Já no handebol, os modelos permitem mapear transições entre passes e finalizações, avaliando como as decisões individuais afetam o desempenho coletivo ([ROY et al., 2021](#)). Esses modelos mostram que é possível identificar regiões críticas da quadra e padrões de movimentação que maximizam as chances de gol, além de avaliar o impacto de ajustes táticos sobre a eficácia ofensiva e defensiva.

## 3.2 Aplicações no Futebol

O futebol, reconhecido por sua popularidade e dinâmica complexa, envolve interações entre jogadores que podem ser eficientemente representadas por modelos de cadeias de Markov, destacando padrões e transições táticas. Com a crescente disponibilidade de dados e o avanço das técnicas analíticas, esses modelos oferecem uma abordagem matemática robusta para analisar as transições de estados que representam eventos no jogo, como passes, dribles, cruzamentos, interceptações e finalizações.

Considerando a troca de passes entre os jogadores de um time como um dos principais elementos que determina a dinâmica de uma partida de futebol, pode-se observar que, ao estar com a posse da bola, o jogador se movimenta para encontrar a melhor alternativa de passe ou para buscar uma finalização ao gol adversário. Essa dinâmica é influenciada por fatores como o posicionamento no campo, a distância entre os atletas, a presença de marcadores e a habilidade técnica dos jogadores, conferindo ao jogo um comportamento estocástico, onde cada opção de passe apresenta diferentes probabilidades de sucesso. Entretanto, para efeitos de simplificação, é possível ignorar aspectos como o posicionamento exato dos jogadores em campo, o tempo de posse da bola e até mesmo um ou mais jogadores que não participam ativamente da dinâmica de troca de passes na partida.

Diante desse cenário, vários estudos estão sendo feitos das mais diversas formas. Uma aplicação das cadeias de Markov analisando a troca de passes e sua influência no desempenho tático foi feita por ([CECCONELLO; OLIVEIRA, 2020](#)). Utilizando dados de alguns jogos da seleção brasileira, a final da copa do mundo de 2002 e os cinco jogos da campanha no mundial de 2018, os autores modelaram as transições, onde cada um dos onze jogadores representam um estado, e analisaram o estado estacionário dessas cadeias, identificando os jogadores mais relevantes em termos de sua participação na troca de passes ao longo da partida. Essa análise do estado estacionário da cadeia, vai além e ainda nos permite identificar estratégias e táticas da dinâmica de um determinado time.

Para analisar o impacto da posse de bola das equipes de futebol, (KIM; CHA, 2022) de uma maneira um pouco diferente, construíram uma matriz estocástica utilizando dados de passes do time do Barcelona na temporada 2020/21. A partir do cálculo da matriz de probabilidades de transição da posse de bola entre as diferentes posições dos jogadores no campo como atacantes, meio-campistas, defensores e goleiro, os autores calcularam autovalores e vetores do estado estacionário. Nesse processo, o *Teorema de Perron-Frobenius* é aplicável, pois ele garante que, para matrizes estocásticas irredutíveis e positivas, existe um único autovalor dominante e positivo, e o vetor associado a esse autovalor representa a distribuição estacionária da posse de bola, descrevendo a rapidez da convergência exponencial do sistema para o estado estacionário. Cabe destacar que a demonstração do Teorema de Perron-Frobenius não será abordada neste trabalho. Juntamente com a análise de componentes principais (PCA)<sup>1</sup>, os autores identificaram padrões táticos e a correlação entre a posse de bola no meio-campo e o sucesso da equipe. A análise dos padrões de passe permite estimar a distribuição estável da posse de bola, aproximando-se da realidade do jogo, apesar de sua complexidade.

Contudo, a aplicação de cadeias de Markov no futebol não se limita à análise de passes. (ROY et al., 2023) propuseram um *framework*<sup>2</sup> baseado em Processos de Decisão de Markov (MDPs)<sup>3</sup> que modela a dinâmica ofensiva de equipes de futebol, permitindo simular diferentes cenários, como a eficácia de estratégias de ataque em zonas específicas do campo. No contexto da dinâmica ofensiva, os MDPs são particularmente úteis porque permitem modelar o futebol como uma sequência de decisões, onde o estado do jogo (por exemplo, zonas do campo onde a bola está) evolui em resposta às ações dos jogadores (por exemplo, passes, dribles ou chutes). O objetivo é encontrar uma regra que indica qual ação tomar em cada estado, para que maximize a recompensa total esperada ao longo do tempo (por exemplo, marcar um gol ou perder a posse de bola). (LIU et al., 2022) propôs identificar os padrões gerais e ameaçadores de ataque de diferentes estilos de jogo em partidas de futebol de alto nível, no caso os dados de sequência de ataque das 21 partidas das três melhores equipes na copa do mundo de 2018 foram coletados com essa finalidade. As três equipes foram classificadas em dois estilos de jogo: a França foi considerada uma equipe de jogo direto, enquanto Croácia e Bélgica foram consideradas equipes de posse

---

<sup>1</sup>técnica de análise usada para processar conjunto de dados multidimensionais, informando qual variável é mais benéfica em termos de distinção do conjunto de dados, aumentando assim a sua interpretabilidade e preservando o máximo de informações.

<sup>2</sup>estrutura conceitual que organiza métodos, ferramentas e processos para resolver problemas específicos de forma sistemática e eficiente.

<sup>3</sup>modelo matemático usado para representar e resolver problemas de tomada de decisão em ambientes estocásticos, definido por cinco elementos principais: estados, ações, função de transição, função de recompensa e fator de desconto.

de bola. O campo de futebol foi dividido em 12 zonas, e modelos de zona baseados em matrizes de transição de Markov foram aplicados para avaliar o padrão de ataque nas 21 partidas. Foram realizadas análises descritivas e simulações usando esse modelo. A combinação de posse de bola e contra-ataque foi uma nova tendência que surgiu na copa do mundo de 2018.

A integração de técnicas complementares também fortalece o uso das cadeias de Markov no futebol, especialmente ao lidar com a complexidade e a variabilidade do jogo. A combinação com os métodos como os citados: PCA, MDPs e modelos de zona, permite explorar diferentes aspectos do desempenho das equipes. Por exemplo, o PCA é útil para reduzir a dimensionalidade dos dados, facilitando a identificação de padrões relevantes em conjuntos de dados extensos e complexos. Os MDPs, por sua vez, adicionam uma camada de decisão e otimização ao modelo, possibilitando a simulação de cenários táticos que envolvem escolhas estratégicas em tempo real. Já os modelos de zona organizam o campo em regiões específicas, permitindo que as transições entre estados representem o movimento da bola e as ações das equipes de maneira mais detalhada. Essa abordagem integrada é particularmente vantajosa em situações com dados limitados, onde a escassez de informações pode ser compensada pela capacidade desses métodos de extrair informações críticas e ajustar modelos para diferentes estilos de jogo. Assim, as cadeias de Markov, em conjunto com essas técnicas, tornam-se um ferramental robusto para modelar a dinâmica do futebol, oferecendo uma análise tática aprofundada, desde a modelagem de passes até a simulação de cenários ofensivos e defensivos.

## 4 METODOLOGIA

### 4.1 Coleta dos Dados

Os dados dos passes entre os jogadores de uma mesma equipe de todos os 125 jogos da temporada 2023/24 da UEFA Champions League foram coletados da plataforma Footstats ([FOOTSTATS, 2002](#)), um site 100% gratuito para consumir dados estatísticos de futebol dos campeonatos, equipes e jogadores de mais de 150 ligas pelo mundo. Cada arquivo JSON <sup>1</sup> disponibilizado, contém os dados dos passes das duas equipes em determinada partida. Para cada equipe, o número de passes do jogador  $i$  para o jogador  $j$  foi registrado através de uma matriz de adjacência  $\mathbf{A}$ , quadrada, a qual representa as interações entre os jogadores.

### 4.2 Estruturação e Tratamento dos Dados

Para a construção do modelo da cadeia de Markov, transformamos a matriz de adjacência  $\mathbf{A}$  em uma matriz adequada. Para construir a matriz de transição  $\mathbf{P}$ , normalizamos a respectiva matriz de adjacência  $\mathbf{A}$ . Cada elemento  $P_{ij}$  foi obtido dividindo-se o número de passes do jogador  $i$  para o jogador  $j$  pelo total de passes realizados pelo jogador  $i$ , assegurando que a soma das probabilidades em cada linha fosse igual a 1, conforme a equação (2.4).

$$P_{ij} = \frac{A_{ij}}{\sum A_i} \quad , \quad P_{ij} \geq 0. \quad (4.1)$$

---

<sup>1</sup>arquivo de texto que armazena e troca informações entre sistemas computacionais, baseado na sintaxe do objeto JavaScript.

Para garantir um grau de confiança no modelo, arredondamos cada um dos elementos  $P_{ij}$  para três dígitos significativos. Linhas com somatórios nulos, representando jogadores que não realizaram passes, e colunas com somatórios nulos, representando jogadores que não receberam passes, foram tratadas atribuindo valores zero às transições, mantendo a matriz como estocástica. Veremos adiante que para uma melhor análise e um modelo mais eficiente, optamos por remover essas linhas e colunas nulas, isto é, com todas as entradas  $P_{ij} = 0$ .

### 4.3 Construção do Modelo de Cadeia de Markov

O modelo foi desenvolvido para representar a dinâmica dos passes no futebol, utilizando uma cadeia de Markov em tempo discreto. Definidas as matrizes de transição  $\mathbf{P}$  e considerando válidas as propriedades de que a soma de cada linha deve ser igual a 1 e que não existem elementos negativos, definimos cada jogador como um **estado** da cadeia de Markov, com as transições representando os passes entre eles. Nos certificamos de que todos os estados relevantes (jogadores) estavam corretamente representados na matriz quadrada  $M \times M$ .

De acordo com a equação (2.15), uma cadeia de Markov é irredutível se for possível atingir qualquer estado  $j$  partindo de qualquer estado  $i$  (direta ou indiretamente) em um número finito de passos. Quando a matriz de transição não for irredutível, significa que existem jogadores que nunca recebem ou nunca passam a bola, podendo haver estados isolados devido à maneira como os passes são distribuídos.

Como um dos nossos objetivos foi verificar os jogadores mais influentes na equipe, desconsideramos esses estados com pouca ou nenhuma relevância. Assim, garantimos a irredutibilidade das matrizes e, uma vez que também fossem aperiódicas, isto é, quando o fluxo de passes se torna mais imprevisível ou contém probabilidades diferentes de transição, as cadeias eram ergódicas. Isso nos possibilitou encontrar a única distribuição estacionária, conforme definido na equação (2.17). Analisando cada valor dessa distribuição estacionária  $\pi_j$ , identificamos os jogadores mais influentes, a probabilidade de estarem envolvidos na rede de passes da equipe no decorrer da partida e verificamos se o jogo era mais coletivo, ou se o time era mais dependente de alguns jogadores.

## 4.4 Validação do Modelo de Cadeia de Markov

A consistência do modelo foi avaliada por meio de algumas validações, incluindo: análise de convergência para garantir que o modelo converge para uma única distribuição estacionária, o que é esperado de cadeias de Markov ergódicas, mapas de calor para uma análise das probabilidades de transição visando entender a probabilidade de ocorrerem passes entre pares específicos de jogadores e gráficos de rede para representar as conexões entre os jogadores e verificar se os fluxos previstos pelo modelo fazem sentido.

Para verificar se a matriz de transição  $\mathbf{P}$  convergia para uma distribuição estacionária após múltiplas iterações, multiplicamos  $\mathbf{P}$  sucessivamente, conforme mostrado na equação (2.10). Em seguida, verificamos se as linhas de  $\mathbf{P}^n$  convergiam para o mesmo vetor (distribuição estacionária). Por fim, estabelecemos um critério de parada  $\|\mathbf{P}^{n+1} - \mathbf{P}^n\| < 10^{-5}$  baseado no valor de tolerância  $\epsilon = 10^{-5}$ . Esse critério  $\epsilon$  define o limite de variação entre as iterações, assegurando que o sistema chegou a uma solução estável.

Mapas de calor foram utilizados para visualizar as probabilidades de transição entre jogadores. Cada célula do mapa de calor indica a probabilidade de ocorrência de um passe entre dois jogadores específicos, com cores mais intensas destacando transições mais frequentes. Essa visualização facilita a identificação de padrões e comportamentos táticos, como jogadores que frequentemente recebem ou iniciam passes, além de evidenciar possíveis concentrações de jogo em determinados setores ou atletas.

Também foram feitas simulações de sequências de passes para avaliar a estabilidade do modelo. O ponto de partida escolhido foi o jogador mais influente, identificado pela distribuição estacionária. Essa abordagem permitiu observar como o fluxo de passes evolui a partir de um jogador central e identificar se a dinâmica de passes se concentra ou se distribui uniformemente entre os demais jogadores. Ao todo foram feitas 100 simulações para cada um dos times em cada partida. O número de passes de cada sequência prosseguiu até que o critério de parada  $\epsilon = 10^{-5}$  fosse atendido.

Para a análise dessas sequências simuladas, foram gerados gráficos de rede para visualizar as conexões entre os jogadores. Cada nó do gráfico representa um jogador, enquanto as arestas indicam a direção dos passes entre eles. No nosso modelo o tamanho do nó permitiu identificar jogadores centrais e subgrupos táticos dentro da equipe, isto é, quanto maior o nó, mais influente é o jogador para o time naquela sequência simulada. As arestas foram numeradas conforme a sequência foi gerada e seu tamanho foi determinado conforme a matriz de transição  $\mathbf{P}$ .

## 4.5 Ferramentas Utilizadas

A linguagem de programação R <sup>1</sup> foi utilizada conjuntamente com o RStudio <sup>2</sup> para todas as etapas do processo, desde a manipulação até a análise dos dados, simulação e construção de gráficos e mapas de calor. Cada uma das matrizes de adjacência e de transição foi convertida e armazenada em uma planilha em formato CSV <sup>3</sup>. Arquivos do tipo TXT <sup>4</sup> também foram gerados a fim de mostrar quais foram os jogadores mais influentes nas partidas e quantos passos foram necessários até a convergência para o vetor estacionário. Arquivos do tipo PNG <sup>5</sup> foram utilizados para salvar os mapas de calor, gráficos da distribuição estacionária e os gráficos de rede. Todos esses arquivos foram armazenados em um repositório no GitHub <sup>6</sup> ([NETO, 2024](#)).

---

<sup>1</sup>linguagem e ambiente para computação estatística e gráficos.

<sup>2</sup>interface gráfica integrada para o R.

<sup>3</sup>arquivo de texto, do tipo valores separados por vírgulas, usado para armazenar dados que podem ser importados e exportados em programas como Microsoft Excel, Google Sheets ou LibreOffice Calc.

<sup>4</sup>arquivo de texto simples que pode ser criado, aberto e editado utilizando programas de processamento de texto.

<sup>5</sup>arquivo de imagem rasterizado. O formato é amplamente utilizado em sites para exibir imagens digitais de alta qualidade.

<sup>6</sup>plataforma de hospedagem baseada em repositórios e comandos Git, onde é possível armazenar os códigos, arquivos e o histórico de revisão de cada arquivo.

## 5 ESTUDO DE CASO E RESULTADOS

### 5.1 Seleção dos Jogos

Foram escolhidos os 13 jogos das equipes do Real Madrid e Borussia Dortmund do campeonato da UEFA Champions League da temporada 2023/24 como amostra para aplicação do modelo, por serem as equipes finalistas da competição. Nesses jogos selecionados podemos ver situações distintas das dinâmicas de passes e estilos de jogos diferentes que levaram essas duas equipes à grande final.

Jogo	Placar	Fase	Local
1	Real Madrid 1 x 0 Union Berlin	Grupos Rodada 1	Casa
2	Napoli 2 x 3 Real Madrid	Grupos Rodada 2	Visitante
3	Braga 1 x 2 Real Madrid	Grupos Rodada 3	Visitante
4	Real Madrid 3 x 0 Braga	Grupos Rodada 4	Casa
5	Real Madrid 4 x 2 Napoli	Grupos Rodada 5	Casa
6	Union Berlin 2 x 3 Real Madrid	Grupos Rodada 6	Visitante
7	RB Leipzig 0 x 1 Real Madrid	Oitavas de Final Ida	Visitante
8	Real Madrid 1 x 1 RB Leipzig	Oitavas de Final Volta	Casa
9	Real Madrid 3 x 3 Manchester City	Quartas de Final Ida	Casa
10	Manchester City 1 x 1 Real Madrid	Quartas de Final Volta	Visitante
11	Bayern 2 x 2 Real Madrid	Semifinal Ida	Visitante
12	Real Madrid 2 x 1 Bayern	Semifinal Volta	Casa
13	Borussia Dortmund 0 x 2 Real Madrid	Final	Neutro

Tabela 1: Jogos do Real Madrid na UEFA Champions League 2023/24

<b>Jogo</b>	<b>Placar</b>	<b>Fase</b>	<b>Local</b>
1	PSG 2 x 0 Borussia Dortmund	Grupos Rodada 1	Visitante
2	Borussia Dortmund 0 x 0 Milan	Grupos Rodada 2	Casa
3	Newcastle 0 x 1 Borussia Dortmund	Grupos Rodada 3	Visitante
4	Borussia Dortmund 2 x 0 Newcastle	Grupos Rodada 4	Casa
5	Milan 1 x 3 Borussia Dortmund	Grupos Rodada 5	Visitante
6	Borussia Dortmund 1 x 1 PSG	Grupos Rodada 6	Casa
7	PSV 1 x 1 Borussia Dortmund	Oitavas de Final Ida	Visitante
8	Borussia Dortmund 2 x 0 PSV	Oitavas de Final Volta	Casa
9	Atlético de Madrid 2 x 1 Borussia Dortmund	Quartas de Final Ida	Visitante
10	Borussia Dortmund 4 x 2 Atlético de Madrid	Quartas de Final Volta	Casa
11	Borussia Dortmund 1 x 0 PSG	Semifinal Ida	Casa
12	PSG 0 x 1 Borussia Dortmund	Semifinal Volta	Visitante
13	Borussia Dortmund 0 x 2 Real Madrid	Final	Neutro

Tabela 2: Jogos do Borussia Dortmund na UEFA Champions League 2023/24

## 5.2 Jogadores Mais Influentes na Rede de Passes

A distribuição estacionária foi calculada para identificar os jogadores mais influentes na dinâmica de passes de cada uma das duas equipes, conforme ilustrado nas tabelas (A.1) e (B.1) dos apêndices. Os valores indicam a probabilidade de envolvimento de cada jogador na rede de passes em estado estacionário.

<b>Jogo</b>	<b>Jogador</b>	<b>Probabilidade</b>
1	Lucas Vazquez	0.104
2	Aurelien Tchouameni	0.137
3	Luka Modric	0.13
4	Toni Kroos	0.153
5	Toni Kroos	0.177
6	Luka Modric	0.132
7	Eduardo Camavinga	0.14
8	Toni Kroos	0.125
9	Aurelien Tchouameni	0.147
10	Antonio Rudiger	0.13
11	Toni Kroos	0.164
12	Toni Kroos	0.154
13	Toni Kroos	0.159

Tabela 3: Jogadores mais influentes em cada jogo do Real Madrid na UEFA Champions League 2023/24

<b>Jogo</b>	<b>Jogador</b>	<b>Probabilidade</b>
1	Nico Schlotterbeck	0.131
2	Ramy Bensebaini	0.134
3	Nico Schlotterbeck	0.124
4	Nico Schlotterbeck	0.14
5	Julian Ryerson	0.123
6	Mats Hummels	0.133
7	Emre Can	0.127
8	Mats Hummels	0.127
9	Nico Schlotterbeck	0.15
10	Nico Schlotterbeck	0.162
11	Jadon Sancho	0.14
12	Julian Brandt	0.148
13	Nico Schlotterbeck	0.174

Tabela 4: Jogadores mais influentes em cada jogo do Borussia Dortmund na UEFA Champions League 2023/24

### 5.3 Mapas de Calor das Matrizes de Transição

Os mapas de calor foram gerados para uma análise das probabilidades de transição e uma melhor visualização dos passes entre pares específicos de jogadores.

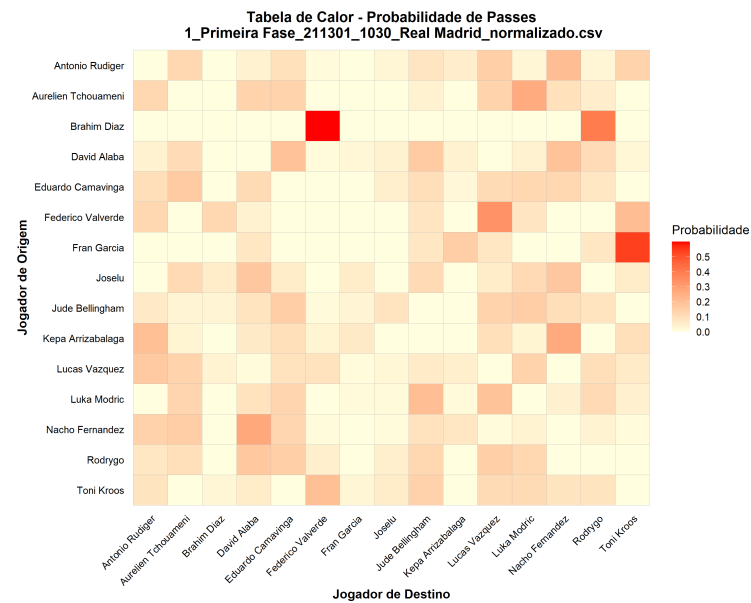


Figura 1: Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 1 do Real Madrid

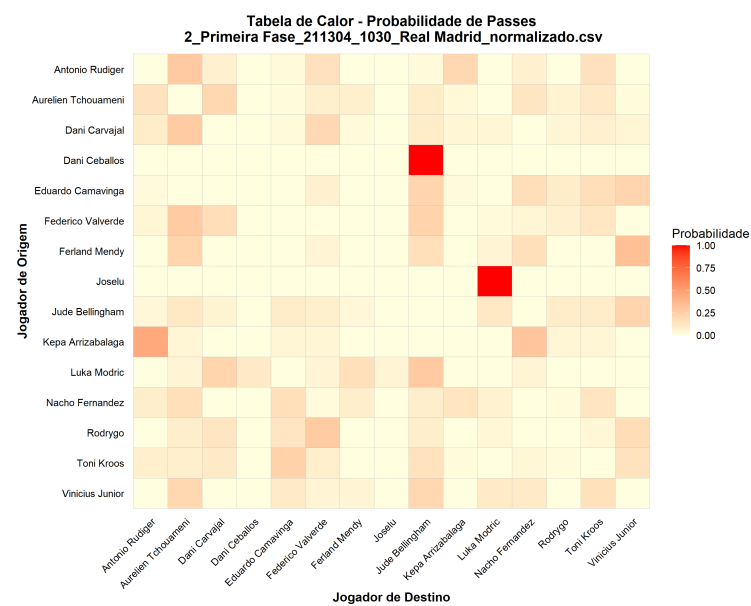


Figura 2: Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 2 do Real Madrid

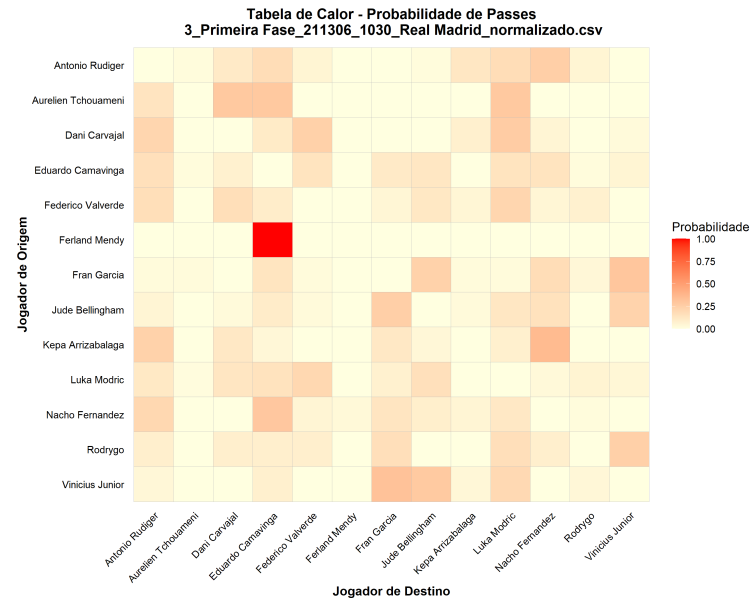


Figura 3: Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 3 do Real Madrid

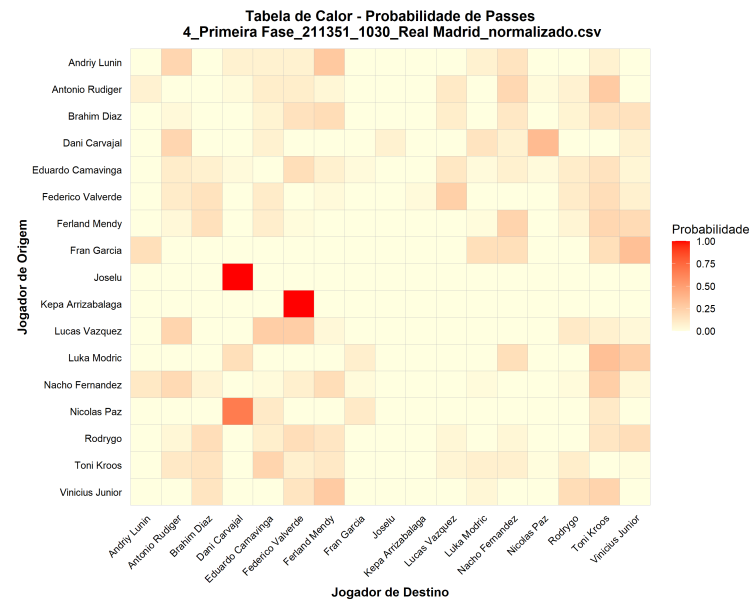


Figura 4: Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 4 do Real Madrid

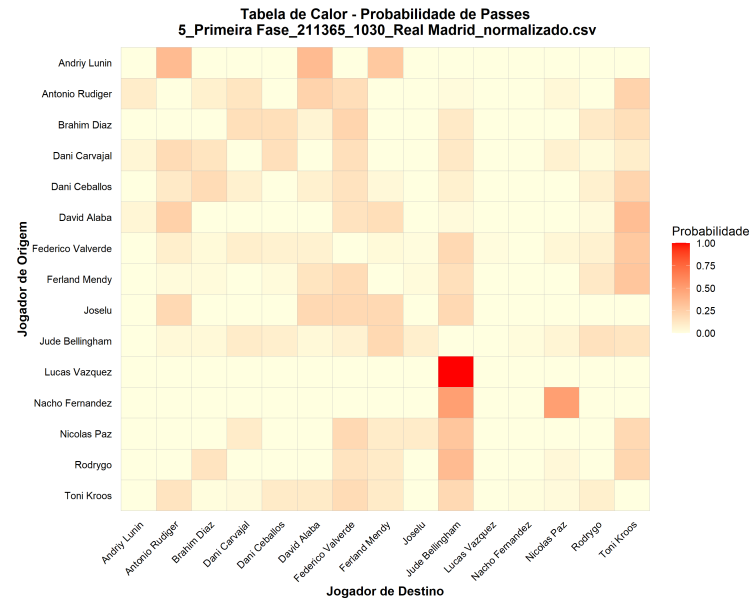


Figura 5: Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 5 do Real Madrid

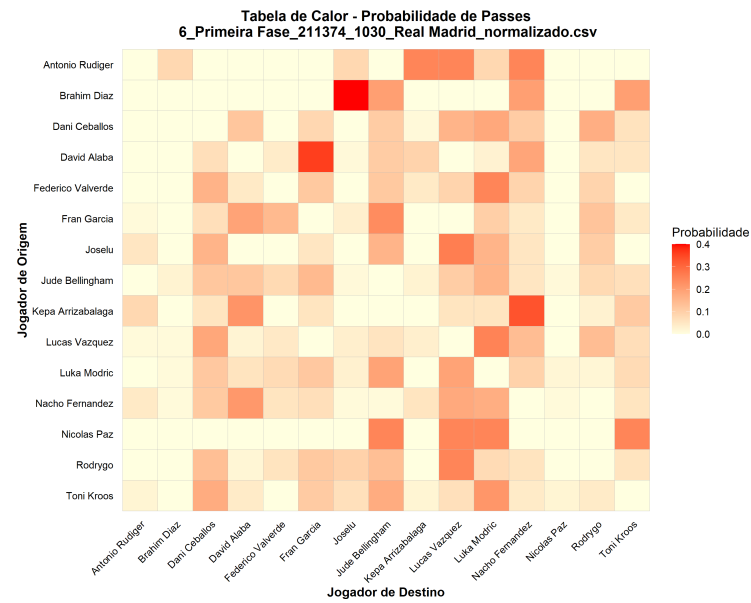


Figura 6: Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 6 do Real Madrid

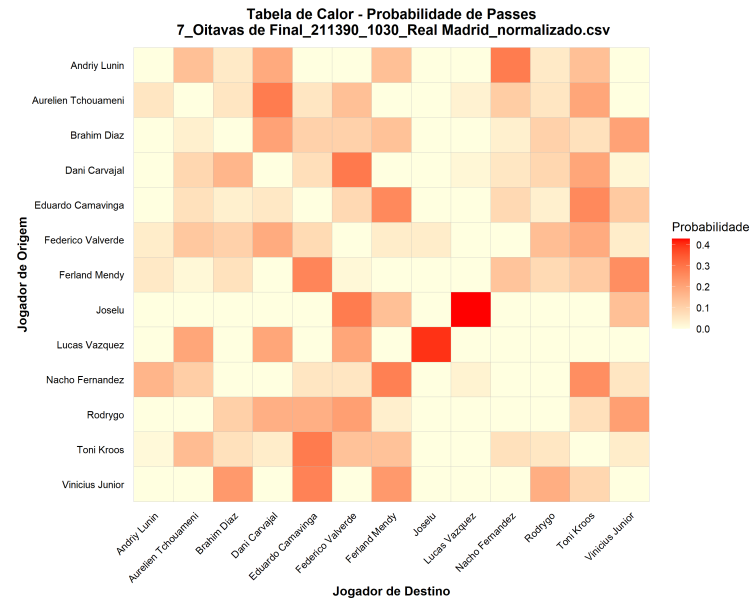


Figura 7: Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 7 do Real Madrid

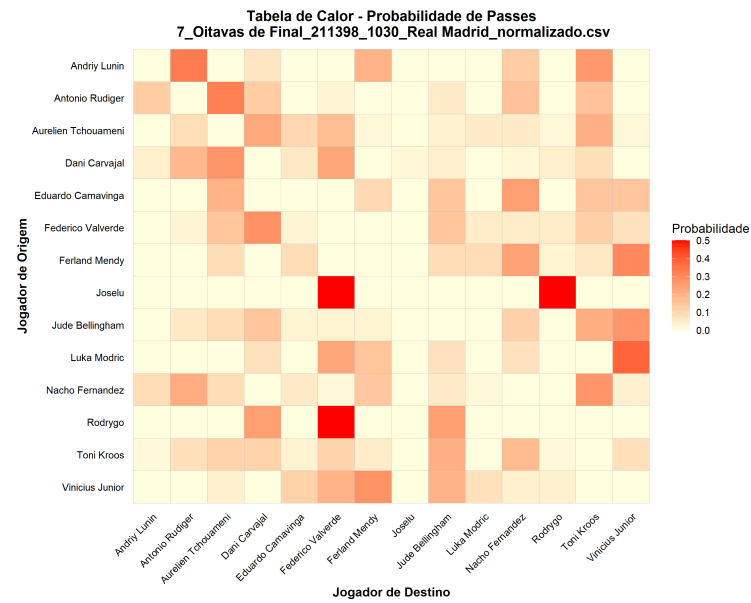


Figura 8: Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 8 do Real Madrid

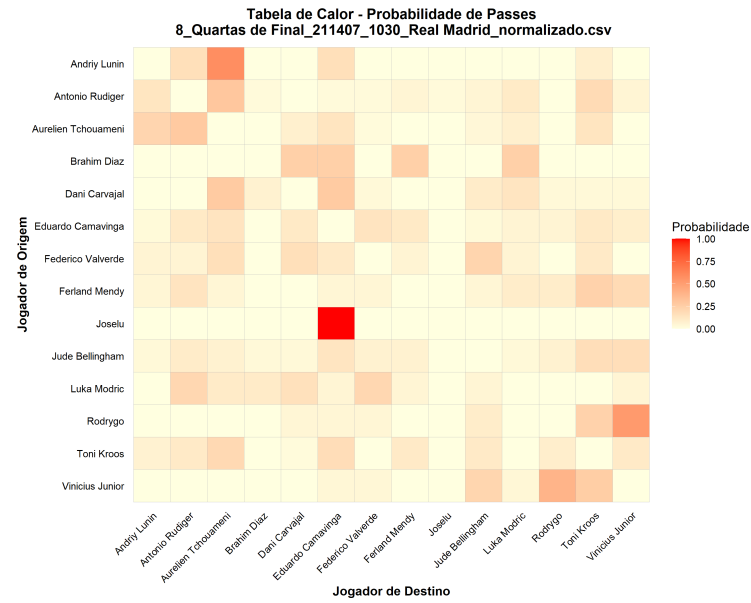


Figura 9: Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 9 do Real Madrid

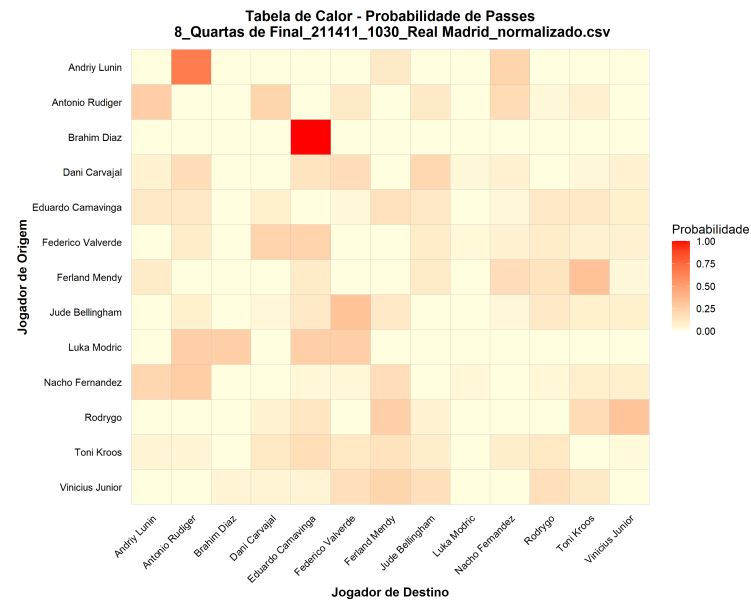


Figura 10: Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 10 do Real Madrid

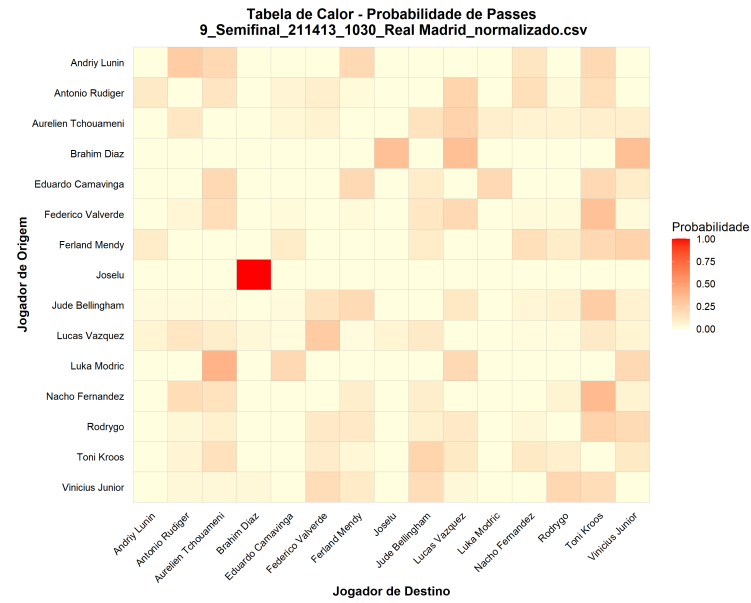


Figura 11: Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 11 do Real Madrid

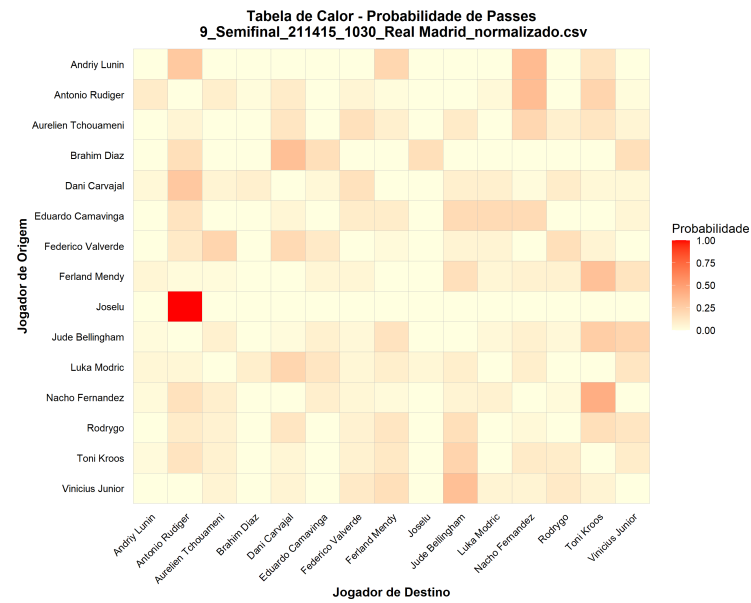


Figura 12: Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 12 do Real Madrid

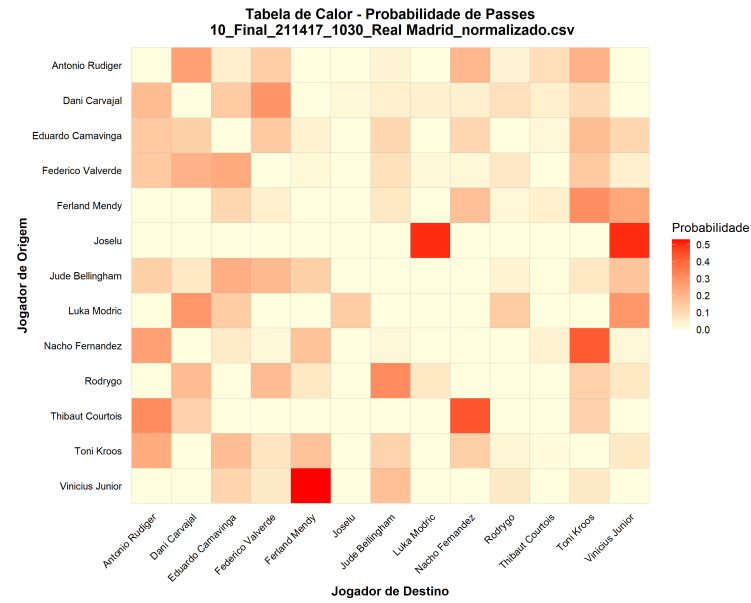


Figura 13: Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 13 do Real Madrid

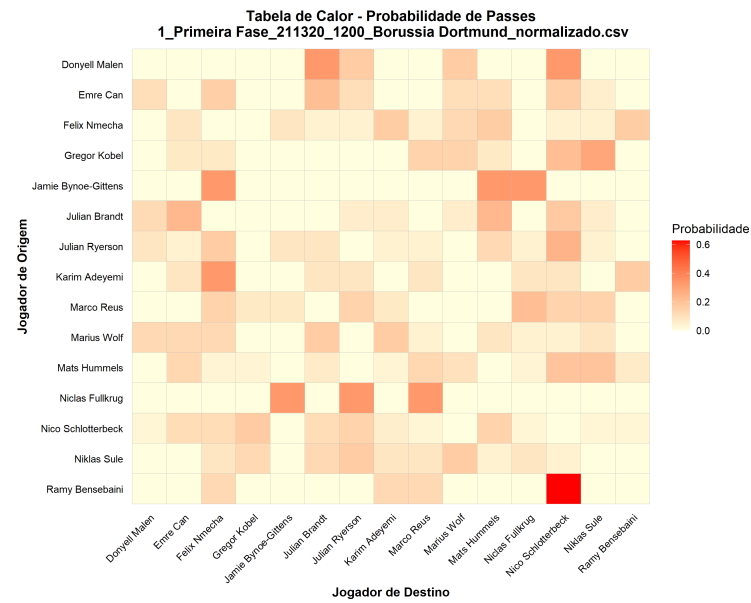


Figura 14: Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 1 do Borussia Dortmund

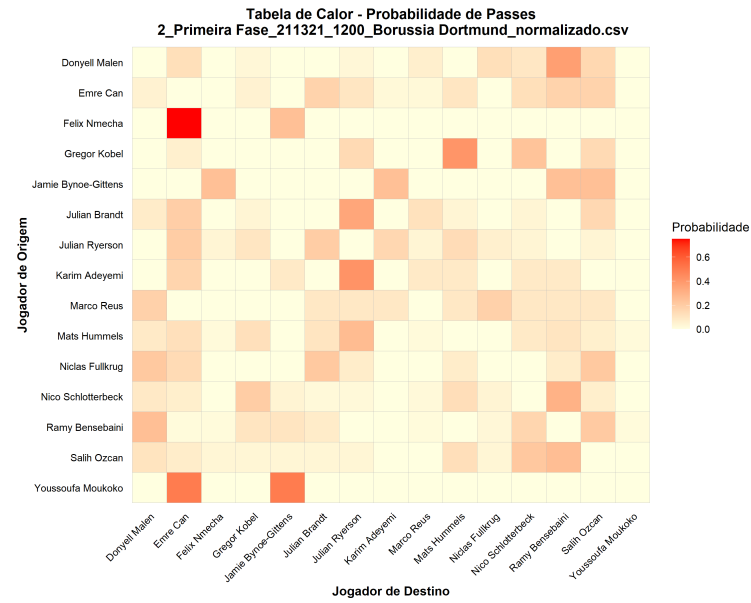


Figura 15: Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 2 do Borussia Dortmund

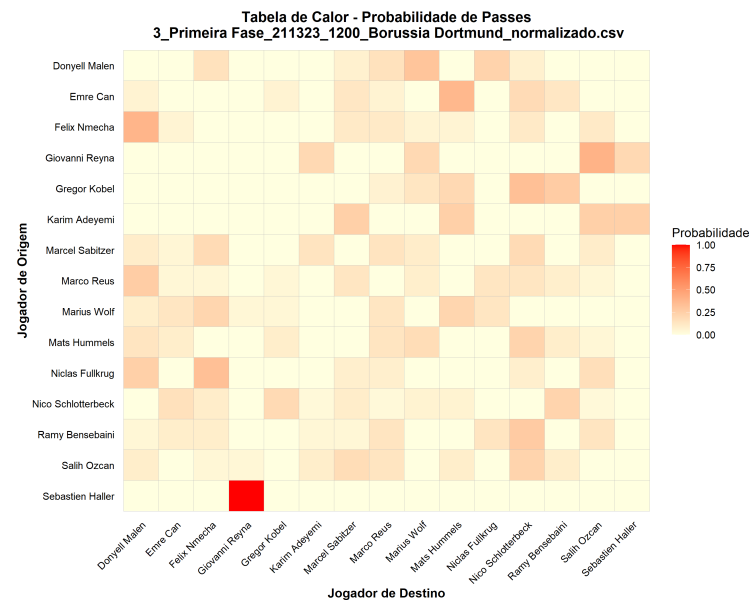


Figura 16: Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 3 do Borussia Dortmund

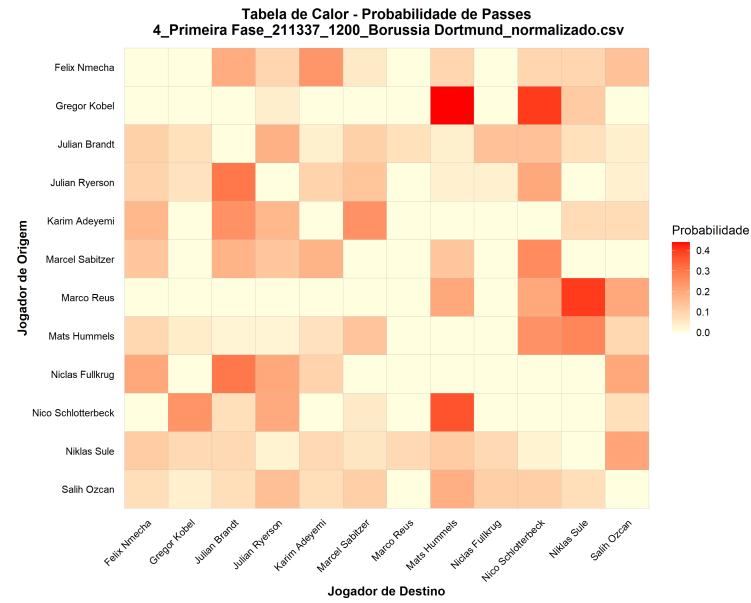


Figura 17: Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 4 do Borussia Dortmund

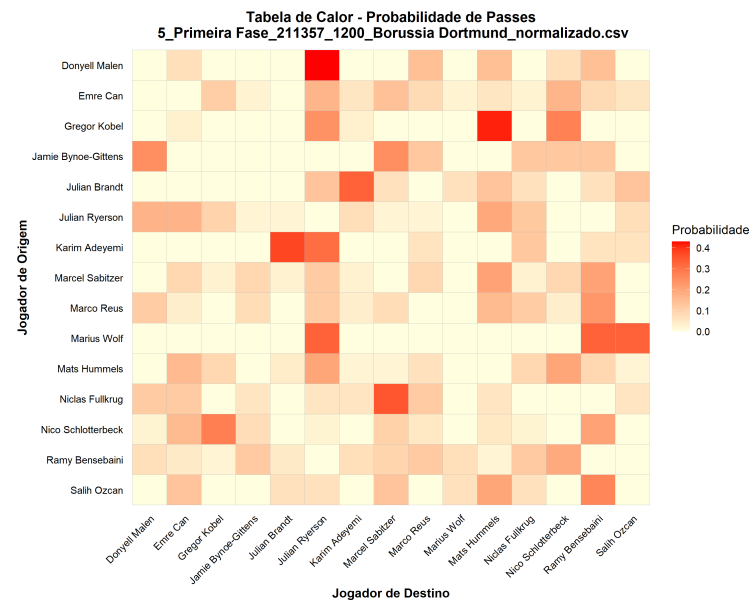


Figura 18: Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 5 do Borussia Dortmund

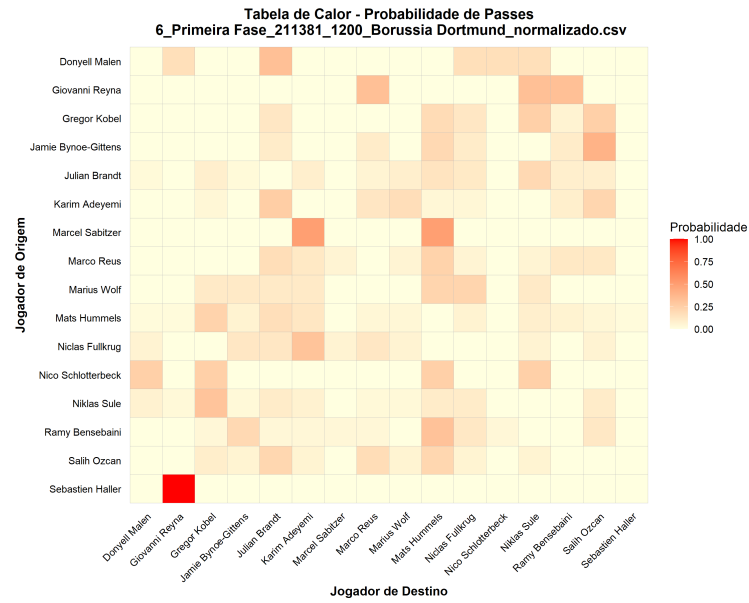


Figura 19: Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 6 do Borussia Dortmund

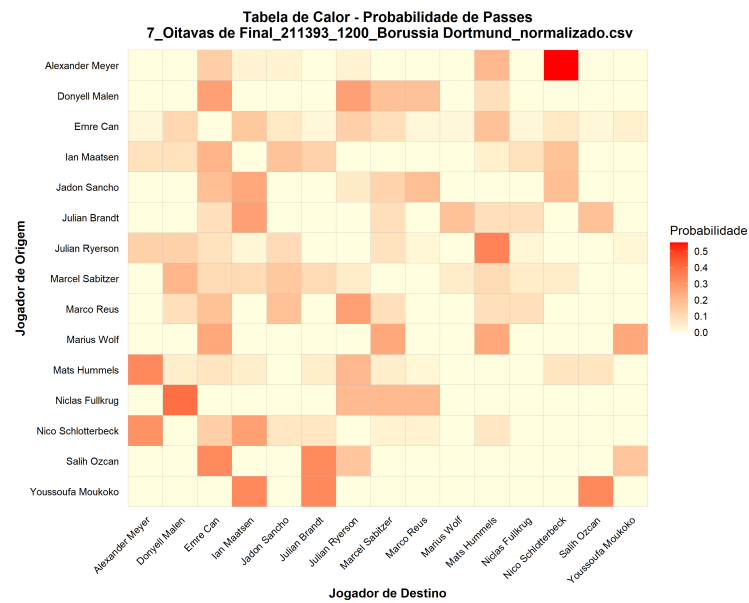


Figura 20: Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 7 do Borussia Dortmund

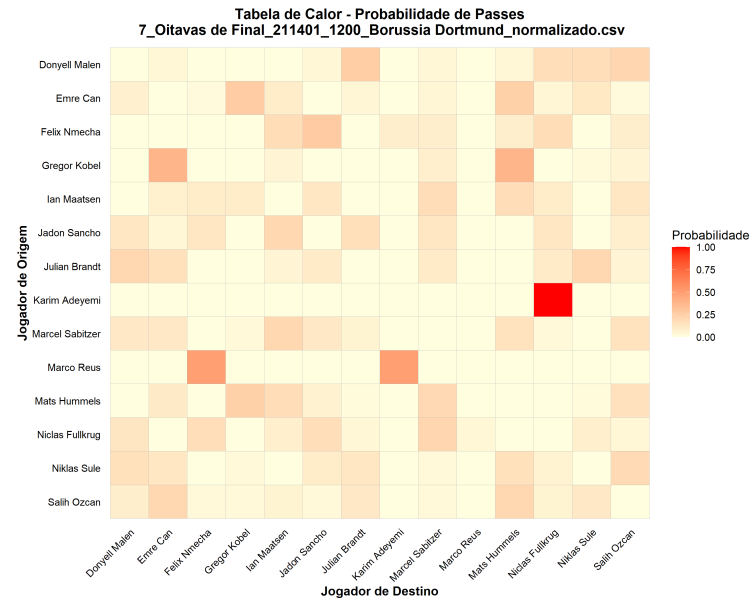


Figura 21: Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 8 do Borussia Dortmund

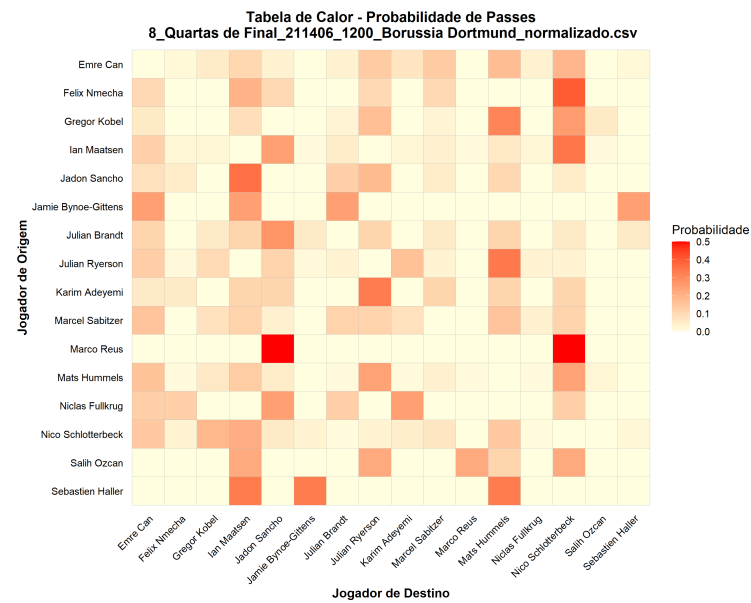


Figura 22: Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 9 do Borussia Dortmund

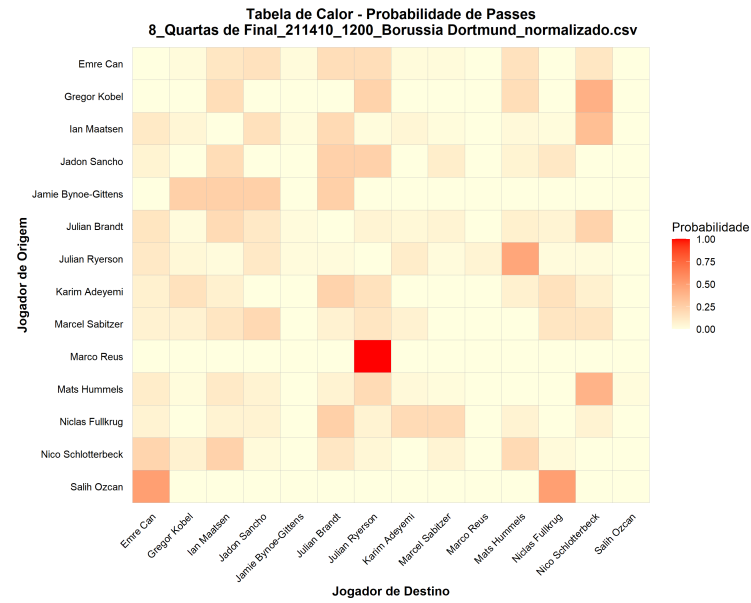


Figura 23: Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 10 do Borussia Dortmund

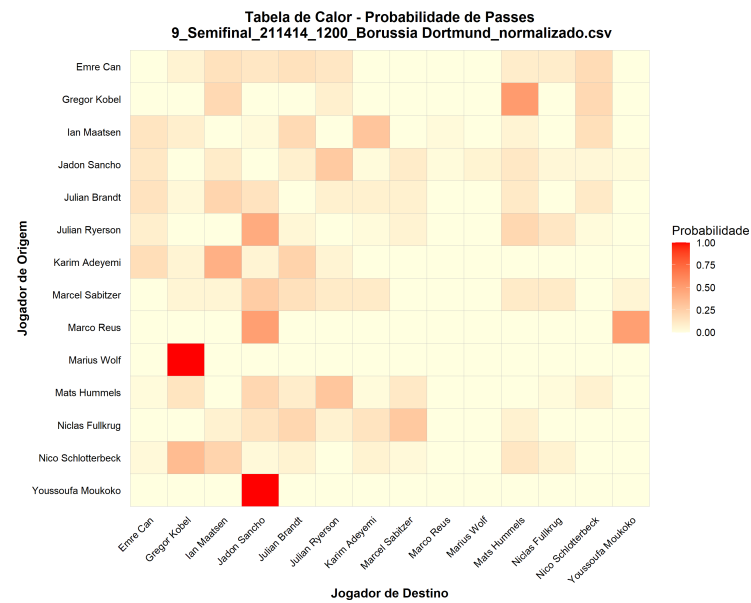


Figura 24: Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 11 do Borussia Dortmund

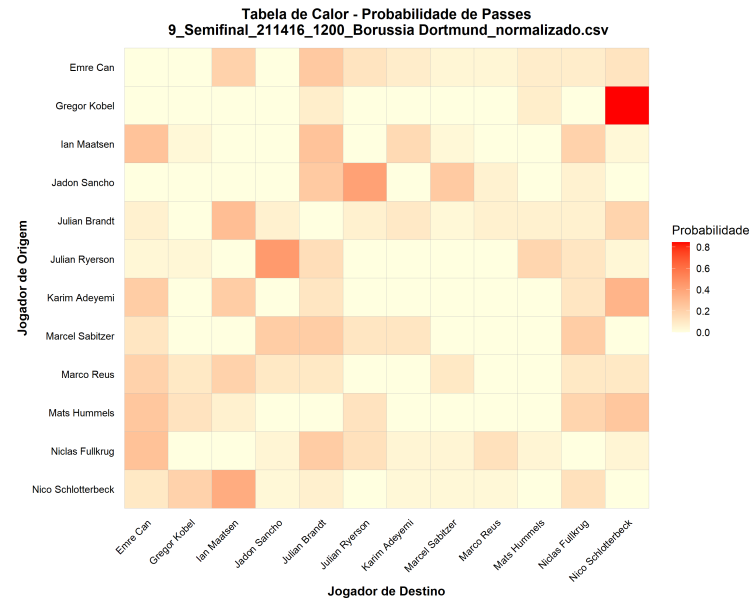


Figura 25: Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 12 do Borussia Dortmund

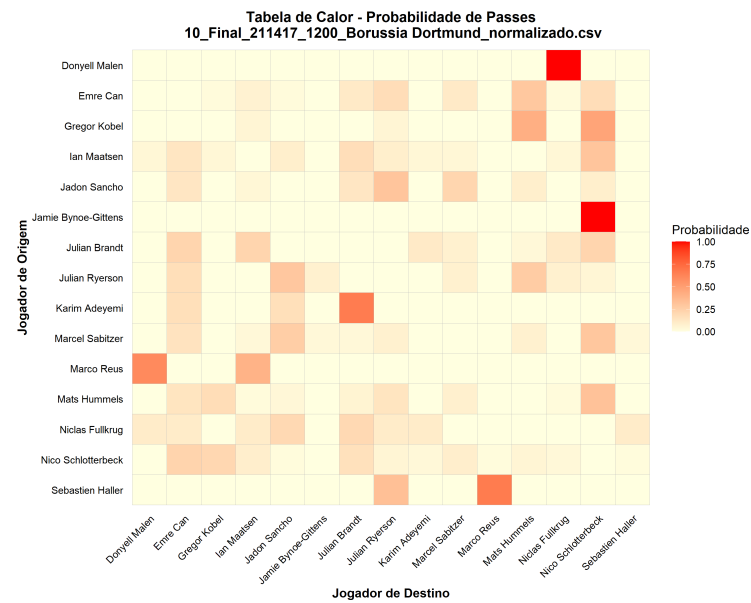
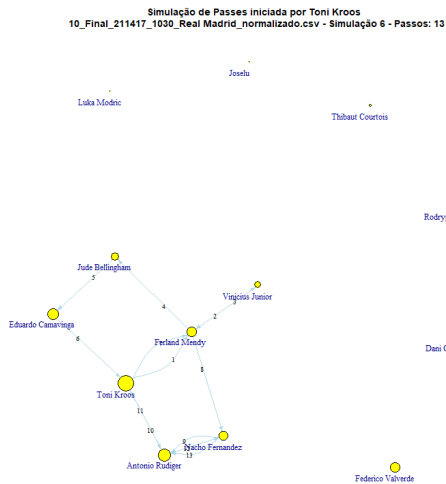


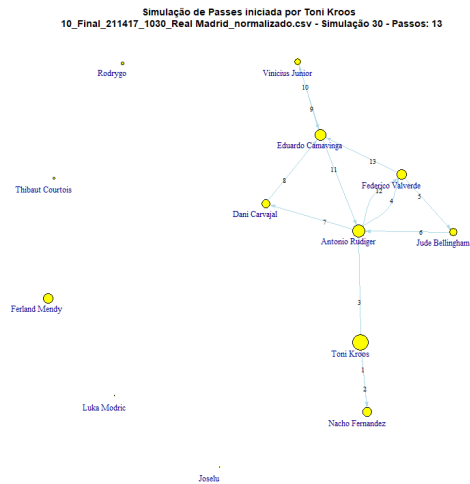
Figura 26: Mapa de calor representando as transições de passes no Jogo 13 do Borussia Dortmund

## 5.4 Simulação de Sequências de Passes e Gráficos de Rede

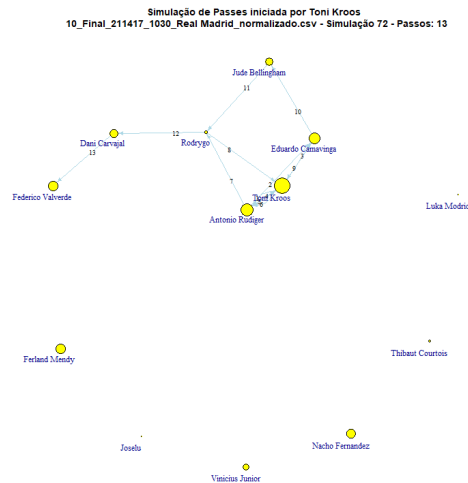
Para cada uma das 13 partidas das duas equipes, foram feitas 100 simulações de sequências de passes atendendo ao critério de parada estabelecido. Para uma melhor visualização, foram gerados os gráficos de rede. Ao final das simulações, foi calculado o número médio de passes dos jogadores, totalizando passes dados e recebidos, e disponibilizados num gráfico de barras.



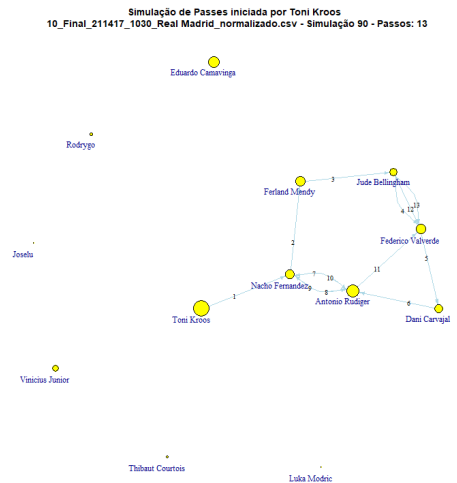
(a) Gráfico de rede da simulação 6 do jogo final do Real Madrid



(b) Gráfico de rede da simulação 30 do jogo final do Real Madrid



(c) Gráfico de rede da simulação 72 do jogo final do Real Madrid



(d) Gráfico de rede da simulação 90 do jogo final do Real Madrid

Figura 27: Exemplo de algumas simulações de passes do Real Madrid na final

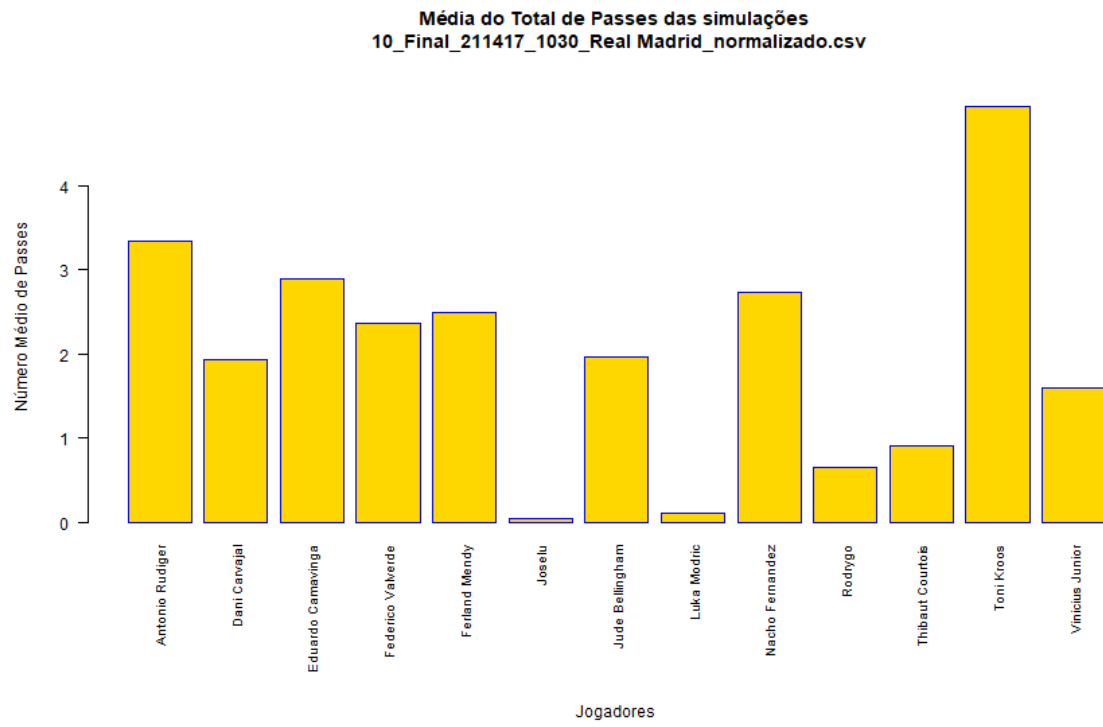
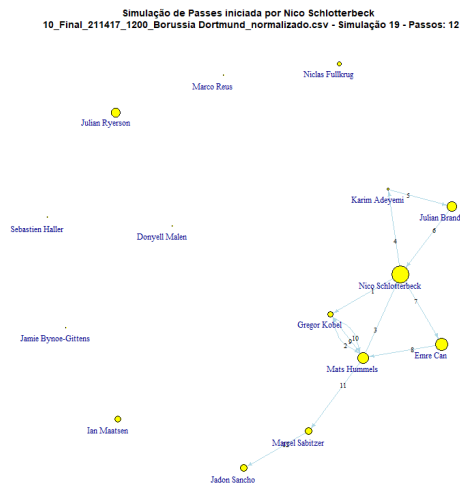
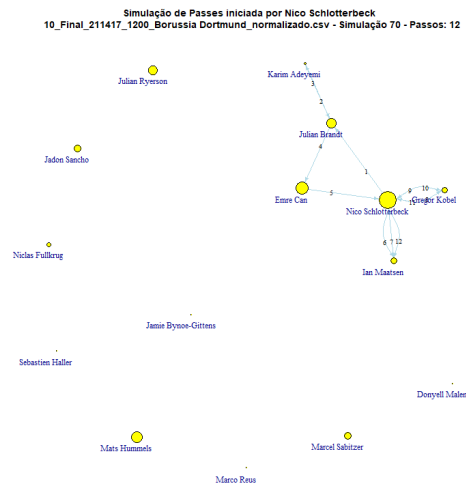


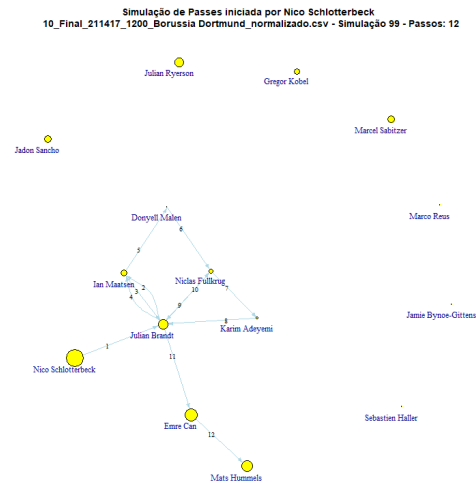
Figura 28: Gráfico de barras do número médio de passes do Real Madrid na final



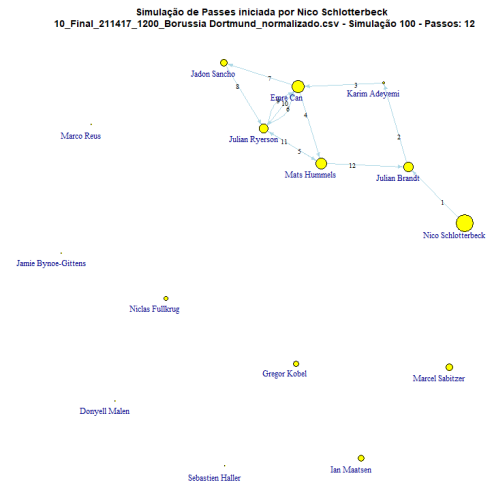
(a) Gráfico de rede da simulação 19 do jogo final do Borussia Dortmund



(b) Gráfico de rede da simulação 70 do jogo final do Borussia Dortmund



(c) Gráfico de rede da simulação 99 do jogo final do Borussia Dortmund



(d) Gráfico de rede da simulação 100 do jogo final do Borussia Dortmund

Figura 29: Exemplo de algumas simulações de passes do Borussia Dortmund na final

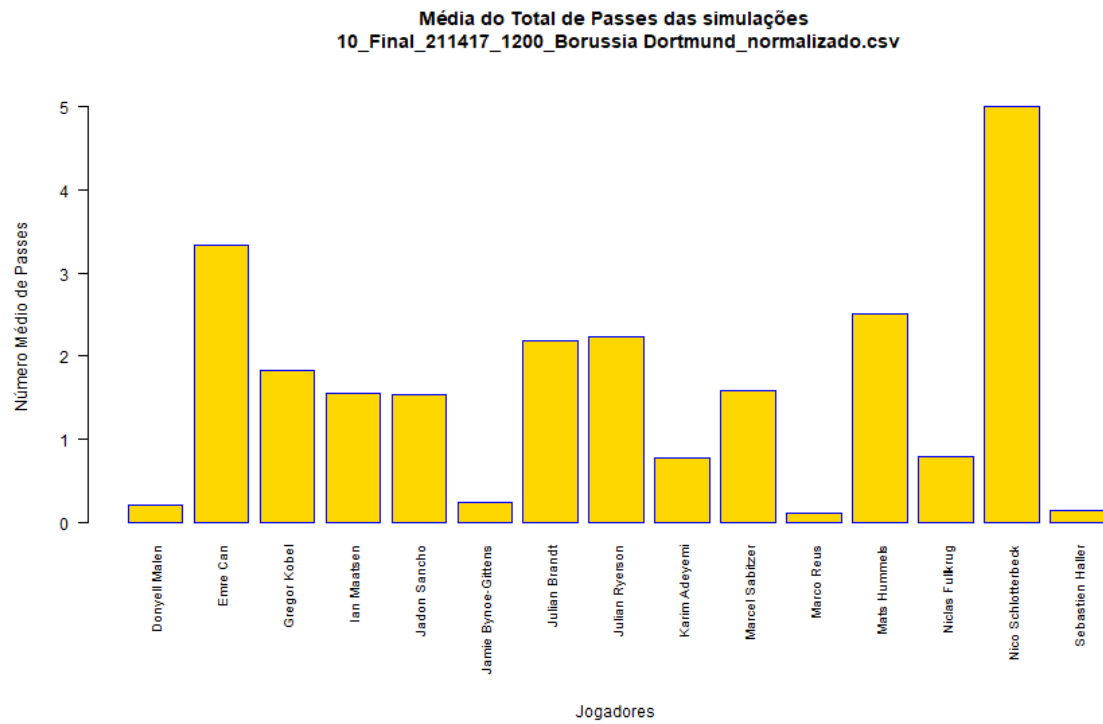


Figura 30: Gráfico de barras do número médio de passes do Borussia Dortmund na final

## 6 DISCUSSÃO

Os resultados indicaram que os jogadores Toni Kroos, pelo Real Madrid, e Nico Schlotterbeck, pelo Borussia Dortmund, destacaram-se como os atletas mais influentes das suas equipes em 6 dos 13 jogos, conforme mostrado nas tabelas (3) e (4), respectivamente. A alta probabilidade de envolvimento desses atletas na dinâmica de passes, conforme apontado pela distribuição estacionária, reflete não apenas a função tática que desempenham em suas equipes, mas também a dependência coletiva de suas habilidades para a manutenção do controle de jogo.

A consistência desses jogadores em diferentes partidas reforça a ideia de que atletas centrais na rede de passes possuem um impacto significativo na eficiência tática. No caso de Toni Kroos, por exemplo, seu papel como organizador é evidente pela frequência com que ele participa de sequências críticas de passes, enquanto Nico Schlotterbeck demonstra uma função semelhante na defesa e transição do Borussia Dortmund.

Os mapas de calor das matrizes de transição revelaram padrões distintos de distribuição de passes entre os jogadores. No Real Madrid, houve maior concentração de passes entre o meio-campo e o ataque, o que reflete a busca constante por oportunidades de finalização. Por outro lado, o Borussia Dortmund apresentou uma maior uniformidade na distribuição de passes, evidenciando um estilo de jogo mais coletivo e menos dependente de alguns jogadores. Essa distribuição uniforme foi particularmente evidente na análise das quartas de final contra o Atlético de Madrid, onde os mapas de calor mostraram menor dependência de um único jogador, como ilustrado em (22) e (23), favorecendo uma dinâmica tática diversificada. Os resultados destacam a influência do estilo de jogo na estrutura das matrizes de transição. Enquanto o Real Madrid tende a explorar a habilidade de jogadores-chave para criar jogadas decisivas, o Borussia Dortmund adota uma abordagem mais equilibrada, com transições distribuídas por várias regiões do campo.

As simulações realizadas permitiram avaliar a estabilidade do modelo de cadeia de Markov e a evolução do fluxo de passes ao longo das partidas. Os gráficos de rede gerados para ambas as equipes mostraram a formação de subgrupos táticos e a relevância de certos jogadores como nós centrais. Essa representação visual facilitou a identificação de padrões táticos e de dependências dentro das equipes.

No caso do Real Madrid, jogadores como Toni Kroos e Luka Modric emergiram como pivôs principais. Esses nós centrais evidenciaram a dependência do time em relação à sua capacidade de distribuir a bola e controlar o ritmo do jogo. Por outro lado, no Borussia Dortmund, a aplicação do modelo revelou um padrão de passes mais descentralizado. Jogadores como Nico Schlotterbeck e Mats Hummels apresentaram transições consistentes com outros membros da equipe, indicando uma abordagem coletiva mais equilibrada em comparação ao Real Madrid.

## 7 CONCLUSÃO

A propriedade de Markov foi fundamental para modelar as sequências de passes no futebol, permitindo a identificação de padrões de transição sem a necessidade de considerar todo o histórico de passes. Este trabalho realizou uma análise detalhada da dinâmica de passes no futebol utilizando cadeias de Markov. A abordagem adotada mostrou-se eficaz na análise tática, possibilitando a identificação de padrões de passes, jogadores-chave e estratégias coletivas nas partidas entre Real Madrid e Borussia Dortmund na UEFA Champions League 2023/24.

Comparado a outros modelos mencionados ao longo deste estudo, como os baseados em Processos de Decisão de Markov (MDPs) e a análise por zonas do campo, o modelo proposto, centrado na interação entre jogadores, oferece simplicidade e clareza na interpretação das probabilidades de transição. No entanto, reconhece-se que a inclusão de estados definidos por setores do campo, como aplicado em alguns estudos prévios, poderia refinar a análise ao capturar nuances espaciais do jogo. Essa modificação permitiria identificar com maior precisão as áreas de maior concentração de passes e os padrões de movimentação associados a diferentes zonas, oferecendo análises ainda mais robustas sobre a organização tática das equipes.

Além disso, os modelos baseados em MDPs apresentam uma vantagem na capacidade de simular cenários de decisão em tempo real, incorporando variáveis como riscos e recompensas. No entanto, essa abordagem exige maior complexidade computacional e dados mais detalhados, o que pode limitar sua aplicabilidade em situações práticas. Já a utilização de divisões do campo em zonas mostrou-se útil na análise de estratégias ofensivas e defensivas, mas pode não capturar a interação direta entre jogadores com a mesma granularidade do modelo aqui proposto.

Conclui-se que o modelo baseado em cadeias de Markov com estados definidos pelos jogadores representa uma solução eficiente e acessível para a análise tática no futebol. Entretanto, aprimoramentos futuros poderiam incluir uma combinação das abordagens analisadas, como a introdução de estados relacionados às posições no campo e a integração de variáveis contextuais, como condições climáticas e adversidades durante a partida.

O presente trabalho contribui, assim, para a ampliação do uso de métodos matemáticos na análise esportiva, evidenciando o potencial das cadeias de Markov para capturar a complexidade do futebol e gerar informações relevantes para analistas, treinadores e equipes. A exploração de modelos mais sofisticados, baseados em dados contextuais e espaciais, constitui uma direção promissora para investigações futuras.

## APÊNDICE A

### A.1 Tabelas das Distribuições Estacionárias

#### A.1.1 Jogos do Real Madrid

Jogador	Probabilidade
Lucas Vazquez	0.104
Eduardo Camavinga	0.103
Luka Modric	0.099
David Alaba	0.095
Jude Bellingham	0.095
Aurelien Tchouameni	0.094
Nacho Fernandez	0.088
Antonio Rudiger	0.082
Rodrygo	0.071
Toni Kroos	0.046
Federico Valverde	0.037
Joselu	0.031
Kepa Arrizabalaga	0.027
Brahim Diaz	0.015
Fran Garcia	0.014

Tabela 5: Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 1 do Real Madrid

Jogador	Probabilidade
Aurelien Tchouameni	0.137
Jude Bellingham	0.125
Toni Kroos	0.097
Federico Valverde	0.088
Vinicius Junior	0.085
Dani Carvajal	0.084
Nacho Fernandez	0.073
Antonio Rudiger	0.072
Eduardo Camavinga	0.071
Rodrygo	0.045
Luka Modric	0.042
Ferland Mendy	0.037
Kepa Arrizabalaga	0.037
Dani Ceballos	0.005
Joselu	0.002

Tabela 6: Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 2 do Real Madrid

<b>Jogador</b>	<b>Probabilidade</b>
Luka Modric	0.13
Eduardo Camavinga	0.129
Antonio Rudiger	0.111
Nacho Fernandez	0.11
Jude Bellingham	0.108
Fran Garcia	0.106
Federico Valverde	0.081
Vinicius Junior	0.079
Dani Carvajal	0.065
Kepa Arrizabalaga	0.037
Rodrygo	0.031
Aurelien Tchouameni	0.008
Ferland Mendy	0.004

Tabela 7: Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 3 do Real Madrid

<b>Jogador</b>	<b>Probabilidade</b>
Toni Kroos	0.153
Federico Valverde	0.1
Ferland Mendy	0.098
Eduardo Camavinga	0.094
Brahim Diaz	0.087
Antonio Rudiger	0.085
Nacho Fernandez	0.082
Vinicius Junior	0.075
Rodrygo	0.072
Lucas Vazquez	0.065
Luka Modric	0.026
Dani Carvajal	0.02
Andriy Lunin	0.017
Nicolas Paz	0.013
Fran Garcia	0.008
Kepa Arrizabalaga	0.003
Joselu	0.001

Tabela 8: Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 4 do Real Madrid

<b>Jogador</b>	<b>Probabilidade</b>
Toni Kroos	0.177
Jude Bellingham	0.136
Federico Valverde	0.133
Antonio Rudiger	0.089
Ferland Mendy	0.084
David Alaba	0.081
Rodrygo	0.067
Dani Ceballos	0.059
Dani Carvajal	0.057
Brahim Diaz	0.048
Nicolas Paz	0.029
Joselu	0.018
Andriy Lunin	0.015
Nacho Fernandez	0.004
Lucas Vazquez	0.002

Tabela 9: Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 5 do Real Madrid

<b>Jogador</b>	<b>Probabilidade</b>
Luka Modric	0.132
Jude Bellingham	0.11
Lucas Vazquez	0.11
Dani Ceballos	0.105
Fran Garcia	0.101
Nacho Fernandez	0.092
David Alaba	0.087
Rodrygo	0.072
Toni Kroos	0.056
Federico Valverde	0.052
Joselu	0.029
Kepa Arrizabalaga	0.028
Antonio Rudiger	0.012
Brahim Diaz	0.007
Nicolas Paz	0.006

Tabela 10: Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 6 do Real Madrid

<b>Jogador</b>	<b>Probabilidade</b>
Eduardo Camavinga	0.14
Toni Kroos	0.138
Ferland Mendy	0.116
Federico Valverde	0.1
Vinicius Junior	0.095
Dani Carvajal	0.088
Brahim Diaz	0.081
Rodrygo	0.075
Aurelien Tchouameni	0.067
Nacho Fernandez	0.059
Andriy Lunin	0.026
Joselu	0.008
Lucas Vazquez	0.008

Tabela 11: Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 7 do Real Madrid

<b>Jogador</b>	<b>Probabilidade</b>
Toni Kroos	0.125
Aurelien Tchouameni	0.12
Dani Carvajal	0.104
Federico Valverde	0.1
Jude Bellingham	0.098
Nacho Fernandez	0.097
Vinicius Junior	0.087
Antonio Rudiger	0.079
Ferland Mendy	0.064
Eduardo Camavinga	0.05
Andriy Lunin	0.026
Luka Modric	0.026
Rodrygo	0.02
Joselu	0.002

Tabela 12: Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 8 do Real Madrid

<b>Jogador</b>	<b>Probabilidade</b>
Aurelien Tchouameni	0.147
Toni Kroos	0.128
Antonio Rudiger	0.107
Eduardo Camavinga	0.106
Vinicius Junior	0.089
Jude Bellingham	0.076
Andriy Lunin	0.066
Rodrygo	0.064
Luka Modric	0.054
Dani Carvajal	0.052
Federico Valverde	0.048
Ferland Mendy	0.047
Brahim Diaz	0.015
Joselu	0.003

Tabela 13: Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 9 do Real Madrid

<b>Jogador</b>	<b>Probabilidade</b>
Antonio Rudiger	0.13
Ferland Mendy	0.097
Toni Kroos	0.097
Eduardo Camavinga	0.095
Federico Valverde	0.088
Nacho Fernandez	0.088
Andriy Lunin	0.086
Jude Bellingham	0.086
Dani Carvajal	0.08
Rodrygo	0.075
Vinicius Junior	0.063
Luka Modric	0.01
Brahim Diaz	0.006

Tabela 14: Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 10 do Real Madrid

<b>Jogador</b>	<b>Probabilidade</b>
Toni Kroos	0.164
Jude Bellingham	0.109
Lucas Vazquez	0.107
Aurelien Tchouameni	0.095
Federico Valverde	0.095
Vinicius Junior	0.085
Antonio Rudiger	0.065
Ferland Mendy	0.065
Rodrygo	0.062
Nacho Fernandez	0.061
Eduardo Camavinga	0.024
Andriy Lunin	0.022
Brahim Diaz	0.019
Luka Modric	0.013
Joselu	0.012

Tabela 15: Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 11 do Real Madrid

<b>Jogador</b>	<b>Probabilidade</b>
Toni Kroos	0.154
Jude Bellingham	0.115
Nacho Fernandez	0.105
Antonio Rudiger	0.096
Ferland Mendy	0.08
Vinicius Junior	0.075
Dani Carvajal	0.067
Federico Valverde	0.067
Aurelien Tchouameni	0.065
Rodrygo	0.058
Luka Modric	0.039
Eduardo Camavinga	0.038
Andriy Lunin	0.027
Brahim Diaz	0.01
Joselu	0.003

Tabela 16: Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 12 do Real Madrid

<b>Jogador</b>	<b>Probabilidade</b>
Toni Kroos	0.159
Antonio Rudiger	0.127
Eduardo Camavinga	0.114
Federico Valverde	0.102
Ferland Mendy	0.098
Nacho Fernandez	0.094
Dani Carvajal	0.087
Jude Bellingham	0.078
Vinicius Junior	0.071
Rodrygo	0.031
Thibaut Courtois	0.027
Luka Modric	0.009
Joselu	0.003

Tabela 17: Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 13 do Real Madrid

### A.1.2 Jogos do Borussia Dortmund

Jogador	Probabilidade
Nico Schlotterbeck	0.131
Felix Nmecha	0.103
Mats Hummels	0.095
Julian Ryerson	0.082
Julian Brandt	0.081
Emre Can	0.073
Niklas Sule	0.063
Marco Reus	0.062
Karim Adeyemi	0.06
Marius Wolf	0.056
Niclas Fullkrug	0.048
Gregor Kobel	0.038
Ramy Bensebaini	0.037
Jamie Bynoe-Gittens	0.036
Donyell Malen	0.035

Tabela 18: Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 1 do Borussia Dortmund

Jogador	Probabilidade
Ramy Bensebaini	0.134
Salih Ozcan	0.113
Nico Schlotterbeck	0.102
Emre Can	0.1
Julian Ryerson	0.094
Mats Hummels	0.089
Donyell Malen	0.085
Julian Brandt	0.071
Gregor Kobel	0.068
Niclas Fullkrug	0.034
Jamie Bynoe-Gittens	0.031
Karim Adeyemi	0.028
Marco Reus	0.028
Felix Nmecha	0.019
Yousoufa Moukoko	0.004

Tabela 19: Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 2 do Borussia Dortmund

<b>Jogador</b>	<b>Probabilidade</b>
Nico Schlotterbeck	0.124
Donyell Malen	0.113
Felix Nmecha	0.095
Marco Reus	0.093
Marius Wolf	0.086
Marcel Sabitzer	0.076
Mats Hummels	0.074
Ramy Bensebaini	0.067
Salih Ozcan	0.061
Niclas Fullkrug	0.058
Emre Can	0.057
Gregor Kobel	0.042
Karim Adeyemi	0.027
Giovanni Reyna	0.016
Sebastien Haller	0.01

Tabela 20: Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 3 do Borussia Dortmund

<b>Jogador</b>	<b>Probabilidade</b>
Nico Schlotterbeck	0.14
Mats Hummels	0.132
Julian Brandt	0.116
Julian Ryerson	0.105
Marcel Sabitzer	0.086
Felix Nmecha	0.08
Niklas Sule	0.077
Karim Adeyemi	0.074
Salih Ozcan	0.073
Gregor Kobel	0.065
Niclas Fullkrug	0.035
Marco Reus	0.015

Tabela 21: Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 4 do Borussia Dortmund

<b>Jogador</b>	<b>Probabilidade</b>
Julian Ryerson	0.123
Mats Hummels	0.111
Ramy Bensebaini	0.098
Nico Schlotterbeck	0.09
Emre Can	0.085
Marcel Sabitzer	0.081
Niclas Fullkrug	0.066
Marco Reus	0.064
Gregor Kobel	0.061
Donyell Malen	0.056
Karim Adeyemi	0.045
Jamie Bynoe-Gittens	0.04
Julian Brandt	0.034
Salih Ozcan	0.032
Marius Wolf	0.014

Tabela 22: Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 5 do Borussia Dortmund

<b>Jogador</b>	<b>Probabilidade</b>
Mats Hummels	0.133
Julian Brandt	0.132
Salih Ozcan	0.108
Gregor Kobel	0.093
Niklas Sule	0.091
Karim Adeyemi	0.089
Niclas Fullkrug	0.085
Marco Reus	0.069
Marius Wolf	0.052
Ramy Bensebaini	0.05
Jamie Bynoe-Gittens	0.048
Donyell Malen	0.019
Giovanni Reyna	0.012
Marcel Sabitzer	0.011
Nico Schlotterbeck	0.005
Sebastien Haller	0.003

Tabela 23: Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 6 do Borussia Dortmund

<b>Jogador</b>	<b>Probabilidade</b>
Emre Can	0.127
Mats Hummels	0.111
Ian Maatsen	0.102
Nico Schlotterbeck	0.102
Alexander Meyer	0.093
Julian Ryerson	0.091
Donyell Malen	0.069
Marcel Sabitzer	0.066
Jadon Sancho	0.064
Julian Brandt	0.05
Marco Reus	0.042
Niclas Fullkrug	0.026
Salih Ozcan	0.026
Yousoufa Moukoko	0.016
Marius Wolf	0.015

Tabela 24: Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 7 do Borussia Dortmund

<b>Jogador</b>	<b>Probabilidade</b>
Mats Hummels	0.127
Emre Can	0.11
Marcel Sabitzer	0.098
Salih Ozcan	0.098
Ian Maatsen	0.096
Gregor Kobel	0.078
Jadon Sancho	0.075
Donyell Malen	0.072
Niclas Fullkrug	0.069
Julian Brandt	0.068
Niklas Sule	0.063
Felix Nmecha	0.038
Karim Adeyemi	0.005
Marco Reus	0.003

Tabela 25: Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 8 do Borussia Dortmund

<b>Jogador</b>	<b>Probabilidade</b>
Nico Schlotterbeck	0.15
Mats Hummels	0.136
Ian Maatsen	0.128
Julian Ryerson	0.109
Emre Can	0.107
Jadon Sancho	0.09
Gregor Kobel	0.063
Marcel Sabitzer	0.054
Karim Adeyemi	0.045
Julian Brandt	0.042
Felix Nmecha	0.022
Niclas Fullkrug	0.016
Jamie Bynoe-Gittens	0.014
Sebastien Haller	0.011
Salih Ozcan	0.008
Marco Reus	0.005

Tabela 26: Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 9 do Borussia Dortmund

<b>Jogador</b>	<b>Probabilidade</b>
Nico Schlotterbeck	0.162
Mats Hummels	0.127
Ian Maatsen	0.126
Julian Brandt	0.117
Julian Ryerson	0.108
Emre Can	0.105
Jadon Sancho	0.087
Marcel Sabitzer	0.039
Gregor Kobel	0.038
Niclas Fullkrug	0.038
Karim Adeyemi	0.037
Jamie Bynoe-Gittens	0.009
Marco Reus	0.006
Salih Ozcan	0.002

Tabela 27: Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 10 do Borussia Dortmund

<b>Jogador</b>	<b>Probabilidade</b>
Jadon Sancho	0.14
Mats Hummels	0.123
Ian Maatsen	0.113
Julian Ryerson	0.112
Julian Brandt	0.099
Gregor Kobel	0.077
Nico Schlotterbeck	0.076
Emre Can	0.073
Karim Adeyemi	0.067
Marcel Sabitzer	0.057
Niclas Fullkrug	0.04
Yousoufa Moukoko	0.009
Marius Wolf	0.008
Marco Reus	0.006

Tabela 28: Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 11 do Borussia Dortmund

<b>Jogador</b>	<b>Probabilidade</b>
Julian Brandt	0.148
Ian Maatsen	0.137
Emre Can	0.126
Nico Schlotterbeck	0.125
Niclas Fullkrug	0.103
Julian Ryerson	0.075
Jadon Sancho	0.065
Karim Adeyemi	0.061
Marcel Sabitzer	0.042
Gregor Kobel	0.041
Mats Hummels	0.041
Marco Reus	0.037

Tabela 29: Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 12 do Borussia Dortmund

<b>Jogador</b>	<b>Probabilidade</b>
Nico Schlotterbeck	0.174
Emre Can	0.131
Mats Hummels	0.114
Julian Brandt	0.098
Julian Ryerson	0.094
Jadon Sancho	0.076
Marcel Sabitzer	0.072
Ian Maatsen	0.066
Gregor Kobel	0.063
Niclas Fullkrug	0.045
Karim Adeyemi	0.024
Donyell Malen	0.013
Jamie Bynoe-Gittens	0.01
Marco Reus	0.01
Sebastien Haller	0.01

Tabela 30: Estado estacionário, em ordem decrescente, da matriz de transição do jogo 13 do Borussia Dortmund

## APÊNDICE B

### B.1 Gráficos das Distribuições Estacionárias

#### B.1.1 Jogos do Real Madrid

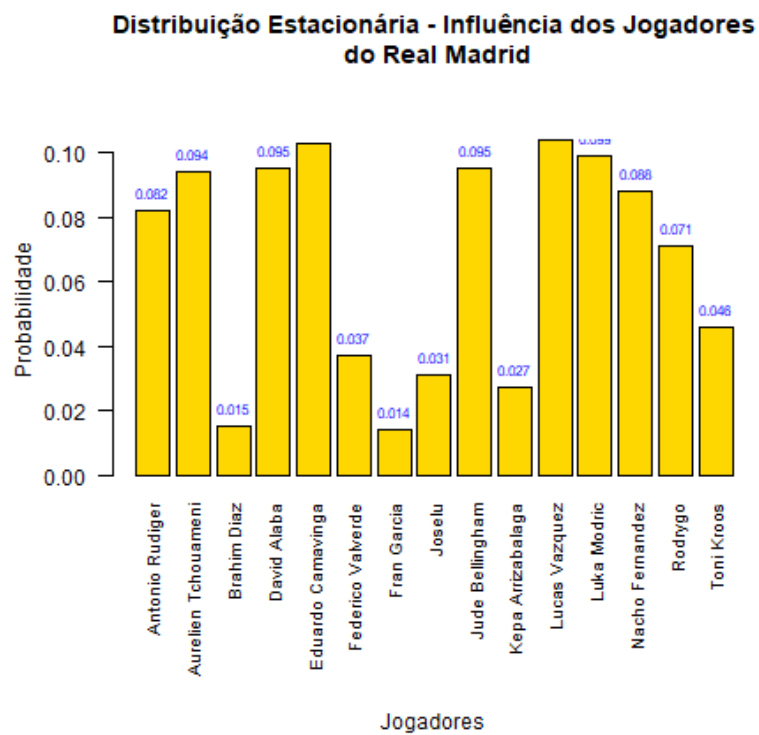


Figura 31: Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 1 do Real Madrid

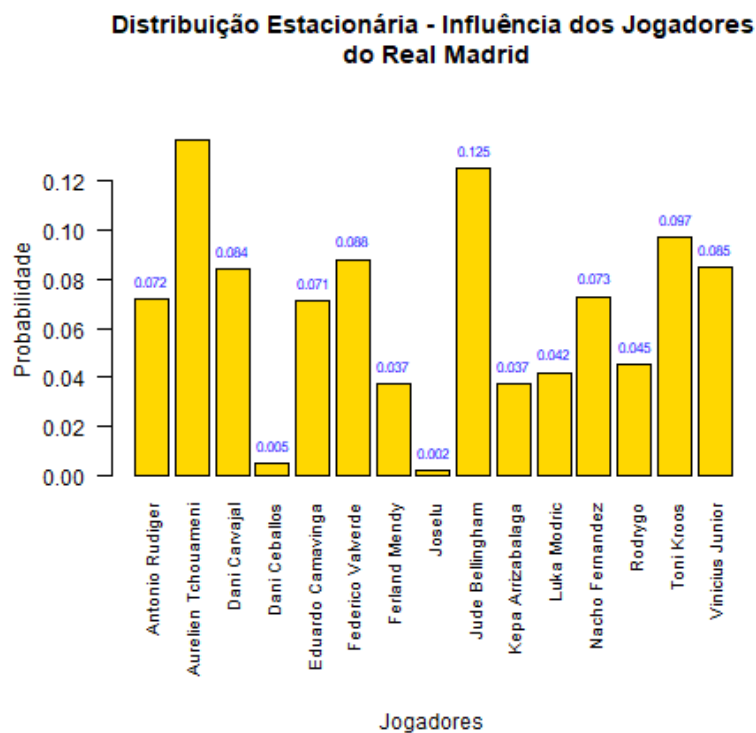


Figura 32: Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 2 do Real Madrid

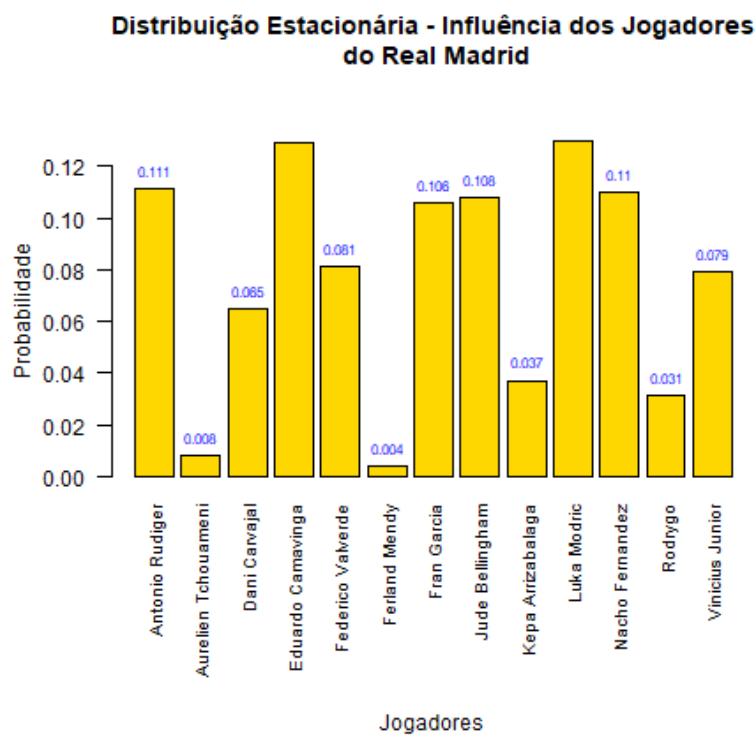


Figura 33: Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 3 do Real Madrid

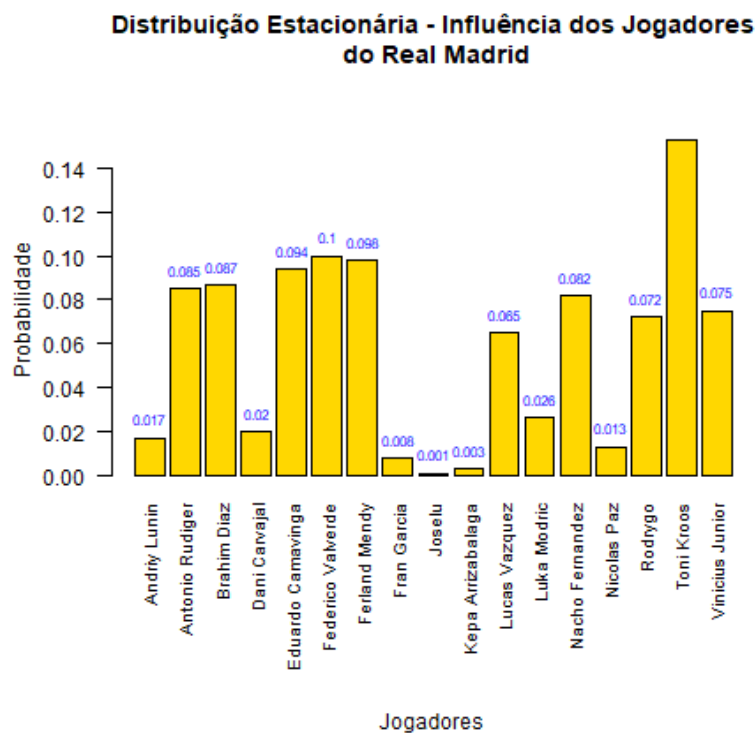


Figura 34: Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 4 do Real Madrid

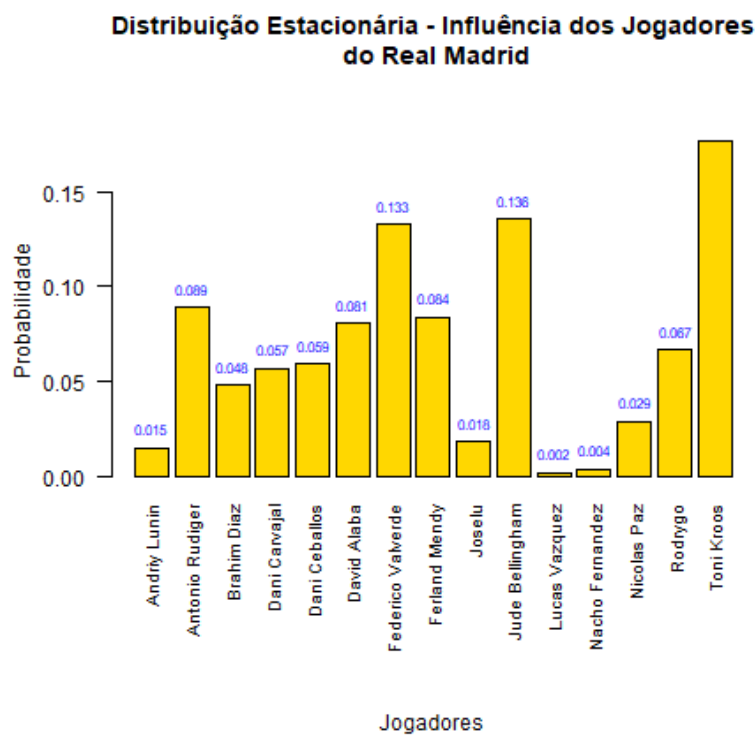


Figura 35: Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 5 do Real Madrid

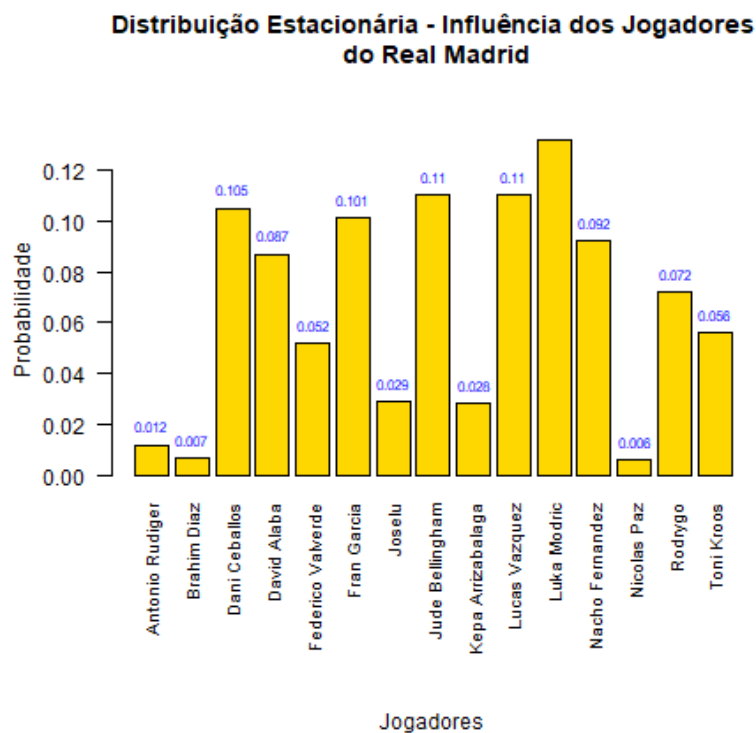


Figura 36: Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 6 do Real Madrid

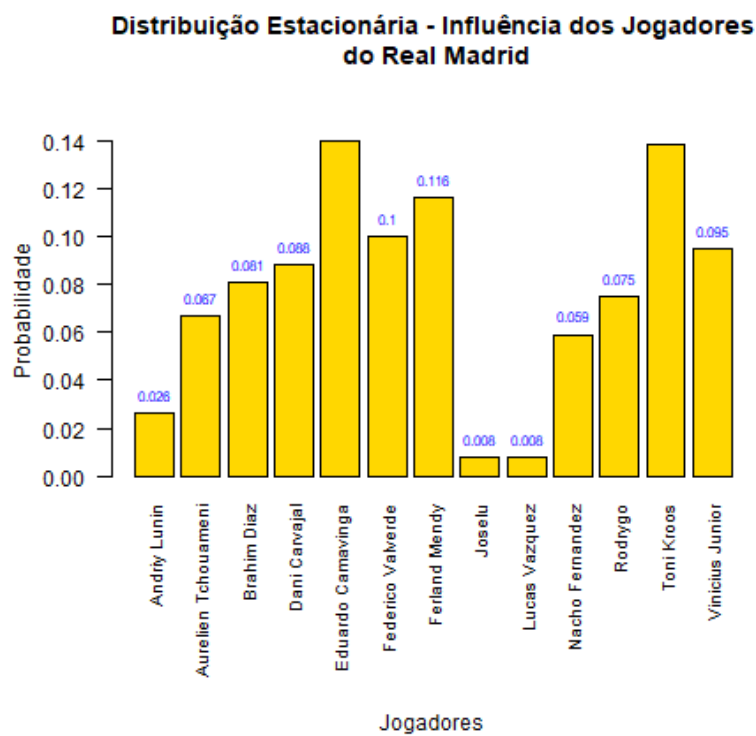


Figura 37: Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 7 do Real Madrid

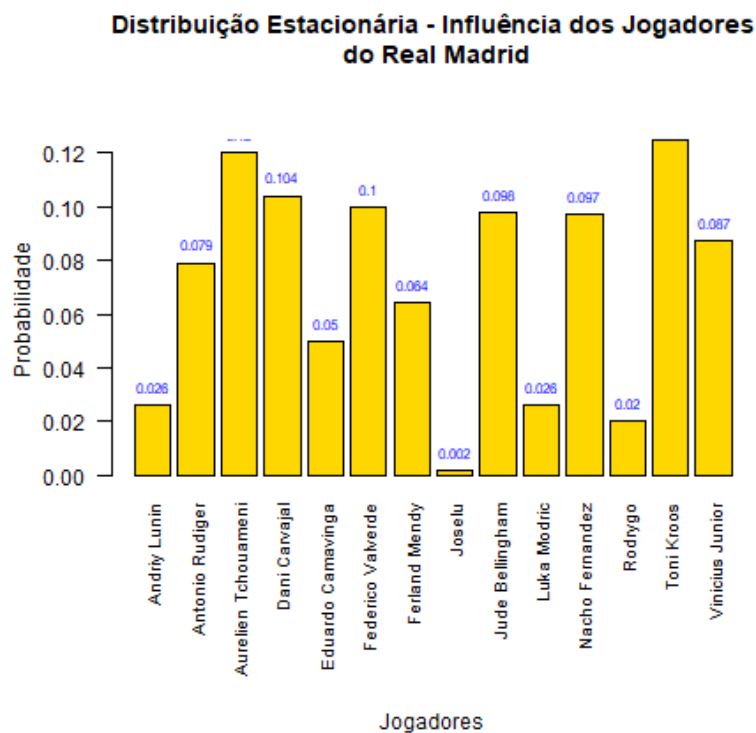


Figura 38: Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 8 do Real Madrid

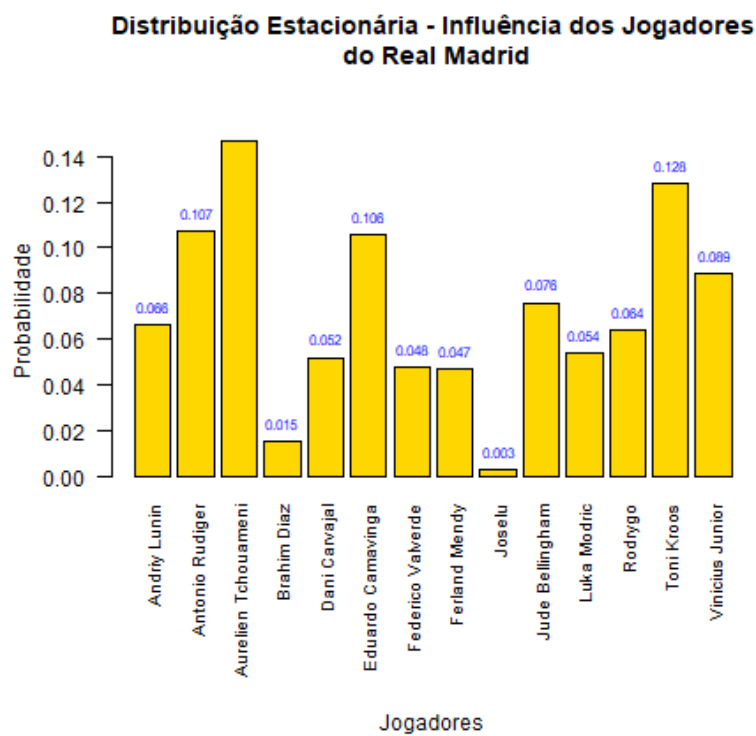


Figura 39: Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 9 do Real Madrid

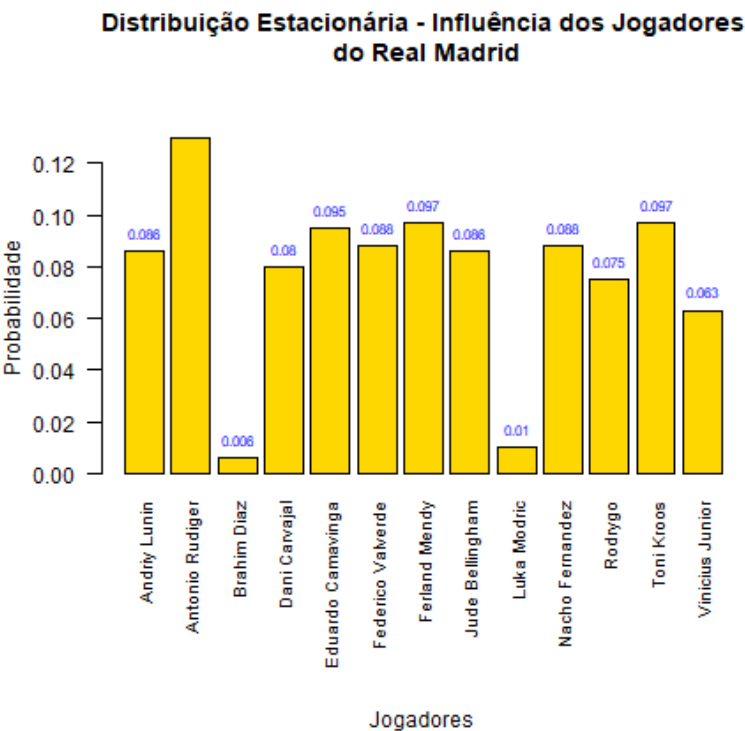


Figura 40: Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 10 do Real Madrid

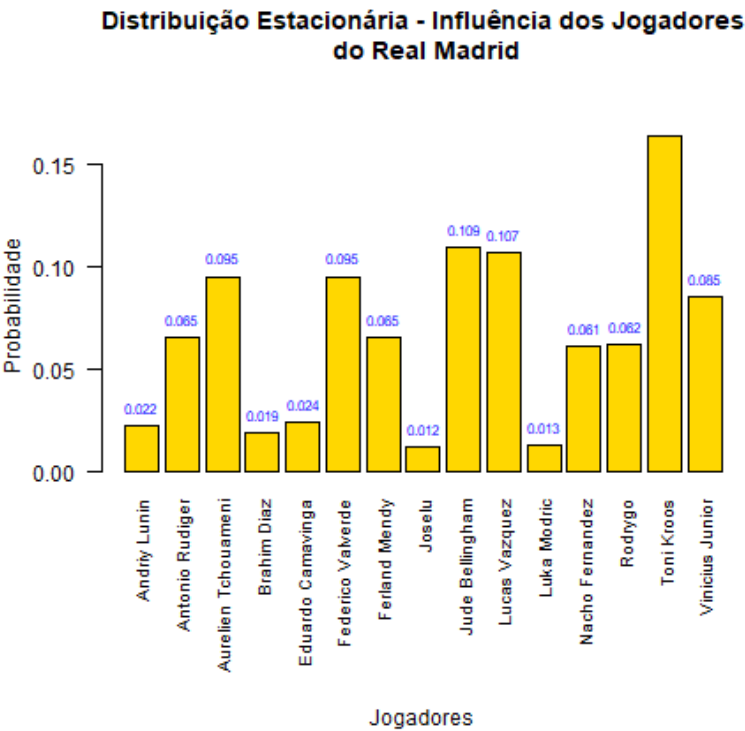


Figura 41: Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 11 do Real Madrid

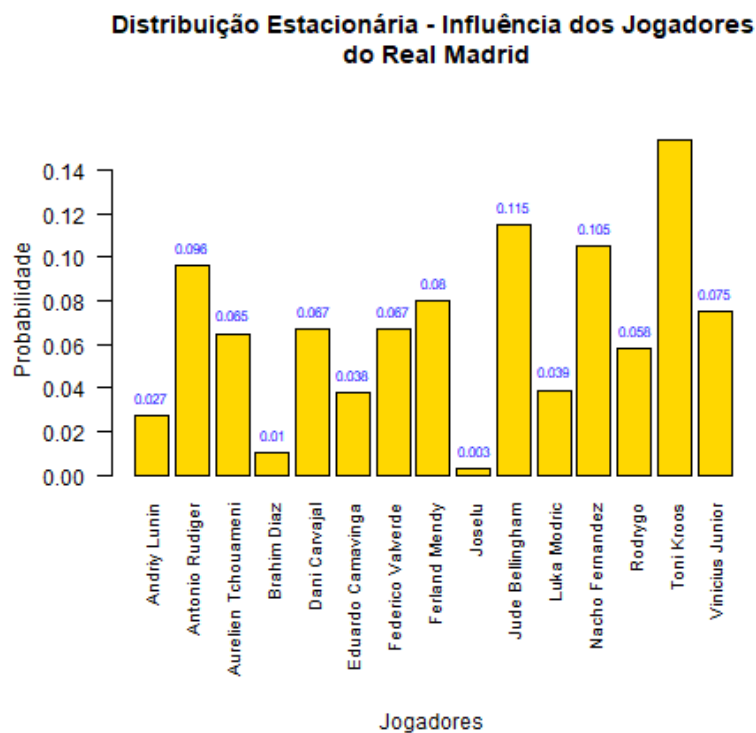


Figura 42: Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 12 do Real Madrid

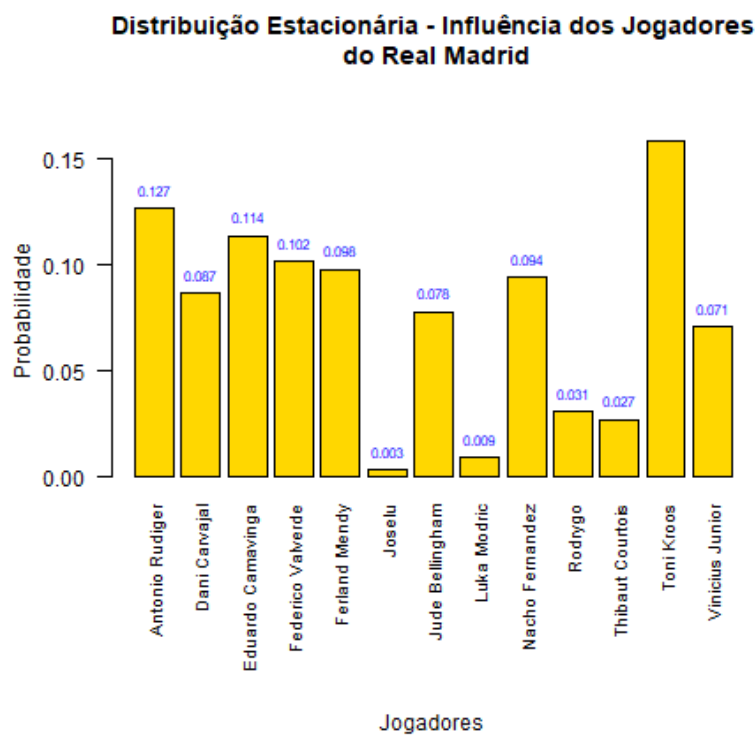


Figura 43: Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 13 do Real Madrid

### B.1.2 Jogos do Borussia Dortmund

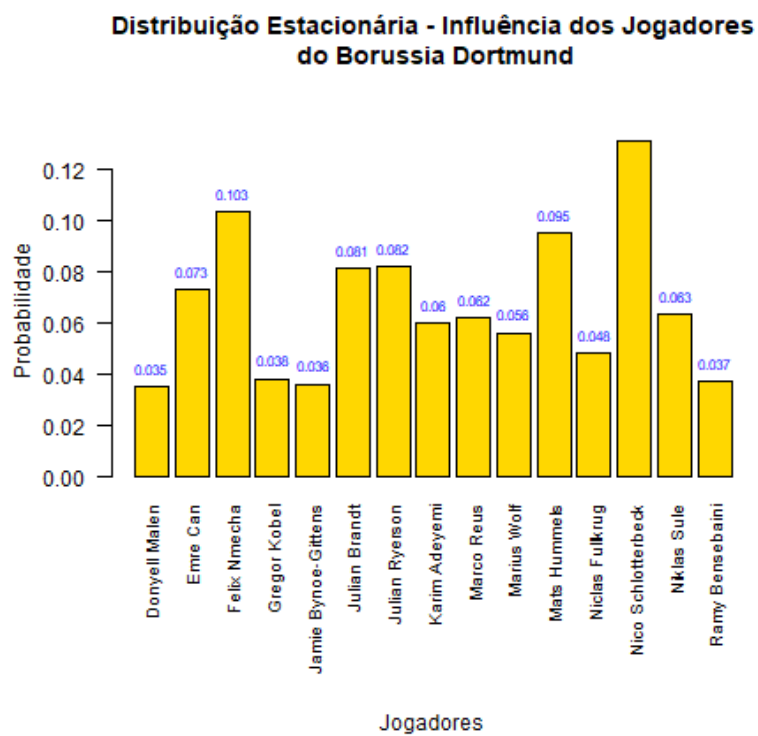


Figura 44: Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 1 do Borussia Dortmund

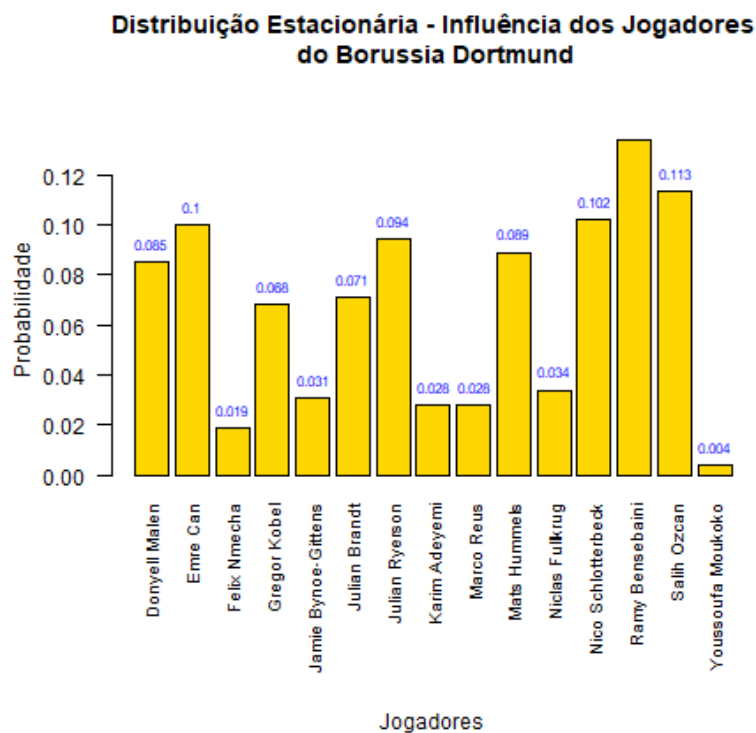


Figura 45: Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 2 do Borussia Dortmund

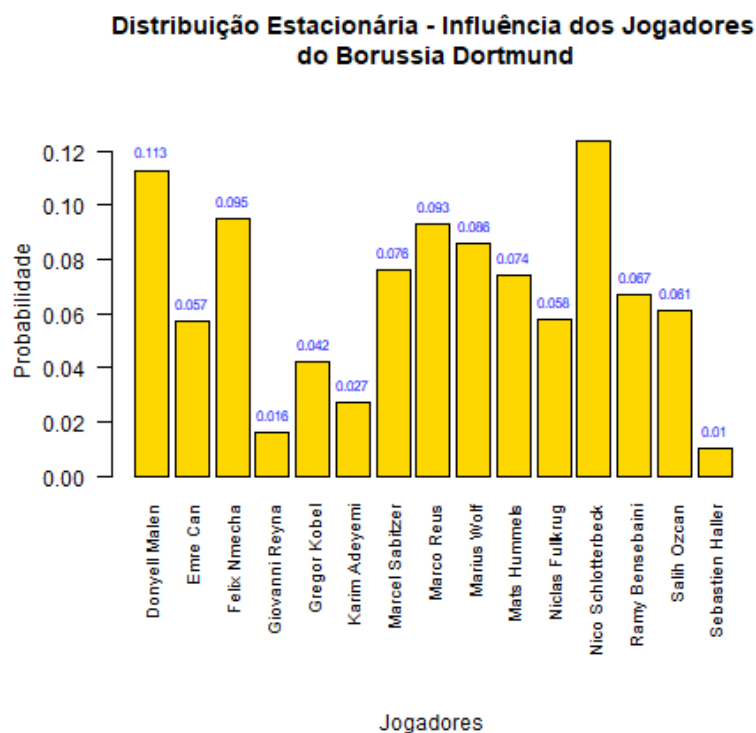


Figura 46: Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 3 do Borussia Dortmund

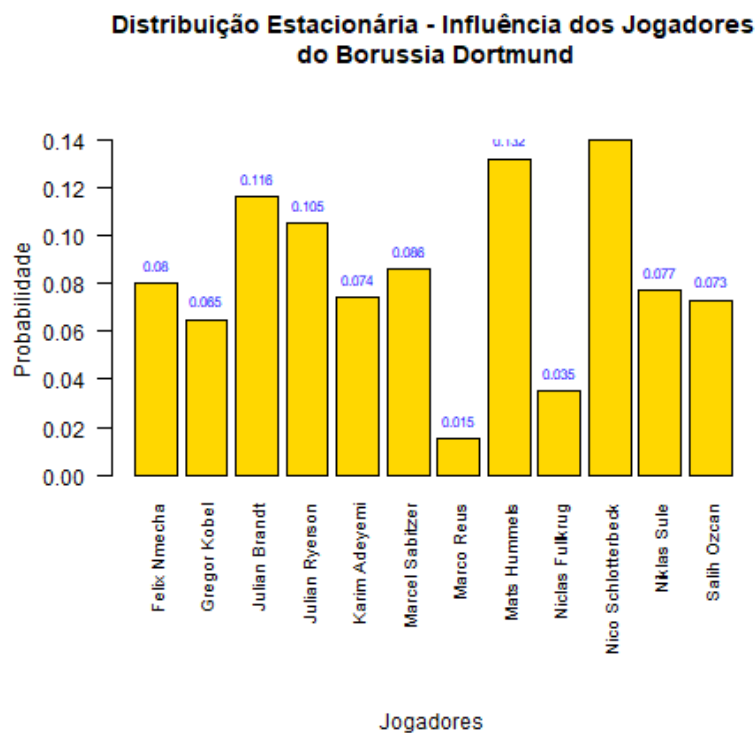


Figura 47: Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 4 do Borussia Dortmund

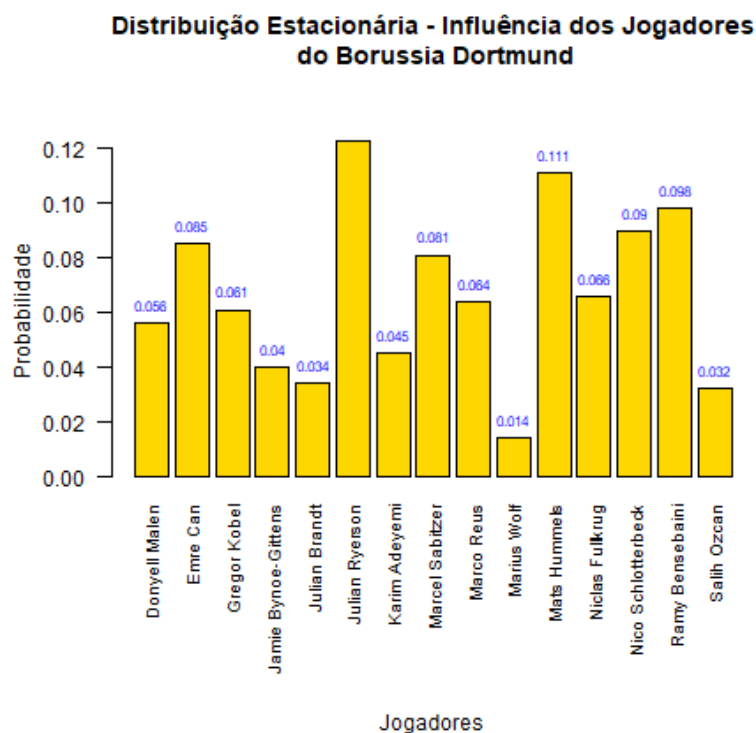


Figura 48: Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 5 do Borussia Dortmund

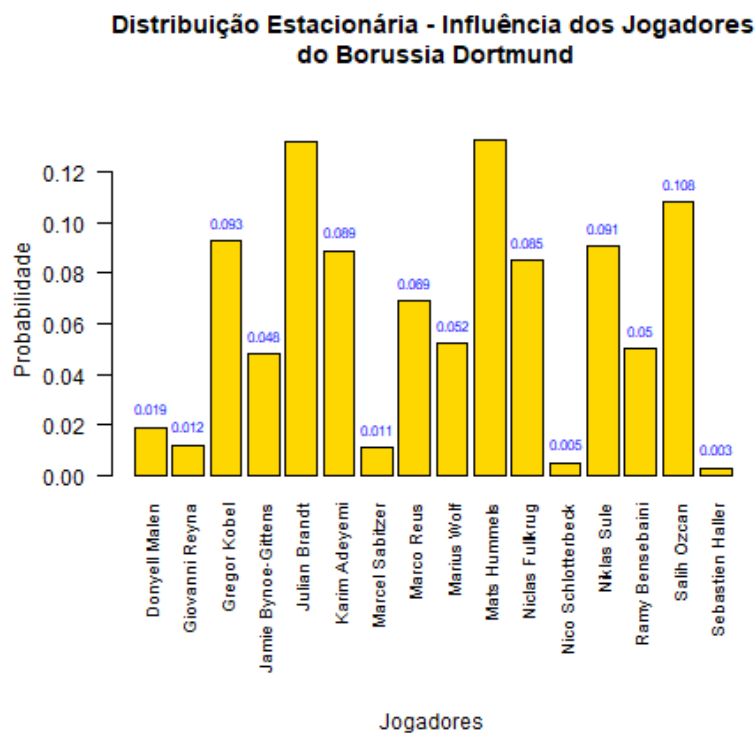


Figura 49: Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 6 do Borussia Dortmund

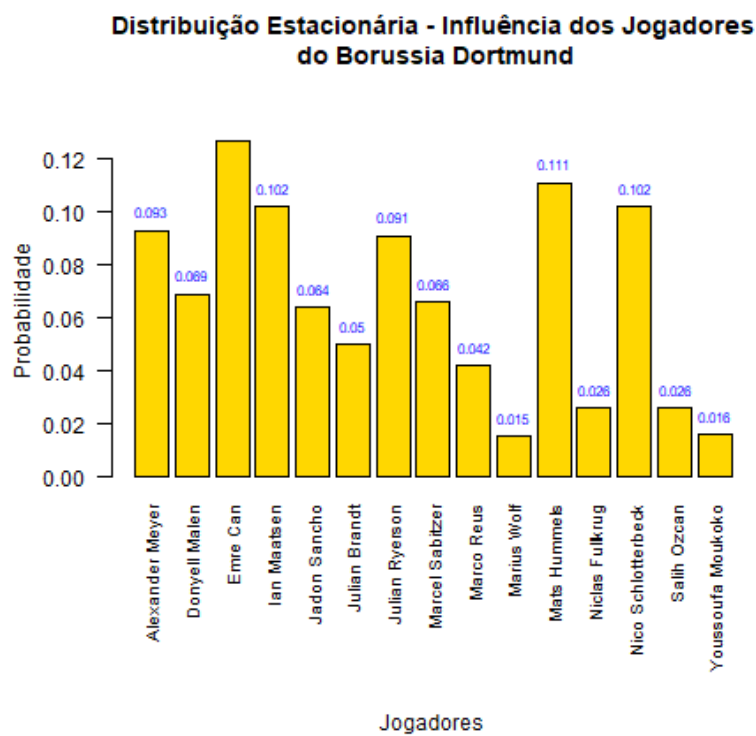


Figura 50: Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 7 do Borussia Dortmund

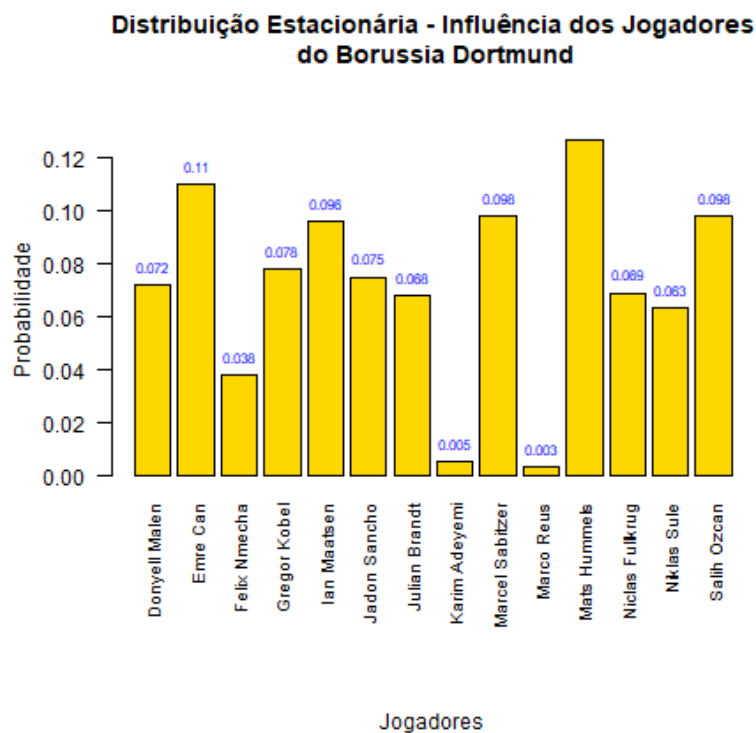


Figura 51: Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 8 do Borussia Dortmund

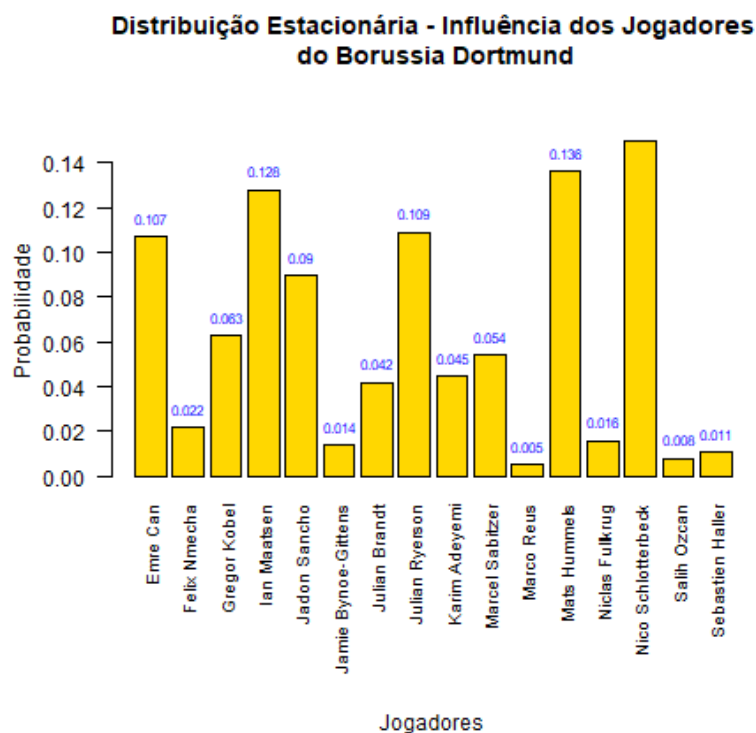


Figura 52: Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 9 do Borussia Dortmund

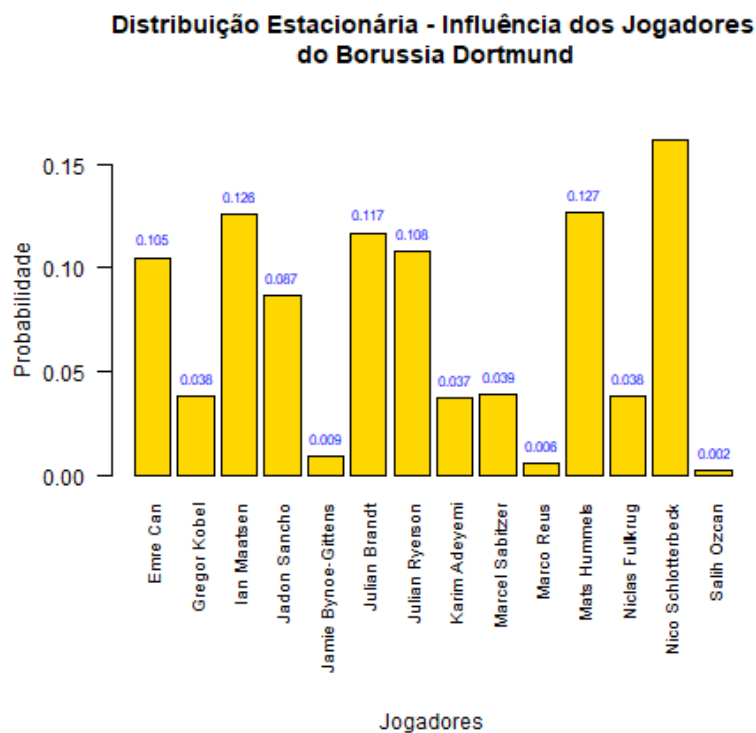


Figura 53: Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 10 do Borussia Dortmund

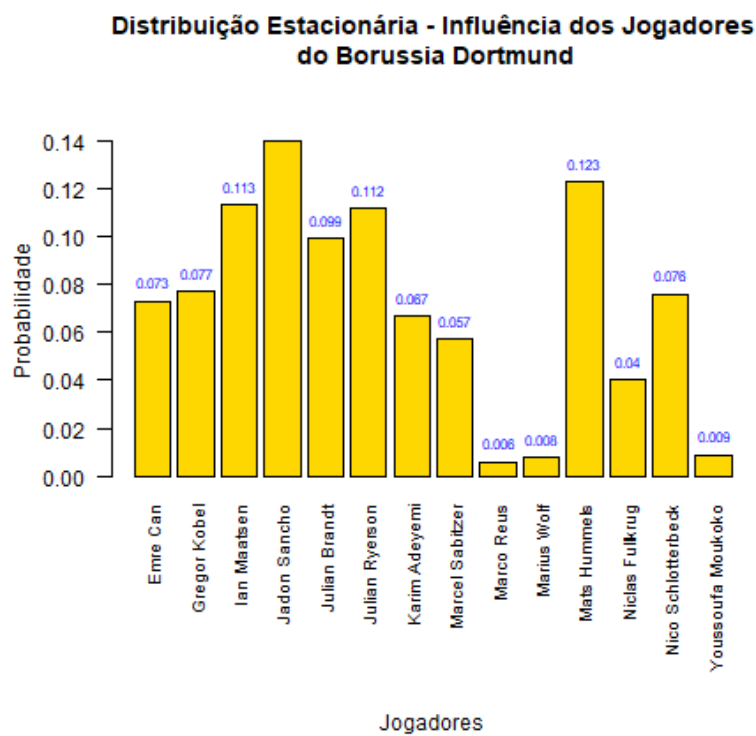


Figura 54: Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 11 do Borussia Dortmund

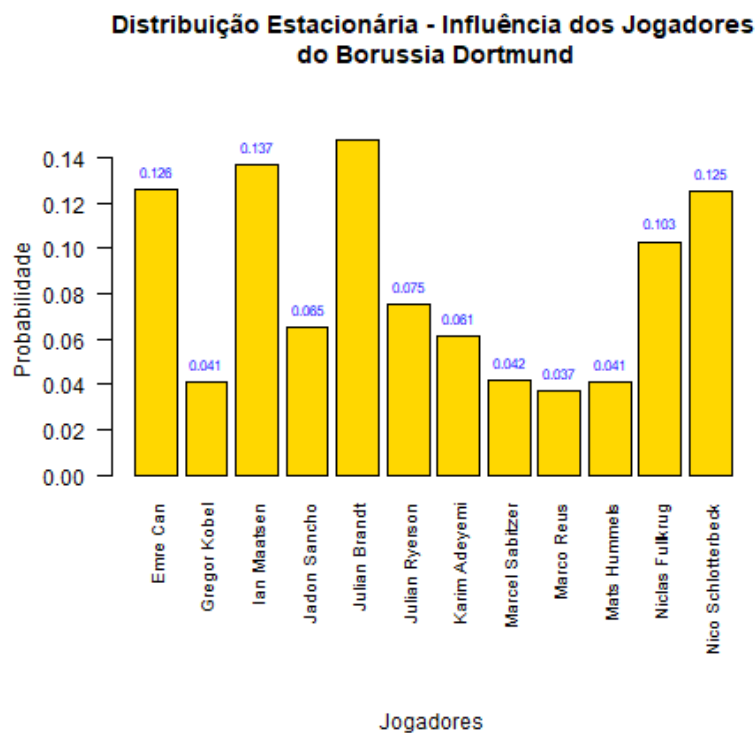


Figura 55: Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 12 do Borussia Dortmund

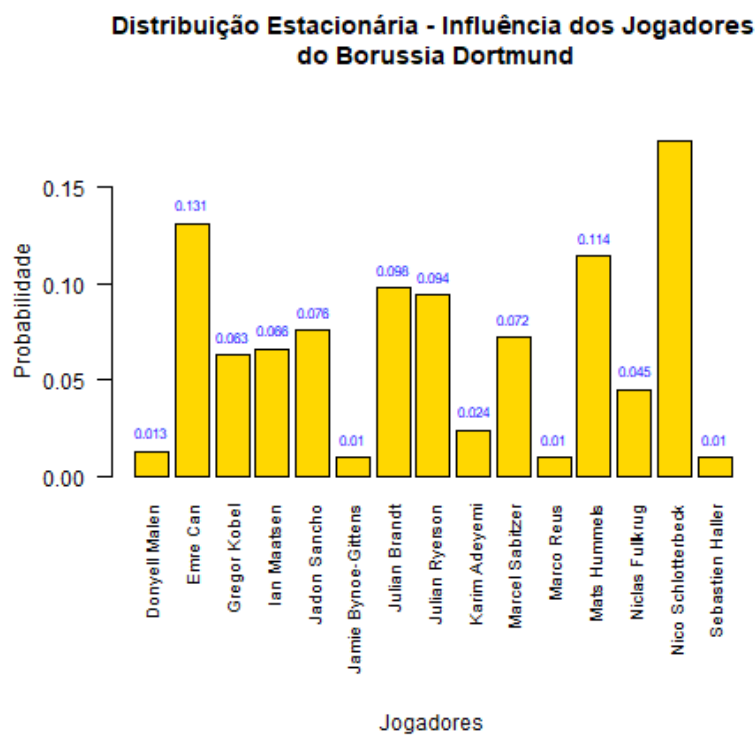


Figura 56: Gráfico da Distribuição Estacionária do Jogo 13 do Borussia Dortmund

# APÊNDICE C

## C.1 Comparação das Abordagens

A tabela abaixo compara diferentes abordagens para modelagem de passes no futebol:

Método	Memória?	Captura padrões complexos?	Exemplo de uso no futebol
Cadeia de Markov	Não	Simples	Modelar passes entre jogadores
HMMs (Modelos Ocultos de Markov)	Sim (indiretamente)	Sim (estados ocultos)	Identificar momentos de posse, contra-ataque, bola parada
RNNs	Sim	Simples a médio	Prever o próximo passe com base no histórico
LSTMs (Long Short-Term Memory)	Sim (melhor que RNNs)	Melhor que RNNs	Modelar jogadas inteiras, prever comportamentos táticos
Transformers	Sim (melhor de todos)	Mais avançado	Análise preditiva completa do jogo

Tabela 31: Comparação entre diferentes abordagens para modelagem de passes no futebol.

## REFERÊNCIAS

- ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações-10**. [S.l.]: Bookman Editora, 2012.
- ARAÚJO, D.; DAVIDS, K.; HRISTOVSKI, R. The ecological dynamics of decision making in sport. **Psychology of sport and exercise**, Elsevier, v. 7, n. 6, p. 653–676, 2006.
- CARLING, C.; BLOOMFIELD, J.; NELSEN, L.; REILLY, T. The role of motion analysis in elite soccer: contemporary performance measurement techniques and work rate data. **Sports medicine**, Springer, v. 38, p. 839–862, 2008.
- CARLING, C.; WILLIAMS, A. M.; REILLY, T. **Handbook of soccer match analysis: A systematic approach to improving performance**. [S.l.]: Routledge, 2007.
- CECCONELLO, M. S.; OLIVEIRA, G. A. de. O futebol como uma cadeia de markov. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 7, n. 1, 2020.
- FILHO, L. H. B. **Aplicação de Cadeias de Markov no Mercado Financeiro com o R**. 2022. Publicado em: 13 dez. 2022, Acesso em: 05 dez. 2024. Disponível em: <https://analisemacro.com.br/mercado-financeiro/aplicacao-de-cadeias-de-markov-no-mercado-financeiro-com-o-r/>.
- FOOTSTATS. **Footstats - Estatísticas de Futebol**. 2002. Acesso em: 09 mar. 2024. Disponível em: <https://www.footstats.com.br/#/partidas/916>.
- GAGNIUC, P. A. **Markov chains: from theory to implementation and experimentation**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2017.
- GARGANTA, J. A análise da performance nos jogos desportivos. revisão acerca da análise do jogo. **Revista portuguesa de ciências do desporto**, Porto, v. 1, n. 1, p. 57–64, 2001.
- \_\_\_\_\_. Trends of tactical performance analysis in team sports: bridging the gap between research, training and competition. **Revista Portuguesa de Ciências do desporto**, v. 9, n. 1, 2009.
- GRIMMETT, G.; STIRZAKER, D. **Probability and random processes**. [S.l.]: Oxford university press, 2020.
- KIM, K.; CHA, S. Soccer analysis based on markov chain and pca. In: IEEE. **2022 IEEE International Conference on Big Data (Big Data)**. [S.l.], 2022. p. 6708–6710.
- LIU, T.; ZHOU, C.; SHUAI, X.; ZHANG, L.; ZHOU, J.; YANG, L. Influence of different playing styles among the top three teams on action zones in the world cup in 2018 using a markov state transition matrix. **Frontiers in Psychology**, Frontiers Media SA, v. 13, p. 1038733, 2022.

- MEDHI, J. **Stochastic processes**. [S.l.]: New Age International, 1994.
- MEMMERT, D.; RAABE, D. **Data analytics in football: Positional data collection, modelling and analysis**. [S.l.]: Routledge, 2018.
- MEYN, S. P.; TWEEDIE, R. L. **Markov chains and stochastic stability**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- NETO, D. R. **GitHub - davidrodneto**. 2024. Acesso em: 12 nov. 2024. Disponível em: <https://github.com/davidrodneto>.
- ROSS, S. M. **Introduction to probability models**. [S.l.]: Academic press, 2014.
- ROY, M. V.; ROBBERECHTS, P.; YANG, W.-C.; RAEDT, L. D.; DAVIS, J. Learning a markov model for evaluating soccer decision making. In: **Reinforcement Learning for Real Life (RL4RealLife) Workshop at ICML 2021**. [S.l.: s.n.], 2021.
- \_\_\_\_\_. A markov framework for learning and reasoning about strategies in professional soccer. **Journal of Artificial Intelligence Research**, v. 77, p. 517–562, 2023.
- WOODFIELD, D. N.; FELLINGHAM, G. W. Quantifying the probability of a shot in women's collegiate soccer through absorbing markov chains. **Journal of Quantitative Analysis in Sports**, De Gruyter, v. 14, n. 3, p. 103–115, 2018.