



Universidade de São Paulo

Instituto de Física de São Carlos

Bacharelado em física - habilitação teórico-experimental

Engenharia de Floquet e dinâmica exata de sistemas quânticos de poucos níveis

Aluno: João Pedro Macedo Soares
Orientador: Victor Luiz Quito

São Carlos
2025

João Pedro Macedo Soares

Engenharia de Floquet e dinâmica exata de sistemas quânticos de poucos níveis

Trabalho de Conclusão de Curso - Monografia -
apresentado ao Instituto de Física de São Carlos
da Universidade de São Paulo para obtenção do
título de Bacharel em Física - habilitação teórico-
experimental.

Orientador: Prof. Dr. Victor Luiz Quito - Universi-
dade de São Paulo

São Carlos
2025

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

RESUMO

Este Trabalho de Conclusão de Curso disserta sobre as técnicas que englobam a Engenharia de Floquet, permitindo a resolução de problemas quânticos perturbados por potenciais periódicos. Tais potenciais alteram as características do sistema, modificando suas simetrias e introduzindo novos parâmetros, que impactam as energias e são, caracteristicamente, mais controláveis experimentalmente. A maioria dos problemas analisados envolve o acoplamento entre spin e um campo magnético externo. Diversas foram as técnicas de resolução empregadas: solução analítica exata, expansão para altas frequências e simulações numéricas, por exemplo. Nos regimes adequados, todos os resultados foram concordantes. Ademais, o trabalho adentrou o tópico da evolução temporal sobre a ótica de Floquet, que introduz o conceito de operadores estroboscópicos, $H_F[t_0]$, que descrevem como o sistema sai do ponto $t = t_0$ e como ele chega em $t = t_0 + T$ - um período T à frente. Sua obtenção continua relacionada à adoção de técnicas aproximativas, válidas sob determinados regimes. O tratamento numérico, com auxílio da decomposição de Trotter-Suzuki, permite descrever como o sistema evolui em todos os pontos temporais; em particular, os múltiplos do período. Os resultados mostram que, para frequências altas, qualquer método adotado concorda com os valores obtidos. Por fim, discutiu-se, sob a ótica dos métodos aplicados anteriormente, um modelo baseado na literatura científica [1]. O hamiltoniano em questão não descreve mais um acoplamento magnético, mas sim um supercondutor topológico de segunda ordem, que tem suas características alteradas a partir da introdução de um potencial periódico cossenoidal. Esta discussão particularmente interessa, pois, apesar do modelo ser naturalmente mais complexo que os outros analisados neste Trabalho, as mesmas técnicas de resolução são aplicáveis, o que revela a força do formalismo introduzido.

Palavras-chave: Interação luz-matéria. Mecânica quântica. Sistemas quânticos de poucos níveis.

INTRODUÇÃO

Gaston Floquet (1847 – 1920) foi um matemático francês de grande relevância em seu contexto histórico. A explosão da Guerra Franco-Prussiana (1870 – 1871), com a subsequente derrota da França, desencadeou um cenário político instável no país. Em tal momento de crise, a educação passou a ser alvo de críticas por parte da sociedade, desencadeando grandes mudanças. Desse modo, a figura de Floquet rapidamente emergiu com grande destaque. Apenas sete anos após concluir seus estudos na “École Normale Supérieure”, ele já estava encarregado do curso de matemática da “Nancy-Université”. Seus principais trabalhos ao longo da carreira centraram-se nos estudos sobre equações diferenciais ordinárias (EDOs) [2].

Dentre os artigos de Floquet, destaca-se na física aquele que discute o formato de soluções de EDOs com coeficientes periódicos [3]. Percebeu-se que, com tal arcabouço teórico, problemas descritos por hamiltonianos que obedecem $H(t) = H(t + T)$, sendo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ um período (e ω uma frequência de oscilação), têm uma solução geral $|\psi(t)\rangle = e^{-iEt} |\phi(t)\rangle$, isto é, uma fase não periódica e uma função periódica no tempo (vale que $|\phi(t)\rangle = |\phi(t + T)\rangle$). Mediante o uso de uma transformada de Fourier,

$$H_m = \frac{1}{T} \int_0^T e^{im\omega t} H(t) dt, \quad (1)$$

mostra-se que $H(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_m e^{-i\omega m t}$ (e analogamente para $|\phi(t)\rangle$).

A aplicação das transformações feitas na Equação de Schrödinger resulta em $(E_a + \hbar l \omega) |\psi_a^l\rangle = \sum_n H_{l-n} |\psi_a^n\rangle$. Com uma mínima manipulação, o sistema torna-se um problema clássico de diagonalização de matrizes:

$$E_a |\psi_a^l\rangle = \sum_n (H_{l-n} - \hbar l \omega \delta_{l,n} \mathbb{1}) |\psi_a^n\rangle \quad (2)$$

O termo entre parênteses na Equação (2) é comumente referido como “Hamiltoniano de Floquet”. Ademais,

“ E_a ” não é mais a energia do problema, mas sim uma “quasi-energia”, com o subíndice “a” sendo responsável pela diferenciação de autoestados.

A matriz H_0 é simplesmente a média temporal do hamiltoniano inicial, $H_0 = \frac{1}{T} \int_0^T H(t) dt$. Alternativamente, é possível interpretar o subíndice n como indicador de posições na “direção de Floquet”. Afinal, a Equação (2) descreve também um sistema independente do tempo composto por diversas camadas. A interação intracamada é descrita pelo termo H_0 , ao passo que os demais H_m descrevem a conexão entre níveis distintos [4].

Grande parte do interesse físico da abordagem de Floquet está na manipulação da frequência ω . O termo “ $\hbar m \omega$ ” pode ser interpretado como um campo elétrico fictício na direção de Floquet. O potencial periódico que perturba o sistema pode alterar suas simetrias, quebrando-as ou induzindo novas. O hamiltoniano resultante, ademais, passa a ser dependente de parâmetros de mais fácil controle experimental, como a amplitude da perturbação e a frequência. A ordem de grandeza desta - muito maior, muito menor ou comparável aos demais parâmetros do problema - motiva diferentes abordagens e conclusões.

A pesquisa desenvolvida centrou-se principalmente no estudo do acoplamento de um campo magnético externo com o spin em sistemas de poucos níveis, o que desencadeia um alto impacto dos aspectos quânticos. O hamiltoniano analisado é descrito genericamente por

$$H(t) = \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{S}, \quad (3)$$

sendo μ_B o magneton de Bohr, $\hbar$ a constante de Planck reduzida, $\mathbf{B}(t)$ um campo magnético e $\mathbf{S}$ o operador de spin $(2s + 1)$ -dimensional. Por simplicidade, as constantes fundamentais μ_B e $\hbar$ passarão a ser suprimidas.

Foram estudados perfis clássicos de polarização eletromagnética: circular,

$$\mathbf{B} = (B_p \cos \omega t, B_p \sin \omega t, B_z); \quad (4)$$

linear (sendo α o ângulo traçado entre a polarização e o eixo x),

$$\mathbf{B} = (B_p \cos \omega t \cos \alpha, B_p \cos \omega t \sin \alpha, B_z); \quad (5)$$

e genérico (ϵ é uma fase e N é um parâmetro que pode ser interpretado como um amplificador da velocidade da frequência em y),

$$\mathbf{B} = (B_x \sin \omega t, B_y \sin (N \omega t + \epsilon), B_z). \quad (6)$$

Cada perfil induz abordagens diferentes para seu estudo. Por exemplo, ao passo que a polarização circular apresenta solução exata, as demais se limitam à esfera aproximativa. Neste contexto, diferentes versões de teoria de perturbação mostraram-se pertinentes na análise das problemáticas [5].

O prosseguimento da pesquisa adentrou no tópico da evolução temporal [6]. A periodicidade do hamiltoniano, $H(t) = H(t + T)$, faz com que $U(t_0 + lT, t_0) = [U(t_0 + T, t_0)]^l, l \in \mathbb{Z}$. Ou seja, o hamiltoniano de Floquet, $H_F[t_0]$, é capaz de descrever como o sistema evolui em unidades do período. Da definição usual do operador de evolução temporal, decorre que

$$U(t_0 + T, t_0) = e^{-iH_F[t_0]T}. \quad (7)$$

Por fim, é importante mencionar que, apesar de se limitar a poucos níveis, a teoria desenvolvida independe do spin do problema. Isto é, o aparato desenvolvido é válido para valores de $s = 1/2, 1, 3/2$, etc., sendo este apenas um parâmetro nas equações. Esta característica se revela útil, pois possibilita a simulação de sistemas mais complexos a partir desta abordagem; por exemplo, variados graus de liberdade, provenientes de diversas razões, podem ser resumidos ao número quântico de spin. Tal metodologia consiste na base daquilo que é explorado em sistemas mais complexos, vide, por exemplo, as Referências [1, 7]. Em particular, a Referência [1] foi analisada mais a fundo neste trabalho.

REALIZAÇÕES

A seção seguinte disserta sobre o arcabouço teórico de cada problema analisado em específico e, de maneira conectada, apresenta os resultados obtidos no trabalho.

Primeiramente, o cenário da polarização circular é discutido. Este caso foi solucionado de quatro maneiras diferentes: via diagonalização da matriz de Floquet, pela transformação unitária para um referencial girante, pela resolução exata dos coeficientes da função de onda, e via teoria de perturbação. Todos os quatro métodos concordaram.

Em sequência, foram analisados os perfis de polarização linear e genérico. Os dois casos possibilitam somente soluções aproximadas, porém igualmente válidas no regime adequado. O estudo focou também nos parâmetros presentes nos hamiltonianos em questão - como α e ϵ , vide Equações (5) e (6) - dissecando sua relevância física.

Por fim, abarca-se o tópico da evolução temporal, tanto mediante o formalismo de Floquet quanto numericamente, via decomposição de Trotter-Suzuki. Nesta discussão, inicialmente foi adotado o perfil de polarização $\mathbf{B} = (B_x \sin \omega t, 0, B_z)$, a fim de possibilitar a aplicação das técnicas que serão discutidas. E então, finalmente, o trabalho se estendeu para um hamiltoniano mais complexo, alvo de estudos reais na área da física de estado sólido. Não obstante, o ferramental introduzido mostra-se suficiente para conseguir resultados válidos.

Todas as imagens e códigos computacionais usados neste Trabalho foram desenvolvidos pelo autor.

Polarização circular

Abordagem de Floquet

Pela teoria de Floquet, exemplificada para um caso com spin $s = \frac{1}{2}$, considerando o hamiltoniano decorrente da Equação (4), os coeficientes de sua expansão, de acordo com (1), são dados por

$$H_m = \begin{pmatrix} B_z \delta_{m,0} & B_p \delta_{m,1} \\ B_p \delta_{m,-1} & -B_z \delta_{m,0} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Consequentemente, o hamiltoniano de Floquet adquire, sucintamente, o formato

$$H_F = \begin{matrix} \begin{matrix} \ddots & & & & \ddots \end{matrix} \\ \begin{matrix} \langle -1| \\ \langle 0| \\ \langle 1| \end{matrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} B_z + \omega & 0 \\ 0 & -B_z + \omega \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_p & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & B_p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_z & 0 \\ 0 & -B_z \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_p & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & B_p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_z - \omega & 0 \\ 0 & -B_z - \omega \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} \begin{matrix} | -1 \rangle \\ | 0 \rangle \\ | 1 \rangle \end{matrix} \\ \ddots \end{matrix} \end{matrix}. \quad (9)$$

Vê-se nitidamente que, apesar de infinita, a matriz é bloco-diagonalizada pelos seguintes elementos adjacentes:

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -B_z - 2\omega l & B_p \\ B_p & B_z - 2\omega(l+1) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Desse modo, os autovalores do problema são

$$E_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{B_p^2 + (B_z - \omega)^2} - \left(\frac{1}{2} + l \right) \omega. \quad (11)$$

Para spins maiores, a análise não é mais tão direta. Todavia, pode-se mostrar que o bloco que diagonaliza o sistema, qualquer que seja a dimensão $2s + 1$, é composto pelos estados $\{|l + i, i\rangle\}$, $-s \leq i \leq s$, $i \in \mathbb{N}$ (para spins inteiros; semi-inteiros requerem uma escolha arbitrária e irrelevante de assimetria com relação ao $i = 0$). Isto é, nos kets indicados, o primeiro número quântico é relativo ao bloco de Floquet, enquanto o outro, ao número m_s de spin. Já as quasi-energias do setor l obedecem, para spin semi-inteiro, $s_i \sqrt{B_p^2 + (B_z - \omega)^2} - (l + \frac{1}{2}) \omega$, $-s \leq s_i \leq s$, s_i sendo um semi-inteiro que salta de um em um; no caso inteiro, $s_i \sqrt{B_p^2 + (B_z - \omega)^2} - l \omega$, $-s \leq s_i \leq s$, s_i agora sendo um número inteiro (que salta de um em um). É interessante notar que, no setor $l = 0$, o de notadamente maior relevância física, há uma quasi-energia nula, independente do spin inteiro analisado.

O cálculo dos autovalores foi automatizado com o auxílio da plataforma Mathematica. Percebeu-se que o bloco que diagonaliza o problema, H_d , tem seus elementos dados por: $(H_d)_{i,i} = B_z(S_z)_{i,i} - (l + s + 1 - i)\omega$, $(H_d)_{i,i+1} = B_p(S_x)_{i,i+1}$ e $(H_d)_{i,i-1} = B_p(S_x)_{i,i-1}$ (para spins inteiros; semi-inteiros, basta substituir o “+1” nos elementos da diagonal por um $+\frac{3}{2}$).

Os resultados analíticos puderam ser confirmados a partir de simulações numéricas. Na plataforma Mathematica, foi declarada uma matriz quadrada $d \times d$, $d = 200 \times 2 + 1$. Isto é, o bloco abarca desde $l = -200$ até $l = 200$. O tamanho da matriz reflete seu truncamento e determina a precisão dos autovalores calculados.

Referencial girante

Tal qual o análogo clássico, a mudança de referencial para um que gira com frequência igual à do potencial aplicado também é capaz de eliminar a dependência temporal. Este método é totalmente complementar à abordagem de Floquet, permitindo a comparação das soluções obtidas.

Seja U o operador unitário que transforma para o referencial girante. Assim, é válido escrever $H|\psi\rangle = i\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle$ como: $U^\dagger H(UU^\dagger)|\psi\rangle = U^\dagger i\partial_t(UU^\dagger)|\psi\rangle$. Disto, decorre: $U^\dagger HU(U^\dagger|\psi\rangle) = U^\dagger i[U\partial_t(U^\dagger|\psi\rangle) + (\partial_t U)U^\dagger|\psi\rangle]$. Renomeando $U^\dagger|\psi\rangle$ para $|\Psi\rangle$, segue que: $[U^\dagger HU - iU^\dagger(\partial_t U)]|\Psi\rangle = iU^\dagger U\partial_t|\Psi\rangle = i\partial_t|\Psi\rangle$. Assim, é pertinente nomear $H_{\text{eff}} = [U^\dagger HU - iU^\dagger(\partial_t U)]$ como hamiltoniano efetivo do sistema. Logo, $H_{\text{eff}}|\Psi\rangle = i\partial_t|\Psi\rangle$.

Fica claro, portanto, que o operador que realiza a transferência de referencial requerida é o que causa uma rotação ao redor do eixo z com a mesma frequência de oscilação do campo magnético, $U(t, t_0) = \exp\{-iS_z\omega(t-t_0)\}$ [8]. A atuação de $U(t, t_0)$ nos operadores de spin resulta em $\cos(\omega(t-t_0))S_x - \sin(\omega(t-t_0))S_y$, $\sin(\omega(t-t_0))S_y + \cos(\omega(t-t_0))S_x$, S_z , respectivamente, para S_x , S_y e S_z . Desse modo,

$$H_{\text{eff}} = (B_z - \omega)S_z + B_p[S_x \cos \omega t_0 + S_y \sin \omega t_0]. \quad (12)$$

Por este método, as respostas apresentam total concordância com o caso de $l = 0$, a par de uma constante $(-\frac{\omega}{2})$. Isto é, considerando spin $1/2$, as quasi-energias são $E_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(B_z - \omega)^2 + B_p^2}$.

No entanto, esta abordagem apresenta uma latente desvantagem em decorrência de sua especificidade. Isto é, ele só é aplicável caso a frequência de oscilação seja a mesma nos dois eixos que a sofrem (em todos os exemplos aqui dados, x e y). Supondo $\omega_x \neq \omega_y$ e o operador de rotação ao redor do eixo z definido por $U(t, 0) = \exp\{-\frac{i}{\hbar} S_z \gamma t\}$, a forma mais simples em que o hamiltoniano efetivo pode ser reduzido é

$$H_{\text{eff}} = (B_z - \gamma)S_z + B_p S_x (\cos \omega_x t \cos \gamma t + \sin \omega_y t \sin \gamma t) + B_p S_y (-\cos \omega_x t \sin \gamma t + \sin \omega_y t \cos \gamma t). \quad (13)$$

Independente da escolha de γ , não há maneira de anular a dependência temporal, como no caso $\omega_x = \omega_y$. A abordagem de Floquet, sob tais condições, também perde o caráter exato da solução, porém, ainda permite a análise mediante métodos numéricos e teoria de perturbação, conforme será discutido nos outros casos de polarização.

Resolução dos coeficientes da função de onda

Por se tratar de um problema de dois níveis, a função de onda pode ser expandida como $|\psi(t)\rangle = a(t)|+\rangle + b(t)|-\rangle$, sendo $a(t)$ e $b(t)$ funções que dependem do tempo e $|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Aplicando na Equação de Schrödinger, obtém-se: $H(t)|\psi(t)\rangle = i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle$. Disto, decorre

$$(B_p S_x \cos \omega t, B_p S_y \sin \omega t, B_z S_z)(a(t)|+\rangle + b(t)|-\rangle) = i(a'(t)|+\rangle + b'(t)|-\rangle), \quad (14)$$

sendo $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ as matrizes de spin 1/2.

Expandindo nos coeficientes, duas equações são obtidas:

$$\begin{cases} \frac{B_z}{2}a + \frac{B_p}{2}e^{-i\omega t}b = ia' \\ \frac{B_p}{2}e^{i\omega t}a - \frac{B_z}{2}b = ib' \end{cases}. \quad (15)$$

Convém realizar a substituição $\alpha(t) = e^{\frac{i\omega t}{2}}a(t)$ e $\beta(t) = e^{\frac{i\omega t}{2}}b(t)$. Assim, o sistema é simplificado para

$$\begin{cases} \left(\frac{B_z}{2} - \frac{\omega}{2}\right)\alpha + \frac{B_p}{2}\beta = i\alpha' \\ \frac{B_p}{2}\alpha - \left(\frac{B_z}{2} - \frac{\omega}{2}\right)\beta = i\beta' \end{cases}. \quad (16)$$

Uma vez que agora a função de onda é expressa por $|\Psi(t)\rangle = \alpha(t)|+\rangle + \beta(t)|-\rangle$, o sistema de equações obtido permite identificar o hamiltoniano independentemente do tempo:

$$H_\alpha = B_p S_x + (B_z - \omega) S_z. \quad (17)$$

Calcula-se, portanto, trivialmente que suas autoenergias são $E_\pm = \pm\sqrt{\left(\frac{\omega}{2} - B_z\right)^2 + B_p^2}$, valor similar ao obtido pela abordagem de Floquet para $l = 0$, a par de uma constante $(-\frac{\omega}{2})$.

Teoria de perturbação

Novas análises físicas decorrem do caso em que a frequência de oscilação é muito maior que os demais parâmetros do problema. No contexto trabalhado, isto implica que $\omega \gg B_z, B_p$. Desse modo, passa a ser possível aplicar, a partir do hamiltoniano $H_{m=0}$, uma teoria de perturbação degenerada [9, 10]. Assim, o hamiltoniano analisado, considerando uma expansão até segunda ordem em ω , passa a ser o seguinte:

$$H_{\text{eff}} \approx H_0 + \sum_{m \neq 0} \left\{ \frac{[H_{-m}, H_m]}{2m\omega} + \frac{[[H_{-m}, H_0], H_m]}{2m^2\omega^2} \right\} + \sum_{(n,m) \neq 0} \frac{[[H_{-m}, H_{m-n}], H_n]}{3mn\omega^2}. \quad (18)$$

Para a polarização circular, como $H_1 \neq H_{-1}$, o comutador entre ambos deixa de ser necessariamente nulo (e de fato não é). O último termo, todavia, continua sem peso, uma vez que $H_m = 0, m \neq 0, \pm 1$. Assim, a matriz efetiva do sistema de spin 1/2 é

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} B_z - \frac{B_p^2}{\omega} - \frac{B_z B_p^2}{2\omega^2} & 0 \\ 0 & -\left(B_z - \frac{B_p^2}{\omega} - \frac{B_z B_p^2}{2\omega^2}\right) \end{pmatrix}. \quad (19)$$

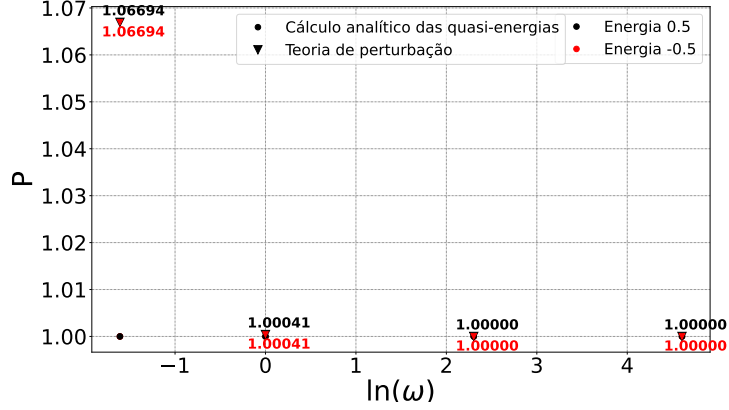


Figura 1: Gráfico da razão $P = E_{\text{analisada}}/E_{\text{exata}}$ como função do logaritmo natural da frequência. Os métodos analisados são o do cálculo analítico, de acordo com a Equação (11), e da teoria de perturbação, a partir do hamiltoniano da Equação (19). Os valores indicados no corpo do gráfico são referentes ao valor de P do ponto da teoria de perturbação. A cor é concordante com a legenda, isto é, com o autovalor 0.5 ou -0.5. Nota-se a rápida convergência da teoria de perturbação, já para valores de $\omega \sim 10^0 = 1$.

A validade da teoria de perturbação para diferentes valores de frequência escolhidos foi checada com auxílio da plataforma Mathematica. A concordância entre os respectivos autovalores foi feita calculando a razão entre o resultado do método analisado - Equação (18) - e o proveniente da “matriz base” - truncamento computacional da Equação (9). A Figura 1 ilustra esse comparativo para ambas as abordagens, considerando apenas os autovalores ± 0.5 (isto é, setor $l = 0$) do problema de spin $1/2$.

Nota-se que, de fato, há uma excelente concordância entre os valores provenientes do método exato e aqueles da matriz 401×401 . Para a teoria de perturbação, por outro lado, os resultados são equiparáveis apenas a frequências altas (no caso, em $\omega = 100$). Tal constatação faz total sentido com as hipóteses da teoria e reforça sua validade em regimes nos quais o módulo do campo magnético é muito inferior à frequência de oscilação.

Polarização linear

A fim de ilustrar a validade do ferramental desenvolvido para problemas de qualquer spin, este caso será exemplificado com $s = 1$. Considerando o hamiltoniano $H(t) = \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{S}$, sendo $\mathbf{B}(t)$ dado por (5), as matrizes coeficientes do hamiltoniano obedecem

$$H_m = \begin{pmatrix} B_z \delta_{m,0} & \frac{B_p}{2\sqrt{2}} e^{-i\alpha} (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}) & 0 \\ \frac{B_p}{2\sqrt{2}} e^{i\alpha} (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}) & 0 & \frac{B_p}{2\sqrt{2}} e^{-i\alpha} (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}) \\ 0 & \frac{B_p}{2\sqrt{2}} e^{i\alpha} (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}) & -B_z \delta_{m,0} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Consequentemente, o hamiltoniano de Floquet é dado por

$$H_F = \begin{pmatrix} \ddots & | -1 \rangle & | 0 \rangle & | 1 \rangle & \ddots \\ \langle -1 | & H_0 & H_{-1} & 0 & \\ \langle 0 | & H_1 & H_0 & H_{-1} & \\ \langle 1 | & 0 & H_1 & H_0 & \\ \ddots & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (21)$$

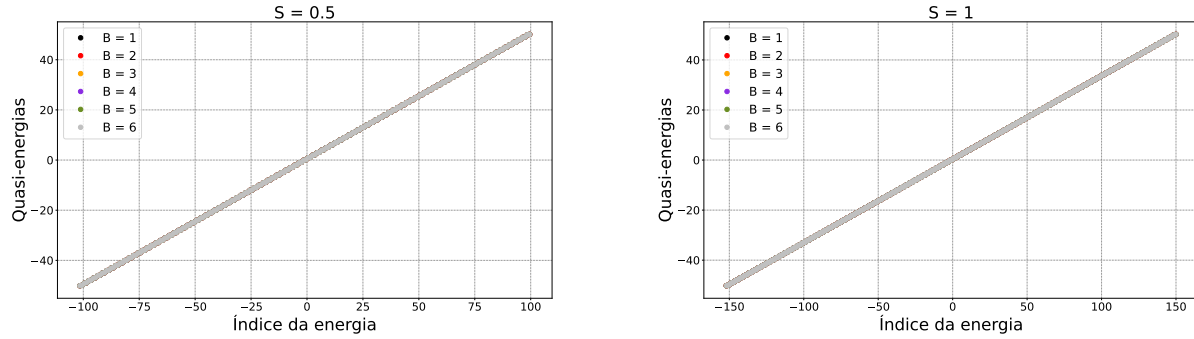


Figura 2: Valores das quasi-energias para diferentes ângulos α de polarização, considerando os hamiltonianos de spin 1/2 (à esquerda) e spin 1 (à direita). As legendas são dadas em função do parâmetro B , definido de modo que $\alpha = \frac{\pi}{B}$. Os demais parâmetros do problema (campo magnético e frequência) foram fixados ($B_p = B_z = 0.2$, $\omega = 1$). A total sobreposição de todas as 6 retas indica que não há qualquer dependência da energia com α .

Note que todos os coeficientes $H_m, m \neq 0, \pm 1$ são nulos. No entanto, ao contrário do caso da polarização circular, esse sistema mostrou-se impossível de ser bloco-diagonalizado. Consequentemente, as análises se limitaram à esfera numérica. Os cálculos e o processamento dos dados foram feitos com auxílio das plataformas Mathematica e Python.

Tendo em vista tais limitações teóricas, questões computacionais surgem. Uma vez que a matriz de Floquet é infinita, há necessidade de truncá-la. Consequentemente, a precisão dos resultados numéricos, diretamente ligada a esta escolha, deve ser analisada. Para descobri-la, foram analisadas matrizes de tamanho 10, 25, 50, 75, 100 e 150 (esses números são, na realidade, relativos ao l máximo adotado, mas a matriz vai de $-l$ a l , de modo que sua real dimensão é $2l + 1$). A partir da comparação com resultados provenientes de uma matriz de tamanho 200, conclui-se que a fixação da dimensão em 101 (isto é, $l = 50$) apresenta o melhor balanço entre precisão e custo computacional (resultados não mostrados). Deste modo, esta será a “matriz base” adotada para as análises que prosseguem.

Convém também analisar os parâmetros do hamiltoniano original, ou seja, o ângulo α e o campo magnético. Para descobrir se a energia apresenta alguma dependência com a angulação à qual sua polarização está alinhada, seus valores foram calculados para $\alpha = \frac{\pi}{B}, 1 \leq B \leq 6, B \in \mathbb{N}$.

A completa sobreposição das retas na Figura 2 indica como o sistema é invariante com relação ao ângulo α . Este resultado era esperado, visto que a definição da direção dos eixos cartesianos é arbitrária, e consequentemente, o valor adotado para α idem. Desse modo, a energia não deve depender desse parâmetro.

Para o campo magnético, a análise centrou-se na relação entre os $3(2s + 1)$ autovalores centrais (relativos aos blocos de Floquet de valor m com menor módulo) obtidos a partir da variação em saltos de 0.01 do módulo do campo magnético (usando $B_z = B_p$, por simetria).

É possível perceber (Figura 3) um claro padrão de repetição entre as energias de diferentes blocos. Este resultado é esperado pela teoria. A periodicidade do potencial faz com que as quasi-energias sejam um bom número quântico, isto é, elas descrevem as quantidades conservadas no sistema, repetindo-se identicamente, módulo ω . Tal fenômeno caracteriza as “zonas de Floquet” [11].

Por fim, foi checada a concordância da teoria de perturbação neste contexto. Os termos H_1 e H_{-1} são idênticos, de modo que seu comutador é zero. Assim, o primeiro e o terceiro termo da somatória (Equação (18)) são irrelevantes. Dessa maneira, resta, para o caso de spin 1/2, apenas

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} B_z - \frac{B_z B_p^2}{4\omega^2} & 0 \\ 0 & -\left(B_z - \frac{B_z B_p^2}{4\omega^2}\right) \end{pmatrix}. \quad (22)$$

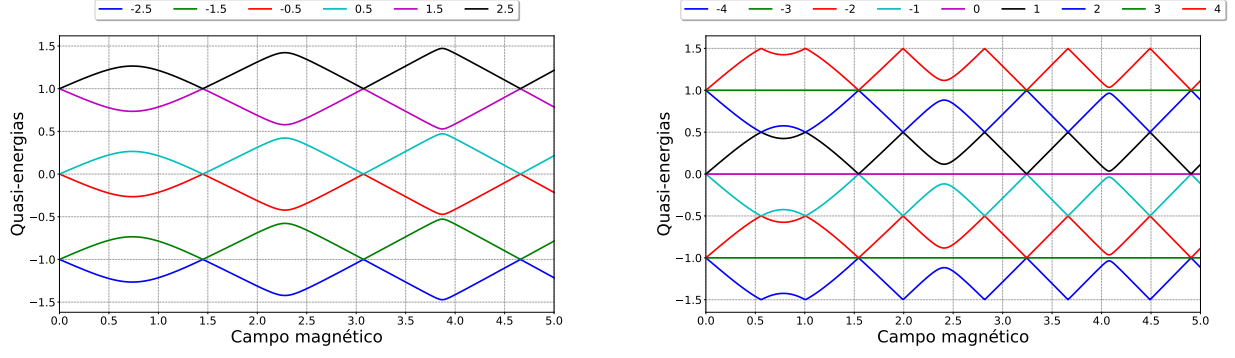


Figura 3: Valores das quasi-energias centrais para diferentes módulos do campo magnético. A cor de cada curva indica a cardinalidade do autovalor correspondente. A frequência é fixa em $\omega = 1$. A repetição do padrão das retas em cada quasi-energia diferente evidencia a formação das zonas de Floquet.

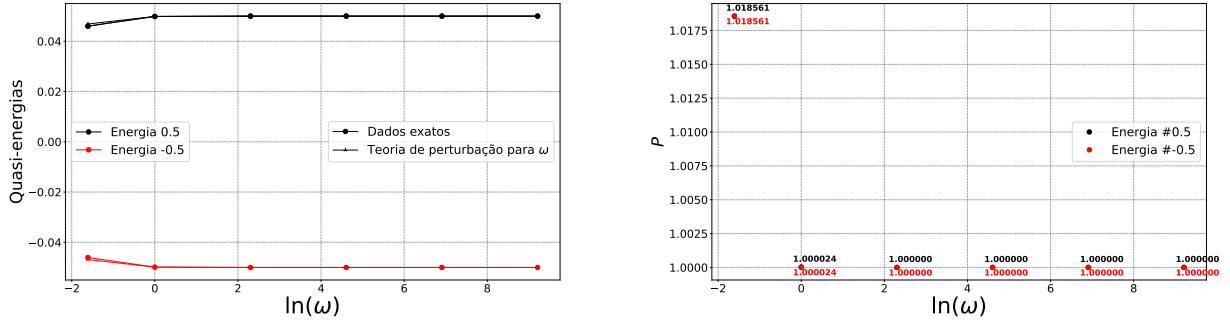


Figura 4: Gráficos dos valores das quasi-energias (Esquerda) e da razão $P = E_{\text{Perturbativa}}/E_{\text{Exata}}$ (Direita) como função do logaritmo natural da frequência. Ambas as figuras reiteram como a concordância entre os métodos é quase instantânea, já para valores de $\omega \sim 10^0$. O módulo do campo magnético (B) foi fixado em $B = 0.1$.

A Figura 4 (Esquerda) compara os dados exatos, isto é, provenientes do cálculo dos autovalores da matriz base, com os originários da Equação (22), como função do logaritmo natural da frequência. O lado direito da mesma imagem tem agora o eixo das ordenadas dependente da razão $P = E_{\text{Perturbativa}}/E_{\text{Exata}}$, ou seja, os dados da Equação (22) sobre aqueles da matriz base.

Assim como na polarização circular, a aproximação perturbativa mostra uma concordância altíssima a partir de $\omega = 100$, ao passo que, quando $\omega \approx \sqrt{B_z^2 + B_p^2} \approx 0.1$, diverge já nas primeiras casas decimais.

Polarizações genéricas

Para um campo magnético dado pela Equação (6) e considerando o caso de spin $s = \frac{1}{2}$, os coeficientes de Floquet são

$$H_m = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} B_z \delta_{m,0} & \frac{B_x i}{2} (\delta_{m,1} - \delta_{m,-1}) - \frac{B_y}{2} (e^{i\epsilon} \delta_{m,-N} - e^{-i\epsilon} \delta_{m,N}) \\ \frac{B_x i}{2} (\delta_{m,1} - \delta_{m,-1}) + \frac{B_y}{2} (e^{i\epsilon} \delta_{m,-N} - e^{-i\epsilon} \delta_{m,N}) & -B_z \delta_{m,0} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Imediatamente, percebe-se que, para $N \neq 1$, há coeficientes $H_{\pm N}$, inexistentes nos outros casos comenta-

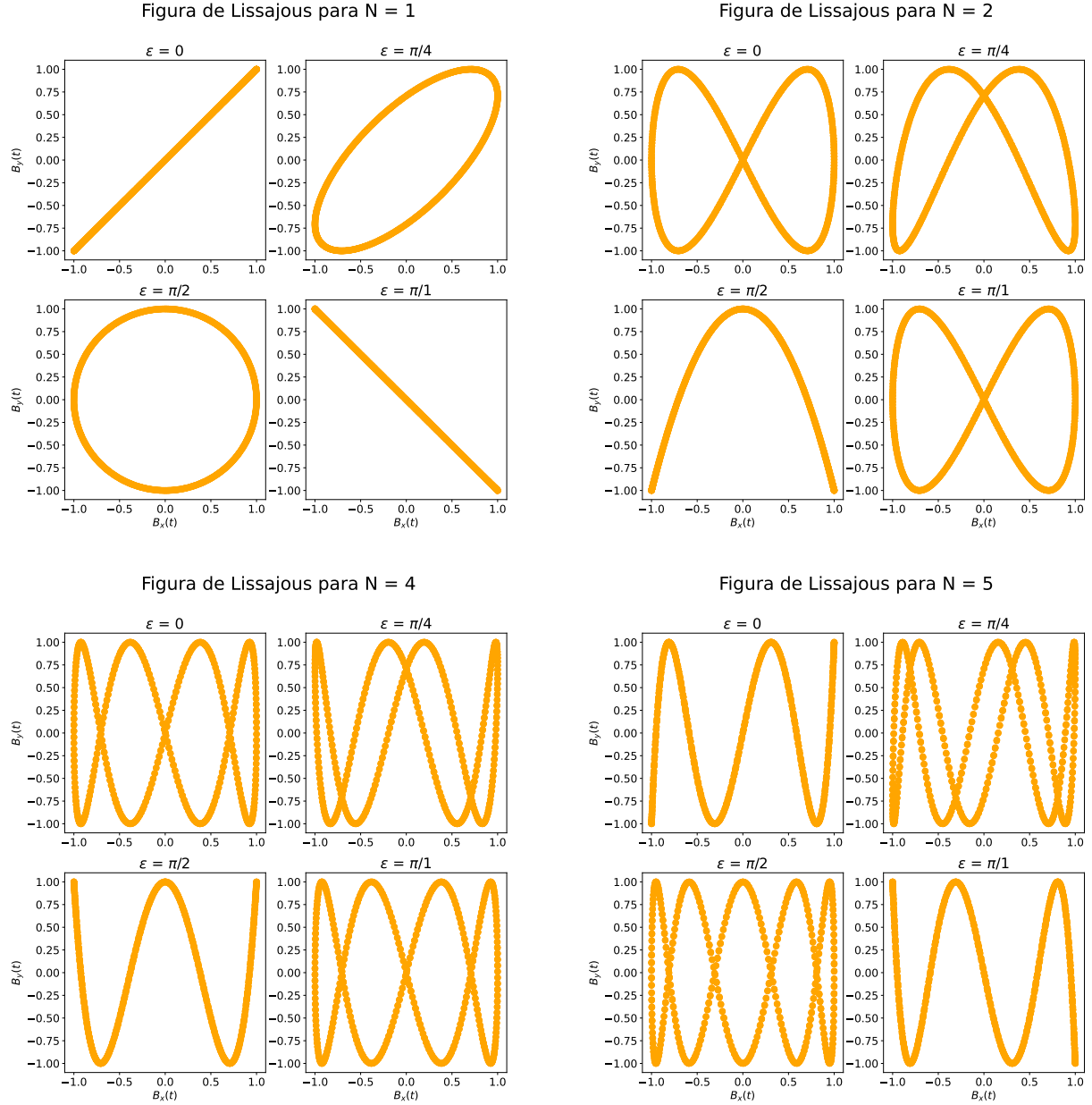


Figura 5: Perfil do campo magnético para $\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i = B_x \sin \omega t$ e $\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = B_y \sin (N\omega t + \epsilon)$, com $B_x = B_y = 1$ e $B_z = 0$. Foram levadas em consideração as configurações de $N = 1$, $N = 2$, $N = 4$ e $N = 5$ e $\epsilon = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi$.

dos. Novamente, a análise das quasi-energias foi feita mediante teoria de perturbação e ferramentas computacionais.

A introdução dos parâmetros N e ϵ faz com que os campos magnéticos tenham os perfis de Lissajous [12], graficados na Figura 5. Percebe-se que, para $N = 1$ e $\epsilon = 0, \pi$, tem-se o caso da polarização linear; $\epsilon = \frac{\pi}{2}$, circular. Ademais, conforme N cresce, as figuras passam a apresentar menos divergências dependentes da fase.

O incremento do valor de N revela, de fato, um padrão convergente. No tocante às quasi-energias, a Figura 6 (Esquerda) revela que, conforme N cresce, os autovalores centrais variam menos. Além disso, a influência

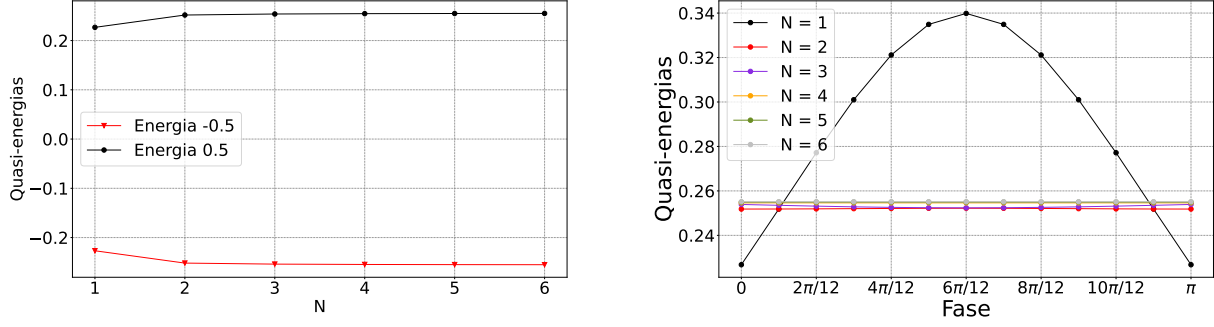


Figura 6: Dependência das quasi-energias centrais ($l = 0$) como função de N (à esquerda; a linha vermelha é referente aos autovalores negativos, identificados por “-0.5”; a preta, positivos, “0.5”) e em N e na fase (à direita). Verifica-se que, conforme N cresce, as energias tornam-se independentes de N e da fase, ϵ . Os parâmetros adotados foram $B_x = B_y = B_z = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\omega = 1$ e $\epsilon = 0$.

da fase é rapidamente perdida para $N > 1$, conforme a Figura 6 (Direita) evidencia para a quasi-energia 0.5 (a -0.5 é análoga, mas negativa).

A independência para com o parâmetro ϵ fica clara a partir da teoria de perturbação. Pela Equação (18), considerando que as componentes $H_0, H_{\pm 1}$ e $H_{\pm N}$ são finitas (o que implica que está sendo assumido que $N > 1$), calcula-se que o comutador $[H_{-m}, H_m]$ é nulo; $[[H_{-m}, H_0], H_m]$, todavia, retorna, para $m = \pm 1, -\frac{B_x^2 B_z}{8} \sigma_z$; $m = \pm N, -\frac{B_y^2 B_z}{8} \sigma_z$, sendo σ_z a matriz de Pauli.

Note que não há dependência na fase nos dois termos calculados. Ela surge apenas no último, sob condições específicas. Em segunda ordem em teoria de perturbação, o comutador $\sum_{n \neq 0, m} [[H_{-m}, H_{m-n}], H_n]$ só não se anula caso $N = 2$, fazendo com que, em $n = \pm 1$ e $m = \mp 2$, por exemplo, $[[H_{\mp m}, H_{\mp m - (\pm n)}], H_{\pm n}] = -4ie^{-i\epsilon} \sigma_y$. O numerador deste termo vai com, além de ω^2 , N . Conforme N aumenta, entretanto, são necessárias ordens maiores da teoria de perturbação para que os comutadores análogos ao comentado sejam finitos, o que eleva a ordem de ω e de N . Assim, se $N \gg 1$, a contribuição da fase pode ser desprezada.

A teoria de perturbação se mostrou útil para analisar as energias também, convergindo rapidamente conforme N aumenta (resultados satisfatórios já em $N \sim 10^1$). A partir da Equação (18), calcula-se que as quasi-energias perturbativas são

$$E_{\pm} = \pm \left(\frac{B_z}{2} - \frac{B_z}{8\omega^2} \left(B_x^2 + \frac{B_y^2}{N^2} \right) \right). \quad (24)$$

Todavia, a validade da aproximação (para ω fixo e N crescente) depende de que $B_x = 0$. Afinal, este parâmetro converge apenas com a frequência, não com N , invalidando a hipótese da teoria de perturbação. A Figura 7 ilustra isto - a razão se aproxima significativamente de 1 já para $N = 6$. Os resultados dito “exatos” foram obtidos computacionalmente, a partir de matrizes quadradas de tamanho $d = N + 1000$.

Focando a teoria de perturbação para a frequência, a convergência mostrou-se ainda mais rápida. $\omega \approx 3$ (com o campo normalizado e $\epsilon = 0$) apresenta uma boa concordância com os resultados exatos. Conforme N cresce, acelera-se este processo, diminuindo também a região de comportamento errático e dissonante da previsão perturbativa, por volta de $\omega \approx 0.5$. A Figura 8 ilustra o comentado.

Por fim, o parâmetro restante para análise é o campo magnético. Conforme seu módulo cresce, observa-se uma tendência similar à Figura 3. A adição do parâmetro N , no entanto, induz mudanças no comportamento nas regiões de menor módulo do campo. A Figura 9 apresenta os resultados.

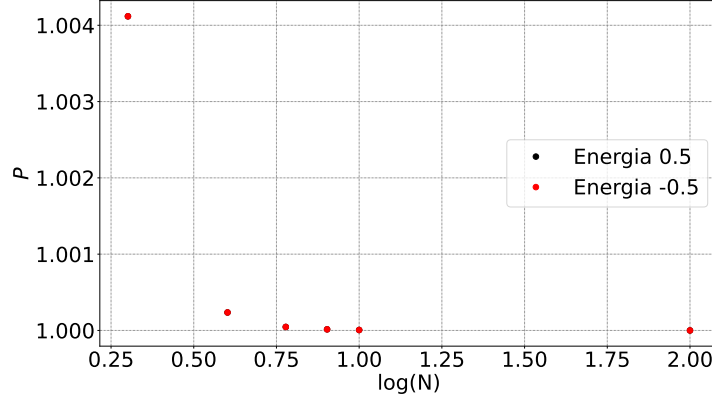


Figura 7: Gráfico da razão $P = E_{\text{perturbativa}}/E_{\text{exata}}$ como função do logaritmo (base 10) de N . A concordância é relativamente boa já para valores pequenos de N , mas converge quase que identicamente apenas para $N \sim 10^1$, uma taxa mais lenta do que a vista quando a teoria de perturbação é aplicada sobre a frequência. Foi fixado $B_x = 0, B_y = B_z = \frac{1}{\sqrt{2}}, \omega = 1$ e $\epsilon = 0$.

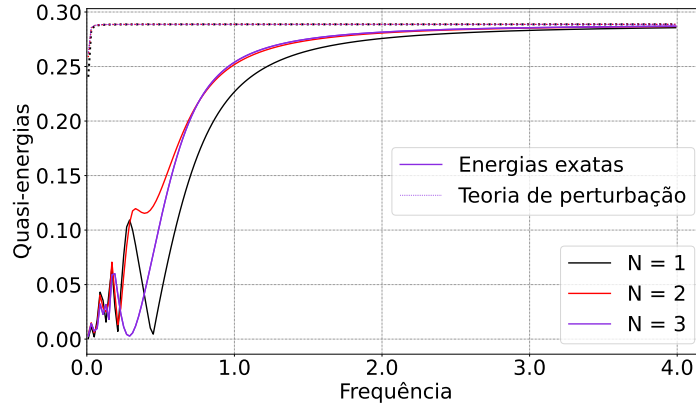


Figura 8: Convergência da quasi-energia central ($l = 0$) positiva exata com relação à teoria de perturbação conforme ω varia. Diferentes valores de N foram analisados, ilustrando, novamente, como um módulo maior deste parâmetro acelera a convergência. É interessante perceber também a forte dissonância da teoria de perturbação (linhas pontilhadas) para a faixa de frequência $\omega < 1$, região que não segue as hipóteses perturbativas. Foi fixado $B_x = B_y = B_z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\epsilon = 0$.

Evolução temporal

O próximo passo, naturalmente, no desenvolvimento da pesquisa consiste no estudo acerca da evolução temporal dos sistemas quânticos analisados, a fim de observar como as propriedades emergentes da Engenharia de Floquet se comportam para além do tempo inicial. De modo geral, o operador de evolução temporal, $U(t, t_0)$, é dado por (usando que $U(t_0, t_0) = \mathbb{1}$)

$$U(t, t_0) = \mathbf{T} \exp \left(-i \int_{t_0}^t H(t') dt' \right), \quad (25)$$

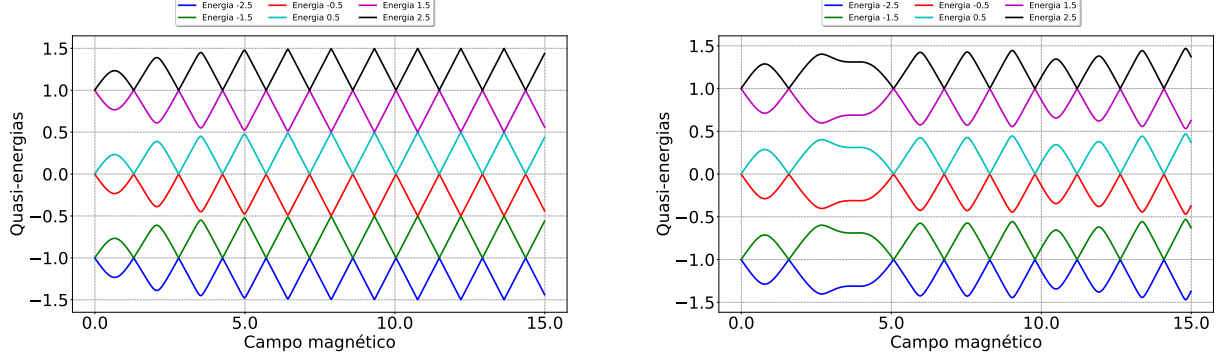


Figura 9: Dependência das quasi-energias centrais para diferentes módulos do campo magnético para valores de $N = 1$ (Esquerda) e $N = 5$ (Direita). A cor de cada curva indica a cardinalidade do autovalor correspondente. A repetição do padrão das retas em cada quasi-energia diferente evidencia a formação das zonas de Floquet. Foi adotado que $B_x = B_y = B_z = \frac{b}{100}$, $1 \leq b \leq 1500$, sendo b uma variável inteira que percorre o intervalo informado em passos de 1. Ademais, $\epsilon = 0$ e $\omega = 1$.

sendo “ $\mathbf{T} \exp$ ” a exponencial temporalmente ordenada.

Caso $[H(t_i), H(t_j)] = 0, \forall i \neq j$, a expressão (25) se reduz ao usual, $U(t, t_0) = \exp \left(-i \int_{t_0}^t H(t') dt' \right)$. Do contrário, a definição do operador supracitado afirma que

$$\mathbf{T} \exp \left(-i \int_{t_0}^t H(t') dt' \right) \equiv \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i)^n \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t \mathbf{T}[H(t_1)H(t_2)\dots H(t_n)] dt_n \dots dt_2 dt_1, \quad (26)$$

sendo o produto ordenado temporal de operadores definido por $\mathbf{T}[H(t_1)H(t_2)\dots H(t_n)] = H(t_{i_1})H(t_{i_2})\dots H(t_{i_n}), t_{i_1} > t_{i_2} > \dots > t_{i_n}$ [13].

Tais definições permitem o cálculo exato do operador de evolução temporal. Sob a ótica da Engenharia de Floquet, todavia, o caráter periódico do potencial implica também que a evolução temporal é invariante sob translações discretas no tempo, $(t_1, t_2) \rightarrow (t_1 + lT, t_2 + lT), l \in \mathbb{Z}$. Desse modo, $U(t_0 + lT, t_0) = [U(t_0 + T, t_0)]^l$. Convém, assim, definir a evolução ao longo de um período pelo hamiltoniano de Floquet estroboscópico, $H[t_0]$:

$$U(t_0 + T, t_0) = \exp(-iH_F[t_0]T). \quad (27)$$

Todos os hamiltonianos estroboscópicos estão relacionados a partir da transformação unitária [11]

$$H_F[t'_0] = U(t'_0, t_0)H_F[t_0]U(t_0, t'_0). \quad (28)$$

A eliminação da dependência no dito “calibre de Floquet”, o tempo inicial arbitrariamente escolhido, t_0 , é feita a partir do hamiltoniano de Floquet não-estroboscópico, também nomeado “hamiltoniano efetivo”,

$$H_{\text{eff}} = e^{iK[t_0]}H_F[t_0]e^{-iK[t_0]}, \quad (29)$$

sendo $K[t_0]$ o “kick operator”. Discussões sobre estas definições e suas implicações e diferenças podem ser consultadas na bibliografia indicada [14]. Para fins práticos, as aproximações usadas neste trabalho são decorrentes do formalismo de van Vleck, especificado na Equação (18).

Teorias de perturbação

Conforme comentado anteriormente, nem sempre a técnica da Engenharia de Floquet permite a diagonalização exata de sistemas quânticos. Esta problemática se estende ao cálculo dos operadores de evolução temporal, de

modo que diversas técnicas de teoria de perturbação são desenvolvidas, justificando o truncamento do hamiltoniano até a ordem requerida.

São três as principais técnicas de teoria de perturbação encontradas. A técnica de Floquet-Magnus é aplicada ao hamiltoniano estroboscópico; sobre o não-estroboscópico, há a expansão de van Vleck [5, 9, 10, 14, 15], vide a Equação (18). Por fim, a abordagem mais utilizada neste trabalho foi a da representação ("picture") de interação [1, 8]; convém, pois, destacá-la.

Seja um hamiltoniano notado por $H(t) = H_0 + W(t)$, isto é, uma parte tipicamente simples de tratar (H_0) somada a uma perturbação ($W(t)$). Além disso, a parcela conhecida tem evolução temporal descrita pelo operador $U_0(t, t_0)$. Na representação de interação, o estado do sistema é descrito pelo ket $|\psi_I(t)\rangle \equiv U^\dagger(t, t_0) |\psi_S(t)\rangle$, sendo $|\psi_S(t)\rangle$ o ket usualmente conhecido da representação de Schrödinger.

A evolução temporal desse estado é descrita por $i \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle = W_I(t) |\psi_I(t)\rangle$, $W_I(t) = U_0^\dagger(t, t_0) W(t) U_0(t, t_0)$. Dessa maneira, o operador de evolução temporal é dado por $U(t, t_0) = U_0(t, t_0) U_I(t, t_0)$, sendo que $U_I(t, t_0)$ é descrito pela expressão

$$U_I(t, t_0) = \mathbb{1} + \frac{1}{i} \int_{t_0}^t W_I(t_1) dt_1 + \left(\frac{1}{i}\right)^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} W_I(t_1) W_I(t_2) dt_2 dt_1 + \dots = \mathbb{1} + U_I^{(1)}(t, t_0) + U_I^{(2)}(t, t_0) + \dots \quad (30)$$

Portanto, uma aproximação da ordem de ω^{-n} é feita ao limitar a expansão do operador temporal ao termo $U_I^{(n)}(t, t_0)$. O hamiltoniano estroboscópico de Floquet pode assim ser calculado a partir da relação (27). Para $t_0 = 0$, $U_0(T, 0) = \mathbb{1}$ e considerando até potências de ω^{-2} , por exemplo, vale que $H_F[t_0] = \frac{i}{T} (U_I^{(1)}(T, 0) + U_I^{(2)}(T, 0) - \frac{1}{2} (U_I^{(1)}(T, 0))^2)$.

Decomposição de Trotter-Suzuki

Alternativamente, os resultados obtidos pelos métodos aproximativos comentados podem ser comparados numericamente com um terceiro método, exato. A Equação (25) também pode ser expressa como

$$U(t, t_0) = \prod_{j=0}^{N-1} U(t_j + \delta t, t_j), \quad (31)$$

$\delta t \equiv \frac{t-t_0}{N}$ e $t_j \equiv t_0 + j\delta t$. Quando N tende a infinito, a Equação (31) torna-se exata. A óbvia necessidade de adotar um parâmetro finito, no entanto, levanta a indagação sobre o erro que a escolha feita acarreta. A quantidade de separações no intervalo foi fixada em $N = 50$, pois percebeu-se que tal valor era suficiente para a convergência dos resultados. Já para o operador de evolução temporal infinitesimal, considerando o cenário analisado, o qual tem um hamiltoniano $H(t)$ separável em $H(t) = H_0 + W(t)$, demonstra-se que sua melhor aproximação, isto é, aquela que gera o erro de menor ordem, é dada pela fórmula de Trotter-Suzuki [16]:

$$U(t_j + \delta t, t_j) \approx e^{-i \frac{\delta t}{2} W(t_j + \frac{\delta t}{2})} e^{-i \delta t H_0} e^{-i \frac{\delta t}{2} W(t_j + \frac{\delta t}{2})}. \quad (32)$$

É pertinente questionar por que usar a Equação (32), ao invés de uma versão mais intuitiva, como $U(t_j + \delta t, t_j) \approx e^{-i \delta t W(t_j + \delta t)} e^{-i \delta t H_0}$, por exemplo. Note que, seja

$$U(t_j + \delta t, t_j) \approx e^{-i x \delta t W(t_j + x \delta t)} e^{-i \delta t H_0} e^{-i y \delta t W(t_j + y \delta t)}, \quad (33)$$

com a restrição que $x + y = 1$. A expansão em série de Taylor de uma das exponenciais resulta em $e^{-i x \delta t W(t_j + x \delta t)} = \mathbb{1} - i \delta t x W(t_j + x \delta t) - \left(\frac{x \delta t}{\sqrt{2}} W(t_j + x \delta t)\right)^2 + x^3 O(\delta t)^3$. Expandindo também o potencial, vê-se que

$$e^{-i x \delta t W(t_j + x \delta t)} = \mathbb{1} - i \delta t x W(t_j) - i \delta t^2 x^2 W'(t_j) - \frac{\delta t^2 x^2}{2} [W(t_j)]^2 + x^2 O(\delta t)^3. \quad (34)$$

Retornando esta expressão na Equação (33), juntamente com a análoga para y , vê-se que o erro resultante é da ordem de $(x^2 + y^2)O(\delta t)^3$. Uma vez que há a restrição $x + y = 1$, o erro é minimizado quando $x = y = \frac{1}{2}$, conforme afirma a Equação (32).

Este método é exato dentro da precisão especificada (no caso, até ordem de $(\delta t)^3$) para o cálculo do operador de evolução temporal. A extração das autoenergias como função do tempo, entretanto, é válida apenas em múltiplos do período, tal qual nos métodos da representação de interação e da expansão de van Vleck, conforme consta a Equação (27). No entanto, para valores $t \in (t_0, t_0 + T)$, é possível definir

$$U(t, t_0) = \exp(-i\epsilon_n(t)t), \quad (35)$$

sendo $\epsilon_n(t)$ uma matriz que tem como autovalores as autoenergias do problema no tempo t . Apesar de fisicamente imprecisa, tal definição é conveniente para adquirir uma mínima noção sobre a evolução entre os períodos.

Resultados

A fim de aplicar e comparar as técnicas supracitadas, será adotado o perfil de polarização $\mathbf{B} = (B_x \sin \omega t, 0, B_z)$, de modo que $H(t) = S_x B_x \sin \omega t + S_z B_z = W(t) + H_0$.

Para a representação de interação, serão feitas escolhas contrárias às convencionais. Convém definir $U_0(t, 0) = e^{-i \int_0^t W(t') dt'} = e^{-i \frac{B_x}{\omega} (1 - \cos \omega t) S_x}$; consequentemente, $W_I = U_0^\dagger H_0 U_0$. Estas decisões são justificadas, pois, além de facilitarem os cálculos dos coeficientes $U_I^{(n)}$, fazem com que $U_0(T, 0) = \mathbb{1}$. Note que nenhum dos perfis de polarização mencionados anteriormente (circular, linear ou genérico) foi adotado, pois suas parcelas perturbativas (dependentes do tempo) não comutam em tempos diferentes (uma vez que $[S_x, S_y] \neq 0$), impossibilitando a reprodução análoga da técnica descrita.

Para um cenário de spin 1/2, as matrizes de spin são meramente as matrizes de Pauli (multiplicadas por 1/2). Desse modo, vale que

$$e^{ia\sigma_i} \sigma_j e^{-ia\sigma_i} = \cos(2a) \sigma_j + i \sin(2a) \sigma_i \sigma_j \quad (36)$$

(no caso, $a = \frac{\phi}{2}(1 - \cos \omega t)$ e $\phi \equiv \frac{B_x}{\omega}$). Assim, calcula-se que $U_I^{(1)}(t, 0) \approx -i \frac{B_z}{2} \left[t \sigma_z \left(1 - \phi^2 \frac{3}{4} \right) - \sigma_y \left(t \phi + \frac{\phi}{\omega} \sin \omega t \right) \right]$ e $U_I^{(2)} \approx t \frac{B_z^2}{4} \left[\sigma_x i \frac{\phi}{\omega} \sin \omega t + \mathbb{1} \left(\frac{t}{2} - t \frac{\phi^2}{4} \right) \right]$.

Portanto, até a segunda ordem em ϕ , o hamiltoniano estroboscópico de Floquet é dado por

$$H_F[0] \approx \frac{B_z}{2} \left[\sigma_z \left(1 - \phi^2 \frac{3}{4} \right) - \sigma_y \phi \right]. \quad (37)$$

Pela expansão para frequências grandes (Equação (18)), que retorna uma aproximação para o hamiltoniano de Floquet efetivo, é simples mostrar que

$$H_{\text{eff}} \approx \frac{B_z}{2} \sigma_z - \frac{B_z B_x^2}{8\omega^2} \sigma_z. \quad (38)$$

A Figura 10 ilustra, para as três metodologias comentadas, os valores das quasi-energias como função do tempo. A evolução temporal exata foi calculada com auxílio da plataforma Mathematica. Pelos gráficos, percebe-se como, conforme a frequência aumenta, os métodos passam a convergir exatamente, visto que a hipótese da expansão passa a ser mais respeitada.

Para o spin 1, as matrizes de spin não mais obedecem (36). Assim, é necessário lançar mão da expansão de Taylor para exponenciais, $e^{aP} = \mathbb{1} + aP + \frac{(aP)^2}{2!} + O(a)^3$. Dessa maneira, obtém-se que, sendo $\{A, B\} = AB + BA$

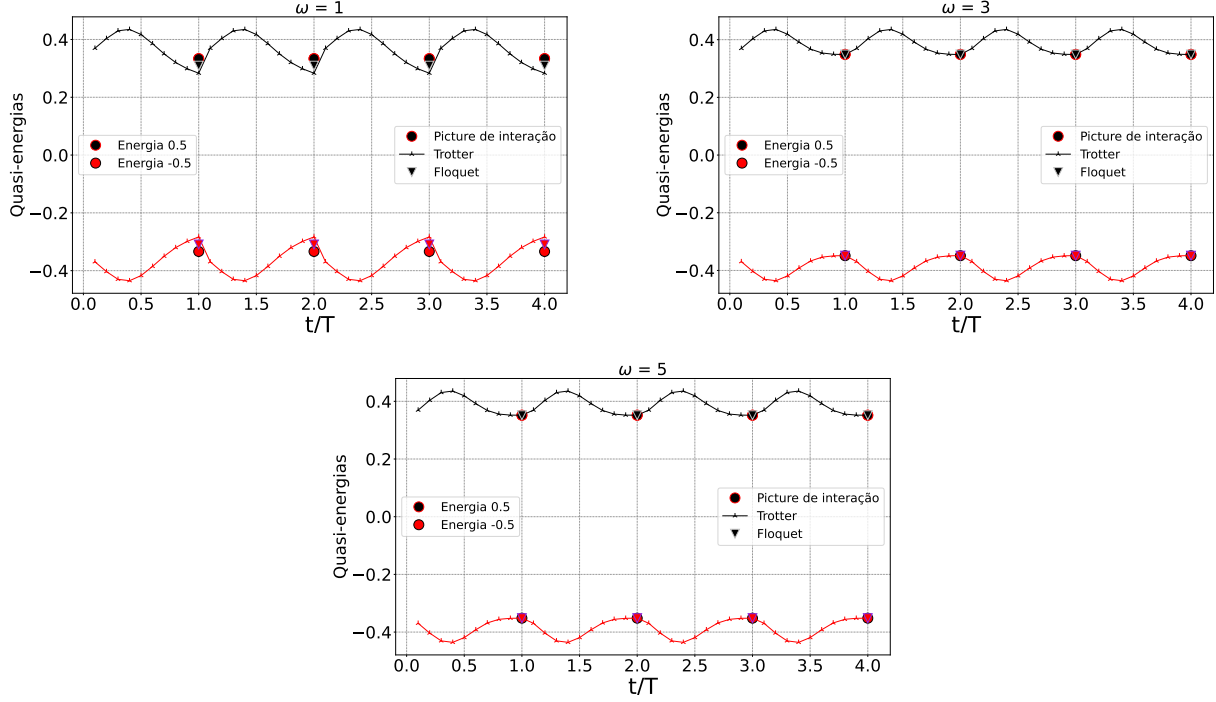


Figura 10: Evolução temporal das quasi-energias para a polarização senoidal em spin 1/2 calculada pelo método de Trotter-Suzuki (linha com o marcador de três retas). Comparativamente, os marcadores circulares são referentes ao método da representação de interação. Os pontos triangulares, referenciados por “Floquet”, são relacionados à expansão de van Vleck. As cores preta e vermelha são referentes às duas quasi-energias diferentes (0.5 e -0.5, respectivamente). Cada uma das figuras informa os resultados para um determinado valor de frequência ($\omega = 1$, superior esquerdo; $\omega = 3$, superior direito; $\omega = 5$, inferior central). Percebe-se nitidamente como, conforme a frequência aumenta, em respeito às hipóteses das expansões, os três métodos começam a convergir. As componentes do campo magnético estão fixas em $B_z = B_x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

o anticomutador dos operadores A e B ,

$$e^{iaS_x} S_z e^{-iaS_x} \approx S_z + aS_y - \frac{a^2}{2} (\{S_z, S_x^2\} - 2S_x S_z S_x), \quad (39)$$

sendo agora $a \equiv \frac{B_x}{\omega} (1 - \cos \omega t)$.

Calcula-se

$$\begin{cases} U_I^{(1)}(t, 0) \approx -iB_z \left(tS_z + \frac{B_x}{\omega} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega t} \right) S_y - \frac{B_x^2}{\omega^2} \frac{3t}{4} (\{S_z, S_x^2\} - 2S_x S_z S_x) \right); \\ U_I^{(2)}(t, 0) \approx -B_z^2 \left(\frac{t^2}{2} S_z^2 + \frac{B_x}{\omega} \left(\frac{t^2}{2} \{S_z, S_y\} - \frac{t \sin \omega t}{\omega} S_y S_z \right) - \frac{B_x^2}{\omega^2} \left[\frac{3t^2}{8} \{S_z, \{S_z, S_x^2\} + 2S_x S_z S_x\} - \frac{t^2}{2} S_y^2 \right] \right). \end{cases} \quad (40)$$

Finalmente,

$$H_F[0] \approx B_z \left[S_z + \frac{B_x}{\omega} - \frac{3B_x^2}{4} (\{S_z, S_x^2\} - 2S_x S_z S_x) \right]. \quad (41)$$

Identicamente ao cenário do spin 1/2, a aproximação de van Vleck informa que $H_{\text{eff}} \approx B_z S_z - \frac{B_x^2 B_z}{4\omega^2} S_z$. Os resultados comparativos estão na Figura 11. Os comentários pertinentes são idênticos aos do caso de spin 1/2.

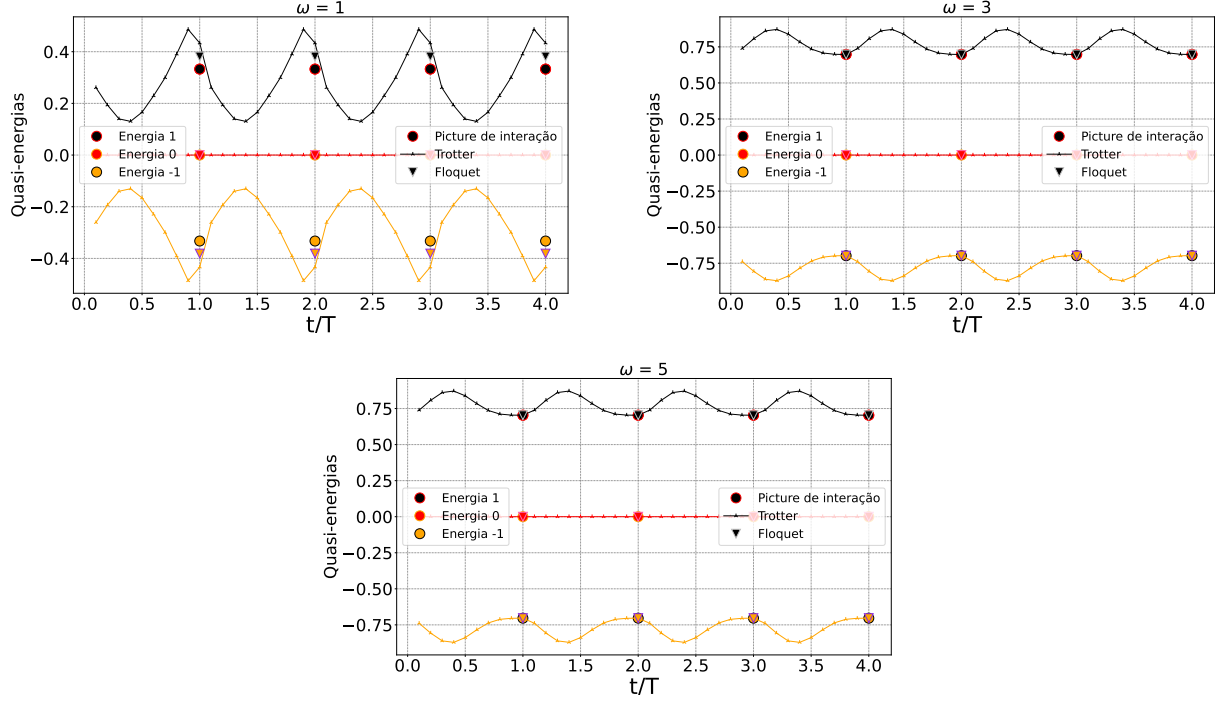


Figura 11: Evolução temporal das quasi-energias para a polarização senoidal em spin 1 calculada pelo método de Trotter-Suzuki (linha com o marcador de três retas). Comparativamente, os marcadores circulares são referentes ao método da representação de interação. Os pontos triangulares, referenciados por “Floquet”, são relacionados à expansão de van Vleck. As cores preta, vermelha e amarela são referentes às três quasi-energias diferentes (1, 0 -1, respectivamente). Cada uma das figuras informa os resultados para um determinado valor de frequência ($\omega = 1$, superior esquerdo; $\omega = 3$, superior direito; $\omega = 5$, inferior central). Percebe-se nitidamente como, conforme a frequência aumenta, em respeito às hipóteses das expansões, os três métodos começam a convergir. As componentes do campo magnético estão fixas em $B_z = B_x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Por fim, foi analisado outro modelo, extraído da Referência [1], de 2023. Convém mencioná-lo para explicitar a utilização do ferramental de Floquet, discutido ao longo deste trabalho, em aplicações reais e atuais da fronteira científica, em sistemas de relevância para a física do estado sólido. O artigo em questão modela um isolante topológico bidimensional próximo a uma onda-d supercondutora. Esta estrutura é perturbada por um potencial periódico no tempo, acarretando na emergência de estados Majorana de borda (mais discussões em [17]).

O hamiltoniano inicial é dado por

$$H_0(\mathbf{k}) = \alpha\Gamma_1 + \beta\Gamma_2 + \epsilon(\mathbf{k})\Gamma_3 + \zeta\Gamma_4, \quad (42)$$

sendo $\alpha = 2\lambda \sin(k_x)$, $\beta = 2\lambda \sin(k_y)$, $\epsilon(\mathbf{k}) = (m_0 - 4\gamma + 2\gamma \cos(k_x) + 2\gamma \cos(k_y))$, $\zeta = \Delta(\cos(k_x) - \cos(k_y))$ e as matrizes Γ definidas por $\Gamma_1 = \tau_0\sigma_xs_z$, $\Gamma_2 = \tau_z\sigma_ys_0$, $\Gamma_3 = \tau_z\sigma_zs_0$ e $\Gamma_4 = \tau_x\sigma_0s_0$. Os operadores τ , σ e s são as matrizes de Pauli, referentes aos graus de liberdade de partícula-buraco, orbital e spin, respectivamente. Demonstra-se que o hamiltoniano é invariante por reversão temporal, troca partícula-buraco e reflexão espacial ao longo dos eixos x e y . A perturbação dependente do tempo é descrita por $V(t) = V \cos(\omega t)\Gamma_3$, de modo que $H(\mathbf{k}, t) = H_0(\mathbf{k}) + V(t)$.

A abordagem da representação de interação - que no artigo foi calculada somente até primeira ordem -

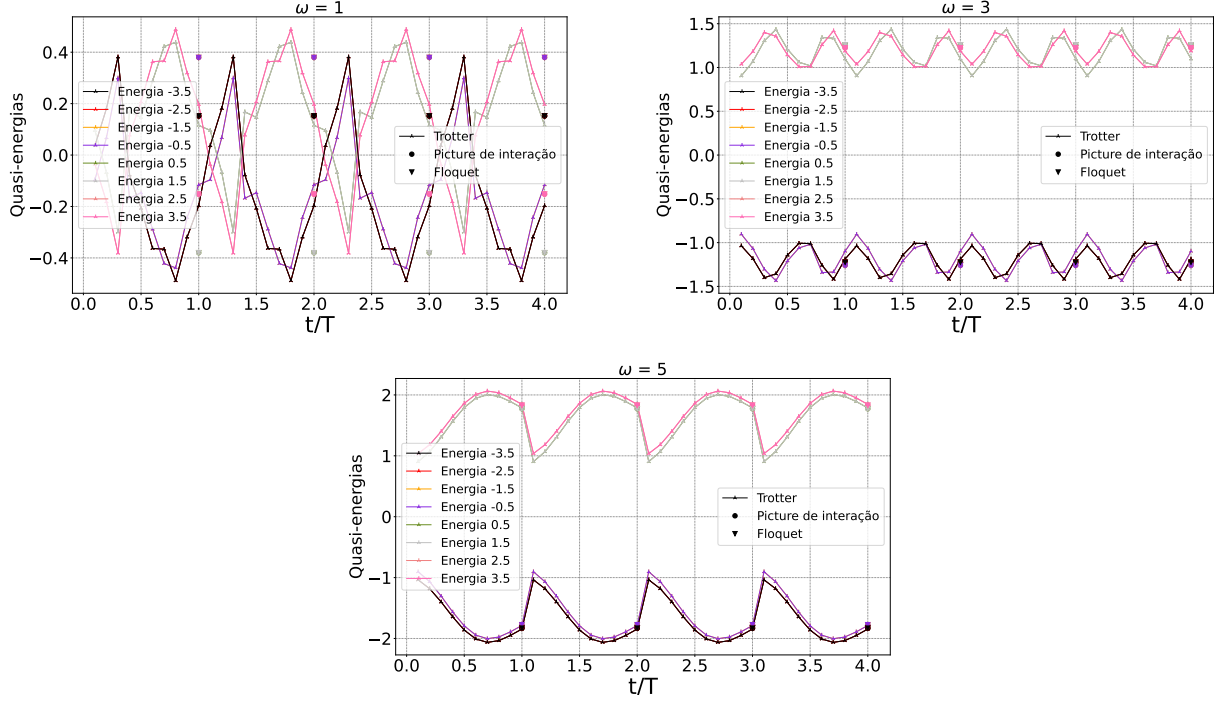


Figura 12: Evolução temporal das quasi-energias para o hamiltoniano (42) somado à perturbação $V \cos(\omega t)\Gamma_3$ calculada pelo método de Trotter-Suzuki (linha com o marcador de três retas). Comparativamente, os marcadores circulares são referentes ao método da representação de interação. Os pontos triangulares, referenciados por “Floquet” são relacionados à expansão de van Vleck. As cores, especificadas na imagem, são referentes às oito quasi-energias diferentes. Cada uma das figuras informa os resultados para um determinado valor de frequência ($\omega = 1$, superior esquerdo; $\omega = 3$, superior direito; $\omega = 5$, inferior central). Percebe-se nitidamente como, conforme a frequência aumenta, em respeito às hipóteses das expansões, os três métodos começam a convergir. Os parâmetros foram fixados em $\lambda = 0.2$, $k_x = 1$, $k_y = 2$, $m_0 = -1$, $\gamma = 0.2$, $\Delta = 0.2$ e $V = 1$.

leva a, definindo $\phi \equiv \frac{2V}{\omega}$ e notando que vale tanto $\{\Gamma_i, \Gamma_j\} = 2\mathbb{1}_{8 \times 8} \delta_{i,j}$ quanto a Equação (36) para as matrizes Γ ,

$$\begin{cases} U_I^{(1)}(T, 0) \approx -iT \left[\left(1 - \frac{V^2}{\omega^2}\right) (H(\mathbf{k}) - \epsilon(\mathbf{k})\Gamma_3) + \epsilon(\mathbf{k})\Gamma_3 \right]; \\ U_I^{(2)} \approx \frac{T^2}{2} \left(\frac{\phi^2}{2} - 1 \right) (\alpha^2 + \beta^2 + \zeta^2) \mathbb{1} - \frac{iT\phi}{2\omega} ((\alpha^2 + \beta^2 + \zeta^2)\Gamma_3 + \epsilon(\mathbf{k})(\Gamma_1\alpha + \Gamma_2\beta + \Gamma_4\zeta)) - \left(\frac{T\epsilon(\mathbf{k})}{\sqrt{2}} \right)^2. \end{cases} \quad (43)$$

Portanto,

$$H_F[0] \approx \left(1 - \frac{V^2}{\omega^2} + \frac{V\epsilon(\mathbf{k})}{\omega^2}\right) (H(\mathbf{k}) - \epsilon(\mathbf{k})\Gamma_3) + \left(\epsilon(\mathbf{k}) + \frac{V}{\omega^2}(\alpha^2 + \beta^2 + \zeta^2)\right) \Gamma_3. \quad (44)$$

A aproximação para frequências altas retorna que $H_{\text{eff}} \approx (\alpha\Gamma_1 + \beta\Gamma_2 + \zeta\Gamma_4) \left(1 - \frac{V^2}{2\omega^2}\right) + \epsilon(\mathbf{k})\Gamma_3$. A Figura 12 mostra o comparativo entre os três métodos. Assim como nos outros casos discutidos nesta seção, o aumento da frequência implica na concordância das abordagens. O mais interessante, entretanto, é perceber como um modelo muito mais complexo, que trata de supercondutores topológicos e tem degenerescência em três subespaços diferentes (cada uma das matrizes de Pauli citadas), pode ser tratado de maneira simples e totalmente análoga ao caso de spin 3/2, repetindo a metodologia dissecada ao longo deste texto.

CONCLUSÕES

Este trabalho discutiu aplicações da engenharia de Floquet em sistemas quânticos de poucos níveis, além de fazer uma conexão com um sistema contemporâneo na área da física do estado sólido. Os hamiltonianos analisados foram solucionados por diversas técnicas distintas, tanto analíticas quanto numéricas. Independentemente da abordagem, todavia, os resultados são concordantes.

No caso da polarização circular (Equação (4)), a abordagem de Floquet se mostrou particularmente útil, gerando uma expressão analítica exata para o hamiltoniano - e, conseqüentemente, para as quasi-energias. Tal resultado foi confirmado a partir dos métodos alternativos de cálculo: transferência para o referencial girante, determinação dos coeficientes da função de onda, e teoria de perturbação para frequências altas.

Os casos linear - Equação (5) - e genérico - Equação (6) - se restringiram à esfera aproximativa, mas nem por isso foram de menor valor didático. No primeiro caso, foi constatada a esperada independência das energias para com o parâmetro α , além de ter sido possível visualizar as zonas de Floquet. Já no segundo, confirmou-se a perda de impacto do parâmetro ϵ nas quasi-energias conforme N cresce, relação já constatada em outras referências [12]. Adicionalmente, todavia, este trabalho formulou uma nova explicação para este efeito, alicerçada na teoria de perturbação.

Quanto à evolução temporal, a teoria de Floquet, que informa apenas sobre passos de tempo em unidades do período, foi comparada à evolução numericamente calculada, a partir da decomposição de Trotter-Suzuki. Para regimes de frequência suficientemente altos, nos quais a teoria de Floquet pode ser tratada analiticamente de forma perturbativa, os resultados apresentaram excelente concordância.

Finalmente, mostrou-se que a teoria desenvolvida é suficientemente robusta para lidar até mesmo com problemas mais complexos da área de física do estado sólido. Tomando a Referência [1] como base, a pesquisa aqui desenvolvida reproduziu e foi, inclusive, além do artigo mencionado (em determinados aspectos). O operador de evolução temporal, calculado a partir da representação de interação, foi calculado até segunda ordem em ω^{-1} , garantindo maior precisão e profundidade à discussão. Além disso, também foi analisado o hamiltoniano proveniente da teoria de perturbação de van Vleck. Os resultados subseqüentes foram comparados à evolução numérica exata, e novamente apresentaram concordância no regime adequado.

A extensão da pesquisa a sistemas de matéria condensada recentes expande as possibilidades de atuações futuras na área, conectando mais diretamente a abordagem de Floquet com problemas reais na fronteira física atual. Tal expansão possibilita o estudo de outros perfis de polarização e interação do campo eletromagnético com a matéria [18].

-
- [1] A. K. GHOSH, N. TANAY, and S. ARIJIT, Physical Review B **107**, <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.107.035419> (2023).
 - [2] O'CONNOR, J. J. and ROBERTSON, E. F., **Achille Marie Gaston Floquet** St. Andrews: University of St. Andrews, [2005]. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Floquet/>. Acesso em 5 mai. 2025.
 - [3] G. FLOQUET, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure **12**, 47 (1883).
 - [4] T. OKA and S. KITAMURA, Annual Review of Condensed Matter Physics **10**, 387 (2019).
 - [5] A. SEN, D. SEN, and K. SENGUPTA, J. Phys.: Condens. Matter **33**, 10.1088/1361-648X/ac1b61 (2021).
 - [6] M. S. RUDNER and N. H. LINDNER, The floquet engineer's handbook (2020), arXiv:2003.08252 [cond-mat.mes-hall].
 - [7] A. K. GHOSH, G. C. PAUL, and A. SAHA, Phys. Rev. B **101**, 235403 (2020).
 - [8] B. DIU, F. LALOË, and C. COHEN-TANNOUDJI, *Quantum Mechanics, Volume 1: Basic Concepts, Tools, and Applications* (Wiley-VCH, 2020).
 - [9] M. BUKOV, L. DALESSIO, and A. POLKOVNIKOV, Advances in Physics **62**, 139 (2015).
 - [10] A. ECKARDT and E. ANISIMOVAS, New journal of physics **17**, 10.1088/1367-2630/17/9/093039 (2015).
 - [11] K. VIEBAHN, Institute for Quantum Electronics **8093** (2020).
 - [12] P. STROBEL and M. DAGHOFER, Physical Review B **108**, 10.1103/PhysRevB.108.035132 (2023).
 - [13] HABER, H, **The time evolution operator as a time-ordered exponential** Santa Cruz Institute for Particle Physics,

- [2018]. Disponível em: <https://scipp.ucsc.edu/haber/ph215/TimeOrderedExp.pdf>. Acesso em 18 out. 2025.
- [14] M. G. BUKOV, *Floquet engineering in periodically driven closed quantum systems: from dynamical localisation to ultracold topological matter*, Ph.D. thesis, Boston University (2017).
- [15] V. NOVIČENKO, E. ANISIMOVAS, and G. JUZELIŪNAS, Phys. Rev. A **95**, 023615 (2017).
- [16] H. DE RAEDT and B. De RAEDT, Phys. Rev. A **28**, 3575 (1983).
- [17] Z. Yan, F. Song, and Z. Wang, Phys. Rev. Lett. **121**, 096803 (2018).
- [18] L. I. MASSARO, C. MEESE, N. P. SANDLER, and M. M. ASMAR, Phys. Rev. B **111**, 085402 (2025).