

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA FINANCEIRA

**Análise do Expoente de Lyapunov de Séries Temporais do Mercado Financeiro
Brasileiro**

Pedro Vitor de Barba

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao
Programa de Educação Continuada da Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo no
MBA em Engenharia Financeira.

São Paulo - SP - Brasil

2023

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA FINANCEIRA

**Análise do Expoente de Lyapunov de Séries Temporais do Mercado Financeiro
Brasileiro**

Pedro Vitor de Barba

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao
Programa de Educação Continuada da Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo no
MBA em Engenharia Financeira.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Eisencraft

São Paulo - SP - Brasil

2023

Resumo

Neste trabalho, estamos explorando o comportamento caótico de séries temporais de ações e de um índice do mercado financeiro brasileiro por meio do expoente de Lyapunov. Para atingir esse objetivo, avaliamos funções da biblioteca Nolds para estimar o expoente de Lyapunov. Essas funções foram testadas em quatro mapas de tempo discreto com características distintas, e seus resultados foram confrontados com valores de referência conhecidos na literatura. As funções estudadas demonstraram eficácia na determinação do sinal do expoente de Lyapunov. Assim, foi calculado o expoente de Lyapunov de quatro séries temporais do mercado de ações. O expoente foi calculado para dez janelas de cada série, a partir das quais foram extraídas estatísticas. Todas as séries apresentaram comportamento caótico.

Palavras-chave: Caos, expoente de Lyapunov, mercado financeiro.

Abstract

In this work, we are exploring the chaotic behavior of time series of stock prices and an index of the Brazilian financial market through the Lyapunov exponent. To achieve this objective, we evaluated functions from the Nolds library to estimate the Lyapunov exponent. These functions were tested on four discrete-time maps with distinct characteristics, and their results were compared with reference values known in the literature. The studied functions demonstrated effectiveness in determining the sign of the Lyapunov exponent. Thus, the Lyapunov exponent was calculated for four stock market time series. The exponent was calculated for ten windows of each series, from which statistics were extracted. All series exhibited chaotic behavior

.Keywords: Chaos, Lyapunov exponent, financial market.

Sumário

Resumo	3
Abstract	4
1. Introdução	6
2. Fundamentação teórica	7
2.1. Definições	7
2.2. O número, expoente e tempo de Lyapunov	8
2.3. Mapas geradores de sinais	10
2.3.1. Mapa logístico	11
2.3.2. Mapa Hénon	12
2.3.3. Mapa tenda inclinada	13
2.3.4. Mapa exponencial	15
2.4. Expoente de Lyapunov para séries temporais	15
2.4.1. Algoritmo de Rosenstein et al. (1993).	16
2.4.2. Algoritmo de Eckmann et al. (1986).	19
2.5. Aplicações no mercado financeiro	20
3. Metodologia e Resultados	22
3.1. Validação	22
3.2. Resultados	26
3.3. Conclusões	31
4. Conclusões	32
5. Referências bibliográficas	33

1. Introdução

O propósito deste trabalho de conclusão de curso é investigar a viabilidade de obter previsões de séries temporais do mercado financeiro brasileiro, independente do método utilizado, pelo ponto de vista da Teoria de Sistemas Dinâmicos e Caos.

Sistemas caóticos são caracterizados por sua natureza aperiódica e pela presença de Dependência Sensível às Condições Iniciais (DSCI) (Alligood et al., 1996). A DSCI implica que as trajetórias dos sinais com condições iniciais muito próximas se afastam consideravelmente à medida que são iteradas. Tal dependência pode ser quantificada pelo expoente de Lyapunov.

Pretende-se nesse trabalho determinar a presença, ou não, de caos nas séries históricas diárias da pontuação do índice IBOVESPA e no preço de fechamento diário das ações ordinárias PETR3, VALE3 e BBAS3 utilizando os métodos propostos por Rosenstein et al. (1993) e Eckmann et al. (1986) para estimar o expoente de Lyapunov.

Um estudo de caso publicado por Ogunjo (2021) avaliou séries do mercado financeiro nigeriano utilizando os mesmos métodos para determinar o expoente de Lyapunov. Deve-se ressaltar, no entanto, que não foi realizada validação prévia dos modelos computacionais empregados.

Este trabalho está dividido da seguinte forma; no Capítulo 2, são estabelecidos os conceitos e elementos que elucidam sistemas dinâmicos de tempo discreto e sinais caóticos. Adicionalmente, são introduzidos os mapas geradores de sinais que serão empregados nos capítulos subsequentes bem como a definição do expoente de Lyapunov, os métodos numéricos utilizados para sua determinação e uma breve revisão literária do tema no contexto do mercado financeiro.

No Capítulo 3, apresenta-se as validações realizadas dos modelos computacionais para os diferentes mapas de sistemas dinâmicos e posteriormente a sua implementação nas séries temporais do mercado financeiro citadas anteriormente.

Por fim, no Capítulo 4, são expostas as considerações finais, enfatizando as conclusões principais deste trabalho, além de apontar tópicos correlatos a este assunto que podem ser explorados em estudos futuros.

2. Fundamentação teórica

Este capítulo apresenta conceitos relacionados a sistemas dinâmicos e sinais caóticos. Aqui, são fornecidas definições e terminologias que serão empregadas nos capítulos subsequentes.

Na Seção 2.1, são apresentadas as definições fundamentais de sistemas dinâmicos necessárias para o desenvolvimento deste trabalho. Na Seção 2.2, é estabelecida a definição do número, expoente e tempo de Lyapunov. Na Seção 2.3, são introduzidos os mapas geradores de sinais que serão empregados no capítulo seguinte. Na Seção 2.4, são apresentados os modelos computacionais utilizados para estimar o expoente de Lyapunov em séries temporais experimentais. Por fim, na Seção 2.5, são discutidos estudos recentes que abordam a relação entre sistemas caóticos e o mercado financeiro.

2.1. Definições

Os conceitos fundamentais de sistemas dinâmicos de tempo discreto unidimensionais são abordados nessa seção. As definições apresentadas têm como referência Alligood et al (1996).

Um sistema dinâmico é caracterizado por um conjunto de estados possíveis, no qual uma regra determina o estado atual com base nos estados anteriores. Para sistemas de tempo discreto, essa regra é comumente denominada de mapa e pode ser representado por:

$$s(n + 1) = f(s(n)), \quad \text{com } n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Seja s_0 um ponto inicial e $f(\cdot)$ um mapa. Denomina-se órbita o conjunto de pontos gerados mediante a aplicação repetida da função $f(\cdot)$ a s_0 , formando assim a sequência de pontos $\{s_0, f(s_0), f(f(s_0)), \dots\}$. Essa órbita pode ser representada da seguinte maneira

$$s(n) = f^n(s_0) \quad (2)$$

onde n representa o número de iterações do mapa. Um ponto p é considerado um ponto fixo quando o resultado da função mapa é o próprio ponto p , ou seja:

$$f(p) = p \quad (3)$$

Se um ponto próximo de p leva novamente a p então diz-se que tal ponto é um ponto fixo estável ou atrator. Ou seja, se existir um $\epsilon > 0$ tal que todos os pontos na vizinhança de ϵ levam a p , $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p$, então p é um ponto fixo atrator. Por outro lado, se os pontos dessa vizinhança levarem para valores distantes de p , tem-se um ponto fixo instável ou repulsor. Resumidamente, sendo $f(\cdot)$ uma função suave (derivável em todo seu domínio), e assumindo que p é um ponto fixo de $f(\cdot)$, então:

$$\begin{aligned} \text{se } |f'(p)| < 1 &\Rightarrow p \text{ é um ponto fixo estável} \\ \text{se } |f'(p)| > 1 &\Rightarrow p \text{ é um ponto fixo instável} \end{aligned} \quad (4)$$

Certos mapas produzem órbitas periódicas, o que significa que os pontos que formam sua trajetória assumem um número finito de valores distintos, que se repetem ao longo das iterações. Assim:

$$f^k(p) = p \quad (5)$$

Portanto, p é um ponto periódico de período k , onde k é o menor inteiro para o qual a eq.(5) é válida.

Os princípios de estabilidade e instabilidade podem ser aplicados a órbitas não necessariamente periódicas através da exploração do expoente de Lyapunov, como será abordado nas próximas seções.

2.2. O número, expoente e tempo de Lyapunov

Um conceito fundamental na análise de sinais caóticos é a Dependência Sensível às Condições Iniciais. Isso implica que duas trajetórias começando em

proximidade se afastarão rapidamente, resultando em estados futuros completamente distintos a cada iteração do mapa. Com o decorrer de algumas iterações, a disparidade entre essas órbitas alcança magnitudes equiparáveis às dos próprios sinais. A implicação prática é que a previsão de longo prazo se torna impossível em um sistema assim, onde pequenas incertezas são amplificadas de maneira extremamente rápida, como ilustrado na Figura 1.

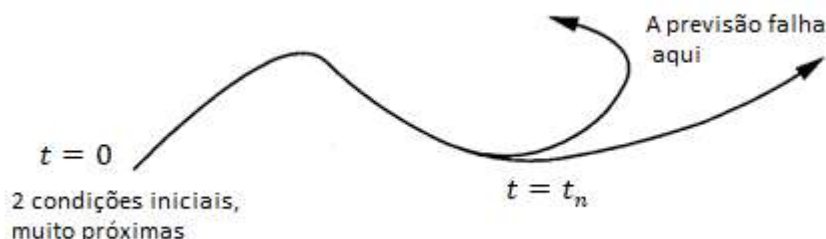


Figura 1 – Diagrama de um sistema caótico no qual a previsão se torna imprecisa.

Fonte: Adaptado de Strogatz (1994).

Uma maneira prática e eficaz de verificar a Dependência Sensível às Condições Iniciais das órbitas é por meio do número de Lyapunov. Essa métrica quantifica a taxa média de divergência entre duas órbitas que iniciam próximas. A definição do número de Lyapunov é dada por.

$$L(s_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\prod_{n=0}^{N-1} |f'(s(n))| \right)^{\frac{1}{N}} \quad (6)$$

É mais comum encontrar na literatura a utilização do expoente de Lyapunov, como $h(s_0) = \ln(L(s_0))$, temos:

$$h(s_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln(|f'(s(n))|) \right) \quad (7)$$

Para $h(s_0) > 0$ implica em um sistema de dependência sensível as condições iniciais.

Alligood et al (1996) caracteriza um sinal caótico quando esse for aperiódico e possuir expoente de Lyapunov maior que zero. A probabilidade de se obter uma órbita periódica com expoente de Lyapunov positivo é nula, uma vez que a órbita periódica seria instável. Dessa forma, esse sinal é quase sempre aperiódico (Alligood et al., 1996). Assim nesse trabalho adota-se $h(s_0) > 0$ como condição suficiente para definir um sinal caótico.

O tempo de Lyapunov, por sua vez, é uma medida do tempo que um sistema dinâmico leva para perder sua sensibilidade às condições iniciais. Em outras palavras, ele quantifica a rapidez com que as trajetórias do sistema convergem para um comportamento estável, independentemente das condições iniciais exatas. Para que a precisão final tenha um fator multiplicador $e(\sim 2,718)$ em relação a precisão da condição inicial, Cincotta (2022) define o tempo de Lyapunov como sendo

$$T_{Lyapunov} = \frac{1}{h} \quad (8)$$

Em um sistema estável, o tempo de Lyapunov é longo, indicando uma rápida convergência para um estado estável. Em um sistema instável ou caótico, o tempo de Lyapunov pode ser curto, indicando uma sensibilidade prolongada às condições iniciais.

2.3. Mapas geradores de sinais

Aqui são apresentados os mapas que geram sinais a tempo discreto que são utilizados no próximo capítulo para validar o método empregado nesse estudo. Quatro mapas com características diferentes foram escolhidos: o mapa logístico unidimensional, o mapa de Hénon bidimensional, o mapa tenda inclinada que é gerador de sinal com expoente de Lyapunov positivo e o mapa exponencial com comportamento não caótico.

2.3.1. Mapa logístico

O mapa logístico de tempo discreto é um modelo matemático usado para descrever dinâmicas populacionais, econômicas e naturais. Ele representa uma fórmula iterativa que descreve a evolução de uma variável ao longo do tempo, com base em um parâmetro de crescimento e a dependência do estado atual em relação aos estados anteriores.

O mapa logístico unidimensional é dado por:

$$s(n + 1) = rs(n)(1 - s(n)) \quad (9)$$

Esse mapa demonstra comportamentos complexos, como bifurcações, ciclos periódicos e caos, dependendo do valor do parâmetro r . Em certas condições, exibe um comportamento previsível e estável, mas à medida que r aumenta, o sistema pode passar por transições abruptas para o caos, revelando sensibilidade extrema às condições iniciais.

A Figura 2 representa o trecho da órbita do mapa logístico para $r = 3,75$, já no domínio caótico.

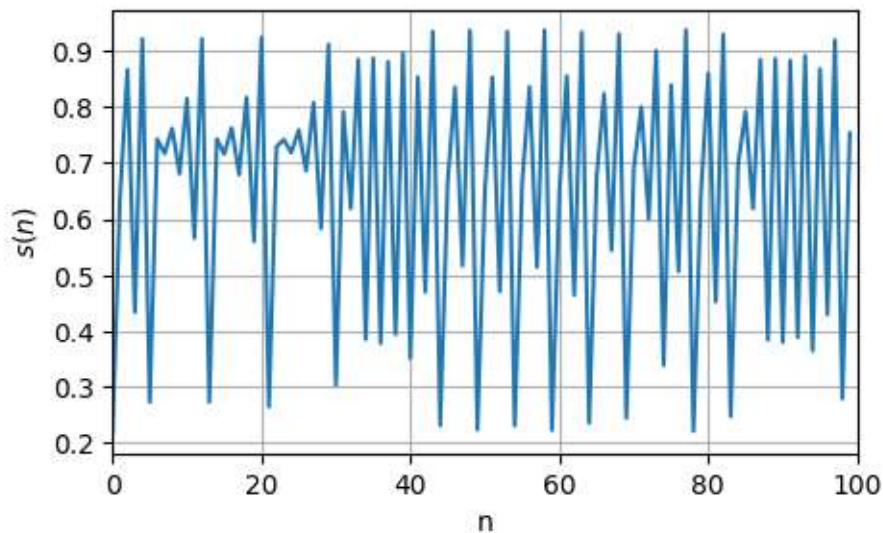


Figura 2 – Primeiras 100 observações da órbita do mapa logístico para $r = 3,75$ e $s(0) = 0,22$.

O expoente de Lyapunov para o mapa logístico é obtido através da aplicação da definição descrita na eq.(7) e seu comportamento ao longo de r é bem conhecido na literatura (Olsen and Degn, 1985; Strogatz, 1994; Alligood et al, 1996).

2.3.2. Mapa Hénon

O mapa de Hénon é um sistema dinâmico discreto em duas dimensões que exibe comportamento caótico. Este mapa é utilizado em diversos campos, incluindo física, matemática e biologia, para modelar fenômenos complexos.

As equações do mapa de Hénon são:

$$s(n+1) = \begin{bmatrix} s_1(n+1) \\ s_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2(n) + 1 - as_1^2(n) \\ bs_1(n) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Os parâmetros $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ são constantes que controlam o comportamento do sistema. Para a construção das órbitas da Figura 3.a e 3.b foi adotado $a = 1,4$ e $b = 0,3$. Em a e b temos trechos das orbitas para os parâmetros citados dada e condições inicial igual a zero.

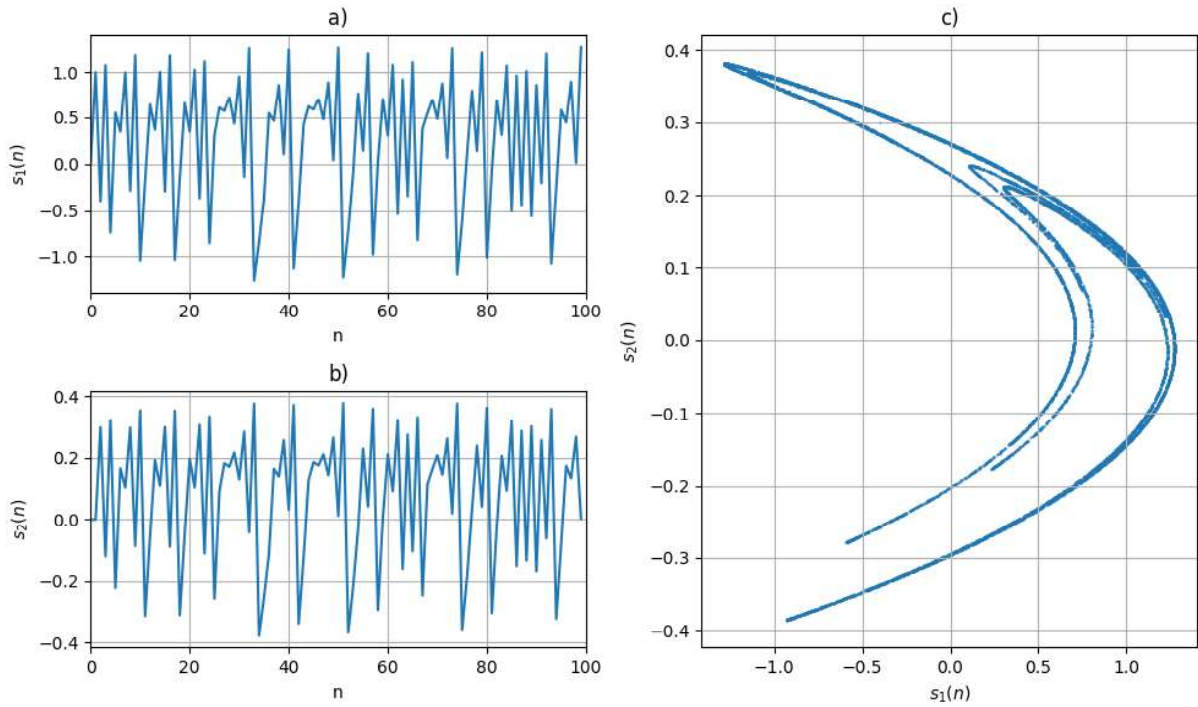


Figura 3 – Para os parâmetros do mapa de Hénon iguais a $a = 1,4$, $b = 0,3$ e condições inicial $s(0,0) = (0,0)$. a) e b) representam as 100 primeiras observações da órbita bidimensional do mapa de Hénon e c) o atrator de Hénon.

O maior expoente de Lyapunov para o atrator da figura 3.c é calculado numericamente no exemplo apresentado por Aligod (1996) e resulta em um valor igual a 0,42.

2.3.3. Mapa tenda inclinada

O Mapa tenda inclinada é dado por:

$$s(n+1) = \begin{cases} \frac{2}{\alpha+1}s(n) + \frac{1-\alpha}{\alpha+1}, & -1 \leq s(n) \leq \alpha \\ \frac{2}{\alpha-1}s(n) - \frac{\alpha+1}{\alpha-1}, & \alpha \leq s(n) \leq 1 \end{cases} \quad (11)$$

O parâmetro α está contida no domínio $[-1,1]$ e determina a localização do pico da tenda. A Figura 4 representa um trecho da órbita do mapa para $\alpha = 0,6$ e condição inicial $s(0) = 0,2$.

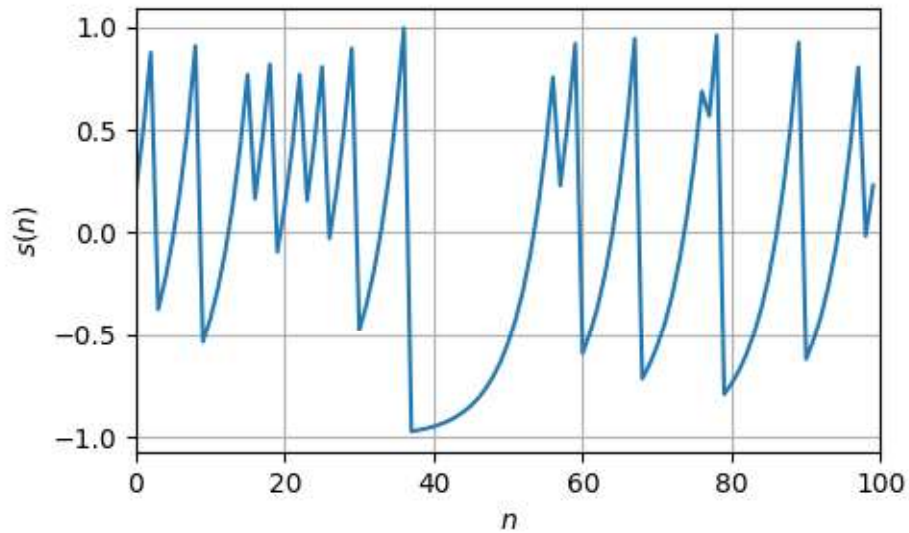


Figura 4 – Primeiras 100 observações da órbita do mapa tenda inclinada para $\alpha = 0,6$ e $s(0) = 0,2$.

Como o mapa da tenda inclinada consiste em dois segmentos lineares com inclinações de sinais opostos, e a derivada da função mapa em relação a $s(n)$ em cada um desses segmentos depende exclusivamente de α . Dado que a distribuição dos pontos nas trajetórias desse mapa é uniforme no intervalo $[-1,1]$, a probabilidade de um ponto ocorrer em cada um desses intervalos é proporcional ao comprimento deles, sendo representada por $\frac{(\alpha+1)}{2}$ e $\frac{(\alpha-1)}{2}$, respectivamente. Portanto, o cálculo do número de Lyapunov para esse mapa pode ser realizado utilizando uma média geométrica. Assim, temos o cálculo do expoente de Lyapunov para o mapa da tenda inclinada:

$$h = \frac{\alpha + 1}{2} \ln\left(\frac{2}{\alpha + 1}\right) + \frac{1 - \alpha}{2} \ln\left(\frac{2}{1 - \alpha}\right) \quad (12)$$

Observa-se que, nas órbitas do mapa da tenda inclinada, o expoente de Lyapunov é exclusivamente dependente do parâmetro α , e que, para todos os valores de α dentro do intervalo $[-1,1]$, o expoente de Lyapunov é positivo. Isso implica que o mapa produzirá sempre comportamento caótico para todos os valores possíveis de α .

2.3.4. Mapa exponencial

O mapa exponencial é descrito pela expressão

$$s(n+1) = ae^{-s(n)} \quad (13)$$

onde o parâmetro a representa a amplitude máxima do sinal que decai a cada iteração. A Figura 5 apresenta o trecho da órbita do mapa exponencial para $a = 2,5$ e condição inicial $s(0) = 0$.

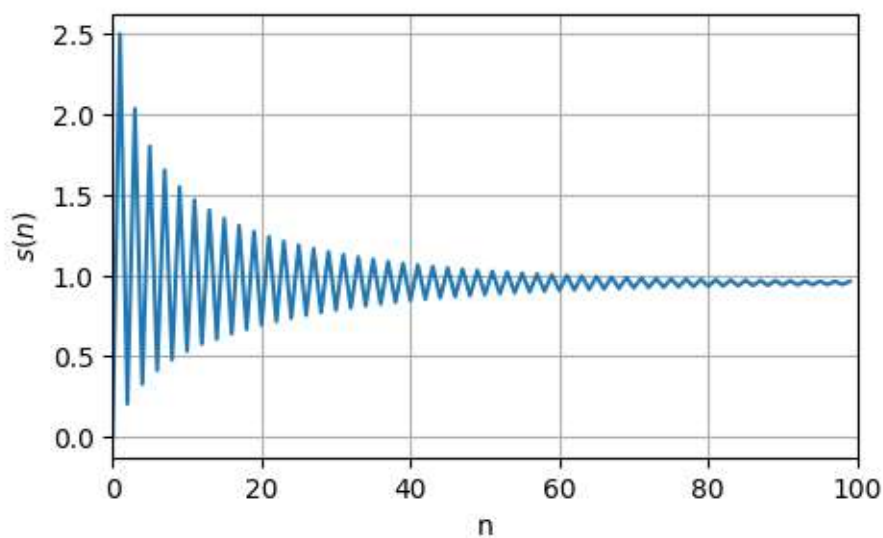


Figura 5 – Primeiras 100 observações da órbita do mapa exponencial para $a = 2,5$ e $s(0) = 0,0..$

Pelo caráter suave da curva do mapa exponencial o expoente de Lyapunov pode ser obtido através da aplicação da definição descrita na eq.(7). Devido à convergência para um ponto fixo e previsibilidade do sinal o expoente de Lyapunov é sempre negativo para todo o domínio do parâmetro a .

2.4. Expoente de Lyapunov para séries temporais

Diferentemente da definição previamente descrita, uma série temporal experimental nem sempre pode ser representada por uma função suave, derivável em

todo o seu domínio e, conseqüentemente, ter seu expoente de Lyapunov determinado de forma analítica pela eq.(7).

O interesse em calcular o expoente de Lyapunov em séries temporais experimentais é compartilhado por diversas áreas do conhecimento. Tanto é que na literatura encontramos várias propostas de métodos computacionais para sua determinação como os apresentados por Wolf (1985), Sano e Sawada (1985), Eckmann et al. (1986), Rosenstein et al. (1993) e Kantz (1994).

Este trabalho se aprofundou na aplicação das metodologias desenvolvidas por Rosenstein et al. (1993) e Eckmann et al. (1986), devido à sua facilidade de implementação por meio da linguagem Python utilizando o módulo Nolds (Schölzel, 2019). Tais métodos serão detalhados na sequência.

2.4.1. Algoritmo de Rosenstein et al. (1993).

O algoritmo desenvolvido por Rosenstein et al. (1993) tem como propósito estimar o expoente de Lyapunov para séries temporais experimentais. Sua base reside na análise das trajetórias próximas no espaço de fase (espaço multidimensional que representa as variáveis do sistema) ao longo do tempo. A Figura 6 representa uma simplificação do algoritmo:

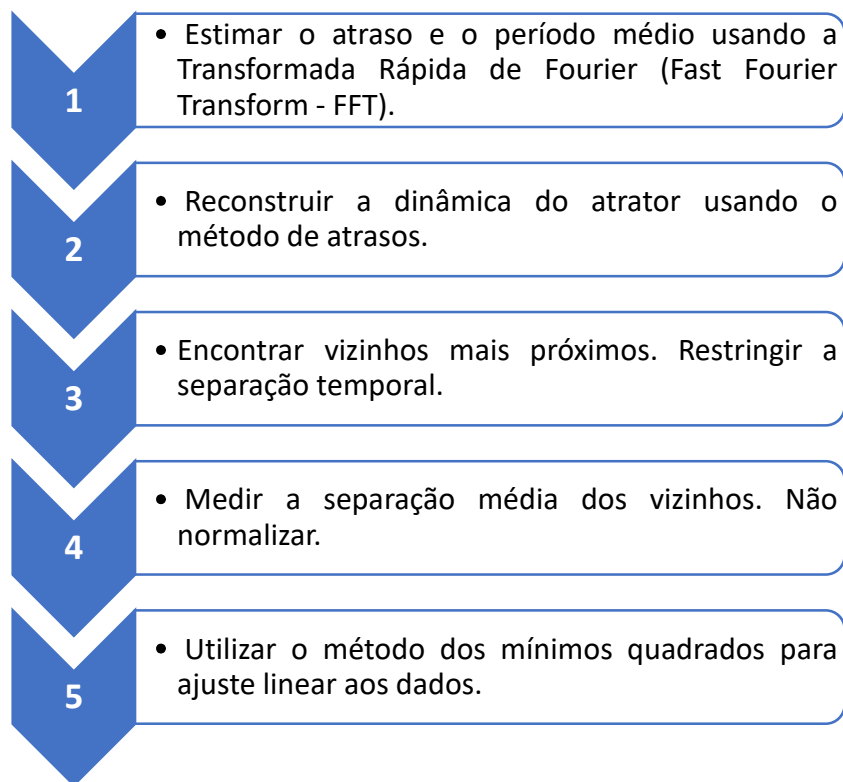


Figura 6 – Fluxograma algoritmo de Rosenstein.

Fonte: Adaptado de Rosenstein et al. (1993).

Esta é uma visão simplificado que enfatiza a compreensão intuitiva dos conceitos, não abordando o rigor matemático. Para uma análise mais aprofundada e uma compreensão completa dos detalhes algorítmicos e fundamentos matemáticos, recomenda-se consultar a referência Rosenstein et al. (1993).

A função `luap_r` do módulo Python Nolds implementa o método de Rosenstein et al. (1993) com o propósito de calcular o maior expoente de Lyapunov. Para uma compreensão completa desta função, é imperativo aprofundar o entendimento dos parâmetros e argumentos disponíveis, juntamente com suas configurações padrões (*built-in*).

O único parâmetro obrigatório da função corresponde à série temporal, a qual deve ser fornecida sob a forma de um objeto iterável contendo variáveis do tipo *float*. Exemplos de tais objetos incluem listas, tuplas ou dicionários de variáveis *float*.

Na Tabela 1, apresenta de maneira estruturada os parâmetros opcionais, suas definições correspondentes e os valores padrões associados.

Tabela 1 – Argumentos função `lyap_r`, adaptado de Schölzel (2019).

Argumentos não obrigatórios	Definição	Valor padrão
<code>emb_dim</code>	dimensão para incorporação de atraso	10
<code>lag</code>	atraso	<i>None</i>
<code>min_tsep</code>	separação temporal mínima entre dois “vizinhos”	<i>None</i>
<code>tau</code>	tamanho do passo entre pontos de dados na série temporal, em segundos	1
<code>min_neighbors</code>	se lag for vazio, a busca por um lag adequado será interrompida quando o número de vizinhos em potencial para um vetor cair abaixo de <code>min_neighbors</code>	20
<code>trajectory_len</code>	o tempo (em número de pontos de dados) para seguir as trajetórias de distância entre dois pontos vizinhos	20
<code>fit</code>	o método de ajuste a ser usado para o ajuste de linha	<i>'RANSAC'</i>
<code>debug_plot</code>	Argumento booleano que se for configurado como verdadeiro retorna um gráfico simples da etapa final de ajuste.	<i>False</i>
<code>debug_data</code>	Se verdadeiro, dados de depuração serão retornados juntamente com o resultado.	<i>False</i>
<code>plot_file</code>	se <code>debug_plot</code> for configurado como verdadeiro e <code>plot_file</code> não for vazio, o gráfico será salvo com o nome de arquivo fornecido em vez de mostrá-lo diretamente no <i>prompt</i> de comando.	<i>None</i>
<code>fit_offset</code>	negligencia as primeiras iterações	0

Por fim, a função então retorna uma estimativa do maior expoente de Lyapunov.

2.4.2. Algoritmo de Eckmann et al. (1986).

Na Figura 7 é apresentado uma explicação sucinta do algoritmo proposto por Eckmann et al., para uma análise mais aprofundada e uma compreensão completa dos detalhes algorítmicos e fundamentos matemáticos, recomenda-se consultar a referência Eckmann et al. (1993).

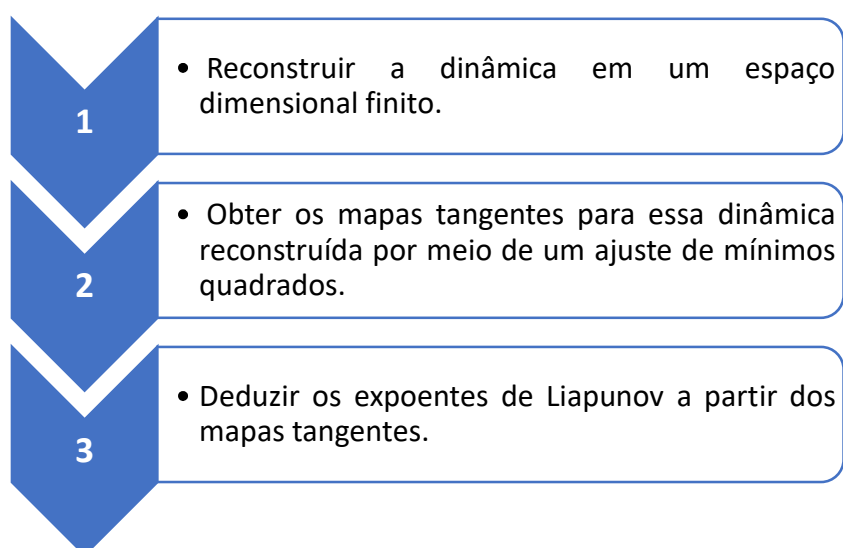


Figura 7 - Fluxograma algoritmo de Eckmann

Fonte: Adaptado de Eckmann et al. (1993).

A fim de calcular o expoente de Lyapunov, a função `luap_e` do módulo `Nolds` implementa o método descrito por Eckmann et al. (1993). Para uma compreensão abrangente dessa função, é essencial aprofundar o entendimento dos seus parâmetros e argumentos disponíveis, assim como de suas configurações padrões incorporados.

A função exige apenas um parâmetro obrigatório, que é a série temporal. Esta série deve ser fornecida como um objeto iterável contendo variáveis do tipo float. Exatamente com a função anterior.

Na Tabela 2, são apresentados de forma organizada os parâmetros opcionais, suas respectivas definições e os valores padrões utilizados.

Tabela 2 - Argumentos função `lyap_e`, adaptado de Schölzel (2019).

Argumentos não mandatórios	Definição	Valor padrão
<code>emb_dim</code>	dimensão para incorporação de atraso	10
<code>matrix_dim</code>	dimensão da matriz	4
<code>min_nb</code>	número mínimo de vizinhos	<i>None</i>
<code>min_tsep</code>	intervalo temporal mínimo entre dois “vizinhos”	0
<code>tau</code>	tamanho do passo dos dados em segundos	1
<code>debug_plot</code>	Se verdadeiro, será exibida uma matriz de histograma das estimativas individuais.	<i>False</i>
<code>debug_data</code>	Se verdadeiro, dados de depuração serão retornados juntamente com o resultado.	<i>False</i>
<code>plot_file</code>	Se <code>`debug_plot`</code> for verdadeiro e <code>`plot_file`</code> não for Nenhum, o gráfico será salvo com o nome de arquivo fornecido, em vez de ser exibido diretamente por meio de <code>`plt.show()`</code> .	<i>None</i>

Com os valores padrões a função então retorna uma estimativa do expoente de Lyapunov pelo método proposto por Eckmann et al. (1993).

2.5. Aplicações no mercado financeiro

O mercado financeiro, caracterizado por sua complexidade e dinâmica intrínseca, tem sido objeto de inúmeras pesquisas e estudos que buscam compreender e prever seu comportamento. Dentre as diversas ferramentas e métodos analíticos empregados nesse contexto, destaca-se o Expoente de Lyapunov, que tem encontrado aplicabilidade crescente no âmbito financeiro. Os próximos artigos apresentados oferecem exemplos de como essa medida tem sido implementada em diferentes contextos do mercado financeiro.

O trabalho de Mishra (2011) utiliza o expoente de Lyapunov para medir a presença de caos nas séries de taxas de retorno dos índices do mercado de ações indiano. O estudo utiliza o algoritmo desenvolvido por Wolf (1985) para calcular o espectro de expoentes de Lyapunov e determinar se há pelo menos um expoente positivo, o que é considerado uma definição operacional de um sistema caótico. Os resultados indicam que as séries de retorno do Bank Nifty e CNX IT exibem um processo gerador não linear caótico.

O artigo escrito por Lahmiri (2016) investiga a presença de caos nos mercados de petróleo bruto (barril do tipo Brent e WTI) antes e depois da crise financeira internacional de 2008. O estudo conclui que não há evidência de caos nos preços e retornos, mas há forte evidência de dinâmicas caóticas nas volatilidades do barril do tipo Brent e WTI após a crise.

Soloviev (2020) propõe que o expoente de Lyapunov pode ser usada como indicador-precursor de eventos críticos no mercado financeiro e indicar dinâmicas caóticas. Para isso, os autores empregam os métodos propostos por Sano e Sawada (1985), Eckmann et al. (1986), Rosenstein et al. (1993) para calcular os expoentes de Lyapunov. Os resultados empíricos foram obtidos a partir do índice DAX dentro de janelas móveis com amostras de tamanho 500 e 1000 dias. Resultado experimental demonstrou evidência de dinâmica caótica na série estudada.

Ogunjo (2021) utiliza o expoente de Lyapunov para confirmar a natureza caótica dos preços de retorno das ações financeiras na Bolsa de Valores da Nigéria. Os autores calcularam o expoente de Lyapunov usando dois algoritmos diferentes, Eckmann et al. (1986) e Rosenstein et al. (1993), e descobriram que ambos produziram resultados semelhantes. A existência de caos sugere que modelos não lineares podem ser usados para explorar a rentabilidade de curto prazo das ações.

3. Metodologia e Resultados

Esse capítulo destina-se a descrição da metodologia utilizada para validar os algoritmos de Eckmann et al. (1986) e de Rosenstein et al. (1993) implementados por Schölzel (2019) para determinar o expoente de Lyapunov e consequentemente inferir sobre a natureza caótica de uma série temporal.

Após essa validação o expoente de Lyapunov foi estimado de séries históricas do índice BOVESPA, PETR3, VALE3 e BBSA3. Testes estatísticos foram aplicados para avaliar o comportamento caótico das séries.

3.1. Validação

Utilizando-se das orbitas de mapas cujos comportamentos do expoente de Lyapunov são conhecidos na literatura, validou-se os algoritmos da biblioteca Nolds (Schölzel, 2019).

Foram selecionados quatro mapas de características distintas; o mapa logístico unidimensional, o mapa de Hénon bidimensional, o mapa tenda inclinada onde o expoente de Lyapunov é positivo e um mapa exponencial de comportamento não caótico.

Para o mapa logístico foram calculados o expoente de Lyapunov de 1000 órbitas diferentes variando o parâmetro r entre 1 a 4. Cada órbita, por sua vez, foi composta por 1000 observações. Dessas foram obtidos os expoentes de Lyapunov com as duas funções disponíveis no pacote Nolds do Python, `lyap_r` que implementa o método desenvolvido por Rosenstein et al. (1993) e a função `lyap_e` que utiliza a técnica criada por Eckmann et al. (1986). Ambas funções foram aplicadas com seus parâmetros padrões. Como referência para cada valor de r foi substituída a eq.(9) na eq.(7) com 1100 observações, onde as 100 primeiras iterações foram desprezadas para ignorar efeito transiente, para então ser calculado o expoente de Lyapunov de referência do mapa logístico. Na Figura 8 apresenta as duas funções; `lyap_r`, `lyap_e` e a curva de referência.

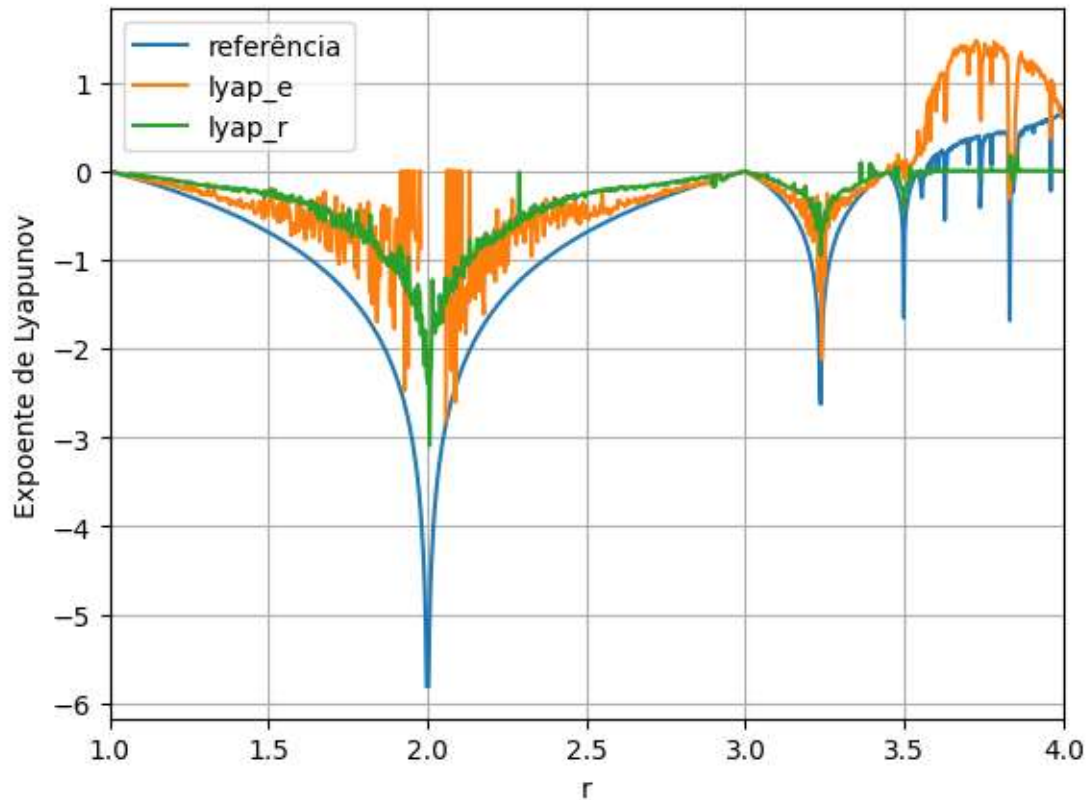


Figura 8 – Comparações entre métodos para obter o expoente de Lyapunov do mapa logístico.

A curva de referência já é conhecida na literatura, como já citado. Vale observação que as três curvas apresentam o mesmo sinal para o expoente de Lyapunov quase que na totalidade do domínio de r . Quanto as suas magnitudes são visíveis a divergência entre as funções. Observa-se também que na fase caótica do mapa a função `lyap_e` acentua sua intensidade em comparação a referência enquanto que a função `lyap_r` atenua sua magnitude em relação a referência, aproximando-se a zero.

O mapa bidimensional de Hénon foi validado utilizando como referência o exemplo numérico disponibilizado por Alligood et al (1996) que assumiu os parâmetros da eq.(10) como $a = 1,4$ e $b = 0,3$ e teve como resposta para o maior expoente de Lyapunov $h_{referência} = 0,47$. Na sequência foram geradas as duas orbitas S_1 e S_2 , cada uma com 10.000 observações nas quais foram aplicadas as funções `lyap_e` e `lyap_r`, novamente, ambas com seus parâmetros padrões. Os resultados obtidos foram:

$$h_{lyap_e} = 1,20 \quad (14)$$

$$h_{lyap_r} = 0,27 \quad (15)$$

Como no caso logístico unidimensional as duas funções apresentaram o mesmo sinal que a referência, mas com magnitudes diferentes. A função $lyap_e$ acentua e a função $lyap_r$ atenua o resultado.

O mapa tenda inclinada apresenta uma particularidade em que toda orbita para qualquer α pertencente ao intervalo de -1 a 1 da eq.(11) o expoente de Lyapunov é positivo. Assim nesse intervalo foram obtidos 1.000 valores distintos de α . Para cada α uma orbita de 1.000 observações foi extraída e de cada orbita um expoente de Lyapunov foi determinado com as duas funções. O valor de referência foi obtido através da eq.(12) descrita anteriormente. A comparação é apresentada na Figura 9 que segue:

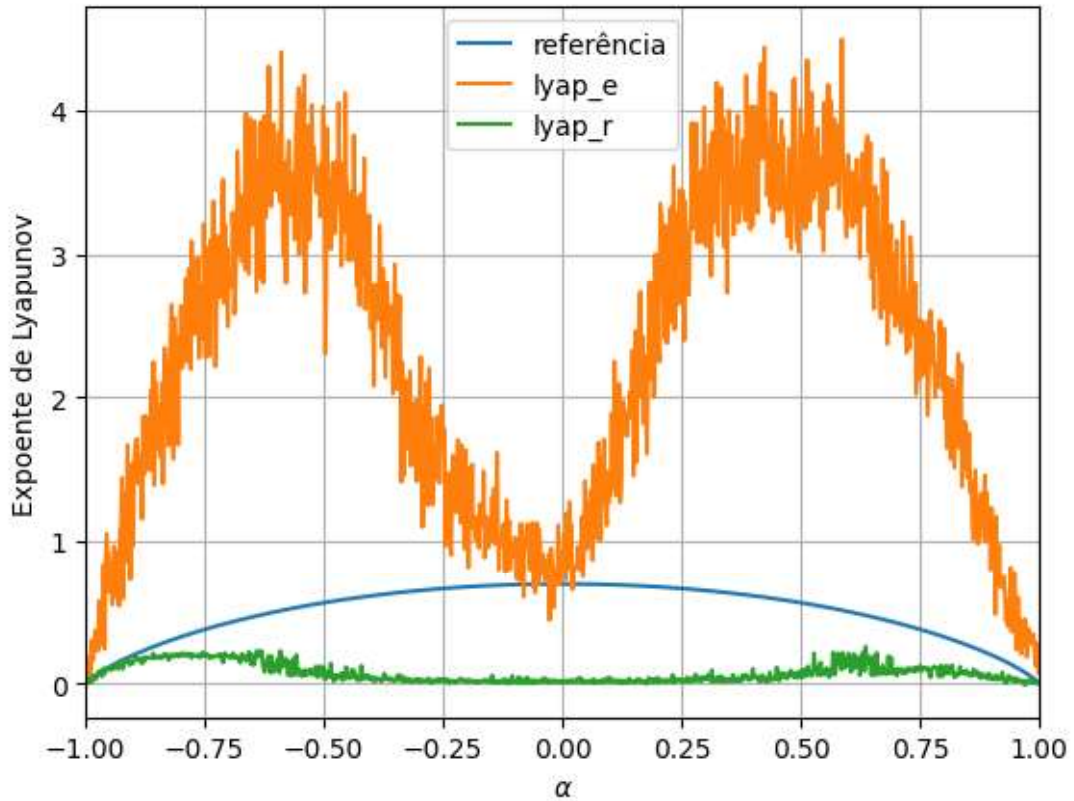


Figura 9 – Comparações entre os métodos para obter o expoente de Lyapunov do mapa tenda inclinada.

Nota-se o mesmo sinal entre a curva de referência e as curvas das duas funções, assim como a diferença de magnitude do expoente de Lyapunov. Novamente a função $lyap_e$ acentua o resultado enquanto a função $lyap_r$ atenua o mesmo.

A particularidade do mapa exponencial é que suas orbitas geram sinais previsíveis e consequentemente expoente de Lyapunov negativos. Com orbitas foram obtidas variando a de 2 a 3. Cada orbita contém 1.100 observações da onde foram descartadas as 100 primeiras observações para eliminar o efeito transiente. Na Figura 10 a curva de referência foi obtida a partir da aplicação da eq.(13) na eq.(7) e as funções $lyap_e$ e $lyap_r$ a partir da biblioteca Nolds.

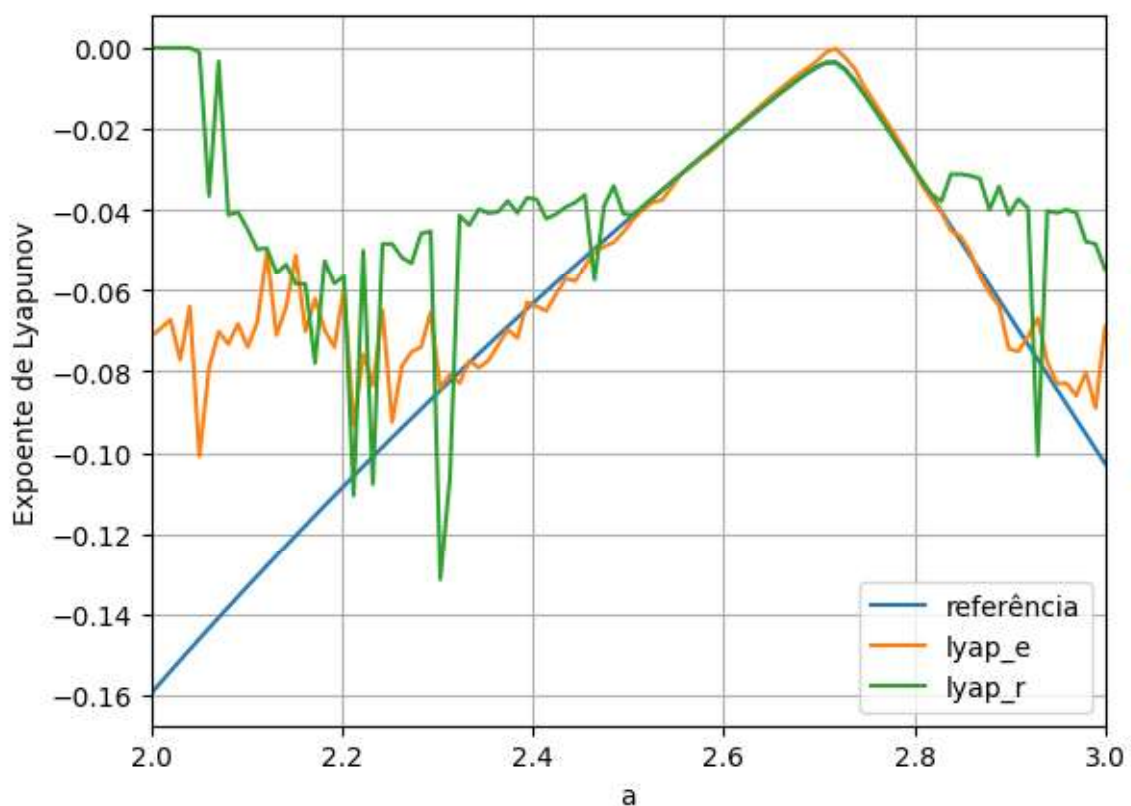


Figura 10 – Comparações entre os métodos para obter o expoente de Lyapunov do mapa exponencial.

Observa-se que o sinal das três curvas se mantiveram o mesmo ao longo de todo o domínio. A magnitude de $lyap_e$ é menos acentuada que os casos vistos anteriormente. Já a função $lyap_r$ no início e no final do domínio passa por um período ruidoso. Outra constatação notável é a convergência das três curvas no intervalo aproximado entre $2,5 < a < 2,8$.

O interesse principal desse trabalho é verificar, ou não o sinal do expoente de Lyapunov. Para esse objetivo a função `lyap_e` se mostrou mais assertiva que a função `lyap_r` uma vez que ela parece acentuar a magnitude do expoente de Lyapunov quando ele é positivo ou negativo quando comparado com a curva de referência de cada mapa. Por isso, a função `lyap_e` foi a selecionada e será aplicada na sequencia desse estudo.

3.2. Resultados

Para exemplificar a estimação do expoente de Lyapunov de séries temporais do mercado financeiro brasileiro foram selecionados um índice (IBOVESPA) e três ações (BBAS3, PETR3 e VALE3) de setores distintos (bancário, petróleo e gás e mineração respectivamente). Todos três papeis de alta liquidez para garantir o maior número de observações.

As análises utilizaram os preços de fechamento do período entre 01 de janeiro de 2000 e 31 de outubro de 2023 obtidos através da biblioteca Python `yfinance`. Para fins estatísticos esse período foi dividido em dez janelas com o mesmo número de observações (>500 observações por janela). De cada janela foi calculado o expoente de Lyapunov com a função `lyap_e` do pacote `Nolds`. A normalidade da distribuição de expoentes por janela foi verificada pelo teste de Shapiro. O teste T de *student* para média com hipótese nula da média ser igual a zero ($H_0 = 0$) foi aplicado com nível de significância de 95%. A média e o desvio padrão das dez janelas foi inferido como o expoente de Lyapunov da série completa. Por fim, mesmo sabendo da deficiência da função em mensurar a magnitude do expoente de Lyapunov, o tempo de Lyapunov foi estimado pela eq. (8).

A Figura 11.a representa a série do índice IBOVESPA e as suas dez janelas de análises. Para o período completo foi coletado 5.712 observações. O expoente de Lyapunov estimado para essa série foi de $0,079 \pm 0,008$.

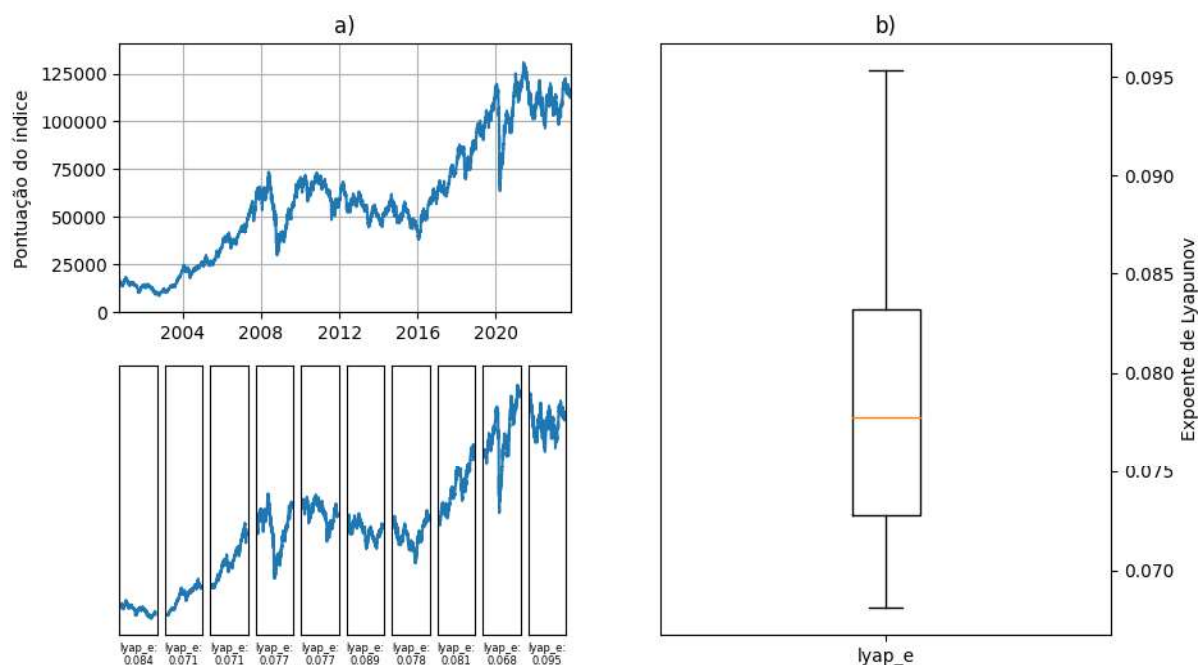


Figura 11 – Avaliação do IBOVESPA a) Série temporal e suas respectivas 10 janelas. b) *boxplot* dos expoentes de Lyapunov por janela.

Os expoentes das janelas apresentaram distribuição normal com estatística do teste de Shapiro igual a 0,955 e p-valor de 0,730. A hipótese nula foi rejeitada pelo teste T de *Student* com valor da estatística de 29,731 e p-valor menor que 0,000, logo a média da distribuição não pode ser equiparada a zero, ou seja, os valores do expoente encontrados estão longe de zero como pode ser visto no *boxplot* da Figura 11.b. O tempo de Lyapunov para o índice IBOVESPA foi de 12,66 dias.

Na Figura 12.a, está representada a série da ação ordinária BBAS3, juntamente com as dez janelas analisadas. Ao longo do período completo, foram coletadas 5.709 observações. O expoente de Lyapunov estimado para esse ativo foi de 0,086 com uma margem de erro de $\pm 0,015$.

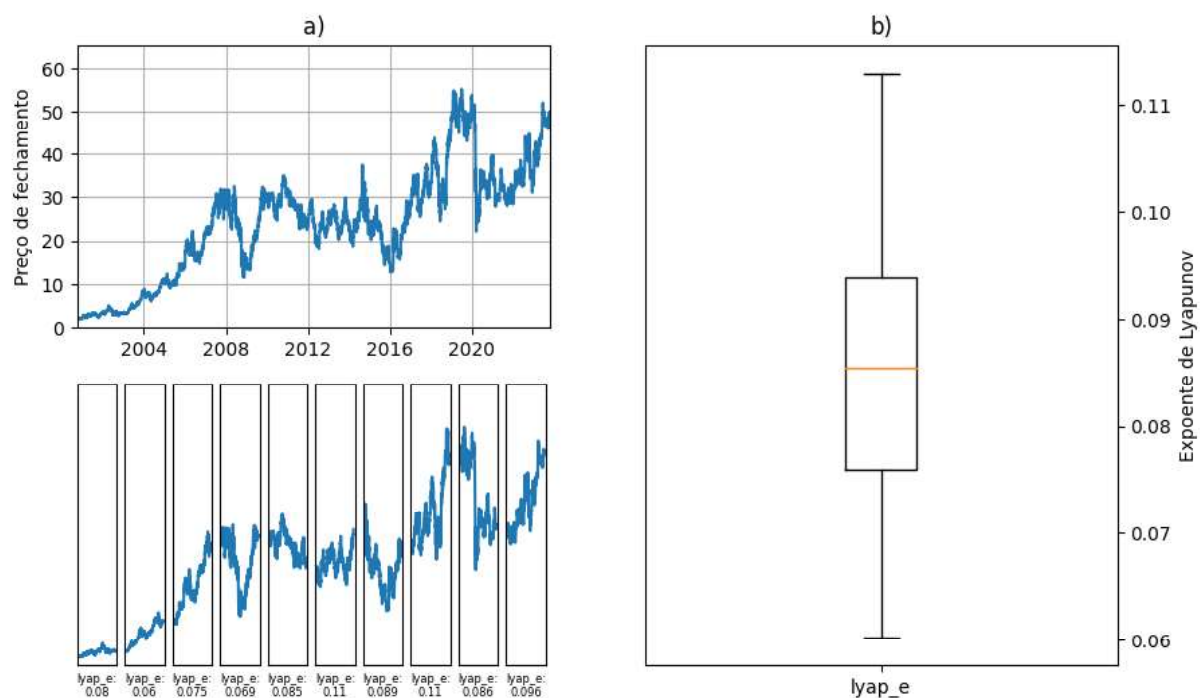


Figura 12 - Avaliação de BBAS3 a) série temporal e suas respectivas 10 janelas. b) *boxplot* dos expoentes de Lyapunov por janela.

O teste de Shapiro com estatística de 0,984 e p-valor de 0,983 indicou que os expoentes das janelas apresentaram uma distribuição normal. Entretanto, a hipótese nula foi rejeitada pelo teste T de *Student*, evidenciado pelo valor da estatística de 16,829 e um p-valor igual a 0,000. Isso implica que a média da distribuição não é equivalente a zero, ou seja, os valores dos expoentes encontrados estão significativamente afastados de zero, como pode ser observado no *boxplot* da Figura 12.b. O tempo de Lyapunov para a ação BBAS3 foi de 11,63 dias.

O gráfico da Figura 13.a exibe a série temporal da ação ordinária PETR3, junto com as análises das dez janelas. Ao longo do período completo, foram coletadas 5.724 observações. O expoente de Lyapunov estimado para esse ativo foi de 0,083, com um desvio padrão de $\pm 0,011$.

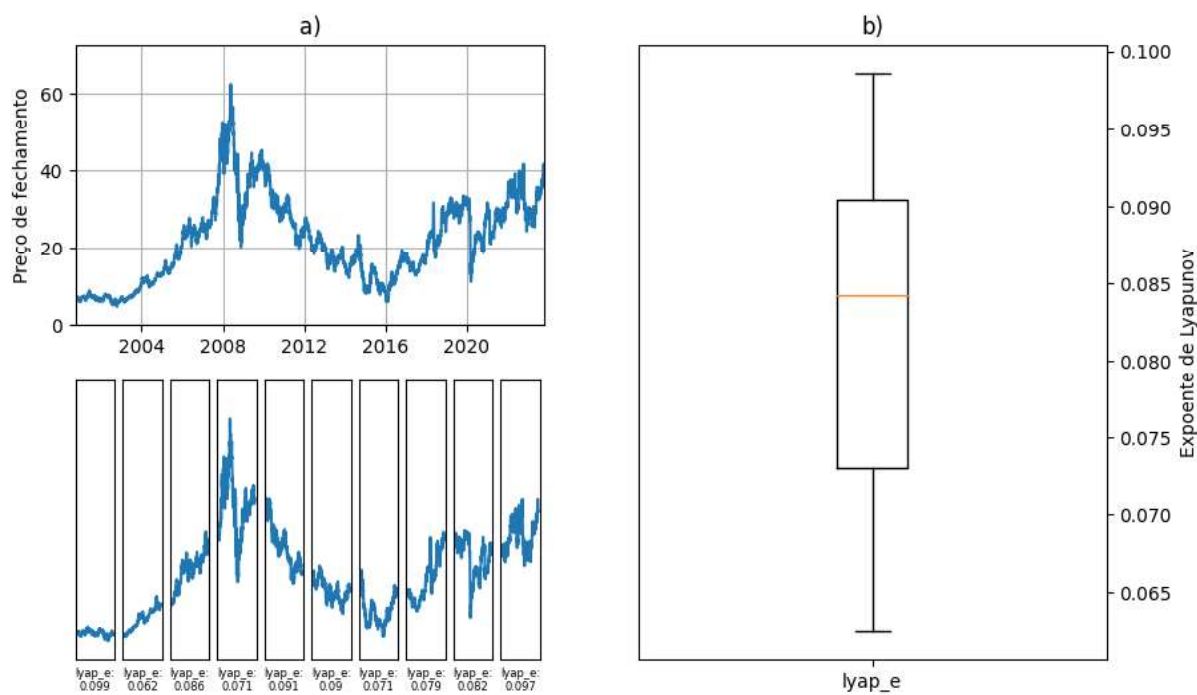


Figura 13 - Avaliação de PETR3 a) série temporal e suas respectivas 10 janelas. b) *boxplot* dos expoentes de Lyapunov por janela.

O resultado do teste de Shapiro, com uma estatística de 0,953 e um p-valor de 0,705, sugere que os expoentes das janelas exibem uma distribuição normal. Por outro lado, o teste T de *Student* rejeitou a hipótese nula, indicado pelo valor da estatística de 21,823 e um p-valor menor que 0,000. Isso significa que a média da distribuição não é igual a zero, implicando que os valores dos expoentes encontrados estão significativamente distantes de zero, como é evidenciado no *boxplot* da Figura 13.b. O tempo de Lyapunov estimado para a ação PETR3 foi de 12,05 dias.

O gráfico na Figura 14.a mostra a série temporal da ação ordinária VALE3, incluindo análises das dez janelas. Durante todo o período avaliado, foram registradas 5.791 observações. O expoente de Lyapunov estimado para esse ativo foi de 0,085, com um desvio padrão de $\pm 0,014$.

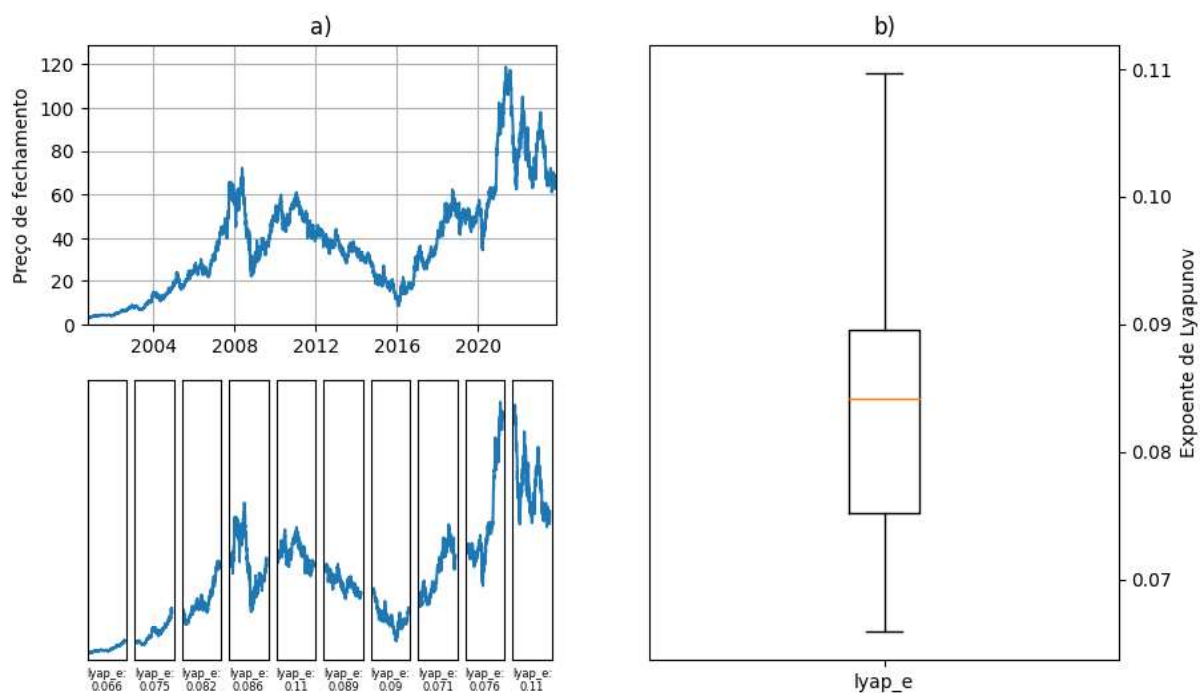


Figura 14 - Avaliação de VALE3 a) série temporal e suas respectivas 10 janelas. b) *boxplot* dos expoentes de Lyapunov por janela.

Os expoentes das janelas exibiram uma distribuição normal, com a estatística do teste de Shapiro atingindo 0,916 e um p-valor de 0,321. No entanto, a hipótese nula foi rejeitada pelo teste T de *Student*, evidenciado pelo valor da estatística de 18,296 e um p-valor menor que 0,000. Isso implica que a média da distribuição não é equivalente a zero, indicando que os valores dos expoentes encontrados estão significativamente distantes do limite para ser não ser considerado caótico, como demonstrado no *boxplot* da Figura 14.b. O tempo de Lyapunov resultante para a ação VALE3 foi de 11,76 dias.

3.3. Conclusões

Neste capítulo mostrou-se a possibilidade de determinar o sinal do expoente de Lyapunov para séries temporais do mercado financeiro brasileiro através da função `lyap_e` da biblioteca Nolds.

A Tabela 3 sintetiza os resultados obtidos na seção anterior para as 4 séries temporais avaliadas.

Tabela 3 – Resumo dos resultados

Série	Número de observações	Expoente de Lyapunov	Desvio padrão	Teste Shapiro	Teste T de Student	Tempo Lyapunov
IBOVESPA	5.712	0,079	$\pm 0,008$	0,955 p-valor = 0,730	29,731 p-valor < 0,000	12,66 dias
BBAS3	5.709	0,086	$\pm 0,015$	0,984 p-valor = 0,983	16,829 p-valor < 0,000	11,63 dias
PETR3	5.724	0,083	$\pm 0,011$	0,953 p-valor = 0,705	21,823 p-valor < 0,000	12,05 dias
VALE3	5.791	0,085	$\pm 0,014$	0,916 p-valor = 0,321	18,296 p-valor < 0,000	11,76 dias

Esses resultados sinalizam a dependência sensível as condições iniciais dessas séries, o que implica um comportamento caótico para todas as séries.

4. Conclusões

Como apresentado, vários estudos internacionais abordam a teoria de sistemas dinâmicos caóticos nas mais diversas áreas do mercado, porém, poucos estudos sobre o mercado financeiro brasileiro são encontrados. Está é uma lacuna importante a ser preenchida diante do aumento da utilização de modelos de previsões de séries temporais no mercado de capitais nacional e é a motivação desse trabalho.

Pôde-se verificar a eficácia da função `lyap_e` e `lyap_r` do módulo Nolds para calcular o expoente de Lyapunov e determinar a dependência sensível a condições iniciais de mapas cujas caracterizações são conhecidas. Em todos os mapas avaliados as duas funções acertam a polaridade do expoente de Lyapunov. Porém, nota-se uma diferença na magnitude do valor do expoente encontrado quando as duas funções são comparadas entre si, e com os valores de referências.

Com isso, observou-se a dependência sensível a condições iniciais em importantes séries do mercado financeiro brasileiro. A função `lyap_e` foi utilizada para determinar o expoente de Lyapunov em dez janelas de cada série. Estatisticamente todas as séries apresentaram distribuição normal para os expoentes calculados. Todas as séries avaliadas tiveram a hipótese nula rejeitada no teste de hipótese t de *Student* para a média nula. Esses resultados levam a concluir que as quatros séries selecionadas são caóticas.

A importância desse resultado pode ajudar tomadores de decisões na hora de investir tempo e recursos em modelos de previsões de séries caóticas como as estudadas aqui. Não importa os esforços empregados o resultado não compensará a melhora na precisão obtida independente do modelo de previsão de séries temporais utilizado.

Como sugestão para trabalhos futuros fica a possibilidade de realizar uma análise estatística exploratório do expoente de Lyapunov para todos os ativos do mercado financeiro brasileiro com as funções da biblioteca Nolds.

5. Referências bibliográficas

A. Wolf, J. B. Swift, and H. L. a. Swinney, "Determining Lyapunov exponents from a time series," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 16, no. 3, pp. 285–317, 1985.

C. Schölzel, "Nonlinear measures for dynamical systems, " Zenodo, Geneva, 2019.

D. M. Kato, "Análise espectral de sinais caóticos gerados por mapas unidimensionais." 2008.

H. Kantz, "A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series." *Physics letters A*, 185.1 pp.77-87, 1994.

J. P. Eckmann, S. O. Kamphorst, D. Ruelle, and S. Ciliberto, "Liapunov exponents from time series," *Physical Review A*, vol. 34, no. 6, pp. 4971–4979, 1986.

K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke, *Chaos - an introduction to dynamical systems*. New York: Springer, 1996.

L. F. Olsen, H. Degn, "Chaos in biological systems," *Quarterly reviews of biophysics* 18.2, 1985.

M. Sano, Y. Sawada, "Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series," *Phys. Rev. Lett.* 55 (10) 1082, 1985.

M. T. Rosenstein, J. J. Collins, and C. J. De Luca, "A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 65, no. 1, pp. 117–134, 1993.

P. M. Cincotta, C. M. Giordano, I. I. Shevchenko, "Revisiting the relation between the Lyapunov time and the instability time," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol 430, 2022,

R. K. Mishra, S. Sehgal, N.R. Bhanumurthy, "A search for long-range dependence and chaotic structure in Indian stock market, " *Review of Financial Economics*, Volume 20, Issue 2, 2011,

S. H. Strogatz, Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering. CRC press, 2018.

S. Lahmiri, "A study on chaos in crude oil markets before and after 2008 international financial crisis, " Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Volume 466, 2017,

S.T. Ogunjo, I. A. Fuwape, M. O. Temiye, "Impact of global financial crisis on complexity of emerging markets: case study of the nigerian stock Exchange,". Pramana 95:206, 2021.

V Soloviev, A. Bielinskyi, O. Serdyuk, V. Solovieva, S. Semerikov, "Lyapunov exponents as indicators of the stock market crashes," CEUR Workshop Proceedings, 2020.