

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO CONTINUADA
MBA EM ENGENHARIA FINANCEIRA

GUILHERME FRANCESCUCI MOLEIRO

**Implementação do modelo Hull-White na precificação de Opções de IDI através
do método Monte Carlo**

São Paulo
2011

GUILHERME FRANCESCUCCI MOLEIRO

Implementação do modelo Hull-White na precificação de Opções de IDI através do método Monte Carlo

Monografia apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de MBA em Engenharia Financeira pelo Programa de Educação Continuada.

Área de concentração: Derivativos

Orientador: Prof. Dr. Nelson Mugayar Kuhl

São Paulo
2011

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, pra fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

FICHA CATALOGRÁFICA

FIGURE 1. ORAL RESERVATION

Nome: MOLEIRO, Guilherme Francescucci

Título: Implementação do modelo Hull-White na precificação de Opções de IDI através do método Monte Carlo

Monografia apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de MBA
em Engenharia Financeira

Aprovado em:

Banca Examinadora

Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa Instituição: Universidade de São Paulo

Julgamento: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. Nelson Mugayar Kuhl Instituição: Universidade de São Paulo

Julgamento: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. Roberto Moura Sales Instituição: Universidade de São Paulo

Julgamento: _____ Assinatura: _____

À minha namorada e à minha mãe,
Pela compreensão e apoio durante o período de elaboração deste trabalho

RESUMO

MOLEIRO, G. F. **Implementação do modelo Hull-White na precificação de Opções de IDI através do método Monte Carlo**, 2011, 57 f. Monografia – Programa de Educação Continuada da Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

A opção sobre IDI, negociada na BM&FBOVESPA é um derivativo de taxa de juros particular do mercado brasileiro, que negocia a expectativa da evolução da taxa de juros traçada nas decisões do Comitê de Política Monetária (COPOM). Por ser uma opção com característica asiática sobre um índice sempre ascendente, não existe consenso a respeito do melhor modelo a ser utilizado no seu apreçamento. O modelo padrão de mercado (Black) apresenta inconsistências teóricas, tais como considerar a taxa de juros determinística e o preço do ativo subjacente volátil, a volatilidade constante para ativos de vida finita e um processo no qual a taxa de juros pode se tornar negativa. Como alternativa a esse modelo, este trabalho mostra que é possível implementar o modelo Hull-White de um fator pelo método de Monte Carlo para precificar opções sobre IDI, bastando calibrá-lo através do cálculo de dois parâmetros não-observáveis: a velocidade de reversão à média da taxa de juros à vista com relação a taxa de juros de longo prazo e a volatilidade da taxa de juros à vista. Na implementação realizada, ao invés de se estimar os parâmetros estatisticamente a partir dos dados de mercado, minimizou-se uma função erro que mede a distância dos preços simulados aos preços de mercado. Encontrou-se o valor de 1,9% para volatilidade da taxa à vista, fixando-se a velocidade de reversão à média da taxa à vista em 0,6%.

ABSTRACT

MOLEIRO, G. F. Implementation of Hull-White's model in the pricing of IDI Options through Monte Carlo's method. 2011, 57 f. Monografia – Programa de Educação Continuada da Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

The IDI option, negotiated in BM&FBOVESPA is a particular interest rate derivative from brazilian market, which negotiates the expectation of the evolution of interest rate decided in the monetary politics committee (COPOM). As it is an option with asian characteristics over an always growing index, there is no consensus about the best model to be used in its pricing. The standard model of the market (Black) presents theoretical inconsistencies, such as considering the interest rates deterministic and the price of the underlying asset volatile, volatility constant for assets with finite live and a process in which the interest rate can become negative. As an alternative to this model, this paper shows that it is possible to implement the one factor Hull-White model by Monte Carlo method for pricing IDI options simply calibrating it by calculating two unobservable parameters: the short term interest rate mean reversion speed with respect to the long term interest rate and the short term interest rate volatility. In the implementation made, instead of estimating the parameters statistically from market data, we minimized an error function that measures the distance of the simulated prices to market prices. It was found the value of 1,9% for the short rate volatility, setting the speed of mean reversion of the spot rate at 0.6%.

LISTRA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1: evolução da taxa do CDI durante o ano de 2011 até o mês de setembro. Os saltos da taxa correspondem às datas de reunião do COPOM.	17
Figura 4.1: $F(t)$ para o dia 14-set-2011 obtida por interpolação <i>linear</i> , <i>cubic spline</i> e <i>pchip</i> a partir da ETTJ de mercado.	28
Figura 4.2: Detalhe de $F(t)$ no intervalo para vencimentos próximos de 2 anos. Verifica-se que a interpolação via <i>cubic spline</i> gerou muita oscilação e por isso foi descartada.	29
Figura 4.3: Comparação entre θt e $Ft_{0,t}$	30
Figura 4.4: A média de 1000 simulações de $r(t)$ e 5 caminhos individuais (código MATLAB disponível no apêndice A) com base na ETTJ de 14-set-2011 com $\delta t = 0,001$, $a = 0,6\%$ e $\sigma = 0,5\%$	30
Figura 4.5: A média de 1000 simulações de $r(t)$ e 5 caminhos individuais (código MATLAB disponível no apêndice A) com base na ETTJ de 14-set-2011 com $\delta t = 0,001$, $a = 0,6\%$ e $\sigma = 1,9\%$	31
Figura 4.6: variação do erro quadrático com σ variando de 0,1% a 16% com passos de 0,1%. Código Matlab disponível no apêndice B.	36
Figura 4.7: variação do erro quadrático com σ variando de 0,1% a 5% com passos de 0,1%.	37
Figura 4.8: variação do erro quadrático com σ variando de 1,5% a 2% com passos de 0,1%.	37
Figura 4.9: Erro absoluto total em reais por vencimento.	47
Figura 4.10: Erro dos preços simulados em função do strike para as opções vencendo em Out/11.	48
Figura 4.11: Erro dos preços simulados em função do strike para as opções vencendo em Dez/11.	48
Figura 4.12: Erro dos preços simulados em função do strike para as opções vencendo em Jan/12.	48
Figura 4.13: Erro dos preços simulados em função do strike para as opções vencendo em Abr/12.	49
Figura 4.14: Erro dos preços simulados em função do strike para as opções vencendo em Jul/12.	49

Figura 4.15: Erro dos preços simulados em função do strike para as opções vencendo em Jan/13.	49
Figura 4.16: Erro dos preços simulados em função do strike para as opções vencendo em Jul/13.	50
Figura 4.17: Erro dos preços simulados em função do strike para as opções vencendo em Jan/14.	50
Figura 4.18: Erro dos preços simulados em função do strike para as opções vencendo em Jan/17.	50

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1: Curva de PRE (DI1 BM&F) de 14-set-2011.....	27
Tabela 4.2: Volatilidade implícita das opções de IDI para o dia 30-set-2011.	35
Tabela 4.3: Preços de mercado (<i>preço</i>) e preços simulados (<i>preço_s</i>) (com $\sigma = 1,9\%$) por vencimento, strike, call (1) / put (2) e delta.	38

LISTA DE SIGLAS

BM&FBOVESPA	Bolsa de Mercadorias e Futuros
CIR	COX, Ingersoll e Ross
COPOM	Comitê de Política Monetária
CDI	Certificado de depósito interfinanceiro
DI	Depósito interfinanceiro
DI1	Depósito interfinanceiro de um dia
IDI	Índice de depósito interfinanceiro
EDE	Equação diferencial estocástica
EM	Euler-Murayama
ETTJ	Estrutura a termo de taxa de juros
PCHIP	Piecewise cubic Hermite spline

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	13
2. OPÇÃO SOBRE IDI.....	16
3. MODELOS DE TAXA DE JUROS	19
4. IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO PROPOSTO	24
4.1. SIMULAÇÃO DA TAXA DE JUROS	27
4.2. CÁLCULO DO VALOR ESPERADO DO PREÇO DAS OPÇÕES	31
4.3. CALIBRAÇÃO DO MODELO	33
4.4. PREÇOS DAS OPÇÕES GERADOS PELO MODELO CALIBRADO	38
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	51
REFERÊNCIAS.....	53

1. INTRODUÇÃO

Além dos tradicionais swaps de taxas de juros, o mercado brasileiro possui um instrumento financeiro chamado opção sobre IDI (índice de depósito interfinanceiro), negociado na Bolsa de Mercadorias & Futuros de São Paulo (BM&FBOVESPA), no qual estratégias envolvendo opções sobre esse índice permitem ao titular da opção proteger-se contra a taxa DI (depósito interfinanceiro) acima ou abaixo do preço de exercício como também arbitrar ou especular sobre essa mesma taxa.

Opções sobre IDI normalmente estão associadas a estratégias que dependam das expectativas da evolução da taxa de juros traçada nas decisões do Comitê de Política Monetária (COPOM). Associadas com o contrato futuro de DI1 (depósito interfinanceiro de um dia), as opções sobre IDI podem criar posições com delta neutro de forma a gerar exposição em volatilidade de taxa de juros à vista.

O modelo padrão de mercado para precificação dessas opções é uma adaptação do modelo de Black (BLACK, 1976), desenvolvido originalmente para opções sobre contratos futuros ou preços a termo. No caso do IDI, as opções refletem o comportamento da taxa de juros da data de avaliação até o vencimento do contrato. A adaptação utiliza o preço a termo do IDI como sendo o preço futuro no modelo de Black. Entretanto, por ser uma opção com característica asiática sobre um índice sempre ascendente, não existe consenso a respeito do melhor modelo a ser utilizado no seu apreamento.

Além disso, como apontado por (GLUCKSTERN, GERSON e EID JR), o modelo de Black apresenta inconsistências teóricas, tais como: considerar a taxa de juros determinística e o preço do ativo subjacente volátil (a própria taxa de juros), a volatilidade constante para ativos de vida finita (uma ação pode ser vista como um ativo de vida infinita, fazendo sentido considerar a volatilidade do retorno constante em um intervalo de tempo) e um processo no qual a taxa de juros pode se tornar negativa (devido ao processo de difusão lognormal).

Na tentativa de encontrar um modelo mais adequado (BARBACHAN e ORNELAS, 2003) desenvolveram fórmulas fechadas para a opção de IDI usando o modelo CIR (Cox, Ingersoll e Ross) e também distribuições hiperbólicas generalizadas de taxa de juros, as quais dependem de quatro parâmetros não-observáveis. Infelizmente essa quantidade de parâmetros representa uma dificuldade para a utilização destes modelos pelo mercado. (GLUCKSTERN, GERSON e EID JR) testaram o modelo Hull-White de um fator (que depende somente de dois parâmetros não-observáveis) à precificação das opções de IDI, implementando-o por meio de uma árvore trinomial e chegaram à conclusão de que ele é superior ao empregado pelo mercado.

Os modelos citados compartilham dois dos parâmetros não-observáveis: a volatilidade da taxa de juros de curto prazo e velocidade de reversão à média dos juros de curto prazo com relação aos de longo prazo. Os trabalhos dos autores acima citados utilizaram para a velocidade de reversão a média o mesmo valor, baseado na média dos resultados de (SILVA, 1997). Para o parâmetro de volatilidade (BARBACHAN e ORNELAS, 2003) utilizaram dados históricos enquanto (GLUCKSTERN, GERSON e EID JR) compararam diferentes métodos e chegaram à conclusão de que a volatilidade histórica da taxa efetiva diária do CDI (Certificado de depósito interfinanceiro) gerou os melhores resultados. (ALMEIDA, YOSHINO e SCHIRMER, 2003) mostraram que é possível calibrar o modelo de Hull-White somente nos períodos de estabilidade econômico-financeira. Nos períodos de instabilidade os parâmetros de calibração se mostraram muito instáveis.

O modelo de Hull-White de um fator possui a capacidade de se ajustar à estrutura a termo de taxas de juros (ETTJ) observada no mercado¹, permitindo, a partir da calibração de seus parâmetros, a obtenção de uma fórmula fechada para o preço um *zero-coupon bond*². A dependência do caminho seguido pelas taxas de juros à vista na precificação das opções de IDI é uma característica que traz vantagens ao

¹ Esta classe de modelos capaz de se ajustar à ETTJ inicial é conhecida como exógena.

² Um *zero-coupon Bond* com maturidade (ou data de vencimento) T é um título de renda fixa cujo valor é igual a 1 em T .

método Monte Carlo para precificação deste derivativo, pois cada simulação gera um caminho possível para essa taxa.

Este trabalho tem como proposta implementar o modelo de Hull-White para precificação das opções de IDI, através da simulação de caminhos aleatórios para a taxa de juros à vista pelo método de Monte Carlo. Também propõe-se estimar o parâmetro de volatilidade que melhor aproxima os preços obtidos pelo modelo aos preços de mercado, minimizando uma função erro proposta por Hull.

Na 2ª seção será feita uma apresentação das características das opções de IDI, na 3ª um resumo dos modelos de taxas de juros de um fator, na 4ª a descrição da implementação do método de Monte Carlo para simular os preços das opções de IDI pelo modelo Hull White, na 5ª um sumário dos resultados obtidos e por fim é apresentada a conclusão.

2. OPÇÃO SOBRE IDI

A opção de IDI é do tipo européia e tem como ativo-objeto um índice que replica um título de renda fixa valorizado diariamente pela Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia (DI). Este índice teve seu valor definido pela BM&FBOVESPA como 100.000 pontos na data do início da valorização, corrigido diariamente pela taxa DI, calculada pela Cetip.³

$$IDI_t = IDI_{t-1} \times \left(\frac{i_{t-1}}{100} + 1 \right) \quad (2.1)$$

Onde:

IDI_t = Índice de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia (IDI) na data "t", com duas casas decimais;

IDI_{t-1} = Índice de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia (IDI) na data "t-1", com duas casas decimais;

i_{t-1} = Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia, referente ao dia anterior, calculada pela Cetip, expressa em percentual ao dia (taxa efetiva dia), com até sete casas decimais.

Abaixo segue um resumo das características básicas deste derivativo:

- Prêmio da opção: negociado em pontos de índice.
- Tamanho do contrato: ponto de índice multiplicado por R\$1,00.
- Opção: do tipo européia.
- Vencimento: todos os meses.
- Liquidação exclusivamente financeira.

Para a opção de compra (C_t), o *payoff* na data de vencimento T é dado por:

³ Atualmente existem dois índices IDI, um cuja valorização iniciou-se em 2003 e outro cuja valorização iniciou-se em 2009.

$$C_t = \max(0, \text{IDI}_t - K) \quad (2.2)$$

Para a opção de venda (P_t):

$$P_t = \max(0, K - \text{IDI}_t) \quad (2.3)$$

Assim como no contrato futuro de DI1, a opção sobre IDI não negocia a expectativa da taxa de juros a termo, e sim da taxa de juro à vista média compreendida entre a data de negociação e a de vencimento do contrato. Portanto, para que uma opção de compra de IDI seja exercida no vencimento, a variação acumulada do CDI diário, decorrida entre a data de negociação da opção e o seu vencimento, deve ser superior à taxa de juros implícita na opção e dada pela divisão do preço de exercício (K) pelo IDI na data de negociação (IDI_t).

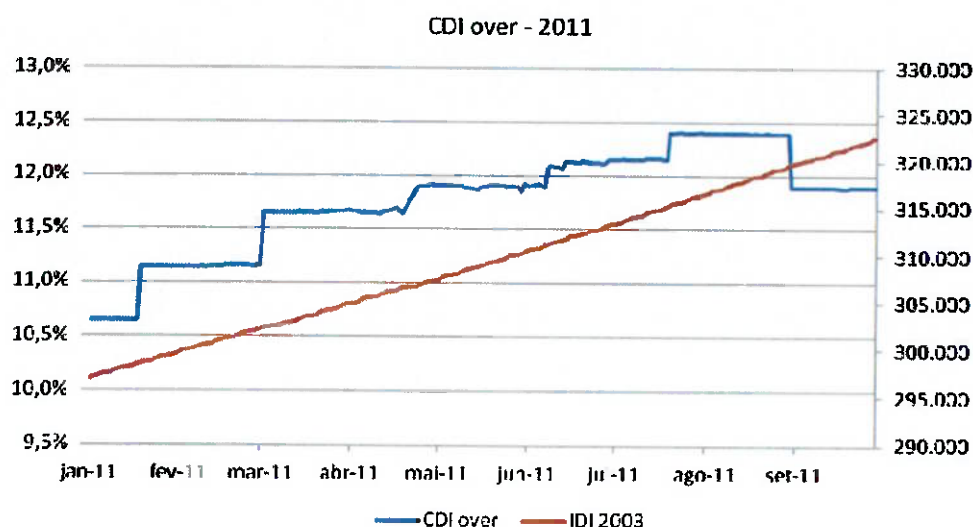


Figura 2.1: evolução da taxa do CDI durante o ano de 2011 até o mês de setembro. Os saltos da taxa correspondem às datas de reunião do COPOM.

Por isso diz-se que opções sobre IDI geralmente estão associadas a estratégias relativas às decisões do COPOM na definição da taxa de juros básica da economia (SELIC), que por sua vez define os patamares da taxa do CDI.

No gráfico da Figura 2.1 observa-se a correlação entre as datas de reunião do COPOM (18 e 19 de janeiro, 1º e 2 de março, 19 e 20 de abril, 7 e 8 de junho, 19 e 20 de julho, 30 e 31 de agosto, 18 e 19 de outubro) e a alteração nos níveis da taxa do CDI.

Com relação ao gerenciamento do risco de uma opção de IDI, como o valor financeiro do IDI é diferente do valor financeiro do contrato futuro de DI1, para que a associação entre esses derivativos criem exposição à volatilidade de taxa de juro à vista, o delta da opção deve ser ajustado ao tamanho do contrato futuro de DI1.

A opção de IDI, por ter características asiáticas (devido à correção diária do índice IDI), é um exemplo de derivativo caminho-dependente, ou seja, o seu *payoff* depende do caminho seguido pelo preço do ativo subjacente, não somente do valor final do ativo. Uma forma de valorizar opções caminho-dependentes quando resultados analíticos não estão disponíveis é a simulação Monte Carlo. Um valor de amostra do derivativo pode ser calculado gerando um caminho aleatório para o ativo subjacente em um mundo neutro ao risco⁴, calculando o *payoff* e descontando-o pela taxa de juros livre de risco⁵ (neste caso, a taxa média simulada no período correspondente a uma realização). Uma estimativa do valor do derivativo é encontrada obtendo-se muitas amostras do valor do derivativo dessa forma e calculando a sua média.

Esta será a metodologia deste trabalho. Entretanto, para simular o caminho seguido pelo ativo-objeto é necessário partir de um modelo que possa descrever a evolução temporal do valor desse ativo. No caso do IDI, estamos interessados em simular a evolução da taxa de juros à vista.

⁴ Em um *mundo neutro-ao-risco* os investidores não requerem compensação pelo risco. Por isso o retorno esperado para todos os títulos é a taxa *livre-de-risco*.

⁵ Taxa de retorno em um investimento livre de risco.

3. MODELOS DE TAXA DE JUROS

Os modelos atuais de taxa de juros podem ser divididos em dois grandes grupos: *modelos de equilíbrio* e *modelos de não-arbitragem*.

Os modelos de equilíbrio começam com hipóteses econômicas e, a partir destas, derivam um processo para a taxa à vista (r)⁶. Além disso, a estrutura a termo de taxa de juros é gerada a partir do modelo, portanto um ajuste à ETTJ real é somente aproximado.

Em um modelo de equilíbrio de um fator, o processo para r envolve somente uma fonte de incerteza. Geralmente o processo neutro a risco para r é descrito por um processo de Itô da forma

$$dr = m(r)dt + s(r)dz$$

Assume-se que o impulso instantâneo, m , e o desvio-padrão instantâneo, s , são funções de r e independentes do tempo. Segundo (HULL, 2008)

A hipótese de um único fator não é restritiva como pode parecer. Um modelo de um fator implica que todas as taxas se movem na mesma direção em um intervalo de tempo curto, mas não que todas elas se movem pela mesma quantidade. O formato da curva inicial pode, por conseguinte, mudar com a passagem do tempo.

Fazem parte deste grupo os modelos:

$$m(r) = \mu r; s(r) = \sigma r$$

Rendleman e Barter (1979)

⁶ A taxa à vista, r , no tempo t é a taxa que se aplica a um período de tempo infinitesimalmente curto no tempo t .

$$m(r) = a(b - r); s(r) = \sigma r \quad \text{Vasicek (1977)}$$

$$m(r) = a(b - r); s(r) = \sigma\sqrt{r} \quad \text{Cox-Ingersoll-Ross (1985)}$$

Já os modelos de não-arbitragem são desenhados para serem consistentes com a ETTJ atual. Neles, o impulso é, em geral, dependente do tempo. Isso porque o formato da curva inicial governa o caminho médio seguido pela taxa à vista. Se a curva inicial é ascendente para vencimentos entre t_1 e t_2 , então r tem um impulso positivo neste intervalo de tempo; por outro lado, se a curva é descendente para estes vencimentos, então r tem um impulso negativo neste intervalo. Por isso, a ETTJ atual é uma entrada do modelo. Geralmente também são consistentes com a estrutura a termo da volatilidade. Fazem parte deste grupo, os modelos de *Ho-Lee*, *Hull-White* e *Black-Karasinski*.

O modelo de Ho-Lee (HO e LEE, 1986) foi o primeiro modelo de não-arbitragem e é o mais simples de todos. A sua forma é

$$dr = \theta(t) + \sigma dz$$

Onde σ , o desvio-padrão instantâneo da taxa à vista é constante e $\theta(t)$ é uma função do tempo escolhida para garantir que o modelo se ajusta à estrutura a termo inicial. A variável $\theta(t)$ define a direção média de r em um tempo t .

O modelo de Hull-White (HULL e WHITE, 1990) é uma extensão do modelo de Vasicek que fornece ajuste à estrutura a termo inicial:

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dz$$

Onde a e σ são constantes. Ele também pode ser visto como o modelo de Ho-Lee com reversão à média com taxa a . Neste processo neutro a risco, o preço de um título de renda fixa que não pague juros é:

$$Z(r, t; T) = e^{A(t;T) - rB(t;T)}$$

Onde

$$A(t; T) = - \int_t^T \theta^*(s) B(s; T) ds + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right)$$

E

$$B(t; T) = \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)})$$

Nas expressões acima se assume que a e σ sejam conhecidos (estimados estatisticamente, por exemplo) e $\theta = \theta^*(t)$ no tempo t^* de tal forma que os preços teóricos e de mercado dos títulos de renda fixa coincidam. Para ajustar a ETTJ no tempo t^* é necessário que $\theta^*(t)$ satisfaça:

$$\begin{aligned} A(t^*; T) &= - \int_{t^*}^T \theta^*(s) B(s; T) ds + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(T - t^* + \frac{2}{a} e^{-a(T-t^*)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t^*)} - \frac{3}{2a} \right) \\ &= \log(Z_M(t^*; T)) + r^* B(t^*, T) \end{aligned}$$

Diferenciando a equação acima duas vezes com respeito a T temos:

$$\theta^*(s) = - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \log(Z_M(t^*; t)) - a \frac{\partial}{\partial t} \log(Z_M(t^*; t)) + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a(t-t^*)}) \quad (3.1)$$

Como $F(0, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \log(Z_M(t^*; t))$, a equação (3.1) pode ser escrita como

$$\theta(t) = F_t(0, t) + aF(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}) \quad (3.2)$$

Onde

$$F_t(0, t) = \frac{\partial}{\partial t} F(0, t)$$

O último termo nesta equação é geralmente bem pequeno. Se o ignorarmos, esta equação implica que o impulso do processo para r no tempo é

$$F_t(0, t) + a[F(0, t) - r].$$

Isso mostra que, em média, a taxa r segue a inclinação inicial da curva a termo instantânea. Quando ela se desvia da curva, ela reverte de volta com velocidade a .

Os modelos de Ho-Lee e Hull-White tem a desvantagem de que a taxa à vista, r , pode se tornar negativa. Um modelo que permite somente taxas de juros positivas foi o proposto por Black and Karasinski em 1991:

$$d \ln r = [\theta(t) - a(t) \ln(r)]dt + \sigma(t)dz$$

Entretanto este modelo não tem a capacidade de produzir fórmulas fechadas para precificar títulos de renda fixa em termos de r usando o modelo, dificultando o seu uso. Como resultado, a implementação não é fácil mesmo numericamente, pois a curva de juros tem que ser simulada para o período equivalente à vida do ativo-subjacente (que podem ser muito mais longos que o derivativo que se quer precificar).

Embora existam modelos mais gerais para construir a ETTJ, como os de dois-fatores, HJM (Heath, Jarrow e Morton) e LMM (Libor Market Model) o modelo de Hull-White foi o escolhido neste trabalho, pois, conforme (SILVA, 1997) não foi possível obter evidências empíricas fortes o suficiente para justificar o uso de modelos sofisticados para explicar a dinâmica da taxa de juro à vista no Brasil. Segundo (GLUCKSTERN, GERSON e EID JR) também não foi encontrada nenhuma evidência empírica que indique de maneira irrefutável que os processos de taxa de juros sejam processos não *markovianos*⁷. Além disso, segundo (GLUCKSTERN, GERSON e EID JR)

Partindo das hipóteses de que o valor da taxa à vista é a única variável de estado para toda a estrutura a termo, de que segue um processo de Markov e

⁷ Um *processo de Markov* é um tipo particular de processo estocástico onde somente o valor presente de uma variável é relevante para prever o futuro. A história passada da variável e a forma como o valor presente emergiu do passado são irrelevantes.

de que o mercado de Futuro de DI é eficiente, (NOVY, 2000) prova que a equação descritiva desse mercado é idêntica à equação da estrutura a termo de Vasicek (1977). O modelo de Hull-White incorpora essa equação.

4. IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO PROPOSTO

Como apresentado anteriormente o modelo de taxa de juros de Hull-White (de um fator) é descrito pela seguinte equação diferencial estocástica (EDE)

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dZ \quad \text{Versão contínua}$$

Utilizando o método de *Euler-Maruyama*⁸ (EM) para discretizar o processo estocástico acima obtém-se

$$\delta r = [\theta(t) - ar]\delta t + \sigma Z\sqrt{\delta t} \quad \text{Versão discreta}$$

Logo,

$$r(t + \delta t) = r(t) + [\theta(t) - ar]\delta t + \sigma Z\sqrt{\delta t} \quad (4.1)$$

Onde:

$\theta(t)$ é o definido na equação (3.2) e $F(0, t)$ é a ETTJ inicial.

Z é uma variável aleatória de distribuição normal padrão.

a e σ são parâmetros normalmente estimados dos dados de mercado.

A relação entre a curva inicial $R(t)$ e a curva a termo inicial é dada por (HULL, 2008) – seção 4.6

$$F(0, t) = R + t \frac{dR}{dt}$$

⁸ Euler-Maruyama é um método para aproximar a solução numérica de uma equação diferencial estocástica. É uma simples generalização do método de Euler para equações diferenciais ordinárias para equações diferenciais estocásticas.

Par uma boa introdução, veja (HIGHAM, 2011)

Portanto tem-se a seguinte aproximação quando δt é pequeno

$$F(0, t) = R(t + \delta t) + t \frac{R(t + \delta t) - R(t)}{\delta t} \quad (4.2)$$

Suponha que a , σ e a curva zero $R(t)$ sejam conhecidos. Então $\theta(t)$ é conhecido. Fixando um passo de tamanho δt é possível descrever um algoritmo para gerar $r(t)$ iterativamente usando (4.1), para $t = 0, \delta t, 2\delta t, 3\delta t, \dots$

De (4.1),

$$\begin{aligned} r(t + \delta t) &= r(t) + (\theta(t) - ar)\delta t + \sigma Z\sqrt{\delta t} \\ &= r(t) + \theta(t)\delta t - ar(t)\delta t + \sigma Z\sqrt{\delta t} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Aproximando $\theta(t)\delta t$ como segue

$$\theta(t)\delta t = F(0, t + \delta t) - F(0, t) + aF(0, t)\delta t + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})\delta t$$

Onde $F(0, t)$ é computado usando (0)

De (4.3), fazendo $r(0) = R(0)$ e gerando uma variável aleatória normal padrão Z_1 temos

$$r(\delta t) = r(0 + \delta t) = r(0) + \theta(0)\delta t - ar(0)\delta t + \sigma Z_1\sqrt{\delta t}$$

Gerando uma nova variável aleatória normal padrão Z_2 tem-se

$$r(2\delta t) = r(\delta t + \delta t) = r(\delta t) + \theta(\delta t)\delta t - ar(\delta t)\delta t + \sigma Z_2\sqrt{\delta t}$$

E assim sucessivamente obtém-se $r(t)$ para $t = 0, \delta t, 2\delta t, 3\delta t, \dots$

Na simulação de $r(t)$ existem diversas fontes de erro, dentre as quais:

Erro de discretização: O erro devido ao tamanho de δt , que determina a convergência da solução discretizada à solução exata da EDE.

Erro amostral ou estatístico: O erro que surge ao aproximar-se um valor esperado por uma média amostral

Erro sistemático: Erro inerente no gerador de números aleatórios

Em geral o erro de discretização é $O(\delta t)$. Como estamos simulando um número finito de um número infinito de caminhos possíveis, o erro amostral, devido a utilização de M realizações é $O(1/\sqrt{M})$, onde M é o número de caminhos gerados. O erro sistemático é dependente da “qualidade” do algoritmo gerador de números aleatórios. Neste trabalho utilizou-se o gerador de números aleatórios do *MATLAB* (versão 7.11.0.584), e não se realizou nenhuma medida de qualidade sobre esses números, acreditando-se que o gerador é de boa qualidade devido à ampla utilização deste programa pela comunidade científica .

Isto é, o pior erro no preço do derivativo devido à discretização do passo (δt) ou do erro em se ter somente um número finito de realizações (M) é

$$O\left(\max\left(\delta t, \frac{1}{\sqrt{M}}\right)\right)$$

Para se minimizar essa quantidade, mantendo o tempo total de computação fixo, foram feitos alguns testes de precificação de opções *no dinheiro*, com o objetivo de se verificar quando o preço simulado convergia. Entretanto devido a limitações do computador utilizado e devido ao tamanho do vetor da EETJ (que é maior quanto menor δt), para simulações com $(\delta t) < 0.001$ e $M > 5000$ a simulação gerava um erro de falta de memória no Matlab. Por isso, utilizou-se o maior valor factível para o computador utilizado, $\delta t = 0.001$ e $M = 10.000$.

Não se provou, portanto, que o preço havia “estabilizado”, mas testou-se os limites do computador utilizado de forma a se gerar os melhores resultados possíveis. De

qualquer forma, o objetivo deste trabalho é o de mostrar a aplicabilidade do método e não o de estimar o tamanho de δt e M ideais na simulação.

4.1. SIMULAÇÃO DA TAXA DE JUROS

Para a simulação de $r(t)$, obteve-se em primeiro lugar a ETTJ de mercado⁹ (Tabela 4.1). Depois transformou-se as datas dos vértices da curva no prazo anualizado para o vencimento de cada futuro (na base 360 dias/ano).

Tabela 4.1: Curva de PRE (DI1 BM&F) de 14-set-2011.

vencimento	dias	Dias/ano	taxa
03/out/11	19	0,0528	11,88%
01/nov/11	48	0,1333	11,75%
01/dez/11	78	0,2167	11,59%
02/jan/12	110	0,3056	11,36%
02/abr/12	201	0,5583	11,05%
02/jul/12	292	0,8111	10,87%
01/out/12	383	1,0639	10,79%
02/jan/13	476	1,3222	10,71%
01/abr/13	565	1,5694	10,73%
01/jul/13	656	1,8222	10,83%
01/out/13	748	2,0778	10,98%
02/jan/14	841	2,3361	10,99%
01/abr/14	930	2,5833	11,08%
01/jul/14	1021	2,8361	11,14%
01/out/14	1113	3,0917	11,23%
02/jan/15	1206	3,3500	11,25%
01/abr/15	1295	3,5972	11,31%
01/jul/15	1386	3,8500	11,37%
01/out/15	1478	4,1056	11,37%
04/jan/16	1573	4,3694	11,39%
01/abr/16	1661	4,6139	11,42%
01/jul/16	1752	4,8667	11,41%
01/out/16	1844	5,1222	11,42%
02/jan/17	1937	5,3806	11,33%
01/abr/17	2026	5,6278	11,29%
01/jul/17	2117	5,8806	11,29%
02/jan/18	2302	6,3944	11,29%

⁹ Taxa média dos futuros de DI1 para os vencimentos negociados na BM&FBOVESPA.

vencimento	dias	Dias/ano	taxa
02/jan/20	3032	8,4222	11,42%
01/out/20	3305	9,1806	11,44%
01/jan/21	3397	9,4361	11,35%

Curva obtida no site da BM&FBOVESPA.

Os valores de $F(0, t)$ (equação (3.2)) foram obtidos interpolando-se os pontos da Tabela 4.1 do prazo 0,001 (ano) até o último vencimento com passo δt . O último vencimento negociado na data de obtenção da curva deste trabalho, 14-set-2011, era 01-Jan-2021, o que corresponde a 3397 dias corridos.

Testou-se três métodos de interpolação para obtenção de $F(0, t)$: *linear*, *cubic spline* e *piecewise cubic hermite spline (pchip)*. O resultado gráfico das diferentes interpolações pode ser visto na Figura 4.1.

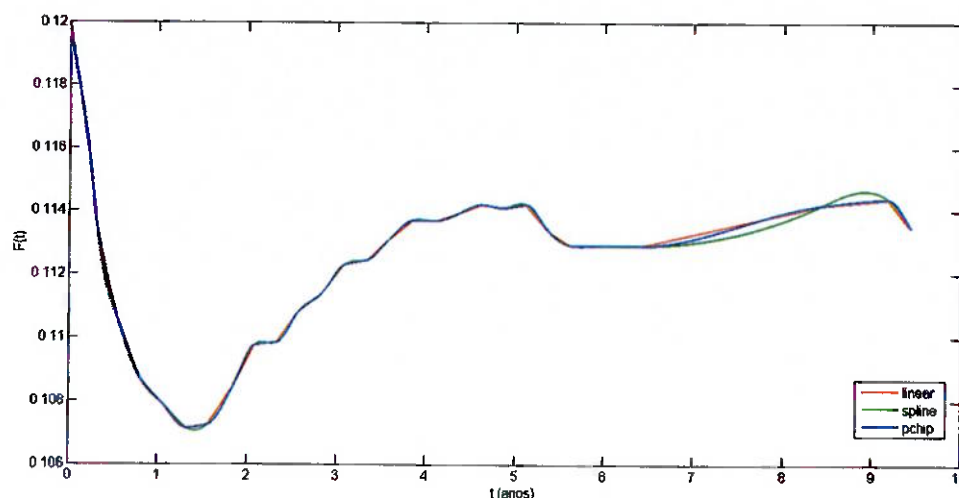


Figura 4.1: $F(t)$ para o dia 14-set-2011 obtida por interpolação *linear*, *cubic spline* e *pchip* a partir da ETTJ de mercado.

Verifica-se que se a ETTJ for obtida por interpolação linear, então $\theta(t)$ não pode ser bem definida nos nós da interpolação devido à sua dependência com a primeira derivada de $F(0, t)$ (equação (3.2)). Como exige-se que a função $F(0, t)$ seja suave para que $F_t(0, t)$ seja bem definida descartou-se o método de interpolação linear por este gerar uma curva com bicos. A interpolação por *cubic spline* gerou muita

oscilação na interpolação, como pode ser visto com mais detalhes na Figura 4.2, modificando o formato da ETTJ. Já o método *pchip* preserva a monotonicidade e o formato dos dados ajustados. Além disso, no MATLAB, o método *pchip* possui derivada analítica da função ajustada o que diminui o erro de se aproximar a derivada de $F(t)$ por diferenças finitas. Por essas razões o método *pchip* foi o utilizado para geração da ETTJ interpolada neste trabalho.

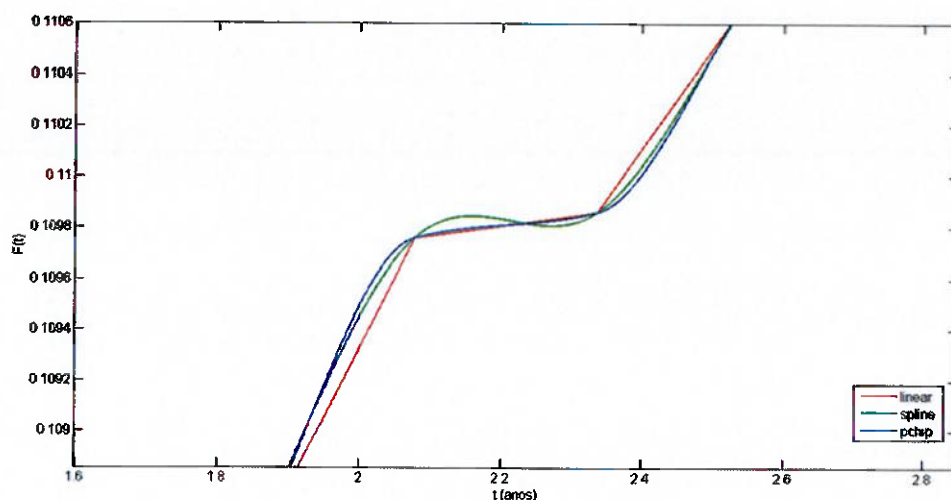


Figura 4.2: Detalhe de $F(t)$ no intervalo para vencimentos próximos de 2 anos. Verifica-se que a interpolação via *cubic spline* gerou muita oscilação e por isso foi descartada.

Gerou-se $\theta(t)$ a partir de $F(0, t)$, conforme equação (3.2), com $a = 0,6\%$ (média dos resultados de (SILVA, 1997)) e $\sigma = 0,5\%$ (a obtenção de σ ainda será discutida neste trabalho). Na Figura 4.3 compara-se as funções $\theta(t)$ e $F_t(0, t)$ e verifica-se que o fator dominante na equação (3.2) é o 1º termo: $F_t(0, t)$, como discutido anteriormente..

Gerando-se 1000 caminhos aleatórios para $r(t)$ com $\delta t = 0,001$, $a = 0,6\%$ e $\sigma = 0,5\%$ e usando a curva de DI1 de 14-set-2011 como entrada do modelo, obteve-se o resultado da Figura 4.4, em que a linha azul é a média das simulações e as linhas em cinza são 5 caminhos individuais para ilustrar o comportamento aleatório da taxa de juros simulada.

Observa-se que a taxa à vista simulada tende a seguir o formato definido pela ETTJ usada como entrada do modelo (basta comparar as Figura 4.1 e Figura 4.4), daí o grande mérito dos modelos de não-arbitragem, que são consistentes com a ETTJ de mercado.

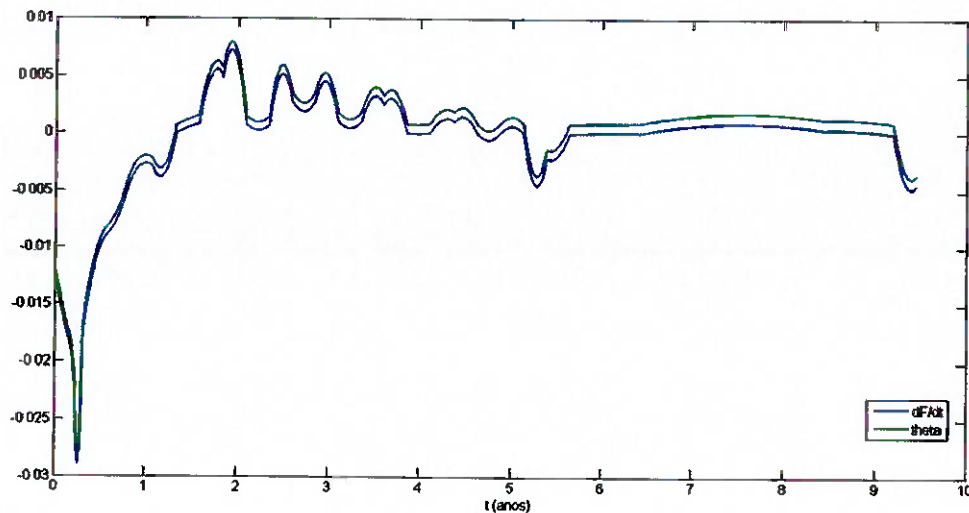


Figura 4.3: Comparação entre $\theta(t)$ e $F_t(0, t)$.

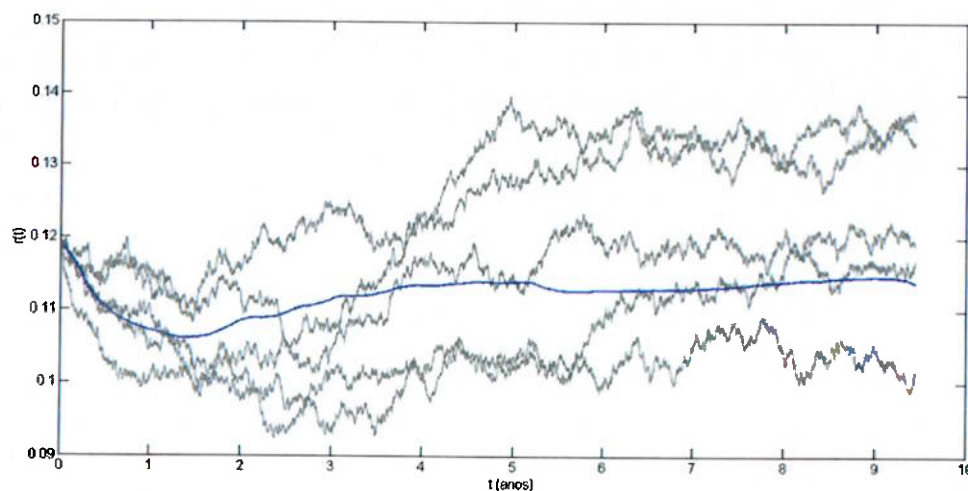


Figura 4.4: A média de 1000 simulações de $r(t)$ e 5 caminhos individuais (código MATLAB disponível no apêndice A) com base na ETTJ de 14-set-2011 com $\delta t = 0,001$, $a = 0,6\%$ e $\sigma = 0,5\%$

Repetindo o processo de geração de $r(t)$, mantendo todos os parâmetros inalterados, mas trocando σ para 1,9% obteve-se o gráfico da Figura 4.5. Nota-se

que a curva gerada é muito mais lisa que a obtida para $\sigma = 0,5\%$ e que ela tem taxas mais elevadas para vencimentos mais longos. O código para geração de $r(t)$ está disponível no apêndice A.

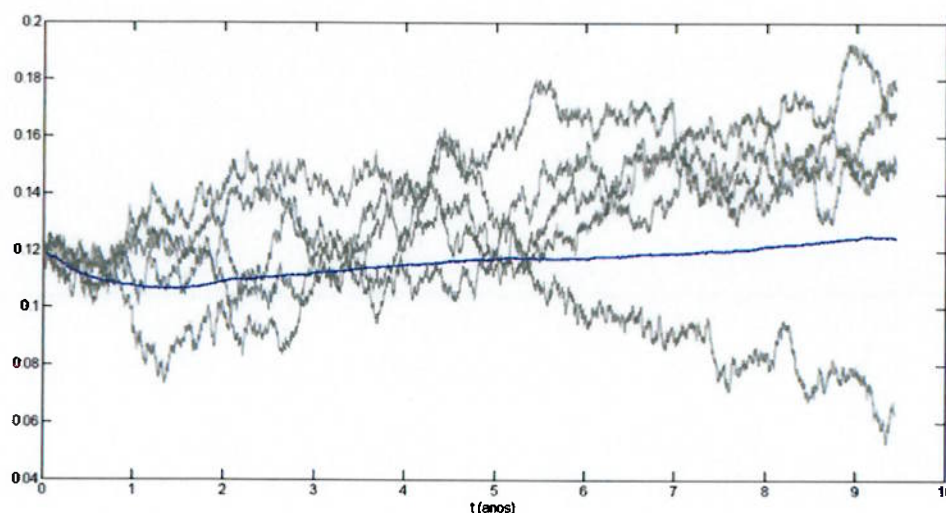


Figura 4.5: A média de 1000 simulações de $r(t)$ e 5 caminhos individuais (código MATLAB disponível no apêndice A) com base na ETTJ de 14-set-2011 com $\delta t = 0,001$, $a = 0,6\%$ e $\sigma = 1,9\%$

4.2. CÁLCULO DO VALOR ESPERADO DO PREÇO DAS OPÇÕES

Tendo-se definido o processo discreto para $r(t)$, a obtenção do preço esperado das opções de IDI consiste na determinação do *payoff* (equações (2.2) e (2.3)) descontado a valor presente pela taxa média simulada do período correspondente a data de negociação a data de exercício da opção, conforme:

$$E[C_t] = \max(0, IDI_t - K) \times e^{-\bar{r} \cdot T}$$

$$E[P_t] = \max(0, K - IDI_t) \times e^{-\bar{r} \cdot T}$$

Onde

$$\bar{r} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r(t)$$

É a taxa média simulada do período correspondente a data de negociação a data de exercício da opção e T é o tempo correspondente ao período correspondente a data de negociação a data de exercício da opção.

Do uso do método Monte Carlo, o valor esperado corresponde à média dos M valores aleatórios obtidos para cada opção

$$C_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max(0, IDI_{t_i} - K) \times e^{-\bar{r}_i * T} \quad (4.4)$$

$$P_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max(K - IDI_{t_i}, 0) \times e^{-\bar{r}_i * T} \quad (4.5)$$

O Teorema Limite Central garante que para M suficientemente grande, a variável aleatória C_t e P_t se distribui aproximadamente de acordo com uma distribuição Normal de média C e P e variância $\chi = E[(C_t - C)^2] = E[(P_t - P)^2]$.

Como não se conhece C nem P , para estimar χ usamos a expressão da variância amostral como aproximação

$$\chi = \frac{1}{M-1} \sum_{n=1}^M (C_t - C_M)^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{n=1}^M (P_t - P_M)^2$$

O intervalo de confiança com 95% de probabilidade dos preços obtidos é definido por

$$C \in \left[C_M - \frac{1.96\chi}{\sqrt{M}}, C_M + \frac{1.96\chi}{\sqrt{M}} \right]$$

$$P \in \left[P_M - \frac{1.96\chi}{\sqrt{M}}, P_M + \frac{1.96\chi}{\sqrt{M}} \right]$$

4.3. CALIBRAÇÃO DO MODELO

Para que se tenha uma simulação realista de $r(t)$, é necessário que se calibre o modelo de forma a definir os parâmetros que definem a taxa de reversão à média (a) e a volatilidade do processo estocástico (σ).

Hull (HULL, 2008) atenta para o fato de que o modelo pode ser estendido para que a ou σ , ou ambos, sejam funções do tempo. A vantagem de se fazer os parâmetros serem função do tempo é que os modelos podem ser mais bem ajustados aos preços dos instrumentos. Por outro lado isso tornaria a estrutura da volatilidade não-estacionária. A volatilidade futura da ETTJ dada pelo modelo poderia ser bem diferente da existente no mercado hoje.

Seguindo a metodologia do trabalho de (GLUCKSTERN, GERSON e EID JR), para obtenção do valor do parâmetro a optou-se por também utilizar o valor de 0,6%, que é a média dos resultados obtidos por (SILVA, 1997). Essa decisão foi tomada por simplificar o processo de calibragem e também porque se verifica, com base no trabalho de (ALMEIDA, YOSHINO e SCHIRMER, 2003) que este parâmetro é muito instável, tendo grande dependência com o tempo (chegando a variar mais de 100% em intervalos de tempo muito curtos). Como neste trabalho os parâmetros serão tratados como constantes, não há nenhuma justificativa para utilizar-se outro valor para este parâmetro. Também foge do escopo do trabalho a estimativa do valor de reversão à média da taxa de juros do mercado brasileiro.

Já para a obtenção da volatilidade, (GLUCKSTERN, GERSON e EID JR) testaram em seu trabalho cinco métodos distintos, que estão listados abaixo:

- 1) HIST1: Histórica a partir da taxa efetiva diária do CDI
- 2) HIST2: Histórica a partir do valor diário do CDI expresso ao ano

- 3) FWD: Histórica a partir das taxas a termo dos futuros de DI
- 4) EWMA 0,91: EWMA¹⁰ com base na volatilidade do futuro de DI vencendo na mesma data de vencimento da opção com fator de decaimento de 91%
- 5) EWMA 0,99: Idem ao anterior, mas com fator de decaimento de 99%.

Concluíram que na implementação do modelo usando árvore trinomiais, a volatilidade HIST1 foi superior às outras, seguida de HIST2, EWMA 0,91, EWMA 0,99 e FWD.

Já Hull (HULL, 2008) sugere estimar os parâmetros a partir dos dados de mercado de opções negociadas ativamente, conhecidos como *instrumentos de calibração*. Uma possível medida de calibração seria

$$\sum_{i=1}^n (U_i - V_i)^2 \quad (4.6)$$

Onde U_i é o preço de mercado do i ésimo instrumento de calibração e V_i é o preço dado pelo modelo para este instrumento. O objetivo da calibração é escolher os parâmetros do modelo que minimizem essa função.

Outra sugestão de Hull (HULL, 2008) seria usar todos os instrumentos de calibração disponíveis e fixar o valor de a que se ajuste melhor ao mínimo da equação (4.6). Em seguida utiliza-se o modelo de Black (padrão de mercado) para converter tabelas de volatilidade implícita divulgadas por corretoras em preços e usa-se um método iterativo para obter o parâmetro σ do modelo a partir dos preços.

Optou-se por fixar o valor de a em 0,6%, assim como fizeram (GLUCKSTERN, GERSON e EID JR) e utilizar as tabelas de volatilidade implícita de corretoras para obtenção do σ que minize a equação (4.6 a partir dos preços de mercado e

¹⁰ EWMA: (*Exponentially weighted moving average*); Média móvel exponencialmente ponderada. É um índice financeiro de medição de risco. Para mais detalhes veja: Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Moving_average

compará-lo com a volatilidade histórica calculada a partir da taxa do valor diário do CDI expresso ao ano.

Utilizou-se os dados da corretora *Convenção*. Na Tabela 4.2, abaixo, segue um modelo de tabela de volatilidade implícita utilizada para o cálculo dos preços das opções pelo modelo de Black. Felizmente a corretora envia, além das volatilidades, os preços calculados, e por isso não foi necessário implementar o modelo de Black para o cálculo dos preços a partir das volatilidades implícitas.

Tabela 4.2: Volatilidade implícita das opções de IDI para o dia 30-set-2011.

Delta Call	out-11	dez-11	jan-12	abr-12	jul-12	jan-13	jul-13	jan-14	jan-15	jan-17	jan-18	jan-20	jan-21
0%	0,97%	4,38%	4,57%	9,49%	9,74%	11,65%	11,79%	12,28%	11,52%	12,28%	12,95%	14,06%	15,12%
5%	0,97%	4,19%	4,67%	8,64%	9,24%	10,85%	11,07%	11,51%	10,92%	11,46%	11,92%	12,60%	13,36%
10%	0,96%	4,01%	4,78%	7,80%	8,73%	10,04%	10,35%	10,73%	10,32%	10,64%	10,90%	11,15%	11,59%
25%	0,99%	3,90%	4,86%	7,13%	8,37%	9,42%	9,67%	9,90%	9,66%	9,68%	9,74%	9,56%	9,71%
35%	1,02%	3,92%	4,83%	7,09%	8,40%	9,41%	9,56%	9,68%	9,48%	9,39%	9,39%	9,10%	9,17%
50%	1,07%	4,03%	5,03%	7,31%	8,63%	9,66%	9,60%	9,55%	9,38%	9,15%	9,11%	8,73%	8,75%
65%	1,14%	4,24%	5,61%	7,85%	9,09%	10,24%	9,86%	9,61%	9,41%	9,08%	9,01%	8,62%	8,61%
75%	1,20%	4,46%	6,02%	8,48%	9,60%	10,89%	10,21%	9,77%	9,53%	9,12%	9,07%	8,69%	8,68%
90%	1,37%	5,13%	6,44%	10,55%	11,17%	12,98%	11,39%	10,45%	10,05%	9,50%	9,52%	9,27%	9,33%
95%	1,50%	5,68%	6,44%	12,41%	12,50%	14,77%	12,42%	11,10%	10,55%	9,92%	10,02%	9,91%	10,05%
100%	1,63%	6,24%	6,44%	14,26%	13,82%	16,57%	13,45%	11,75%	11,04%	10,33%	10,52%	10,56%	10,77%

Dados da corretora *Convenção*.

O processo de calibração consistiu na geração de 1000 cenários de $r(t)$, com o qual, utilizando-se as equações (4.4) e (4.5), calculou-se os preços das opções para um valor inicial de σ . De posse dos preços simulados calculou-se o erro da simulação a partir da equação (4.6). Como o objetivo era obter o valor de σ que minimizasse a equação (4.6) gerou-se diversos cenários variando σ de 0,01% a 15% (valores maiores não seriam razoáveis para a volatilidade da taxa à vista) com passos de 0,1%. O resultado da calibração pode ser visto na Figura 4.6, onde observa-se que a região de mínimo está na região próxima a 2%.

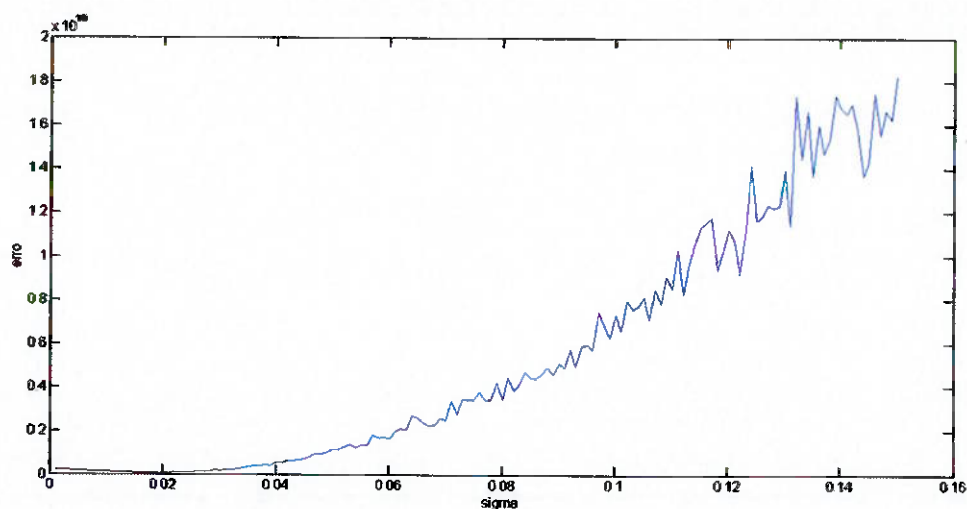


Figura 4.6: variação do erro quadrático com σ variando de 0,1% a 16% com passos de 0,1%. Código Matlab disponível no apêndice B.

Detalhando-se o intervalo que varia de 0,01 a 5% (Figura 4.7) verifica-se visualmente que o erro mínimo ocorreu por volta de 1,9%. Olhando o intervalo de 1,5 a 2% com mais detalhes (Figura 4.8), verifica-se que o mínimo realmente parece ocorrer perto do 1,9%. Obviamente este resultado é aproximado devido ao método utilizado para sua obtenção que pode gerar resultados diferentes a cada simulação. Mas dentro do grau de precisão desejado, encontra-se adequado para determinação aproximada da volatilidade.

Para se comparar o valor obtido, calculou-se a volatilidade histórica para a taxa diária do CDI para o período de 03-jan-2011 a 14-set-2011, de onde obteve-se 0,57%. Já (GLUCKSTERN, GERSON e EID JR) obtiveram 0,43% (resultado referente a outro período, não especificado no artigo).

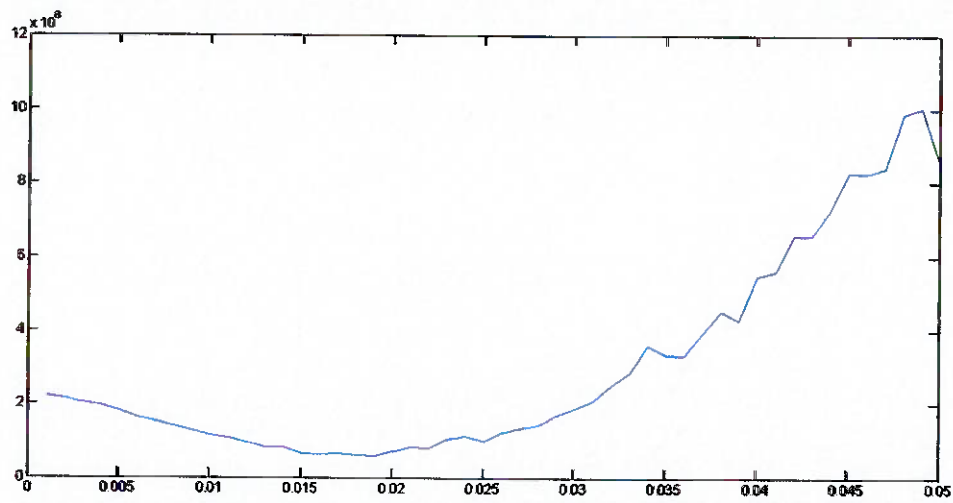


Figura 4.7: variação do erro quadrático com σ variando de 0,1% a 5% com passos de 0,1%.

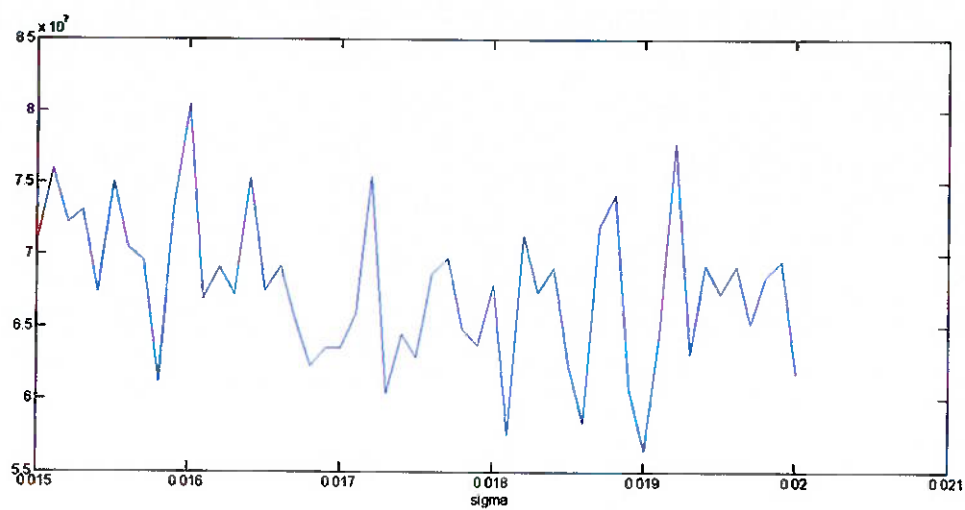


Figura 4.8: variação do erro quadrático com σ variando de 1,5% a 2% com passos de 0,1%.

4.4. PREÇOS DAS OPÇÕES GERADOS PELO MODELO CALIBRADO

Realizando-se 10.000 simulações de $r(t)$, utilizando $\delta t = 0,001$, $a = 0,6\%$ e $\sigma = 1,9\%$, $IDl_0 = 320.950,42$ (2003); 130.320,47 (2009) e, usando a curva de DI1 de 14-set-2011, obteve-se o resultado da Tabela 4.3, que mostra para cada opção disponível para negociação, o vencimento, o tipo (call = 1, put = 2), o strike, o delta, o preço de mercado (*preço*), o preço simulado (*preço_s*) e o intervalo de confiança χ . O código utilizado nesta simulação está disponível no apêndice C.

Observa-se que o intervalo de confiança χ com 95% de probabilidade está muito elevado, indicando que a simulação deveria ter sido executada com $M \gg 10.000$ ou $\delta t < 0,001$, entretanto devido a limitações de máquina, isso não foi possível.

Tabela 4.3: Preços de mercado (*preço*) e preços simulados (*preço_s*) (com $\sigma = 1,9\%$) por vencimento, strike, call (1) / put (2) e delta.

Vcto.	C/P	Strike	Delta IDI	Preço	Preço_s	χ
3-out-11	1	313.000	100%	9.758	9.763	25
3-out-11	1	314.000	100%	8.764	8.769	25
3-out-11	1	319.800	100%	2.998	3.005	26
3-out-11	1	319.900	100%	2.898	2.906	26
3-out-11	1	320.000	100%	2.799	2.807	26
3-out-11	1	320.100	100%	2.699	2.707	26
3-out-11	1	320.200	100%	2.600	2.608	26
3-out-11	1	320.300	100%	2.501	2.509	26
3-out-11	1	320.400	100%	2.401	2.409	26
3-out-11	1	320.500	100%	2.302	2.310	26
3-out-11	1	320.600	100%	2.202	2.210	26
3-out-11	1	320.700	100%	2.103	2.111	26
3-out-11	1	320.800	100%	2.003	2.012	26
3-out-11	1	320.900	100%	1.904	1.912	26
3-out-11	1	321.000	100%	1.805	1.813	26
3-out-11	1	321.500	100%	1.307	1.316	27
3-out-11	1	321.600	100%	1.208	1.217	27
3-out-11	1	321.700	100%	1.109	1.117	27
3-out-11	1	321.800	100%	1.009	1.018	27
3-out-11	1	322.000	100%	810	819	27
3-out-11	1	322.100	100%	711	720	27
3-out-11	1	322.200	100%	611	620	27
3-out-11	1	322.300	100%	512	521	27
3-out-11	1	322.400	100%	413	422	27
3-out-11	1	322.500	100%	313	322	27
3-out-11	1	322.600	100%	214	223	27
3-out-11	1	322.700	100%	114	124	27
3-out-11	1	322.800	99%	15	30	17
3-out-11	1	322.900	0%	0	0	0
3-out-11	1	323.000	0%	0	0	0
3-out-11	1	323.100	0%	0	0	0
3-out-11	1	323.200	0%	0	0	0
3-out-11	1	323.300	0%	0	0	0
3-out-11	1	323.400	0%	0	0	0
3-out-11	1	323.500	0%	0	0	0
3-out-11	1	323.600	0%	0	0	0

Vcto.	C/P	Strike	Delta IDI	Preço	Preço_s	X
3-out-11	1	323.700	0%	0	0	0
3-out-11	1	323.800	0%	0	0	0
3-out-11	1	323.900	0%	0	0	0
3-out-11	1	324.000	0%	0	0	0
3-out-11	1	324.100	0%	0	0	0
3-out-11	1	324.200	0%	0	0	0
3-out-11	1	324.300	0%	0	0	0
3-out-11	1	324.400	0%	0	0	0
3-out-11	1	324.500	0%	0	0	0
3-out-11	1	325.000	0%	0	0	0
3-out-11	1	325.400	0%	0	0	0
3-out-11	2	313.000	0%	0	0	0
3-out-11	2	314.000	0%	0	0	0
3-out-11	2	319.800	0%	0	0	0
3-out-11	2	319.900	0%	0	0	0
3-out-11	2	320.000	0%	0	0	0
3-out-11	2	320.100	0%	0	0	0
3-out-11	2	320.200	0%	0	0	0
3-out-11	2	320.300	0%	0	0	0
3-out-11	2	320.400	0%	0	0	0
3-out-11	2	320.500	0%	0	0	0
3-out-11	2	320.600	0%	0	0	0
3-out-11	2	320.700	0%	0	0	0
3-out-11	2	320.800	0%	0	0	0
3-out-11	2	320.900	0%	0	0	0
3-out-11	2	321.000	0%	0	0	0
3-out-11	2	321.500	0%	0	0	0
3-out-11	2	321.600	0%	0	0	0
3-out-11	2	321.700	0%	0	0	0
3-out-11	2	321.800	0%	0	0	0
3-out-11	2	322.000	0%	0	0	0
3-out-11	2	322.100	0%	0	0	0
3-out-11	2	322.200	0%	0	0	0
3-out-11	2	322.300	0%	0	0	0
3-out-11	2	322.400	0%	0	0	0
3-out-11	2	322.500	0%	0	0	0
3-out-11	2	322.600	0%	0	0	0
3-out-11	2	322.700	0%	0	0	0
3-out-11	2	322.800	1%	0	6	4
3-out-11	2	322.900	100%	84	75	26
3-out-11	2	323.000	100%	184	175	27
3-out-11	2	323.100	100%	283	274	27
3-out-11	2	323.200	100%	383	373	27
3-out-11	2	323.300	100%	482	473	27
3-out-11	2	323.400	100%	582	572	27
3-out-11	2	323.500	100%	681	671	27
3-out-11	2	323.600	100%	780	771	27
3-out-11	2	323.700	100%	880	870	27
3-out-11	2	323.800	100%	979	970	27
3-out-11	2	323.900	100%	1.079	1.069	27
3-out-11	2	324.000	100%	1.178	1.168	27
3-out-11	2	324.100	100%	1.278	1.268	27
3-out-11	2	324.200	100%	1.377	1.367	27
3-out-11	2	324.300	100%	1.476	1.466	27
3-out-11	2	324.400	100%	1.576	1.566	27
3-out-11	2	324.500	100%	1.675	1.665	27
3-out-11	2	325.000	100%	2.172	2.162	27
3-out-11	2	325.400	100%	2.570	2.560	27
1-dez-11	1	328.000	98%	427	709	1.889
1-dez-11	1	328.100	96%	331	614	1.842
1-dez-11	1	328.200	92%	237	520	1.758
1-dez-11	1	328.300	82%	147	429	1.633
1-dez-11	1	328.400	61%	72	344	1.451
1-dez-11	1	328.500	31%	25	266	1.220
1-dez-11	1	328.600	11%	7	197	965
1-dez-11	1	328.700	3%	2	139	710
1-dez-11	1	328.800	1%	0	92	483
1-dez-11	1	328.900	0%	0	58	301
1-dez-11	1	329.000	0%	0	34	171
1-dez-11	2	328.000	2%	1	1	6
1-dez-11	2	328.100	4%	3	3	15
1-dez-11	2	328.200	8%	7	7	35

Vcto.	C/P	Strike	Delta IDI	Preço	Preço s	X
1-dez-11	2	328.300	18%	15	14	72
1-dez-11	2	328.400	39%	38	26	139
1-dez-11	2	328.500	69%	88	45	248
1-dez-11	2	328.600	89%	167	74	409
1-dez-11	2	328.700	97%	260	113	621
1-dez-11	2	328.800	99%	356	164	870
1-dez-11	2	328.900	100%	454	227	1.129
1-dez-11	2	329.000	100%	551	300	1.373
2-jan-12	1	305.000	100%	25.563	25.963	4.527
2-jan-12	1	310.000	100%	20.720	21.138	4.697
2-jan-12	1	315.000	100%	15.878	16.313	4.870
2-jan-12	1	316.000	100%	14.909	15.348	4.905
2-jan-12	1	317.000	100%	13.941	14.383	4.940
2-jan-12	1	319.000	100%	12.004	12.452	5.010
2-jan-12	1	320.000	100%	11.036	11.487	5.046
2-jan-12	1	323.500	100%	7.646	8.110	5.171
2-jan-12	1	325.000	100%	6.193	6.662	5.225
2-jan-12	1	326.000	100%	5.225	5.697	5.261
2-jan-12	1	327.000	100%	4.256	4.732	5.297
2-jan-12	1	327.100	100%	4.159	4.636	5.301
2-jan-12	1	327.200	100%	4.062	4.539	5.304
2-jan-12	1	327.500	100%	3.772	4.250	5.315
2-jan-12	1	327.600	100%	3.675	4.153	5.319
2-jan-12	1	327.700	100%	3.578	4.057	5.323
2-jan-12	1	328.000	100%	3.288	3.767	5.334
2-jan-12	1	328.500	100%	2.803	3.285	5.352
2-jan-12	1	328.600	100%	2.707	3.188	5.356
2-jan-12	1	328.700	100%	2.610	3.092	5.359
2-jan-12	1	329.000	100%	2.319	2.802	5.370
2-jan-12	1	329.100	100%	2.222	2.706	5.374
2-jan-12	1	329.200	100%	2.125	2.609	5.377
2-jan-12	1	329.500	100%	1.835	2.320	5.388
2-jan-12	1	329.600	100%	1.738	2.223	5.392
2-jan-12	1	329.700	100%	1.641	2.127	5.396
2-jan-12	1	330.000	100%	1.351	1.837	5.403
2-jan-12	1	330.100	100%	1.254	1.741	5.403
2-jan-12	1	330.200	100%	1.157	1.644	5.398
2-jan-12	1	330.300	100%	1.060	1.548	5.388
2-jan-12	1	330.400	100%	963	1.451	5.370
2-jan-12	1	330.500	99%	867	1.355	5.344
2-jan-12	1	330.600	99%	771	1.259	5.309
2-jan-12	1	330.700	98%	675	1.164	5.259
2-jan-12	1	330.800	97%	581	1.069	5.183
2-jan-12	1	330.900	94%	490	975	5.073
2-jan-12	1	331.000	91%	403	882	4.924
2-jan-12	1	331.100	85%	320	792	4.735
2-jan-12	1	331.200	76%	241	704	4.504
2-jan-12	1	331.300	64%	167	618	4.220
2-jan-12	1	331.400	50%	103	537	3.879
2-jan-12	1	331.500	35%	59	460	3.493
2-jan-12	1	331.600	22%	33	388	3.075
2-jan-12	1	331.700	13%	16	323	2.646
2-jan-12	1	331.800	7%	7	264	2.220
2-jan-12	1	331.900	4%	2	211	1.813
2-jan-12	1	332.000	2%	1	166	1.441
2-jan-12	1	332.100	1%	0	127	1.112
2-jan-12	1	332.200	1%	0	95	833
2-jan-12	1	332.300	0%	0	70	603
2-jan-12	1	332.400	0%	0	50	423
2-jan-12	1	332.500	0%	0	35	288
2-jan-12	1	332.600	0%	0	24	189
2-jan-12	1	332.700	0%	0	16	119
2-jan-12	1	332.800	0%	0	11	73
2-jan-12	1	332.900	0%	0	7	43
2-jan-12	1	333.000	0%	0	4	24
2-jan-12	1	333.100	0%	0	2	13
2-jan-12	1	333.200	0%	0	1	7
2-jan-12	1	333.300	0%	0	1	4
2-jan-12	1	333.400	0%	0	0	2
2-jan-12	1	333.500	0%	0	0	1
2-jan-12	1	333.600	0%	0	0	1
2-jan-12	1	333.700	0%	0	0	0

Vcto.	C/P	Strike	Delta IDI	Preço	Preço_s	X
2-jan-12	1	333.800	0%	0	0	0
2-jan-12	1	333.900	0%	0	0	0
2-jan-12	1	334.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	334.500	0%	0	0	0
2-jan-12	1	334.700	0%	0	0	0
2-jan-12	1	335.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	335.400	0%	0	0	0
2-jan-12	1	335.500	0%	0	0	0
2-jan-12	1	336.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	336.100	0%	0	0	0
2-jan-12	1	336.200	0%	0	0	0
2-jan-12	1	336.500	0%	0	0	0
2-jan-12	1	337.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	337.400	0%	0	0	0
2-jan-12	1	338.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	339.400	0%	0	0	0
2-jan-12	1	341.400	0%	0	0	0
2-jan-12	1	343.500	0%	0	0	0
2-jan-12	1	345.500	0%	0	0	0
2-jan-12	1	347.600	0%	0	0	0
2-jan-12	1	349.700	0%	0	0	0
2-jan-12	1	351.800	0%	0	0	0
2-jan-12	1	352.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	353.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	353.800	0%	0	0	0
2-jan-12	1	354.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	355.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	356.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	357.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	358.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	359.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	360.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	361.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	362.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	363.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	364.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	365.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	366.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	372.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	376.700	0%	0	0	0
2-jan-12	1	377.500	0%	0	0	0
2-jan-12	1	378.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	378.500	0%	0	0	0
2-jan-12	1	379.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	379.500	0%	0	0	0
2-jan-12	1	380.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	381.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	382.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	383.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	384.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	385.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	390.000	0%	0	0	0
2-jan-12	1	395.000	0%	0	0	0
2-jan-12	2	305.000	0%	0	0	0
2-jan-12	2	310.000	0%	0	0	0
2-jan-12	2	315.000	0%	0	0	0
2-jan-12	2	316.000	0%	0	0	0
2-jan-12	2	317.000	0%	0	0	0
2-jan-12	2	319.000	0%	0	0	0
2-jan-12	2	320.000	0%	0	0	0
2-jan-12	2	323.500	0%	0	0	0
2-jan-12	2	325.000	0%	0	0	0
2-jan-12	2	326.000	0%	0	0	0
2-jan-12	2	327.000	0%	0	0	0
2-jan-12	2	327.100	0%	0	0	0
2-jan-12	2	327.200	0%	0	0	0
2-jan-12	2	327.500	0%	0	0	0
2-jan-12	2	327.600	0%	0	0	0
2-jan-12	2	327.700	0%	0	0	0
2-jan-12	2	328.000	0%	0	0	0
2-jan-12	2	328.500	0%	0	0	0
2-jan-12	2	328.600	0%	0	0	0

Vcto.	C/P	Strike	Delta IDI	Preço	Preço_s	X
2-jan-12	2	328.700	0%	0	0	0
2-jan-12	2	329.000	0%	0	0	0
2-jan-12	2	329.100	0%	0	0	0
2-jan-12	2	329.200	0%	0	0	0
2-jan-12	2	329.500	0%	0	0	0
2-jan-12	2	329.600	0%	0	0	0
2-jan-12	2	329.700	0%	0	0	0
2-jan-12	2	330.000	0%	0	0	0
2-jan-12	2	330.100	0%	0	0	0
2-jan-12	2	330.200	0%	0	0	1
2-jan-12	2	330.300	0%	0	0	2
2-jan-12	2	330.400	0%	0	0	5
2-jan-12	2	330.500	1%	0	1	9
2-jan-12	2	330.600	1%	1	1	15
2-jan-12	2	330.700	2%	2	2	25
2-jan-12	2	330.800	3%	5	4	41
2-jan-12	2	330.900	6%	11	6	65
2-jan-12	2	331.000	9%	21	10	101
2-jan-12	2	331.100	15%	34	16	154
2-jan-12	2	331.200	24%	52	24	231
2-jan-12	2	331.300	36%	76	36	336
2-jan-12	2	331.400	50%	109	51	479
2-jan-12	2	331.500	65%	161	70	667
2-jan-12	2	331.600	78%	232	95	905
2-jan-12	2	331.700	87%	312	126	1.196
2-jan-12	2	331.800	93%	399	163	1.539
2-jan-12	2	331.900	96%	492	208	1.925
2-jan-12	2	332.000	98%	587	259	2.345
2-jan-12	2	332.100	99%	683	317	2.780
2-jan-12	2	332.200	99%	780	381	3.212
2-jan-12	2	332.300	100%	877	452	3.622
2-jan-12	2	332.400	100%	974	529	4.006
2-jan-12	2	332.500	100%	1.071	610	4.347
2-jan-12	2	332.600	100%	1.167	696	4.639
2-jan-12	2	332.700	100%	1.264	784	4.881
2-jan-12	2	332.800	100%	1.361	875	5.076
2-jan-12	2	332.900	100%	1.458	968	5.223
2-jan-12	2	333.000	100%	1.555	1.062	5.331
2-jan-12	2	333.100	100%	1.652	1.157	5.410
2-jan-12	2	333.200	100%	1.748	1.252	5.460
2-jan-12	2	333.300	100%	1.845	1.348	5.490
2-jan-12	2	333.400	100%	1.942	1.444	5.510
2-jan-12	2	333.500	100%	2.039	1.541	5.523
2-jan-12	2	333.600	100%	2.136	1.637	5.532
2-jan-12	2	333.700	100%	2.233	1.734	5.539
2-jan-12	2	333.800	100%	2.330	1.830	5.545
2-jan-12	2	333.900	100%	2.426	1.926	5.550
2-jan-12	2	334.000	100%	2.523	2.023	5.554
2-jan-12	2	334.500	100%	3.008	2.506	5.574
2-jan-12	2	334.700	100%	3.201	2.699	5.581
2-jan-12	2	335.000	100%	3.492	2.988	5.592
2-jan-12	2	335.400	100%	3.879	3.374	5.607
2-jan-12	2	335.500	100%	3.976	3.471	5.611
2-jan-12	2	336.000	100%	4.460	3.953	5.630
2-jan-12	2	336.100	100%	4.557	4.050	5.633
2-jan-12	2	336.200	100%	4.654	4.146	5.637
2-jan-12	2	336.500	100%	4.944	4.436	5.648
2-jan-12	2	337.000	100%	5.429	4.918	5.667
2-jan-12	2	337.400	100%	5.816	5.304	5.682
2-jan-12	2	338.000	100%	6.397	5.883	5.705
2-jan-12	2	339.400	100%	7.753	7.234	5.758
2-jan-12	2	341.400	100%	9.690	9.164	5.834
2-jan-12	2	343.500	100%	11.724	11.191	5.914
2-jan-12	2	345.500	100%	13.661	13.121	5.992
2-jan-12	2	347.600	100%	15.695	15.147	6.073
2-jan-12	2	349.700	100%	17.728	17.174	6.155
2-jan-12	2	351.800	100%	19.762	19.201	6.238
2-jan-12	2	352.000	100%	19.956	19.394	6.246
2-jan-12	2	353.000	100%	20.924	20.359	6.285
2-jan-12	2	353.800	100%	21.699	21.131	6.317
2-jan-12	2	354.000	100%	21.893	21.324	6.325
2-jan-12	2	355.000	100%	22.861	22.289	6.365

Vcto.	C/P	Strike	Delta IDI	Preço	Preço_s	X
2-jan-12	2	356.000	100%	23.830	23.254	6.405
2-jan-12	2	357.000	100%	24.798	24.219	6.445
2-jan-12	2	358.000	100%	25.767	25.184	6.485
2-jan-12	2	359.000	100%	26.735	26.149	6.525
2-jan-12	2	360.000	100%	27.704	27.114	6.566
2-jan-12	2	361.000	100%	28.672	28.079	6.606
2-jan-12	2	362.000	100%	29.641	29.044	6.647
2-jan-12	2	363.000	100%	30.609	30.009	6.688
2-jan-12	2	364.000	100%	31.578	30.974	6.729
2-jan-12	2	365.000	100%	32.546	31.939	6.770
2-jan-12	2	366.000	100%	33.515	32.904	6.811
2-jan-12	2	372.000	100%	39.326	38.694	7.061
2-jan-12	2	376.700	100%	43.878	43.230	7.259
2-jan-12	2	377.500	100%	44.652	44.002	7.294
2-jan-12	2	378.000	100%	45.137	44.484	7.315
2-jan-12	2	378.500	100%	45.621	44.967	7.336
2-jan-12	2	379.000	100%	46.105	45.449	7.358
2-jan-12	2	379.500	100%	46.589	45.932	7.379
2-jan-12	2	380.000	100%	47.074	46.414	7.401
2-jan-12	2	381.000	100%	48.042	47.379	7.444
2-jan-12	2	382.000	100%	49.011	48.344	7.487
2-jan-12	2	383.000	100%	49.979	49.310	7.530
2-jan-12	2	384.000	100%	50.947	50.275	7.574
2-jan-12	2	385.000	100%	51.916	51.240	7.617
2-jan-12	2	390.000	100%	56.758	56.065	7.837
2-jan-12	2	395.000	100%	61.601	60.890	8.060
2-abr-12	1	137.000	95%	983	1.329	5.324
2-abr-12	1	137.100	94%	892	1.236	5.289
2-abr-12	1	137.200	93%	801	1.143	5.239
2-abr-12	1	137.300	91%	711	1.051	5.164
2-abr-12	1	137.400	88%	622	960	5.058
2-abr-12	1	137.500	86%	534	871	4.909
2-abr-12	1	137.600	82%	450	783	4.715
2-abr-12	1	137.700	77%	370	697	4.474
2-abr-12	1	137.800	70%	296	614	4.184
2-abr-12	1	137.900	63%	226	535	3.848
2-abr-12	1	138.000	54%	166	460	3.478
2-abr-12	1	138.100	44%	118	391	3.080
2-abr-12	1	138.200	34%	81	327	2.669
2-abr-12	1	138.300	25%	56	269	2.257
2-abr-12	1	138.400	19%	37	219	1.859
2-abr-12	1	138.500	14%	26	174	1.493
2-abr-12	1	138.600	10%	19	136	1.167
2-abr-12	1	138.700	8%	15	104	887
2-abr-12	1	138.800	6%	11	78	656
2-abr-12	1	138.900	5%	8	58	471
2-abr-12	1	139.000	4%	6	42	328
2-abr-12	1	139.100	3%	4	29	222
2-abr-12	1	139.200	2%	3	20	145
2-abr-12	1	139.300	2%	2	13	92
2-abr-12	1	139.400	2%	1	9	55
2-abr-12	1	139.500	1%	1	6	32
2-abr-12	2	137.000	5%	14	1	13
2-abr-12	2	137.100	6%	17	2	20
2-abr-12	2	137.200	7%	21	3	32
2-abr-12	2	137.300	9%	25	5	49
2-abr-12	2	137.400	12%	31	8	74
2-abr-12	2	137.500	14%	37	12	112
2-abr-12	2	137.600	18%	47	18	168
2-abr-12	2	137.700	23%	62	26	248
2-abr-12	2	137.800	30%	82	37	357
2-abr-12	2	137.900	37%	107	52	504
2-abr-12	2	138.000	46%	142	71	694
2-abr-12	2	138.100	56%	188	95	932
2-abr-12	2	138.200	66%	246	125	1.219
2-abr-12	2	138.300	75%	314	161	1.554
2-abr-12	2	138.400	81%	390	204	1.930
2-abr-12	2	138.500	86%	474	254	2.339
2-abr-12	2	138.600	90%	561	310	2.767
2-abr-12	2	138.700	92%	651	372	3.197
2-abr-12	2	138.800	94%	742	439	3.610
2-abr-12	2	138.900	95%	834	513	3.996

Vcto.	C/P	Strike	Delta ID!	Preço	Preço_s	X
2-abr-12	2	139.000	96%	926	590	4.344
2-abr-12	2	139.100	97%	1.018	672	4.643
2-abr-12	2	139.200	98%	1.111	756	4.897
2-abr-12	2	139.300	98%	1.205	844	5.104
2-abr-12	2	139.400	98%	1.299	933	5.271
2-abr-12	2	139.500	99%	1.393	1.023	5.401
2-jul-12	1	139.500	96%	1.817	2.356	16.213
2-jul-12	1	139.600	95%	1.729	2.266	16.176
2-jul-12	1	139.700	95%	1.640	2.175	16.123
2-jul-12	1	139.800	94%	1.552	2.085	16.051
2-jul-12	1	139.900	93%	1.464	1.995	15.961
2-jul-12	1	140.000	92%	1.377	1.905	15.845
2-jul-12	1	140.100	91%	1.290	1.816	15.702
2-jul-12	1	140.200	90%	1.204	1.727	15.526
2-jul-12	1	140.300	88%	1.119	1.639	15.319
2-jul-12	1	140.400	87%	1.035	1.552	15.074
2-jul-12	1	140.500	85%	953	1.466	14.783
2-jul-12	1	140.600	83%	873	1.380	14.446
2-jul-12	1	140.700	80%	795	1.296	14.060
2-jul-12	1	140.800	77%	720	1.214	13.633
2-jul-12	1	140.900	74%	649	1.133	13.162
2-jul-12	1	141.000	71%	579	1.053	12.649
2-jul-12	1	141.100	67%	512	976	12.089
2-jul-12	1	141.200	63%	449	901	11.495
2-jul-12	1	141.300	59%	390	829	10.865
2-jul-12	1	141.400	54%	337	760	10.206
2-jul-12	1	141.500	49%	288	693	9.535
2-jul-12	1	141.600	44%	244	630	8.849
2-jul-12	1	141.700	40%	206	569	8.153
2-jul-12	1	141.800	35%	172	512	7.459
2-jul-12	1	141.900	31%	144	458	6.771
2-jul-12	1	142.000	27%	119	408	6.093
2-jul-12	1	142.100	23%	98	362	5.438
2-jul-12	1	142.200	20%	80	319	4.814
2-jul-12	1	142.300	17%	66	279	4.224
2-jul-12	1	142.400	15%	55	243	3.676
2-jul-12	1	142.500	12%	46	210	3.172
2-jul-12	1	142.600	11%	38	181	2.713
2-jul-12	1	142.700	9%	32	155	2.300
2-jul-12	1	142.800	8%	27	132	1.933
2-jul-12	1	142.900	7%	23	111	1.610
2-jul-12	1	143.000	6%	19	94	1.330
2-jul-12	1	143.100	5%	16	78	1.088
2-jul-12	1	143.200	4%	14	65	882
2-jul-12	1	143.300	4%	11	53	708
2-jul-12	1	143.400	3%	9	44	563
2-jul-12	1	143.500	3%	7	35	442
2-jul-12	1	143.600	2%	6	28	343
2-jul-12	1	143.700	2%	5	22	263
2-jul-12	1	143.800	2%	4	18	198
2-jul-12	1	143.900	2%	3	14	147
2-jul-12	1	144.000	1%	2	11	107
2-jul-12	1	145.000	0%	0	1	1
2-jul-12	2	139.500	4%	18	1	36
2-jul-12	2	139.600	5%	22	2	46
2-jul-12	2	139.700	5%	26	3	58
2-jul-12	2	139.800	6%	30	4	75
2-jul-12	2	139.900	7%	34	5	96
2-jul-12	2	140.000	8%	39	7	123
2-jul-12	2	140.100	9%	44	9	157
2-jul-12	2	140.200	10%	51	11	201
2-jul-12	2	140.300	12%	57	15	255
2-jul-12	2	140.400	13%	66	19	322
2-jul-12	2	140.500	15%	75	23	406
2-jul-12	2	140.600	17%	87	29	508
2-jul-12	2	140.700	20%	102	37	632
2-jul-12	2	140.800	23%	119	45	783
2-jul-12	2	140.900	26%	140	55	962
2-jul-12	2	141.000	29%	162	67	1.174
2-jul-12	2	141.100	33%	187	82	1.422
2-jul-12	2	141.200	37%	216	98	1.710
2-jul-12	2	141.300	41%	250	117	2.041

Vcto.	C/P	Strike	Delta IDI	Preço	Preço s	X
2-jul-12	2	141.400	46%	289	139	2.416
2-jul-12	2	141.500	51%	332	164	2.839
2-jul-12	2	141.600	56%	380	191	3.310
2-jul-12	2	141.700	60%	434	222	3.827
2-jul-12	2	141.800	65%	492	256	4.390
2-jul-12	2	141.900	69%	556	294	4.995
2-jul-12	2	142.000	73%	624	335	5.636
2-jul-12	2	142.100	77%	695	380	6.310
2-jul-12	2	142.200	80%	769	428	7.013
2-jul-12	2	142.300	83%	847	480	7.735
2-jul-12	2	142.400	85%	928	535	8.474
2-jul-12	2	142.500	88%	1.011	593	9.219
2-jul-12	2	142.600	89%	1.096	655	9.958
2-jul-12	2	142.700	91%	1.182	720	10.687
2-jul-12	2	142.800	92%	1.269	789	11.397
2-jul-12	2	142.900	93%	1.357	860	12.080
2-jul-12	2	143.000	94%	1.445	933	12.735
2-jul-12	2	143.100	95%	1.534	1.009	13.345
2-jul-12	2	143.200	96%	1.624	1.087	13.906
2-jul-12	2	143.300	96%	1.713	1.167	14.421
2-jul-12	2	143.400	97%	1.803	1.248	14.895
2-jul-12	2	143.500	97%	1.894	1.331	15.317
2-jul-12	2	143.600	98%	1.985	1.416	15.699
2-jul-12	2	143.700	98%	2.076	1.501	16.044
2-jul-12	2	143.800	98%	2.167	1.587	16.347
2-jul-12	2	143.900	98%	2.258	1.675	16.618
2-jul-12	2	144.000	99%	2.349	1.763	16.854
2-jul-12	2	145.000	100%	3.269	2.666	17.918
2-jan-13	1	147.000	79%	1.754	2.407	56.532
2-jan-13	1	147.100	78%	1.683	2.331	55.636
2-jan-13	1	147.200	77%	1.614	2.256	54.719
2-jan-13	1	147.300	76%	1.546	2.183	53.755
2-jan-13	1	147.400	75%	1.478	2.110	52.745
2-jan-13	1	147.500	73%	1.412	2.038	51.701
2-jan-13	1	147.600	72%	1.346	1.967	50.615
2-jan-13	1	147.700	70%	1.281	1.897	49.493
2-jan-13	1	147.800	69%	1.218	1.828	48.340
2-jan-13	1	147.900	67%	1.155	1.760	47.155
2-jan-13	1	148.000	65%	1.094	1.693	45.934
2-jan-13	1	148.500	56%	818	1.376	39.463
2-jan-13	1	148.600	54%	768	1.317	38.114
2-jan-13	1	148.700	52%	721	1.258	36.759
2-jan-13	1	148.800	51%	676	1.201	35.401
2-jan-13	1	148.900	49%	633	1.146	34.036
2-jan-13	1	149.000	47%	591	1.092	32.672
2-jan-13	1	149.500	37%	415	845	25.999
2-jan-13	1	150.000	28%	289	635	19.836
2-jan-13	1	150.500	21%	197	463	14.518
2-jan-13	1	151.000	16%	136	329	10.173
2-jan-13	1	151.500	12%	98	227	6.818
2-jan-13	1	152.000	9%	73	151	4.377
2-jan-13	1	152.500	7%	55	96	2.690
2-jan-13	1	153.000	5%	41	59	1.581
2-jan-13	1	153.500	4%	30	34	888
2-jan-13	1	154.000	3%	22	19	473
2-jan-13	1	154.500	3%	15	11	239
2-jan-13	1	155.000	2%	10	6	116
2-jan-13	1	155.500	2%	7	3	55
2-jan-13	2	147.000	21%	252	110	3.707
2-jan-13	2	147.100	22%	269	121	4.075
2-jan-13	2	147.200	23%	287	133	4.474
2-jan-13	2	147.300	24%	306	145	4.904
2-jan-13	2	147.400	25%	327	159	5.365
2-jan-13	2	147.500	27%	348	173	5.861
2-jan-13	2	147.600	28%	370	189	6.392
2-jan-13	2	147.700	30%	392	205	6.960
2-jan-13	2	147.800	31%	416	223	7.566
2-jan-13	2	147.900	33%	442	241	8.211
2-jan-13	2	148.000	35%	468	261	8.895
2-jan-13	2	148.500	44%	630	376	12.950
2-jan-13	2	148.600	46%	668	403	13.890
2-jan-13	2	148.700	48%	709	431	14.875

Vcto.	C/P	Strike	Delta IDI	Preço	Preço_s	χ
2-jan-13	2	148.800	49%	751	460	15.904
2-jan-13	2	148.900	51%	795	491	16.974
2-jan-13	2	149.000	53%	842	524	18.086
2-jan-13	2	149.500	63%	1.104	709	24.243
2-jan-13	2	150.000	72%	1.416	931	31.205
2-jan-13	2	150.500	79%	1.761	1.190	38.687
2-jan-13	2	151.000	84%	2.139	1.489	46.216
2-jan-13	2	151.500	88%	2.539	1.818	53.324
2-jan-13	2	152.000	91%	2.953	2.175	59.674
2-jan-13	2	152.500	93%	3.373	2.552	65.015
2-jan-13	2	153.000	95%	3.797	2.947	69.358
2-jan-13	2	153.500	96%	4.224	3.354	72.752
2-jan-13	2	154.000	97%	4.654	3.771	75.340
2-jan-13	2	154.500	97%	5.085	4.194	77.320
2-jan-13	2	155.000	98%	5.519	4.622	78.784
2-jan-13	2	155.500	98%	5.954	5.051	79.855
1-jul-13	1	160.000	20%	313	470	22.840
1-jul-13	1	161.000	15%	212	297	13.981
1-jul-13	1	162.000	11%	150	178	8.096
1-jul-13	1	163.000	8%	108	102	4.433
1-jul-13	1	164.000	6%	78	56	2.308
1-jul-13	1	165.000	4%	56	30	1.139
1-jul-13	2	160.000	80%	3.121	2.592	128.274
1-jul-13	2	161.000	85%	3.853	3.238	150.048
1-jul-13	2	162.000	89%	4.623	3.938	168.750
1-jul-13	2	163.000	92%	5.413	4.682	183.618
1-jul-13	2	164.000	94%	6.215	5.455	195.146
1-jul-13	2	165.000	96%	7.025	6.248	203.796
2-jan-14	1	160.000	88%	4.822	4.960	271.639
2-jan-14	1	162.000	78%	3.533	3.724	228.446
2-jan-14	1	164.000	66%	2.448	2.656	176.940
2-jan-14	1	166.000	51%	1.611	1.790	124.748
2-jan-14	1	170.000	26%	649	666	45.704
2-jan-14	1	171.000	22%	512	496	33.359
2-jan-14	1	172.000	18%	405	361	23.728
2-jan-14	1	173.000	15%	325	258	16.476
2-jan-14	1	174.000	12%	265	181	11.183
2-jan-14	1	175.000	10%	218	125	7.425
2-jan-14	2	160.000	12%	298	361	26.645
2-jan-14	2	162.000	22%	582	675	52.558
2-jan-14	2	164.000	34%	1.070	1.156	92.433
2-jan-14	2	166.000	49%	1.805	1.840	146.330
2-jan-14	2	170.000	74%	3.988	3.815	276.651
2-jan-14	2	171.000	78%	4.637	4.419	308.251
2-jan-14	2	172.000	82%	5.316	5.060	337.236
2-jan-14	2	173.000	85%	6.023	5.731	363.480
2-jan-14	2	174.000	88%	6.749	6.428	386.579
2-jan-14	2	175.000	90%	7.488	7.147	406.331
2-jan-17	1	215.000	78%	10.889	10.508	1.958.122
2-jan-17	1	220.000	71%	9.007	8.747	1.719.965
2-jan-17	1	225.000	64%	7.360	7.183	1.470.412
2-jan-17	1	230.000	56%	5.973	5.809	1.223.346
2-jan-17	2	215.000	22%	2.086	2.920	870.917
2-jan-17	2	220.000	29%	3.030	3.912	1.184.341
2-jan-17	2	225.000	36%	4.208	5.102	1.555.538
2-jan-17	2	230.000	44%	5.647	6.481	1.979.214

Preços de mercado da corretora *Convenção* de 14-set-2011.

Na Figura 4.9 é possível ver o somatório do erro absoluto por vencimento, definido como a diferença entre o preço de mercado e C_M e P_M , como definido nas equações (4.4) e (4.5).

O menor erro ocorreu para as opções curtas, vencendo em outubro e dezembro. Isso já era de certa forma esperado, visto que o potencial de variação dos níveis da taxa à vista em dois meses é menor se comparado a prazos maiores. Entretanto, de acordo com a Figura 4.9 não é possível estabelecer relação bem definida entre o tamanho do erro e o prazo de vencimento das opções. Além disso o tamanho da barra de erro depende da quantidade de opções disponíveis em cada vencimento, logo opções com mais liquidez, por exemplo, Jan-12, mesmo que tenham erros menores, podem ter um erro total maior que opções com menos liquidez, que é o caso da opção vencendo em Jan-17.

Observando-se os gráficos das Figura 4.10 a Figura 4.18, em que se mostra o erro em função do strike para cada vencimento, é possível verificar um padrão o preço simulado: maior para strikes menores e menor para strikes maiores. Na verdade o preço simulado foi maior para calls e menor para puts. Uma possível explicação para isso é de que o IDI a termo calculado na simulação é maior do que a expectativa do mercado, medida através dos preços de mercado a partir da tabela de volatilidades implícitas, usando o modelo de Black. Dessa forma, as calls estariam subvalorizadas enquanto as puts estariam supervalorizadas.

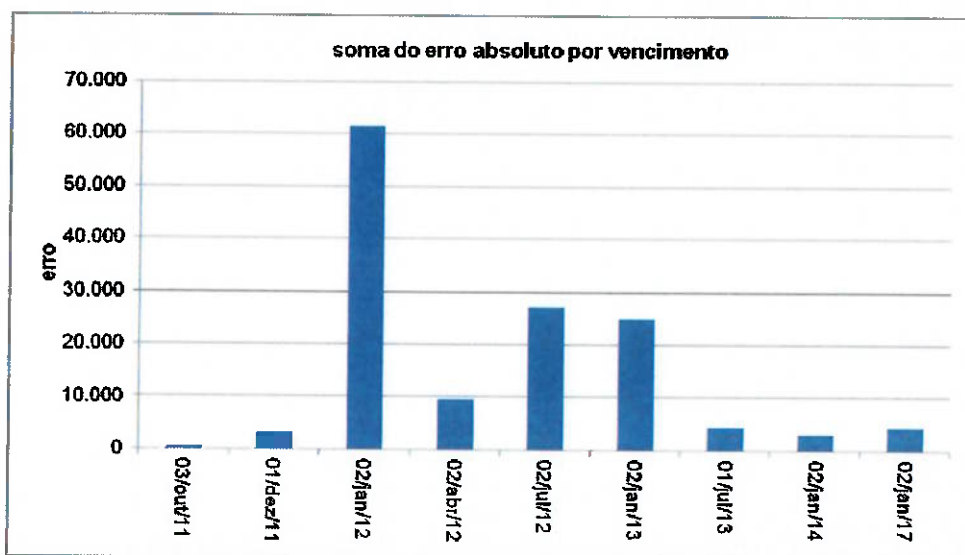


Figura 4.9: Erro absoluto total em reais por vencimento.

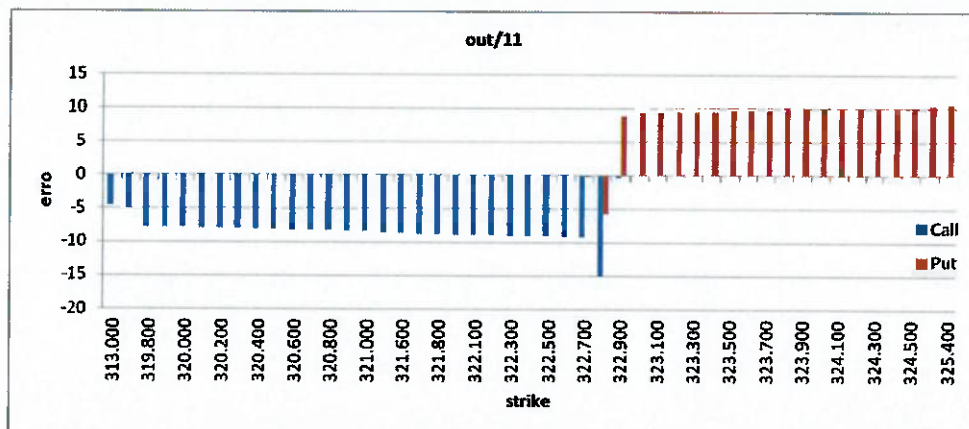


Figura 4.10: Erro dos preços simulados em função do strike para as opções vencendo em Out/11.

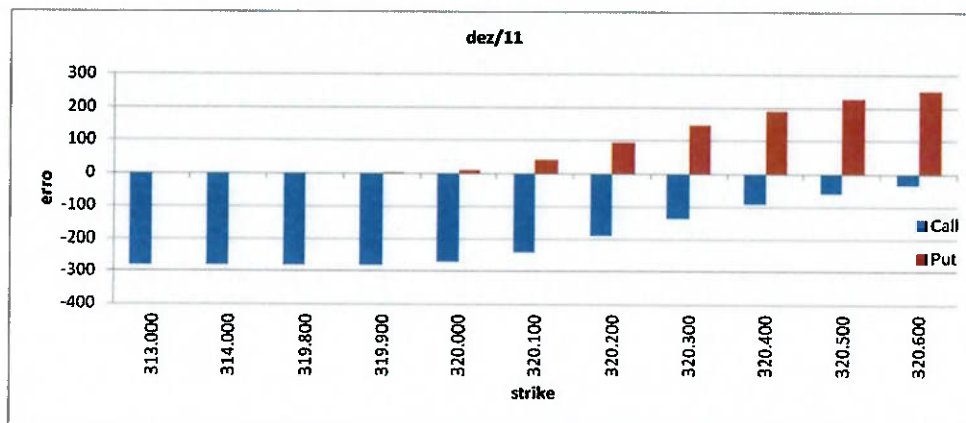


Figura 4.11: Erro dos preços simulados em função do strike para as opções vencendo em Dez/11.

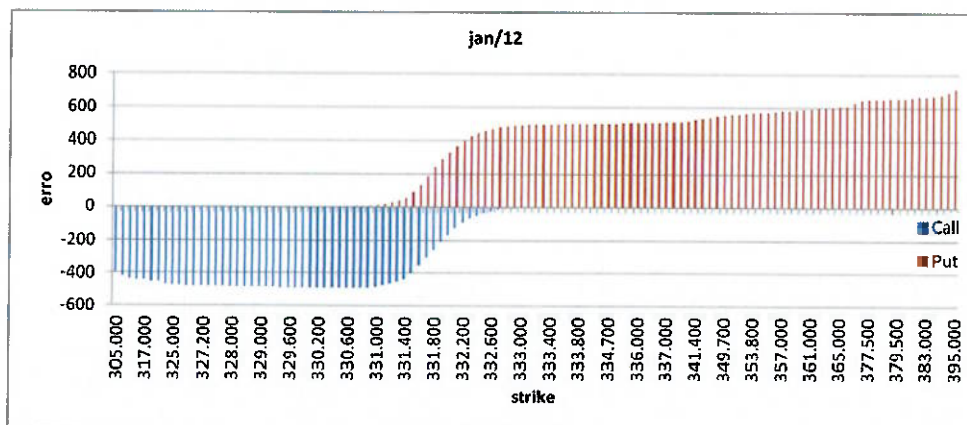


Figura 4.12: Erro dos preços simulados em função do strike para as opções vencendo em Jan/12.

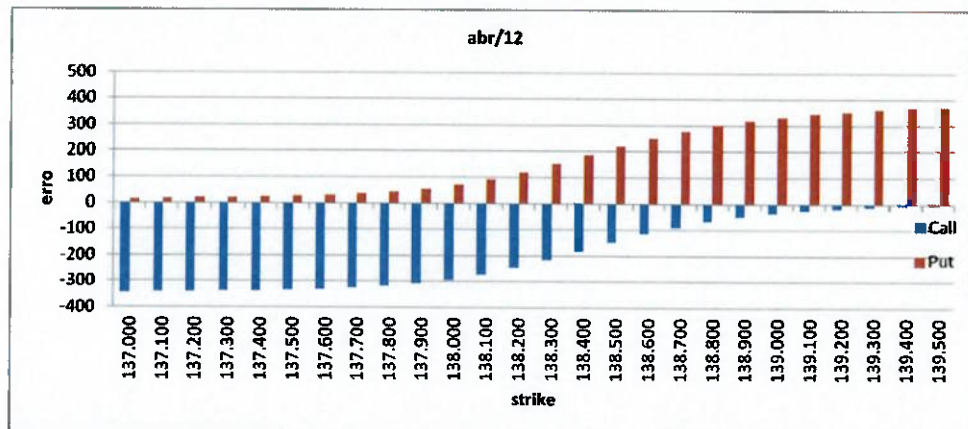


Figura 4.13: Erro dos preços simulados em função do strike para as opções vencendo em Abr/12.

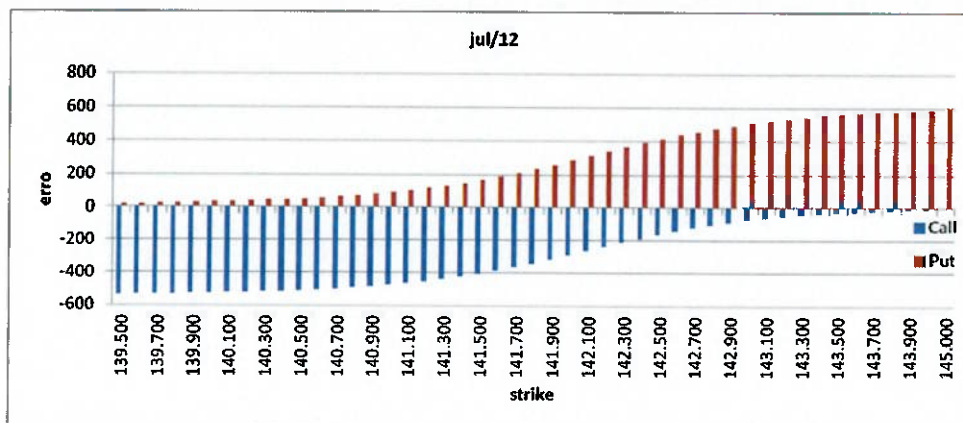


Figura 4.14: Erro dos preços simulados em função do strike para as opções vencendo em Jul/12.

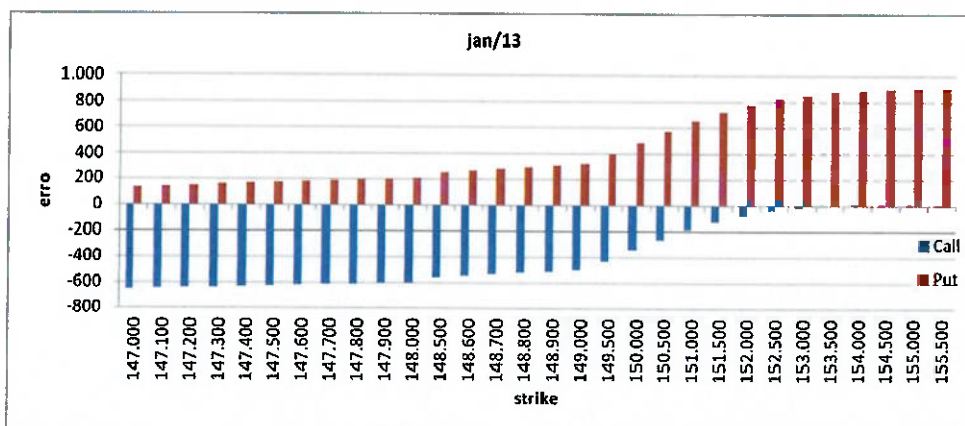


Figura 4.15: Erro dos preços simulados em função do strike para as opções vencendo em Jan/13.

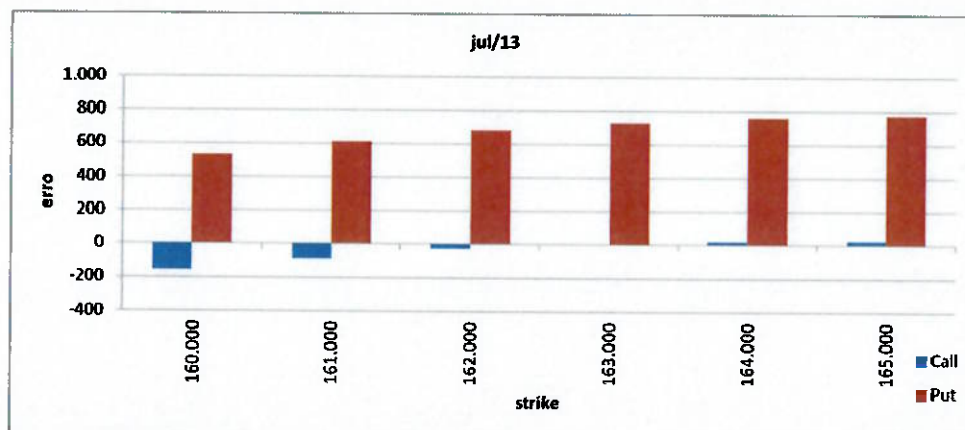


Figura 4.16: Erro dos preços simulados em função do strike para as opções vencendo em Jul/13.

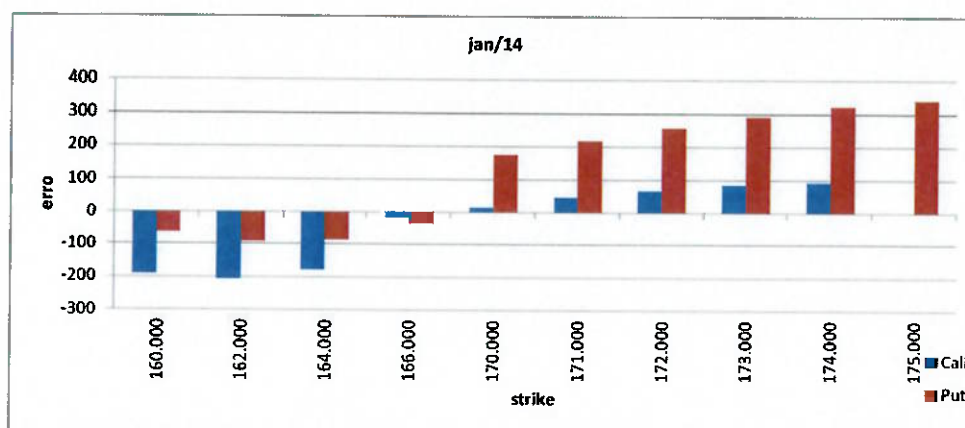


Figura 4.17: Erro dos preços simulados em função do strike para as opções vencendo em Jan/14.

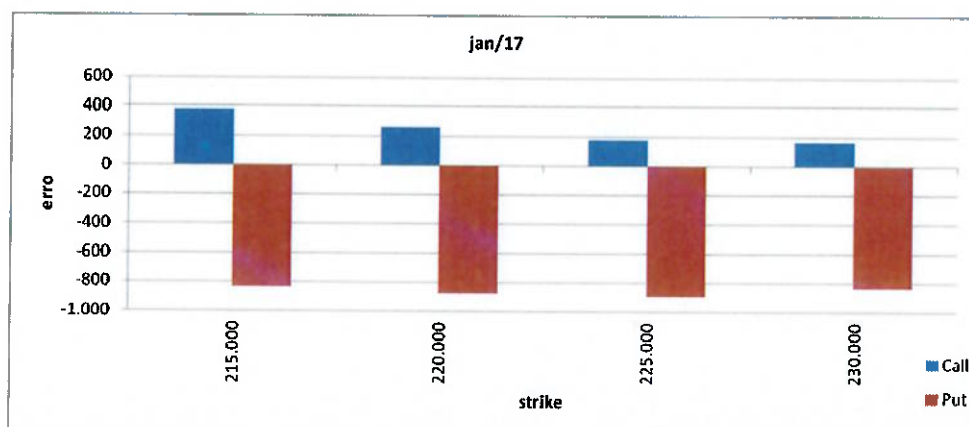


Figura 4.18: Erro dos preços simulados em função do strike para as opções vencendo em Jan/17.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O método Monte Carlo se mostrou uma boa opção para a precificação das opções de IDI devido à característica asiática do seu índice. O modelo de Hull-White de um fator para a geração da taxa de juros à vista é de fácil implementação, entretanto sua calibração, apesar de depender somente de dois parâmetros não-observáveis, não é das mais fáceis.

Além disso, deixou-se em aberto a questão da determinação de um δt adequado bem como da quantidade M de simulações a se realizar. Verificou-se que a variância amostral gerada foi muito alta, o que se atribuiu a um valor baixo de M e alto de δt . Entretanto diminuir a variância exige muito computacionalmente. Como sugestão de complementação deste trabalho, pode-se tentar implementar técnicas de redução de variância para melhorar os resultados obtidos.

Ao se utilizar o método de minimização da função erro proposta por Hull, que mede a distância quadrática dos preços simulados aos preços dos instrumentos de calibração e fixando a velocidade de reversão à média da taxa à vista em 0,6%, obteve-se o valor de 1,9% para a volatilidade da taxa à vista.

Uma outra forma de calibração do modelo que poderia ser testada é a de fixação de σ , medido a partir da volatilidade da taxa diária do CDI, e variação do parâmetro a do modelo. Dessa forma, como é mais fácil inferir σ estatisticamente, essa calibração poderia ser usada como medição indireta da velocidade de reversão à média da taxa à vista do mercado brasileiro.

Observa-se que o mérito do modelo testado é a geração de um processo estocástico consistente com a ETTJ vigente. Como o mercado já costuma precificar as expectativas de mudanças na taxa à vista nas reuniões do COPOM, a ETTJ é uma ótima previsão para os níveis futuros da taxa à vista. Dessa forma não se faz necessário a utilização de modelos elaborados com saltos, nem modelos da classe HJM.

Embora a aplicação prática do modelo de Hull White de um fator pelo método Monte Carlo para precificação das opções sobre IDI talvez não tenha tanto apelo como tem o modelo de Black, ele foi capaz de gerar preços, em média, consistentes com os de mercado para todos os vencimentos, especialmente os mais curtos.

REFERÊNCIAS¹¹

- ALMEIDA, L. A.; YOSHINO, J. A.; SCHIRMER, P. P. DERIVATIVOS DE RENDA FIXA NO BRASIL: MODELO HULL WHITE. **Pesquisa e planejamento econômico**, Agosto 2003.
- BARBACHAN, J. S. F.; ORNELAS, J. R. H. **ECONOMIA APLICADA**, V. 7, N. V. 7, 2003.
- BARBACHAN, J. S. F.; ORNELAS, J. R. H. Apreçamento de Opções de IDI Usando o Modelo CIR. **Estudos Econômicos**, 33, Abril-Junho 2003. 39.
- BLACK, F. The pricing of commodity contracts. **Journal of Financial Economics**, v. 3, Mar 1976. 167-179.
- GIBSON, R.; LHABITANT, F. S.; TALAY, D. Modelling the Term Structure of Interest Rates a Literature Review, Junho 2001.
- GLUCKSTERN, M. C.; GERSON, F.; EID JR, W. APLICAÇÃO DO MODELO HULL-WHITE A PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES. 40.
- HIGHAM, D. J. An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations. **Society for Industrial and Applied Mathematics**, Vol. 43, 2011. 525–546.
- HO, T.; LEE, S. B. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. **Journal of Finance**, 41, 1986.
- HULL, J. C. **Options, Futures, and Other Derivatives**. 7a Edição. ed. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2008.
- HULL, J.; WHITE, A. Pricing Interest Rate Derivative Securities. **Review of Financial Studies**, 1990. 573-92.
- NOVY, L. G. G. Comportamento e Informação na Estrutura a Termo das Taxas. **Dissertação de Mestrado, EAESP/FGV**, 2000.
- SILVA, M. E. Precificação de opções e futuros de taxa de juro no Brasil. **Resenha BM&F**, 1997. 21-35.
- WILMOTT, P. **Quantitative Finance**. 2a Edição. ed. [S.l.]: Wiley, 2006.

¹¹ De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023.

APÊNDICE A – CÓDIGO MATLAB PARA SIMULAÇÃO DA TAXA DE JUROS

```
% Simulação da taxa de juros - modelo Hull-White
% Data simulada: 14-set-2011
% Guilherme F. Moleiro

dt = 0.001; %passo da discretização
T=curva(size(curva,1));
N = floor(T/dt);
t = (dt:dt:T);
M = 10000; %número de caminhos gerados
a = 0.006;
sigma = 1.9/100;

F = pchip(curva(1:size(curva,1),1), curva(1:size(curva,1),2));
theta = theta_struct(F,a,sigma,t);
r=zeros(M,N);
r(1:M,1)=11.88/100; %CDI 14-set

for j = 1:M
    for i = 1:N-1
        r(j,i+1) = r(j,i) + theta(i)*dt - a*r(j,i)*dt +
sigma*randn(1)*sqrt(dt);
    end
end

rmean = mean(r);

% Create figure
figure1 = figure;
% Create axes
axes1 = axes('Parent',figure1,'FontSize',12);
xlim(axes1,[0 10]);
box(axes1,'on');
hold(axes1,'all');
plot(t,r(1:5,:), 'LineWidth',1.0, 'Color',[0.5 0.5 0.5], 'Parent',axes1), hold
on;
plot(t,rmean, 'b-', 'LineWidth',1.5, 'Parent',axes1), hold off;
% Create xlabel
xlabel({'t (anos)'}, 'FontSize',12);
% Create ylabel
ylabel({''}, 'FontSize',12);
```

APÊNDICE B – CÓDIGO MATLAB PARA CALIBRAÇÃO DO MODELO HULL-WHITE DE UM FATOR (ERRO X SIGMA)

Os códigos das funções `theta_struct` e `f_precos_simulados` estão disponíveis no Apêndice D.

```
%calibração de sigma
% Data simulada: 14-set-2011
% Guilherme F. Moleiro

dt = 0.001; %passo da discretização
T=curva(size(curva,1));
N = floor(T/dt);
t = (dt:dt:T);
M = 1000; %número de caminhos gerados
a = 0.6/100;
IDI_inicial(1,1) = 320950.42;
IDI_inicial(1,2) = 130320.47;
r=zeros(M,N);
r(1:M,1)=11.88/100; %CDI 14-set
% sigma_min = 0.1/100;
% sigma_max =5/100;
% sigma_step = 0.1/100;
% sigma_min = 0.1/100;
% sigma_max = 15/100;
% sigma_step = 0.1/100;
sigma_min = 1.5/100;
sigma_max = 2/100;
sigma_step = 0.01/100;

calib=zeros(1:2,sigma_max/sigma_step);

F = pchip(curva(1:size(curva,1),1), curva(1:size(curva,1),2));

h=0;
for sigma = sigma_min:sigma_step:sigma_max
    h=h+1
    theta = theta_struct(F,a,sigma,t);
    sigma
    for j = 1:M
        for i = 1:N-1
            r(j,i+1) = r(j,i) + theta(i)*dt - a*r(j,i)*dt +
sigma*randn(1)*sqrt(dt);
        end
    end
    precos_s = f_precos_simulados(t, dt, r, precos_m, IDI_inicial);
    precos_s = mean(precos_s,2);
    diff=precos_m(1:size(precos_m,1),4)-precos_s;
    calib(1,h)=sigma;
    calib(2,h)=sum(diff.^2);
end

plot(calib(1,1:h),calib(2,1:h));
```

APÊNDICE C – CÓDIGO MATLAB PARA CÁLCULO DO PREÇO DAS OPÇÕES DE IDI USANDO MODELO HULL-WHITE DE UM FATOR

```
%geração dos preços simulados
% Data simulada: 14-set-2011
% Guilherme F. Moleiro

dt = 0.001; %passo da discretização
T=curva(size(curva,1));
N = floor(T/dt);
t = (dt:dt:T);
M = 100; %número de caminhos gerados
a = 0.6/100;
sigma = 1.9/100;
IDI_inicial(1,1) = 320950.42;
IDI_inicial(1,2) = 130320.47;

r=zeros(M,N);
precos_s=zeros(size(precos_m,1),2);
F = pchip(curva(1:size(curva,1),1), curva(1:size(curva,1),2));

r(1:M,1)=11.88/100; %CDI 14-set
theta = theta_struct(F,a,sigma,t);
for j = 1:M
    j
    for i = 1:N-1
        r(j,i+1) = r(j,i) + theta(i)*dt - a*r(j,i)*dt +
sigma*randn(1)*sqrt(dt);
    end
end
precos_s1 = f_precos_simulados(t, dt, r, precos_m, IDI_inicial);
precos_s(1:size(precos_m,1),1) = mean(precos_s1,2);
precos_s(1:size(precos_m,1),2) = 1.96*var(precos_s1,0,2)/sqrt(M);
```


APÊNDICE D – FUNÇÕES UTILIZADAS NOS PROGRAMAS DOS OUTROS APÊNDICES

```
function f_theta = theta_struct(F, a, sigma, t)
%theta(F, a, sigma, t_index, t, dt)
% retorna theta do modelo Hull-White de um fator

dfdt1=fnder(F,1);
dfdt=ppval(dfdt1, t);
f_theta = dfdt + a * ppval(F,t) + sigma ^ 2 / (2 * a) * (1 - exp(-2 * a *
t));
```

```
function precos = f_precos_simulados(t, dt, r, opcoes, IDI_inicial)
%calcula o preco das opcoes de IDI

N = size(opcoes,1);
M = size(r,1);
precos = zeros(N,M);

for k =1:M
    for i = 1:N
        K = opcoes(i,3);
        if K < 300000
            IDI_fwd = IDI_inicial(1,2); %IDI 2003
        else
            IDI_fwd = IDI_inicial(1,1); %IDI 2009
        end
        vcto = opcoes(i,1)/360;
        tipo = opcoes(i,2);

        j =1 ;
        %calcula IDI_fwd
        while t(1,j)< vcto
            IDI_fwd = IDI_fwd*(1+r(k,j))^dt;
            j=j+1;
        end
        if tipo == 1 %CALL
            payoff = max(0, (IDI_fwd - K))*exp(-mean(r(k,1:j))*t(1,j));
        else %PUT
            payoff = max(0, (K - IDI_fwd))*exp(-mean(r(k,1:j))*t(1,j));
        end
        precos(i,k) = payoff;
    end
end
```