

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO**

**Arthur Lunardi de Souza**

**ANÁLISE DO FLUXO DE POTÊNCIA EM REDES DE  
DISTRIBUIÇÃO**

São Carlos

2016



**ARTHUR LUNARDI DE SOUZA**

# **ANÁLISE DO FLUXO DE POTÊNCIA EM REDES DE DISTRIBUIÇÃO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo

Curso de Engenharia Elétrica com ênfase em Sistemas de Energia e Automação

ORIENTADOR: Prof. Dr. Ricardo Quadros Machado

São Carlos  
2016



AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,  
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS  
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

S719a Souza, Arthur Lunardi de  
Análise do Fluxo de Potência em Redes de  
Distribuição / Arthur Lunardi de Souza; orientador  
Ricardo Quadros Machado. São Carlos, 2016.

Monografia (Graduação em Engenharia Elétrica com  
enfase em Sistemas de Energia e Automação) -- Escola de  
Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo,  
2016.

1. Fontes Alternativas. 2. Harmônicos. 3. Normas  
Reguladoras. 4. Maple. I. Título.



# FOLHA DE APROVAÇÃO

Nome: Arthur Lunardi de Souza

Título: "Análise do fluxo de potência em redes de distribuição"

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado  
em 15/10/2016,

com NOTA 8,5 (oito , cinco ), pela Comissão Julgadora:

*Prof. Dr. Ricardo Quadros Machado - (Orientador - SEL/EESC/USP)*

*Mestre Klebber de Araújo Ottoboni - (Doutorando - SEL/EESC/USP)*

*Mestre Guilherme Henrique Favaro Fuzato - (Doutorando -  
SEL/EESC/USP)*

Coordenador da CoC-Engenharia Elétrica - EESC/USP:  
Prof. Dr. José Carlos de Melo Vieira Júnior



*A minha família que sempre  
me apoiou nos estudos*



## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais, José Pereira e Rosa Rossi pelo apoio e incentivo que tive para sempre buscar o conhecimento, mesmo que ele me afaste de casa.

Ao meu irmão André Lunardi que sempre foi e será um exemplo e guia para diversas decisões que tomei e virei a tomar.

A minha namorada, Manuela pela ajuda a enfrentar as dificuldades que encontrei tanto na universidade quanto na vida.

A todos os professores da EESC que colaboraram para meu ensino e aprendizado e em especial ao Prof. Dr. Ricardo Quadros por toda assistência na elaboração desse trabalho.

Aos meus amigos da Elétrica011, por todo apoio que tive ao longo desses anos, em especial para a “Diretoria”, Caio Fanti, Gabriel Caciatore, Rene Bonfá e Welerson Casadei.

Aos meus amigos da República Matadouro por tudo que me ensinaram e por todo apoio que me ofereceram desde o meu primeiro dia em São Carlos.



## RESUMO

Souza, Arthur Lunardi de **Análise do Fluxo de Potência em Redes de Distribuição.**  
74 p. Trabalho de Conclusão de Curso – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2016.

Este trabalho de conclusão de curso tem como objetivo a análise de potência em uma malha que liga o sistema de distribuição até fontes alternativas de energia. Para fazer essa análise foi necessário um embasamento teórico em normas de qualidade de energia elétrica, teoria sobre harmônicos e uma descrição de fontes alternativas de energia.

Uma vez definido o sistema elétrico, foi possível simulá-lo no software Maple que possibilita tanto o equacionamento matemático como a interface gráfica para a análise das características da potência.

As simulações foram feitas variando parâmetros tanto na fonte quanto na rede. Inicialmente foi usado o padrão senoidal puro para que posteriormente fossem inseridos harmônicas de 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> ordem.

Com isso foi realizado a análise do fluxo de potência da onda em relação a pequenas variações de tensão da fonte, da resistência e indutância da linha e do ângulo tensão da fonte.

**Palavras-chave:** Fontes Alternativas, Harmônicos, Normas Reguladoras, Maple



## **ABSTRACT**

Souza, Arthur Lunardi de **Análise do Fluxo de Potência em Redes de Distribuição.**  
74 p. Monograph – São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, 2016.

This thesis will provide a survey in a power circuit that connects electric power distribution to renewable energy sources. First and foremost, it was crucial an analysis of power quality standards, system harmonics and renewable resources.

After the initial definitions, the electrical system was simulated in a software that is called as "Maple". Thus, it may give a mathematical modeling and a graphical interface that can lead to an identification of some power characteristics. The parameters of simulation were modified in the source and netgrid. Furthermore, pure sinusoidal pattern was used and after this, it was included harmonics of 3rd and 5th order.

Due to the load-flow study, it was possible making some evaluation in small variations of supply voltage, line resistance and inductance and angle voltage source.

**Keywords:** Alternative Energy Sources, Harmonics, Maple, Regulatory Standards



## Lista de ilustrações

Figura 1 - Componentes do Sistema de Geração Eólica [13].....	30
Figura 2 - Esquema de geração Fotovoltaica.....	31
Figura 3 - Esquema de geração usando Célula Combustível de Hidrogênio [16].....	32
Figura 4 - Onda Periódica decomposta na componente Fundamental, 3 <sup>a</sup> e 5 <sup>a</sup> harmônicas .	34
Figura 5 - Tela Inicial Maplesoft .....	35
Figura 6 - Circuito para Simulação.....	37
Figura 7 - Potência da fonte em função do tempo e do $\beta$ .....	40
Figura 8 - Corrente em função do tempo no circuito para situação senoidal com $\beta=\pi/9$ .....	40
Figura 9 - Potência em função do tempo na fonte para situação senoidal com $\beta=\pi/9$ .....	40
Figura 10 - Potência da fonte variando a Resistência e a Indutância .....	41
Figura 11 - Potência com a variação de $\beta$ e da tensão da Fonte .....	42
Figura 12 - Potência da fonte com adição da 3 <sup>a</sup> harmônica no lado da fonte .....	44
Figura 13 - Potência da fonte com adição da 5 <sup>a</sup> harmônica no lado da fonte .....	44
Figura 14 - Potência da fonte variando a Resistência e a Indutância (esquerda com 3 <sup>a</sup> harmônico e direita com 5 <sup>a</sup> harmônico).....	44
Figura 15 - Potência variando $\beta$ e a tensão na Fonte (esquerda com 3 <sup>a</sup> harmônico e direita com 5 <sup>a</sup> harmônico).....	45
Figura 16 - Potência por tempo.....	46
Figura 17 - Potência variando a Resistência e a Indutância (Fonte com 3 <sup>a</sup> harmônico e Rede com 5 <sup>a</sup> harmônico).....	47
Figura 18 - Potência variando $\beta$ e a Tensão na Fonte (Fonte com 3 <sup>a</sup> harmônico e Rede com 5 <sup>a</sup> harmônico) .....	47
Figura 19 - Potência por tempo com 3º e 5º harmônicos na Fonte.....	48
Figura 20 - Potência variando a Resistência e a Indutância (3 <sup>a</sup> e 5 <sup>a</sup> harmônicas na Fonte).....	49
Figura 21 - Potência variando $\beta$ e a tensão na Fonte (3 <sup>a</sup> e 5 <sup>a</sup> harmônicas na Fonte).....	49
Figura 22 - Potência por tempo com 3º e 5º harmônico na Rede .....	50
Figura 23 - Potência variando a Resistência e a Indutância (3 <sup>a</sup> e 5 <sup>a</sup> harmônicas na Rede) .....	51
Figura 24 - Potência variando $\beta$ e a tensão na Fonte (3 <sup>a</sup> e 5 <sup>a</sup> harmônicas na Rede) .....	51
Figura 25 - Potência com 3º e 5º harmônico tanto na Fonte quanto na Rede .....	52
Figura 26 - Potência da fonte variando a Resistência e a Indutância da linha com 3 <sup>a</sup> e 5 <sup>a</sup> harmônicas na Fonte e na Rede .....	53
Figura 27 - Potência da fonte variando $\beta$ e a tensão na Fonte com 3 <sup>a</sup> e 5 <sup>a</sup> harmônicas na Fonte e na Rede .....	53



## **Lista de tabelas**

Tabela 1 - Terminologia [6] .....	25
Tabela 2 - Níveis de referência para distorções harmônicas de tensão (em percentagem da tensão fundamental) .....	26
Tabela 3 - Valores de referência globais das distorções harmônicas totais (em percentagem da tensão fundamental) .....	26
Tabela 4 - Limites das distorções harmônicas individuais [9] .....	27
Tabela 5 - Limite da distorção harmônica total [9].....	27
Tabela 6 - Tabela de valores usados na simulação .....	39
Tabela 7 - Valores de amplitudes de harmônicas para simulação.....	43
Tabela 8 - Valores usados para simulação .....	46



## **Lista de siglas**

**GD** Geração Distribuída

**PRODIST** Procedimento De Distribuição De Energia Elétrica No Sistema Elétrico Nacional

**DIT** Distorção Harmônica Individual De Tensão

**ANEEL** Agência Nacional De Energia Elétrica

**DTT** Distorção Harmônica Total De Tensão

**ONS** Operador Nacional Do Sistema Elétrico

**SIN** Sistema Interligado Nacional

**CA** Corrente Alternada

**CC** Corrente Continua



## **Lista de símbolos**

$\beta$	Ângulo de Fase da Tensão
$L$	Indutor
$R$	Resistor
$h$	Ordem Harmônica
$i$	Corrente Medida No Circuito Especificado
$w$	Frequência Fundamental
$V$	Amplitude da Componente Fundamental da Tensão da Fonte
$Vg$	Amplitude da Componente Fundamental da Tensão da Rede
$V_{fonte}$	Tensão da Fonte
$V_{rede}$	Tensão da Rede



# SUMÁRIO

<b>Capítulo 1 - Introdução.....</b>	<b>23</b>
1.1. Contextualização .....	23
1.2. Objetivos.....	24
1.3. Organização do Texto.....	24
<b>Capítulo 2 - Normas Relacionadas com o Trabalho.....</b>	<b>25</b>
2.1 O PRODIST .....	25
2.2 O ONS .....	27
<b>Capítulo 3 - Embasamento Teórico .....</b>	<b>29</b>
3.1 Fontes Alternativas .....	29
3.1.1 Energia Eólica .....	29
3.1.2 Energia Fotovoltaica .....	31
3.1.3 Células a Combustível.....	32
3.2 Inversores.....	33
3.3 Harmônicos .....	33
3.4 Maplesoft .....	35
<b>Capítulo 4 - Implementação em Maplesoft.....</b>	<b>37</b>
4.1 Caso da senoidal pura <sup>1</sup> .....	39
4.2 Caso comparando 3 <sup>a</sup> harmônica com 5 <sup>a</sup> harmônica na Fonte <sup>2</sup> .....	42
4.3 Senoidal com inserção de 3 <sup>º</sup> harmônica na Fonte e 5 <sup>º</sup> harmônico na Rede <sup>3</sup> .	46
4.4 Caso da 3 <sup>a</sup> e 5 <sup>a</sup> harmônica na Fonte <sup>4</sup> .....	48
4.5 Caso da 3 <sup>a</sup> e 5 <sup>a</sup> harmônica na Rede <sup>4</sup> .....	50
4.6 Caso da 3 <sup>a</sup> e 5 <sup>a</sup> harmônica na Fonte e na Rede <sup>5</sup> .....	52
<b>Capítulo 5 - Considerações Finais.....</b>	<b>54</b>
<b>Referências .....</b>	<b>55</b>
<b>APÊNDICE A .....</b>	<b>57</b>
<b>APÊNDICE B .....</b>	<b>59</b>
<b>APÊNDICE C .....</b>	<b>63</b>

**APÊNDICE D .....** 66

**APÊNDICE E.....** 71

## **Capítulo 1 - Introdução**

### **1.1. Contextualização**

O consumo de energia elétrica tende a acompanhar o crescimento tanto demográfico quanto industrial, ou seja, países desenvolvidos apresentam um maior consumo de energia elétrica, isso é resultado das diversas tecnologias que estão associadas ao dia a dia dessas pessoas.

Pode-se dizer que a geração distribuída (GD) é a geração de energia elétrica próxima ao consumidor e, como consequência, há uma diminuição do uso de sistemas de transmissão, o que resulta em menores perdas e custos. O uso da GD conectada à rede de distribuição traz vários benefícios ao fornecimento de energia elétrica tais como: a melhoria dos níveis de tensão, a redução de perdas de potência em projetos de cogeração, não agressão ao meio ambiente em plantas ecologicamente corretas, entre outros [1].

Em vista dessa demanda de energia elétrica, os sistemas de GD são soluções interessantes por possuírem baixo impacto ambiental, visto que com seu uso pode haver a redução na exigência de energia de usinas convencionais a base de carvão vegetal, gás natural, hidráulica e até mesmo nuclear, bem como, a possibilidade de instalações modulares, ou seja, sendo possível o incremento da potência instalada à medida que há um aumento da demanda por parte dos consumidores que são supridos através de sistemas de GD [2].

Com a disseminação do uso de GD e sua conexão com a rede, diversas normas e padrões internacionais foram criados e adotados para minimizar os impactos causados nos sistemas de distribuição. Como critério de qualidade de energia estabelecido pelo Procedimentos de Distribuição de Energia Elétrica no Sistema Elétrico Nacional (PRODIST), a geração distribuída deve fornecer tensões com baixas distorções harmônicas, amplitude e frequência de acordo com os valores da rede no ponto de conexão [3].

Neste contexto, foram desenvolvidos diversos métodos alternativos de geração de energia. Nesse trabalho serão abordados alguns desses métodos, que são consideradas fontes alternativas de geração. Além de falar sobre algumas normas referentes a harmônicos na rede de distribuição.

Uma ferramenta usada nesse trabalho foi o software MAPLE que possibilita tanto o equacionamento matemático quanto o desenvolvimento de gráficos para análise do comportamento da potência da fonte alternativa quando ela é submetida a presença de harmônicos.

## 1.2. Objetivos

O objetivo geral desse trabalho é a análise da potência de um sistema de geração distribuída quando submetida a diferentes níveis de distorções.

- Analisar o comportamento da potência do sistema para pequenas variações na Tensão da fonte e da rede;
- Analisar os gráficos do fluxo de potência quando o sistema apresenta harmônicas de Tensão na fonte e na rede;
- Desenvolver o equacionamento matemático do sistema com a presença de Harmônicos.

## 1.3. Organização do Texto

Este projeto se trata de um trabalho de conclusão do curso de Engenharia Elétrica com ênfase em Sistemas de Energia e Automação, apresentado à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, e está organizado da seguinte maneira:

- Capítulo 1: Introdução.
- Capítulo 2: Normas Relacionadas com o Trabalho.
- Capítulo 3: Embasamento teórico.
- Capítulo 4: Implementação em Maplesoft.
- Capítulo 5: Considerações Finais.

## Capítulo 2 - Normas Relacionadas com o Trabalho

Antigamente o consumo de energia elétrica estava associado a equipamento puramente resistivos. Com o desenvolvimento da eletrônica foram incorporados diversos equipamentos não lineares, que quando conectados as redes elétricas causam distorções harmônicas, tais como: os retificadores não controlados, as lâmpadas a LED e as lâmpadas compactas e etc. Neste capítulo serão discutidas diversas normas reguladoras da energia elétrica e os limites permitidos por lei de acordo com cada uma delas.

### 2.1 O PRODIST

Os Procedimentos de Distribuição - PRODIST são documentos elaborados pela ANEEL que normatizam e padronizam as atividades técnicas relacionadas ao funcionamento e desempenho dos sistemas de distribuição de energia elétrica [4].

Ele é composto por 9 módulos que abrangem diversas partes da malha de distribuição. O módulo 8 – Qualidade da Energia Elétrica, é o que relaciona os limites permitidos de distorções harmônicas estabelecidos para a malha de distribuição.

A Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL), autarquia em regime especial vinculada ao Ministério de Minas e Energia, foi criada para regular o setor elétrico brasileiro [5], atuando na geração, transmissão, distribuição e comercialização da energia elétrica, e além de fiscalizar o serviço de energia e estabelecer tarifas para o mesmo.

A seguir são estabelecidas a terminologia, a metodologia de medição, a instrumentação e os valores de referência para as distorções harmônicas. [6]

*Tabela 1 – Terminologia [6]*

Identificação da Grandeza	Símbolo
Distorção Harmônica individual de tensão de ordem h	$DIT_h\%$
Distorção harmônica total de tensão	$DTT\%$
Tensão harmônica de ordem h	$V_h$
Ordem harmônica	h
Ordem Harmônica Máxima	$H_{máx}\%$
Ordem Harmônica Mínima	$H_{min}\%$
Tensão fundamental medida	$V_1$

Onde as equações de interesse são: a do cálculo de Distorção Harmônica Individual de Tensão de Ordem h ( $DIT_h$ ) que está na equação 1 e a Distorção Harmônica Total de

Tensão (DTT) que está na equação 2.

$$DIT_h(\%) = \frac{V_h}{V_1} * 100 \quad (1)$$

$$DTT(\%) = \frac{1}{V_1} * \sqrt{\sum_{h=2}^{h_{\max}} V_h^2} 100 \quad (2)$$

A tabela 2 apresenta os valores limites para a distorção harmônica individuais de tensão (DIT) que se encontra no Módulo 8 do PRODIST.

*Tabela 2 – Níveis de referência para distorções harmônicas de tensão (em percentagem da tensão fundamental) [6]*

Ordem Harmônica	Distorção harmônica Individual de tensão [%]	
	$V_h \leq 1kV$	$1kV \leq V_h \leq 13,8kV$
2	2,5	2,0
3	6,5	5,0
4	1,5	1,0
5	7,5	6,0
6	1,0	0,5

A tabela 3 apresenta os valores limites para as DIT para as situações que serão simuladas posteriormente.

*Tabela 3 - Valores de referência globais das distorções harmônicas totais (em percentagem da tensão fundamental) [6]*

Tensão Nominal do Barramento	Distorção Harmônica Total de Tensão (DTT) [%]
$V_h \leq 1kV$	10
$1kV \leq V_h \leq 13,8kV$	8

O espectro harmônico a ser considerado para fins de cálculo da distorção total deve compreender uma faixa de frequências que considere desde a componente fundamental até, no mínimo, a 25ª ordem harmônica ( $h_{\min} = 25$ ) [6].

## 2.2 O ONS

O Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS) é uma pessoa jurídica de direito privado, sob a forma de associação civil, sem fins lucrativos, criado em 26 de agosto de 1998. É o órgão responsável pela coordenação e controle da operação das instalações de geração e transmissão de energia elétrica no Sistema Interligado Nacional (SIN), sob a fiscalização e regulação da Agência Nacional de Energia Elétrica (Aneel) [7].

Os Procedimentos de Rede são uma série de documentos de caráter normativo elaborado pela ONS, que definem os procedimentos e os requisitos necessários à realização das atividades de planejamento da operação eletroenergética, administração da transmissão, programação e operação em tempo real no âmbito do SIN [8].

Na tabela 4 estão especificados os limites impostos pela ONS para harmônicos de tensão de classe inferior a 69kV.

*Tabela 4 - Limites das distorções harmônicas individuais [9]*

Ordem Harmônica	Valor por harmônico [%]
3	5
4	2
5	5

O limite para a Distorção harmônica total (DTT) está especificada na tabela 5.

*Tabela 5 - Limite da distorção harmônica total [9]*

DTT [%]	6
---------	---



## Capítulo 3 - Embasamento Teórico

### 3.1 Fontes Alternativas

Antigamente era mais eficiente gerar grandes plantas de energia elétrica do que realizar pequenas plantas de geração, um exemplo desse estilo de construção é a usina de Itaipu. No entanto, existem vários fatores que inviabilizam esse tipo de obras nos dias atuais, como a grande distância dos centros consumidores, que resulta em altos gastos com linhas de transmissão. E na principal componente da matriz energética brasileira, a hidroelétrica resulta em grandes áreas inundadas prejudicando assim a fauna e flora e podendo até causar mudanças no ciclo de água da região [10].

Em relação a termelétrica, existe a possibilidade de produção de energia elétrica usando como combustível qualquer material que possa liberar energia na forma de calor. Elas podem usar materiais não renováveis e que resultam em um alto impacto para o ambiente, como é o caso do uso do Petróleo, Gás natural ou Carvão Mineral.

Na busca de novos métodos de geração de energia elétrica surgiram as fontes alternativas. São formas mais conscientes de utilizar as matérias primas para a geração da energia elétrica, diminuindo o consumo de combustíveis fósseis e diversificando a matriz geradora favorecendo a sociedade e possibilitando melhores resultados para o sistema elétrico uma vez que diversifica matrizes geradoras aumentando a confiabilidade do sistema.

Pode-se caracterizar as fontes alternativas como o vento (energia eólica), sol (energia solar), mar, geotérmica (calor existente no interior da Terra), entre outros. Em comum, elas têm o fato de serem renováveis e, portanto, corretas do ponto de vista ambiental. Permitem não só a diversificação, mas também a “limpeza” da matriz energética local, ao reduzir a dependência dos combustíveis fósseis, como carvão e petróleo, cuja utilização é responsável pela emissão de grande parte dos gases que provocam o efeito estufa. Além disso, também podem operar como fontes complementares a grandes usinas hidrelétricas, cujos principais potenciais já foram quase integralmente aproveitados nos países desenvolvidos [11].

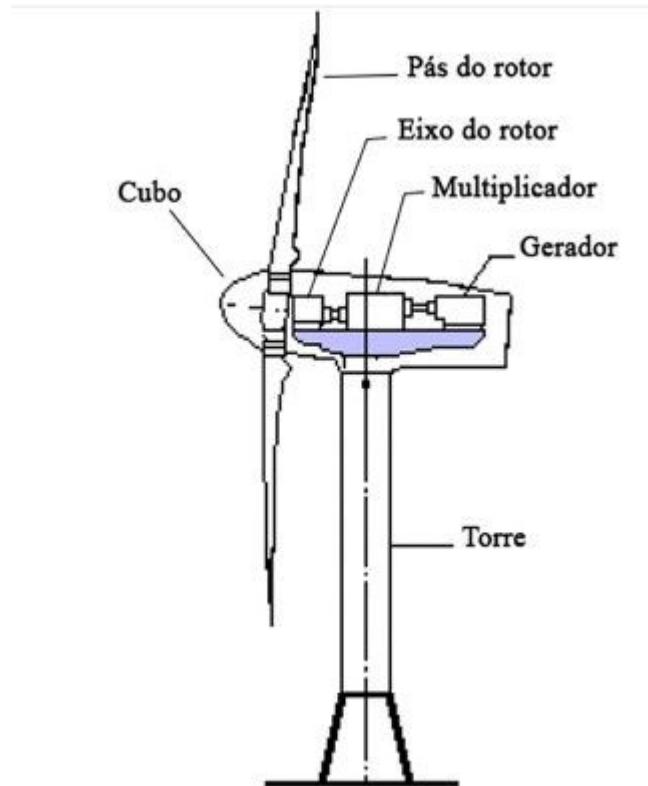
#### 3.1.1 Energia Eólica

Denomina-se energia eólica a energia cinética contida nas massas de ar em movimento (vento). Seu aproveitamento ocorre por meio da conversão da energia cinética de translação em energia cinética de rotação, com o emprego de turbinas eólicas, também denominadas aerogeradores, para a geração de eletricidade, ou cataventos (e moinhos), para

trabalhos mecânicos como bombeamento d'água. [12].

Esta energia pode ser usada para diversas finalidades. Caso seja acoplado um gerador ao eixo rotativo, é possível produzir energia elétrica, outra possibilidade é caso seja acoplado rolos compressores resultando assim em um moinho como era feito antigamente.

Existem diversos tipos de turbinas eólicas, elas variam em relação ao número de pás e em relação ao sentido do eixo, sendo horizontal ou vertical. O exemplo da figura abaixo caracteriza um aerogerador de três pás com eixo horizontal.



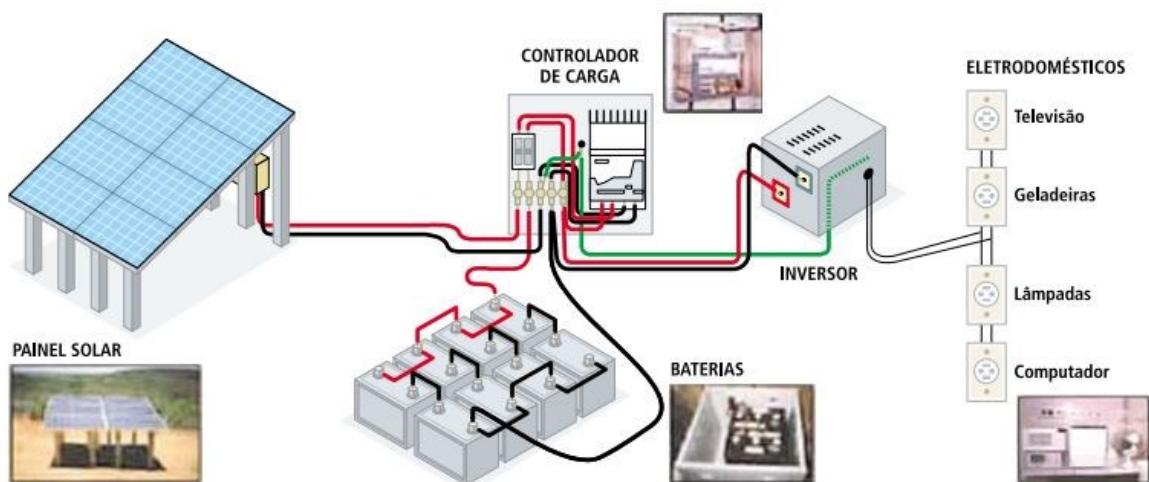
*Figura 1 - Componentes do Sistema de Geração Eólica [13]*

Mesmo sendo considerada uma energia limpa, existem impactos associados com a implantação de uma unidade eólica. Dois impactos são listados com mais frequência em relação a esse tipo de energia, o impacto visual e o sonoro. O impacto visual se dá pelo grande número de sistemas de geração eólica quando se leva em conta parque eólicos. Já o sonoro se dá de acordo com os ruídos gerados pelo equipamento. Com o objetivo de não prejudicar tanto a população quanto a fauna próxima a esses equipamentos, existem padrões exigidos pela legislação que garantem limites para esses ruídos.

Dentre os fatores positivos da instalação de aerogeradores, se destacam o fato de não necessitar de manutenção frequente, além do fato de ser uma fonte limpa e inesgotável de energi.

### 3.1.2 Energia Fotovoltaica

A radiação solar pode ser diretamente convertida em energia elétrica, por meio de efeitos da radiação (calor e luz) sobre determinados materiais (particularmente os semicondutores). Entre esses, destacam-se os efeitos termelétrico e fotovoltaico. O primeiro se caracteriza pelo surgimento de uma diferença de potencial, provocada pela junção de dois metais, quando tal junção está a uma temperatura mais elevada do que as outras extremidades dos fios. Embora muito empregado na construção de medidores de temperatura, seu uso comercial para a geração de eletricidade tem sido impossibilitado pelos baixos rendimentos obtidos e pelos custos elevados dos materiais. O efeito fotovoltaico decorre da excitação dos elétrons de alguns materiais na presença da luz solar (ou outras formas apropriadas de energia). Entre os materiais mais adequados para a conversão da radiação solar em energia elétrica, os quais são usualmente chamados de células solares ou fotovoltaicas, destaca-se o silício. A eficiência de conversão das células solares é medida pela proporção da radiação solar incidente sobre a superfície da célula que é convertida em energia elétrica. Atualmente, as melhores células apresentam um índice de eficiência de 25 [14].



*Figura 2 - Esquema de geração Fotovoltaica [14]*

Um dos principais problemas envolvendo energia fotovoltaica é a sua baixa eficiência, isso faz com que sejam necessárias grandes áreas para a captação da irradiação solar, restringindo assim suas aplicações.

Dentre os fatores positivos, alguns se destacam: o fato dela não poluir o ambiente durante seu uso, (a poluição está associada a confecção das placas que necessitam de metais pesados para sua produção). As manutenções são escassas, sendo mais associadas a limpeza. O valor dos painéis solares está caindo enquanto sua eficiência está aumentando, favorecendo assim sua utilização.

### 3.1.3 Células a Combustível

Em relação ao princípio de funcionamento desses dispositivos, as células a combustível são semelhantes as baterias convencionais de automóveis, com a diferença fundamental de que, nas baterias os combustíveis oxidantes são fornecidos continuamente para que seja possível gerar energia elétrica. Nas células a combustível, o princípio básico é a reação eletroquímica do hidrogênio ou de outros gases combustíveis que podem gerar potência de centenas de kW. A utilização dessa solução se justifica pelo fato da energia armazenada fora do horário de ponta possuir um custo menor do que o horário de ponta[2].

As vantagens associadas as células a combustível são o fato dela ser modular e de rápida instalação, apresentar uma eficiência na ordem de 30% quando relacionada a combustíveis fósseis e a flexibilidade de combustíveis. Dentre as desvantagens estão o fato dela ter um custo elevado e alta sensibilidade a impureza. [16].

Neste processo, a energia é resultado da oxidação de um combustível que pode ser o H<sub>2</sub>, por exemplo, e da redução de um oxidante, neste caso o O<sub>2</sub>, resultando assim em um fluxo de elétrons e H<sub>2</sub>O,. Esse processo é descrito na figura 3.

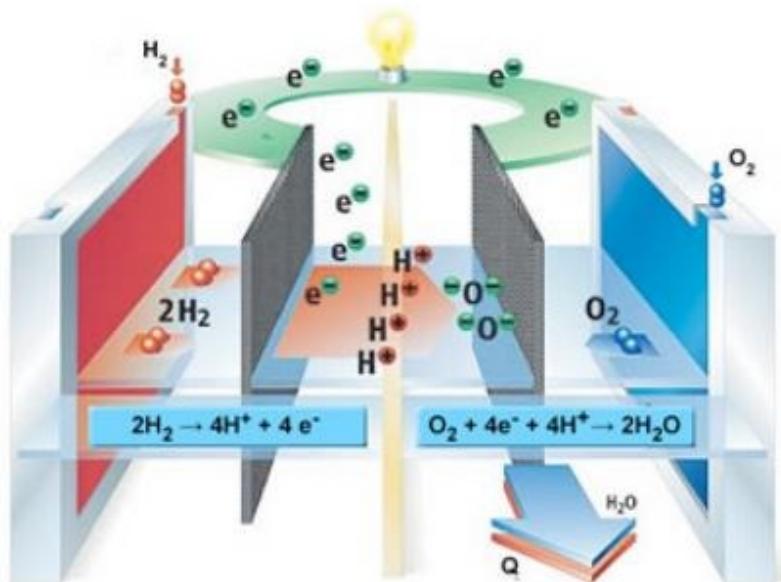


Figura 3 - Esquema de geração usando Célula Combustível de Hidrogênio [17]

### 3.3 Inversores

Inversor é um componente do sistema de geração que tem como finalidade a conversão de energia do nível DC, que está normalmente associado a unidades geradoras como eólica e solar, para o nível AC que é caracterizado pela rede.

A seguir serão listadas algumas topologias de inversores, separadas por três grupos que são o sistema ininterrupto de energia, filtros ativos e sistemas de geração distribuída. Essa divisão foi realizada pelo fato de apresentarem uma característica híbrida de operação, ou seja, funcionam tanto conectados quanto isolados. Todas elas seguem as normas necessárias para que seja mantida a qualidade de energia necessária prevista dentro da lei. UPS ou Sistema Ininterrupto de Energia são dispositivos que funcionam da seguinte forma: quando a rede está ativa (sistema de distribuição não está sob contingência), a energia provida da rede alimenta a carga local enquanto a UPS funciona de forma Off-line ou acumula energia em baterias ou ultracapacitores, por exemplo. Quando ocorre a interrupção da energia proveniente da rede de distribuição, a UPS utiliza a energia armazenada nos acumuladores de forma a manter a carga energizada [3].

Os filtros ativos são dispositivos com conversores de potência que possuem como característica primordial regular ou compensar tensões ou correntes, de forma a garantir componentes senoidais para a carga ou para a rede [18].

### 3.4 Harmônicos

O termo “Harmônico” é proveniente da física, particularmente do estudo da ondulatória. Quando uma partícula ou uma onda se propaga em uma oscilação periódica ao redor de um ponto de equilíbrio, este movimento pode ser descrito por uma combinação de senoides e cossenoides, e é denominado “Movimento Harmônico” [19].

Para dar início a conceituação de harmônicos é preciso explicitar a Série de Fourier, que é uma ferramenta matemática que permite uma função periódica não senoidal possa ser decomposta como uma soma de uma série infinita de ondas senoidais. Ou seja, através dela é possível decompor uma onda distorcida em ondas senoidais de mais fácil compreensão.

$$f(t) = \frac{1}{2} * A + \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \cos(n * w_n * t) + b_n * \sin(n * w_n * t) \quad (3)$$

Sendo:

$$A = \int_0^T f(t) * d(t) \quad (4)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) * \cos(n * \frac{2\pi}{T} * t) d(t) \quad (5)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) * \sin(n * \frac{2\pi}{T} * t) d(t) \quad (6)$$

$$w_n = \frac{2\pi}{T} \quad (7)$$

Para melhor compreensão temos o exemplo onde a figura 4 é uma onda periódica não senoidal que foi decomposta em três ondas periódicas e senoidais que somadas resultam na onda com deformações.

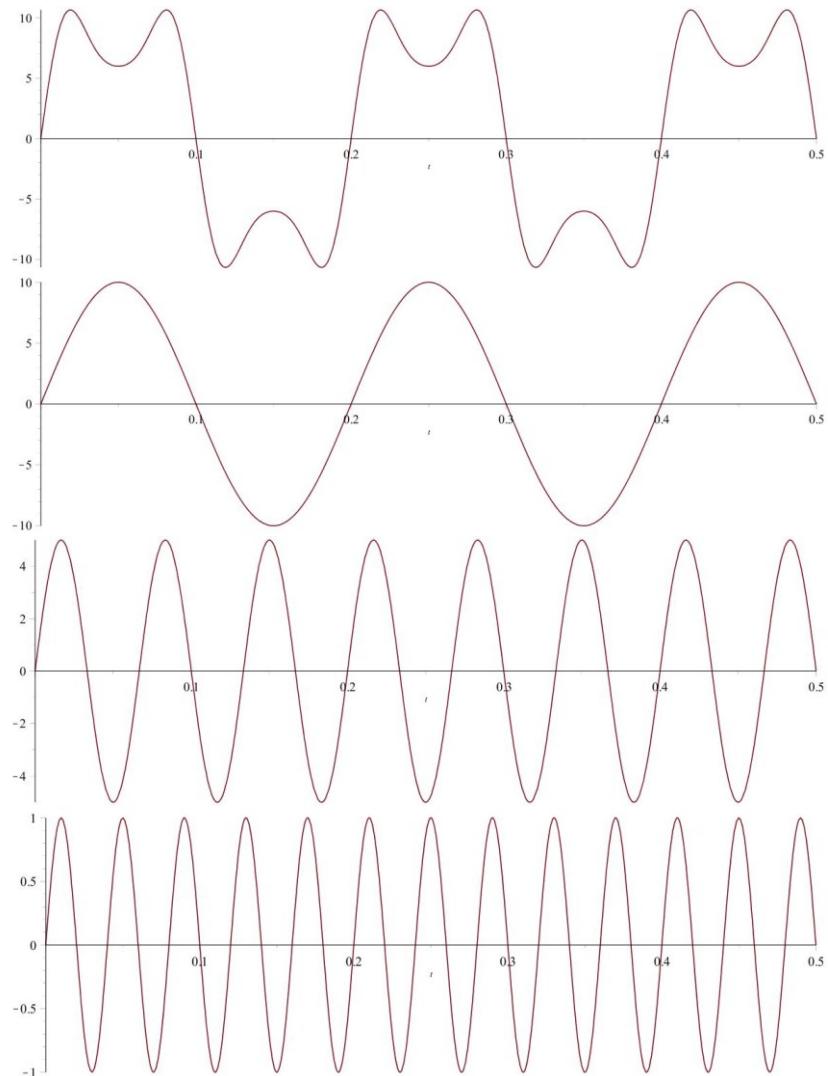


Figura 4 - Onda Periódica decomposta na componente Fundamental, 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> harmônicas

### 3.5 Maplesoft

Dentre os softwares de Computação Algébrica existentes o escolhido para a realização desse trabalho foi o Maple. Ele não foi desenvolvido com o objetivo de atuar na área pedagógica e sim para atender as necessidades profissionais na resolução de diversos problemas que exigem uma abordagem mais profunda na matemática, mas que devido a sua praticidade e didática acabou se difundindo pelo meio acadêmico.

O software Maple foi desenvolvido pela Universidade de Waterloo, Canadá, e pelo instituto ETH, de Zurique, Suíça[20]. Sua interface possibilita trabalhar na resolução de problemas usando a computação algébrica, numérica e gráfica, auxiliando assim problemas que necessitam de uma abordagem com métodos matemáticos.

Um diferencial desse software é o fato dele realizar a resolução de problemas simbólicos, uma vez que a maioria dos softwares convencionais realizam equações somente com números em ponto flutuante.

Nesse trabalho o Maple será usado para a resolução das equações diferenciais necessárias para futura análise do fluxo de potência existente. Além de possibilitar a elaboração de diversos gráficos tanto em duas quanto em três dimensões.

A interface gráfica do Maple não oferece nenhuma dificuldade para o usuário, sendo possível em pouco tempo já usufruir de diversas ferramentas que ele oferece.

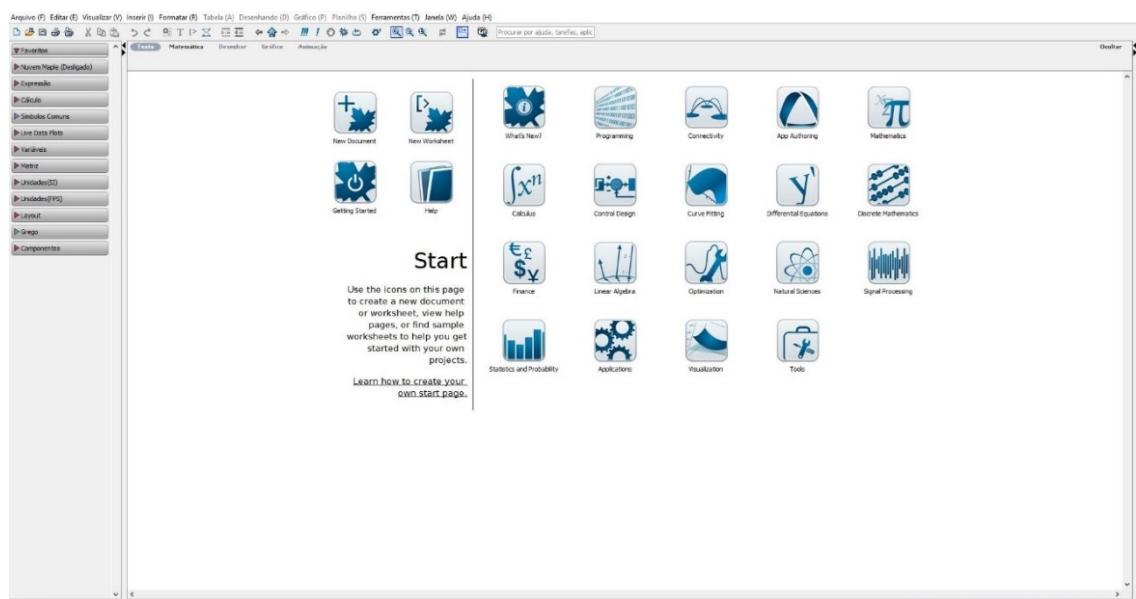


Figura 5 - Tela Inicial Maplesoft



## CAPÍTULO 4 - Implementação em Maplesoft

A ideia inicial da implementação é analisar o circuito da figura 6 e observar o fluxo de potência existente. O lado da Fonte é composto pelo inversor mais a fonte geradora, que pode ser algum dos exemplos citados no subcapítulo de fontes alternativas. O lado da Rede se refere a rede de distribuição elétrica.

Usando a lei das malhas de Kirchhoff no circuito da figura 6, foi possível encontrar a equação e posteriormente foram realizadas simulações para observar o funcionamento do circuito levando em conta ondas senoidais puras e posteriormente com harmônicas de 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> ordem e foram plotados gráficos para observar o comportamento da potência, corrente e tensão.

Para realização das simulações alguns valores foram variados em pequenas faixas, ou então acrescidos de uma outra variável que vai proporcionar as mudanças desejadas para a simulação. Eles serão especificados a seguir.

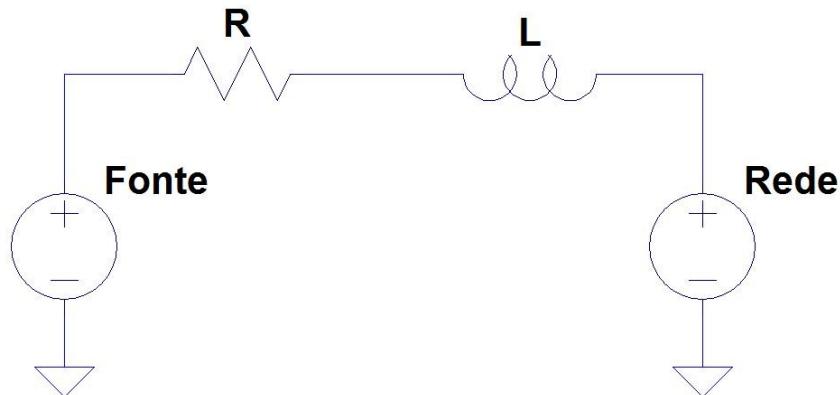


Figura 6 – Circuito para Simulação

A equação geral para análise está definida abaixo, todas as simulações foram realizadas levando em conta variações dela.

$$L * \left( \frac{d}{dt} * i(t) \right) + R * i(t) = v_{fonte} + v_{rede} \quad (8)$$

$$v_{fonte} = V * \sin(w * t + \beta) + A * \sin(3 * w * t + 3 * \beta) + B * \sin(5 * w * t + 5 * \beta) \quad (9)$$

$$v_{rede} = -C * \sin(3 * w * t) - E * \sin(5 * w * t) - Vg * \sin(w * t) \quad (10)$$

Tabela 6 - Parâmetros das equações 8, 9 e 10

$L$	Indutor
$R$	Resistor
$v$	Amplitude da tensão da fonte
$vg$	Amplitude da tensão da rede
$A$	Amplitude da 3ª harmônica da fonte
$B$	Amplitude da 5ª harmônica da fonte
$C$	Amplitude da 3ª harmônica da rede
$E$	Amplitude da 5ª harmônica da rede
$w$	Frequência
$t$	Tempo
$\beta$	Ângulo de fase da fonte

Resolvendo a equação 8 para  $i(t)$ , e aplicando a condição inicial de  $i(0) = 0$ , é possível obter a fórmula final da corrente, tendo como variáveis somente as definidas nas equações 8, 9 e 10.

Para o cálculo da potência na fonte foi realizado a multiplicação da corrente obtida através da equação acima pela tensão da fonte, caracterizando assim a potência monofásica.

$$pot(t) = i(t) * v_{fonte} \quad (11)$$

#### 4.1 Caso da senoidal pura<sup>1</sup>

Para simular a situação puramente senoidal, basta zerar as constantes A e B na equação 4 e as constantes C e E na equação 5 e juntar os resultados na equação 3, obtendo assim a equação 6.

$$V * \sin(w * t + \beta) - Vg * \sin(w * t) = L * \frac{di(t)}{dt} + R * i(t) \quad (6)$$

Resolvendo essa equação em  $i(t)$  é possível chegar na fórmula da corrente em função do tempo. Para as simulações foram definidos alguns valores de constantes. Eles estão especificados na tabela.

*Tabela 7 - Tabela de valores usados na simulação*

Constante	Valores
$R$	0,1 Ω
$L$	0,005 H
$V$	90 V
$Vg$	90 V
$w$	$2 * \pi * f$
$f$	60 Hz

Diversos gráficos foram obtidos através da fórmula da potência, no entanto os mais interessantes foram os de 3 dimensões que levam em conta a variação de duas variáveis para efetuar esse cálculo.

A figura 7 mostra uma gráfico em 3 dimensões para a potência, levando em conta a variação do tempo e do ângulo  $\beta$ , sendo que a faixa de valores ficam  $0 \leq t \leq 0,5$  segundos e  $\frac{-\pi}{9} \leq \beta \leq \frac{\pi}{9}$ .

---

<sup>1</sup> Os códigos referentes a resolução do sistema senoidal puro estão no Apêndice A

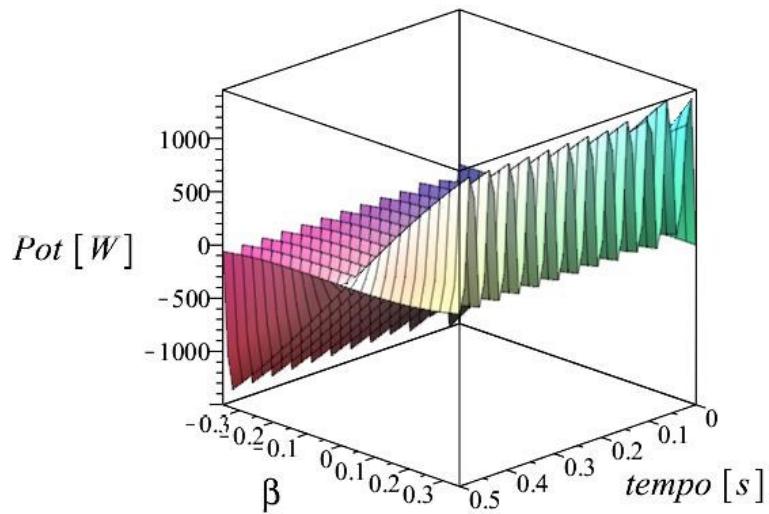


Figura 7 –Potência da fonte em função do tempo e do  $\beta$

Um fator interessante no figura 7 é quando se usa  $\beta = 0$ , que é o caso da fonte estar em fase com a rede, fazendo com que não exista uma diferença de potencial e consequentemente  $i(t) = 0$ . Para os próximos gráficos foi definido  $\beta = \frac{\pi}{9}$  e posteriormente calculado a corrente e a potência, resultando assim nos gráficos 8 e 9, respectivamente.

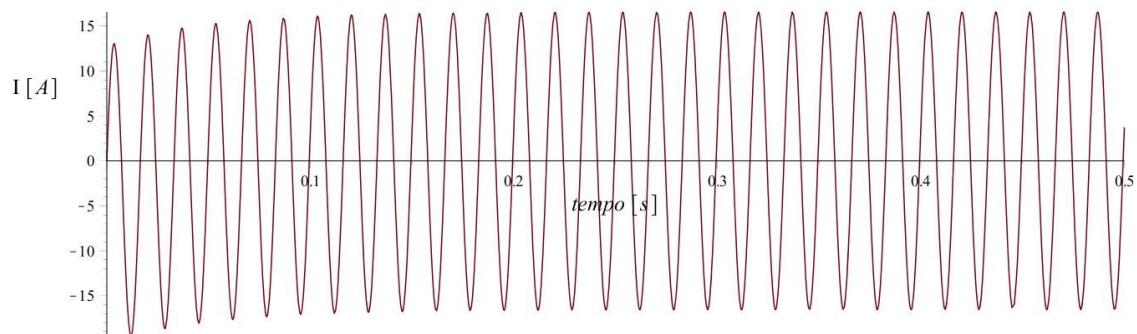


Figura 8 - Corrente em função do tempo no circuito para situação senoidal com  $\beta=\pi/9$

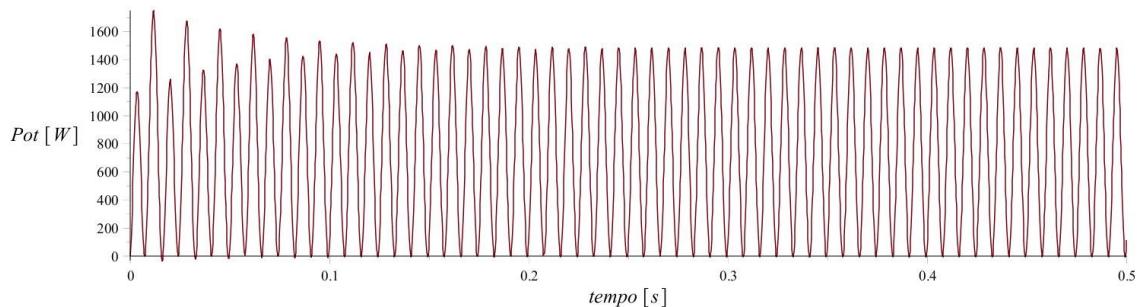
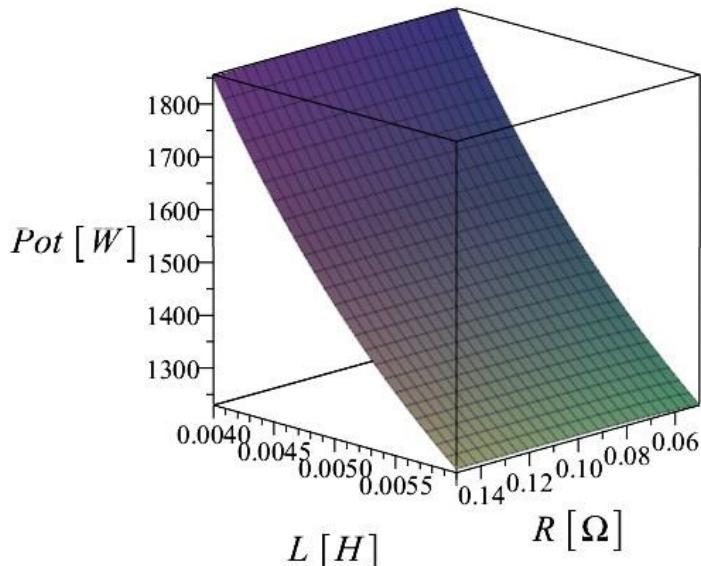


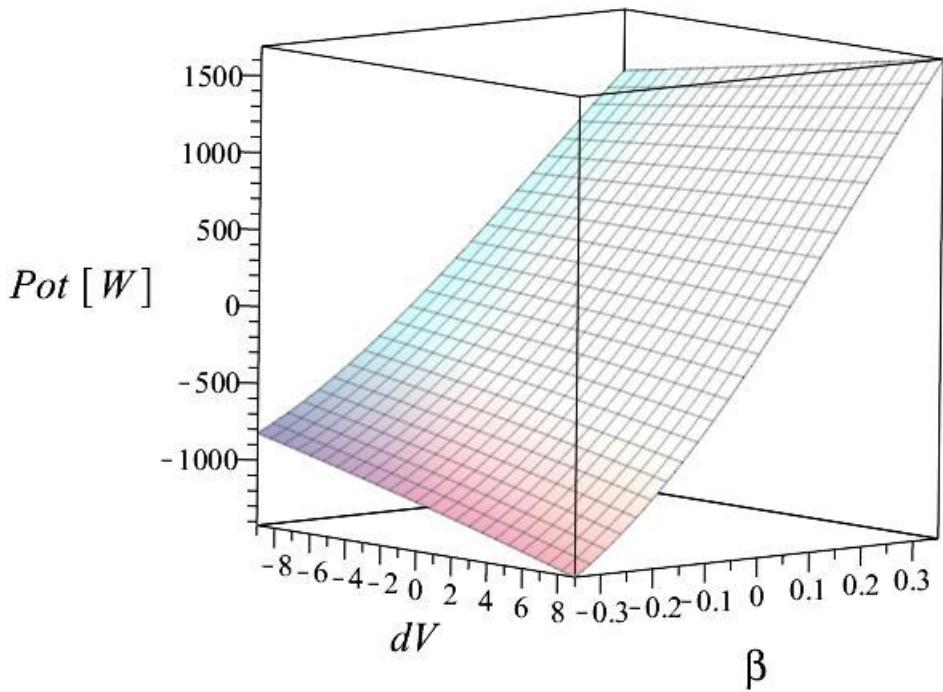
Figura 9 - Potência da fonte em função do tempo na fonte para situação senoidal com  $\beta=\pi/9$

Levando em conta o gráfico 9 foi observado um valor de tempo onde se localiza a crista da onda após ela se estabilizar, que no caso foi de  $t = 0,4367$  segundos . O objetivo é aplicar esse valor de tempo na fórmula da potência e posteriormente variar a resistência de  $0,05 \leq R \leq 0,15$  Ohms e a indutância de  $0,004 \leq L \leq 0,006$  Henry obtendo assim a Figura 10.



*Figura 10 - Potência da fonte variando a Resistência e a Indutância*

Considerando esse mesmo valor de tempo, e reaplicando ele na equação de potência foi realizado um novo gráfico que possibilita a compreensão do comportamento da potência quando se varia a tensão da fonte e o ângulo  $\beta$ . Para a realização desse novo teste o valor V da fonte que antes era de 90 volts agora vale  $V = 90 + \Delta V$  Volts, onde o valor de  $\Delta V$  vai variar de -9 até 9 possibilitando assim o gráfico de 3 dimensões especificado na figura 11.



*Figura 11 - Potência da fonte com a variação de  $\beta$  e da tensão da Fonte*

O interessante desse gráfico é observar que quanto maior o beta, para o caso dele positivo, maior será a potência injetada e quando ele for negativo, maior será a potência absorvida pela fonte. O  $\Delta V$  intensifica as características já observadas uma vez que ele está associado a amplitude da onda enquanto que o beta está associado ao sinal da onda, ou seja, quando a fonte está emitindo ou absorvendo potência.

#### 4.2 Caso comparando 3<sup>a</sup> harmônica com 5<sup>a</sup> harmônica na Fonte<sup>2</sup>

Após a realização e análise do sistema com onda puramente senoidal, foi realizado algumas simulações com harmônicos de 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> ordem. Para efeito de comparação as simulações serão feitas em pares, onde do lado esquerdo estará a com harmônicas de 3<sup>a</sup> ordem e do lado direito a de 5<sup>a</sup> ordem.

Com a inserção dos dois tipos de harmônicos na Tensão da fonte, são obtidas as duas equações listadas abaixo, sendo que a equação 4 se trata da Fonte com 3<sup>a</sup> harmônico e a equação 5 com 5<sup>a</sup> harmônico.

---

<sup>2</sup> Os códigos referentes a resolução do sistema comparando a 3<sup>a</sup> com a 5<sup>a</sup> harmônica na Fonte estão no Apêndice B

$$v(t) = V * \sin(w * t + \beta) + A * \sin(3 * w * t + 3 * \beta) \quad (4)$$

$$v(t) = V * \sin(w * t + \beta) + B * \sin(5 * w * t + 5 * \beta) \quad (5)$$

Com a equação da tensão foi realizado a lei das malhas no circuito apresentado na figura 1, resultando assim em 2 outras equações sendo a equação 6 referente a 3<sup>a</sup> ordem e equação 7 referente a 5<sup>a</sup> ordem.

$$V * \sin(w * t + \beta) + A * \sin(3 * w * t + 3 * \beta) - Vg * \sin(w * t) = L * \frac{di(t)}{dt} + R * i(t) \quad (6)$$

$$V * \sin(w * t + \beta) + B * \sin(5 * w * t + 5 * \beta) - Vg * \sin(w * t) = L * \frac{di(t)}{dt} + R * i(t) \quad (7)$$

Aplicando os mesmos valores da tabela 6 para a simulação, com a adição de alguns novos que estão listados na tabela 7, são eles as constantes associadas as amplitudes das senoides que representam as harmônicas.

*Tabela 8 - Valores de amplitudes de harmônicas para simulação*

A	9 V
B	4.5 V

Resolvendo a equação para obter a expressão de  $i(t)$  e seguindo a mesma lógica apresentada para a resolução quando a onda é puramente senoidal foi traçado p gráfico da potência com a adição da 3<sup>a</sup> harmônica obtendo o gráfico 12 e para a 5<sup>a</sup> harmônica no gráfico 13. Uma ressalva é que para a plotagem desses gráficos foi realizado um ajuste de  $\beta = \frac{\pi}{36}$ .

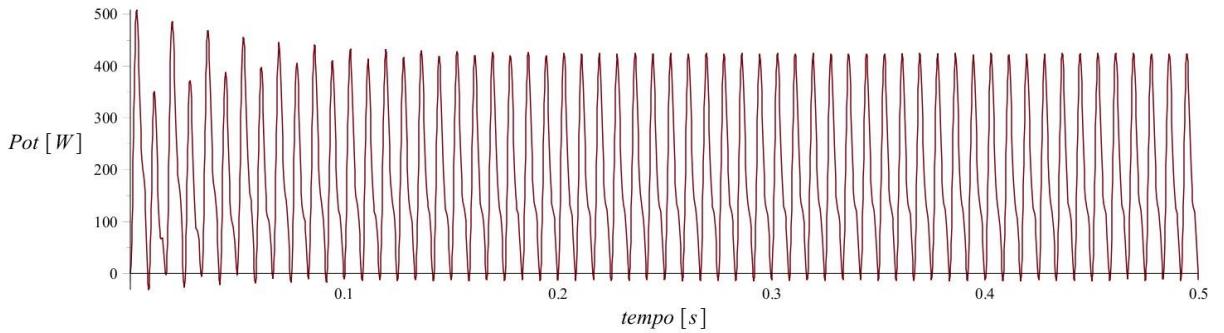


Figura 12 – Potência da fonte com adição da 3<sup>a</sup> harmônica no lado da fonte

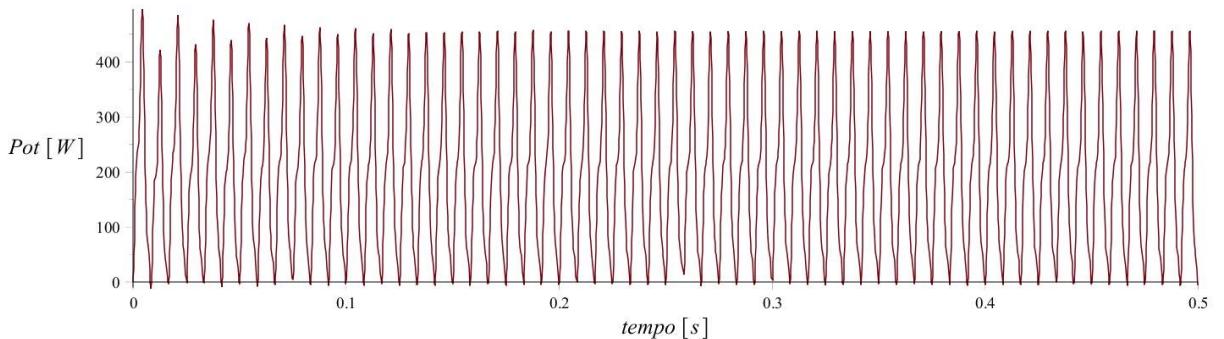


Figura 13 – Potência da fonte com adição da 5<sup>a</sup> harmônica no lado da fonte

Através do gráfico 12 é possível identificar o tempo de uma crista da onda, que resulta em  $t = 0,3862$  segundos. Aplicando esse tempo na equação da potência com a 3<sup>a</sup> harmônica e traçando o gráfico de 3 dimensões para obter a potência variando a resistência e a indutância.

Segundo a mesma lógica descrita anteriormente, o tempo encontrado para a crista do gráfico 13 foi de  $t = 0,4127$  segundos. Aplicando esse tempo na equação da potência com a 5<sup>a</sup> harmônica e imprimindo o gráfico de 3 dimensões da potência em função da resistência e da indutância.

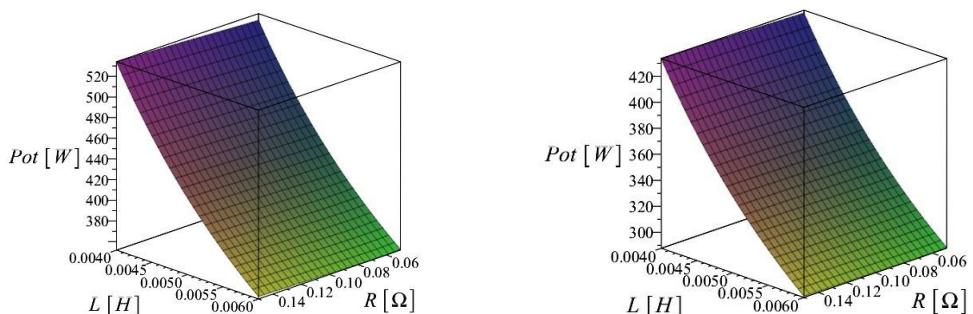
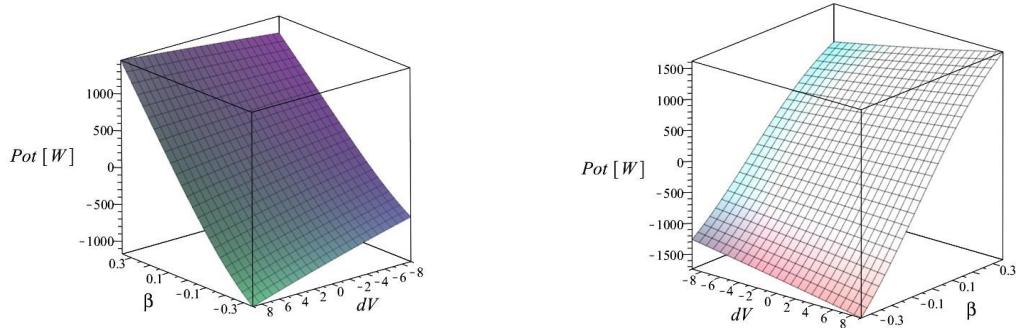


Figura 14 – Potência da fonte variando a Resistência e a Indutância (esquerda com 3<sup>a</sup> harmônico e direita com 5<sup>a</sup> harmônico)

Com os mesmos tempos especificados anteriormente, seguindo a mesma linha de mudanças feitas no gráfico senoidal, foram plotados os gráficos que levam em conta a variação do  $\Delta V$  e do  $\beta$ .



*Figura 15 - Potência da fonte variando  $\beta$  e a tensão na Fonte (esquerda com 3<sup>a</sup> harmônico e direita com 5<sup>a</sup> harmônico)*

Observando os gráficos 14 e 15, é possível notar que a potência máxima está maior no gráfico que apresentam a 3<sup>a</sup> harmônica, uma explicação para isso é pelo fato dela estar com uma amplitude de onda maior, sendo o dobro da amplitude da 5<sup>a</sup> harmônica.

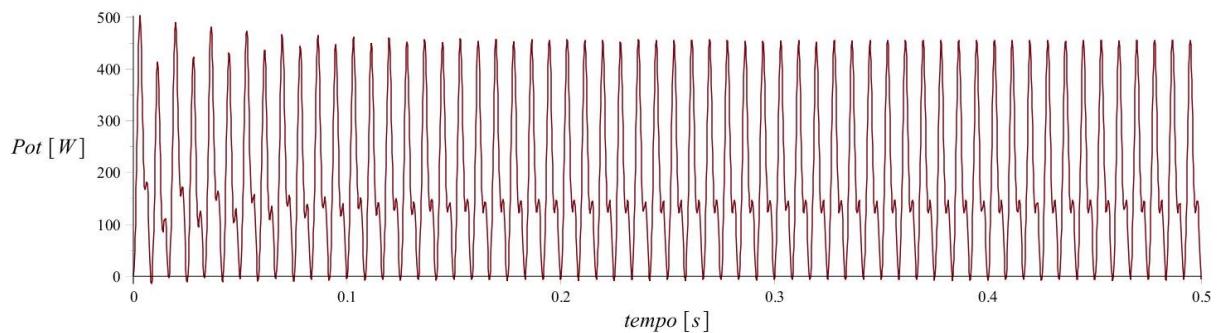
### 4.3 Senoidal com inserção de 3º harmônica na Fonte e 5º harmônico na Rede<sup>3</sup>

Está próxima simulação conta com a presença de harmônicos dos dois lados do circuito. A fonte conta com a presença do harmônico de 3<sup>a</sup> ordem, enquanto que a rede conta com o harmônico de 5<sup>a</sup> ordem. Os dados de entrada para as simulações estão estabelecidos na tabela 8.

*Tabela 9 - Valores usados para simulação*

Constante	Valores
$R$	0,1 Ω
$L$	0,005 H
$V$	90 V
$Vg$	90 V
$w$	$2 * \pi * f$
$f$	60 Hz
$\beta$	$\frac{\pi}{36}$
A	9 V
B	4.5 V

Usando os valores preestabelecidos e calculando a potência, tem como resultado o gráfico 16.

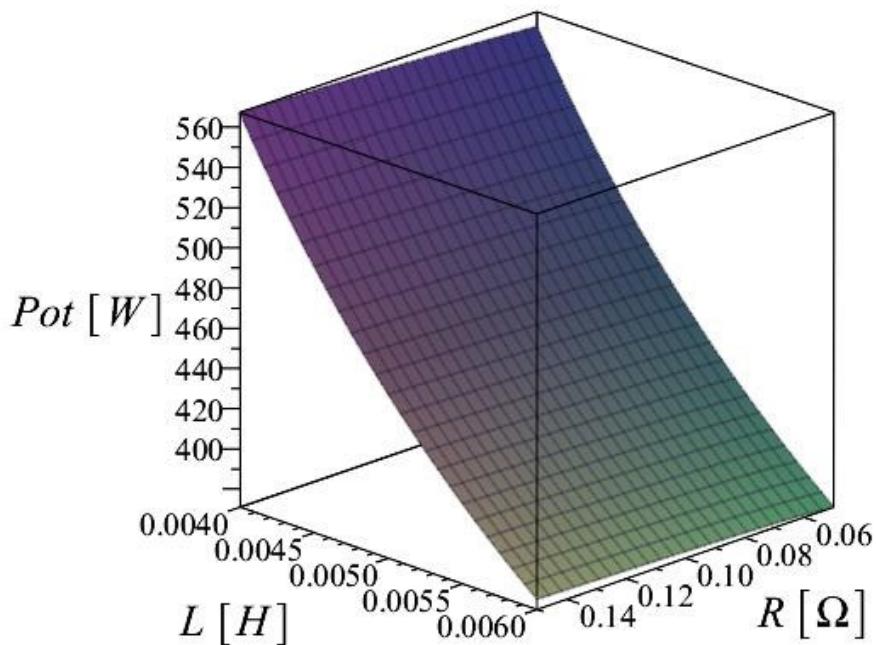


*Figura 16 – Potência da fonte em função do tempo*

Através do gráfico 16 é possível identificar o tempo de uma crista da onda, que resulta em  $t = 0,4447$  segundos. Aplicando esse tempo na equação da potência com as harmônicas e traçando o gráfico de 3 dimensões da potência em função da resistência e da indutância.

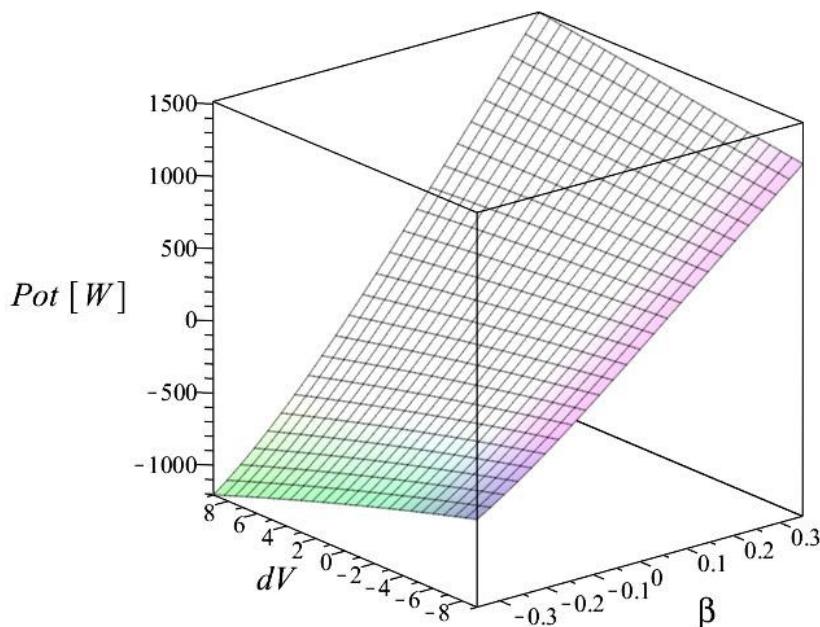
---

<sup>3</sup> Os códigos referentes a resolução do sistema com 3<sup>a</sup> harmônica na Fonte e 5<sup>a</sup> harmônica na Rede estão no Apêndice C



*Figura 17 – Potência na fonte variando a Resistência e a Indutância (Fonte com 3<sup>a</sup> harmônico e Rede com 5<sup>a</sup> harmônico)*

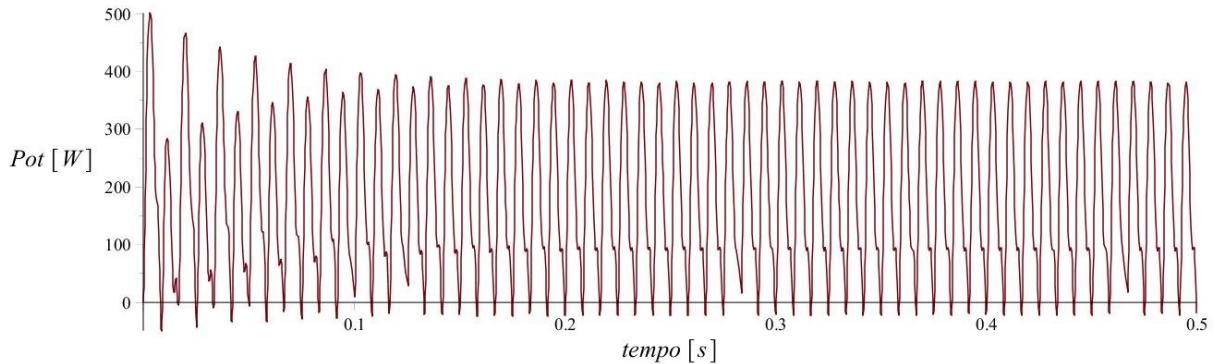
Com os mesmos tempos especificados anteriormente, foi possível calcular outro gráfico interessante, figura 18, mas essa leva em conta a variação do  $\Delta V$  e do  $\beta$ .



*Figura 18 – Potência na fonte variando  $\beta$  e a Tensão na Fonte (Fonte com 3<sup>a</sup> harmônico e Rede com 5<sup>a</sup> harmônico)*

#### 4.4 Caso da 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> harmônica na Fonte<sup>4</sup>

Dada a equação 3, e fazendo  $C = 0$  e  $E = 0$ , resulta no caso de harmônicos somente na Fonte. Resolvendo a equação para essa situação obtendo assim o  $i(t)$  e aplicando o mesmo na equação de potência, é possível traçar os diversos gráficos que se seguem.



*Figura 19 – Potência na fonte em função do tempo com 3º e 5º harmônicos na Fonte*

No gráfico 19 é possível observar a forma de onda da potência da Fonte, analisando essa onda para obter o tempo de uma crista após a estabilização da mesma, foi possível obter o tempo de  $t = 0,4197$  segundos.

Com esse tempo é possível traçar o gráfico 20 da potência em função da variação da resistência e da indutância da linha.

---

<sup>4</sup> Os códigos referentes a resolução do sistema com 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> harmônica na Fonte estão no Apêndice D

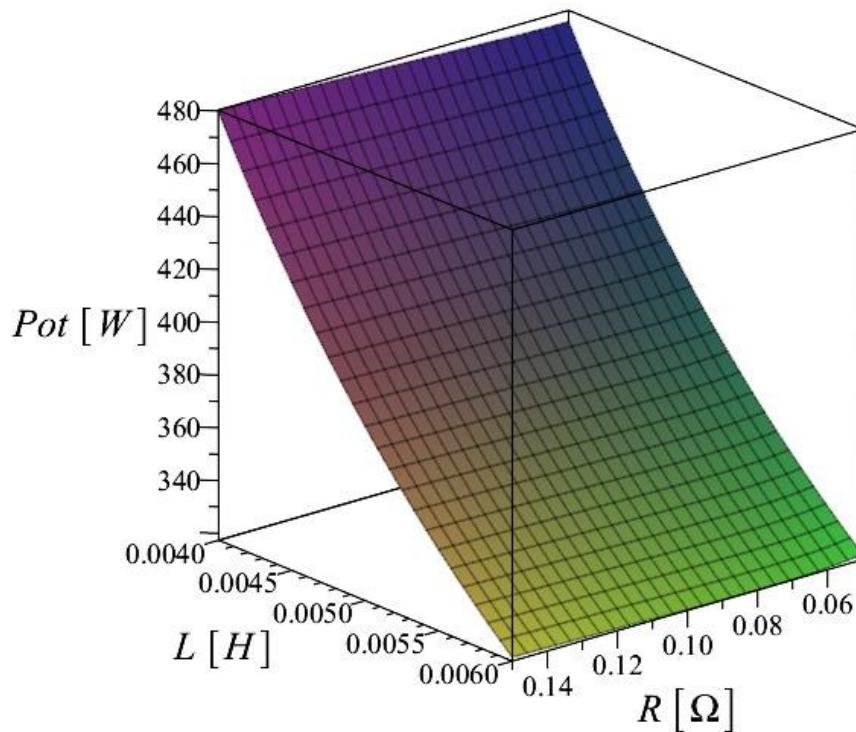


Figura 20 – Potência da fonte variando a Resistência e a Indutância com 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> harmônicas na Fonte

O gráfico 21 foi traçado levando em conta variação da tensão da Fonte e do ângulo  $\beta$ .

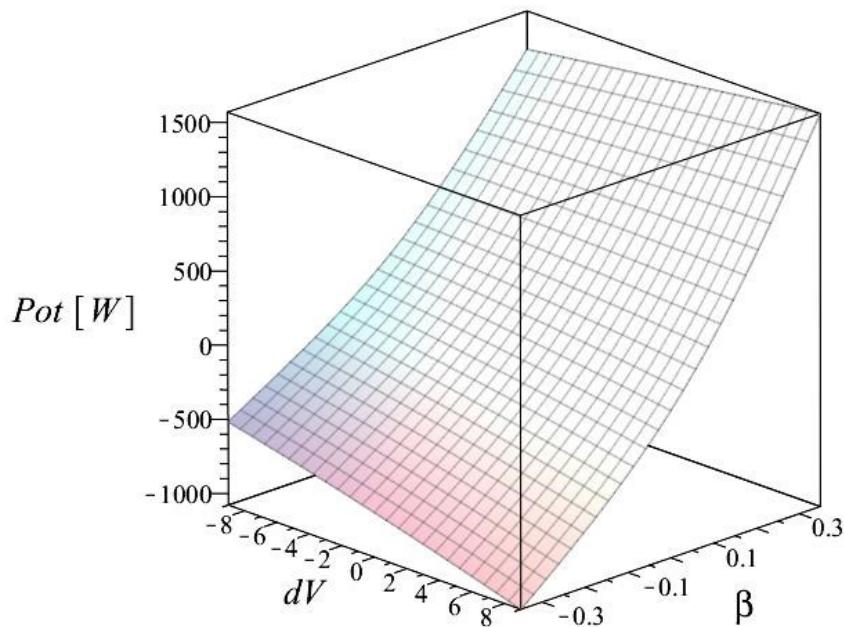
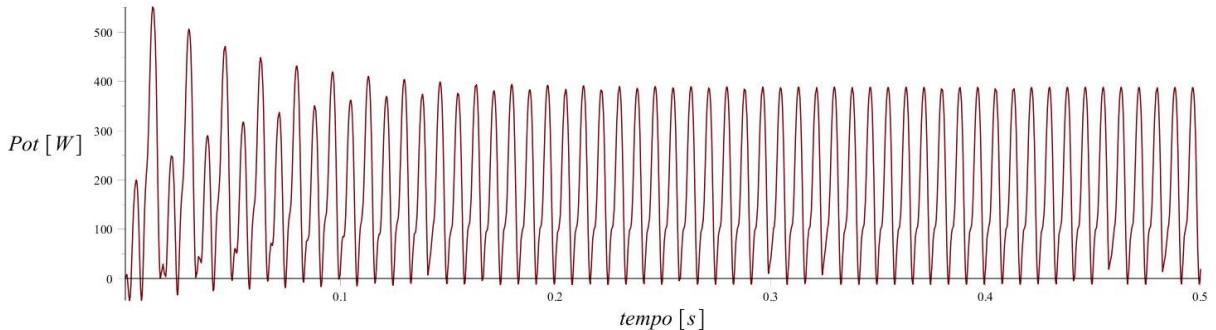


Figura 21 – Potência na fonte variando  $\beta$  e a tensão na Fonte com 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> harmônicas na Fonte

#### 4.5 Caso da 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> harmônica na Rede<sup>4</sup>

Partindo novamente da equação 3, e agora fazendo  $A = 0$  e  $B = 0$ , é possível obter as harmônicas somente na Rede. Recalculando assim a corrente e aplicando na fórmula da potência é possível obter os diversos gráficos que serão apresentados a seguir.



*Figura 22 -Potência na fonte em função do tempo com 3º e 5º harmônico na Rede*

Seguindo a mesma lógica dos itens anteriores, foi observado no gráfico 22 o tempo da crista de onda após a estabilização da mesma achando assim o valor de  $t = 0,4214$  segundos.

Usando esse tempo é possível traçar o gráfico de 3 dimensões da potência em função da resistência e da indutância da linha, como é o caso da figura 23 e da potência levando em conta a variação da tensão da fonte e do ângulo  $\beta$ , como é o caso da figura 24.

---

<sup>4</sup> Os códigos referentes a resolução do sistema com 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> harmônica na Rede estão no Apêndice D

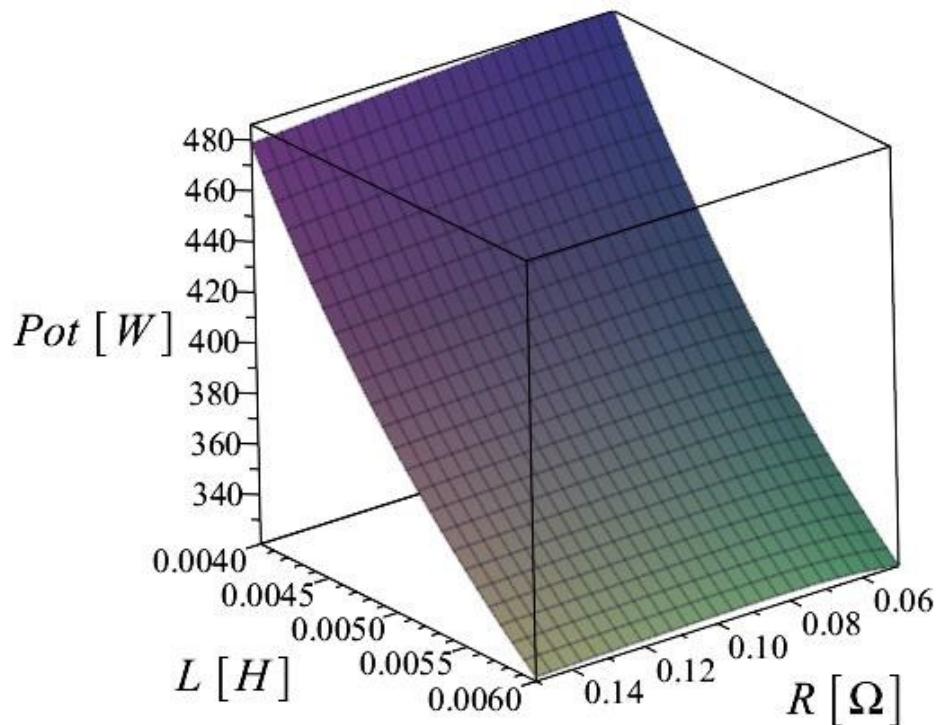


Figura 23 - Potência na fonte variando a Resistência e a Indutância com 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> harmônicas na Rede

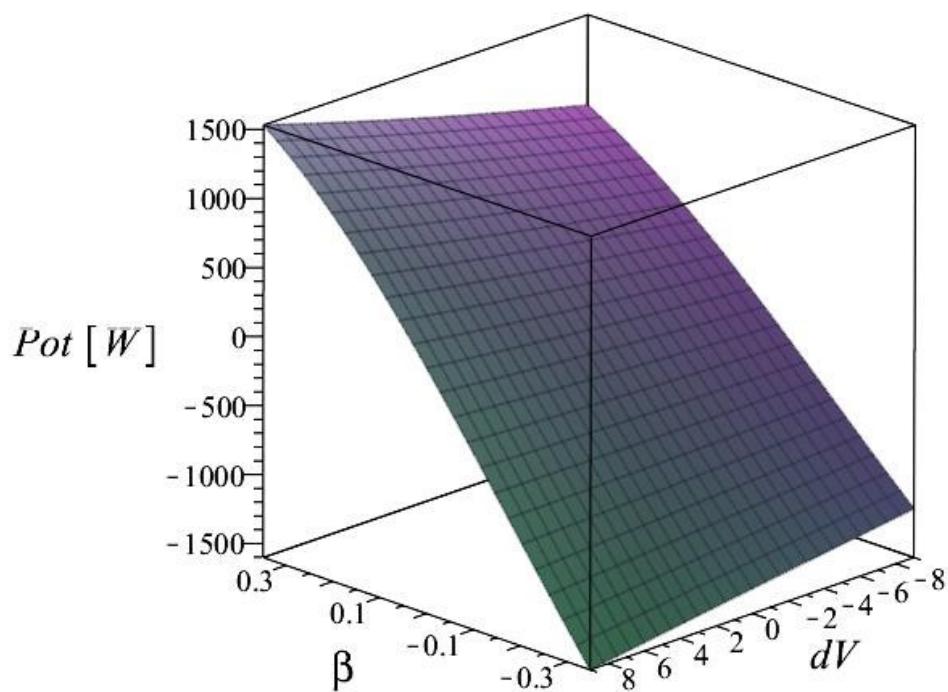
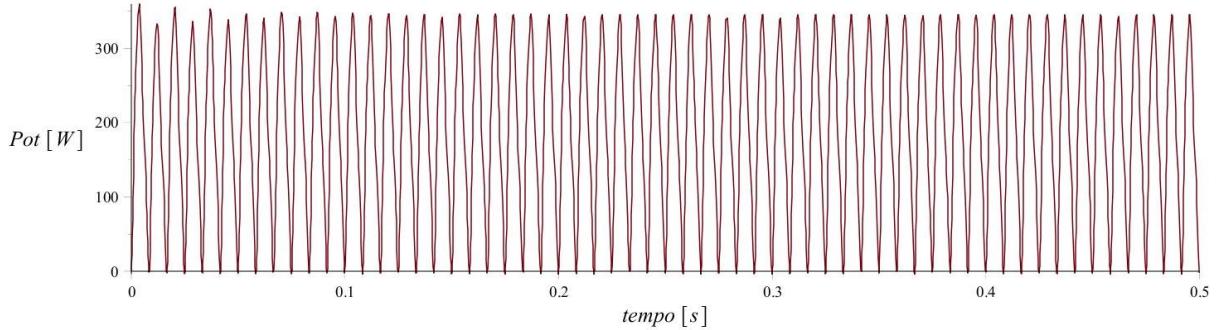


Figura 24 – Potência da fonte variando  $\beta$  e a tensão na Fonte com 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> harmônicas na Rede

#### 4.6 Caso da 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> harmônica na Fonte e na Rede<sup>5</sup>

Esse caso é o mais completo, uma vez que a partir da equação 3, não foi necessário zerar nenhum valor para assim ser possível simular com 3º e 5º harmônicos tanto na Fonte quanto na Rede. Obtendo a figura 25 como a forma de onda da potência.



*Figura 25- Potência na fonte com 3º e 5º harmônico tanto na Fonte quanto na Rede*

Seguindo os mesmos passos que nos outros casos, e achando o valor de  $t = 0,41210$  segundos como o tempo de uma das cristas após a estabilização. E aplicando esse tempo para os próximos gráficos.

Observando a figura 26 como comportamento da potência para as variações da resistência e da indutância da linha e a figura 27 sendo a potência também, mas desta vez com a variação da tensão da Fonte e do ângulo  $\beta$ .

---

<sup>5</sup> Os códigos referentes a resolução do sistema com 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> harmônica na Fonte e na Rede estão no Apêndice E

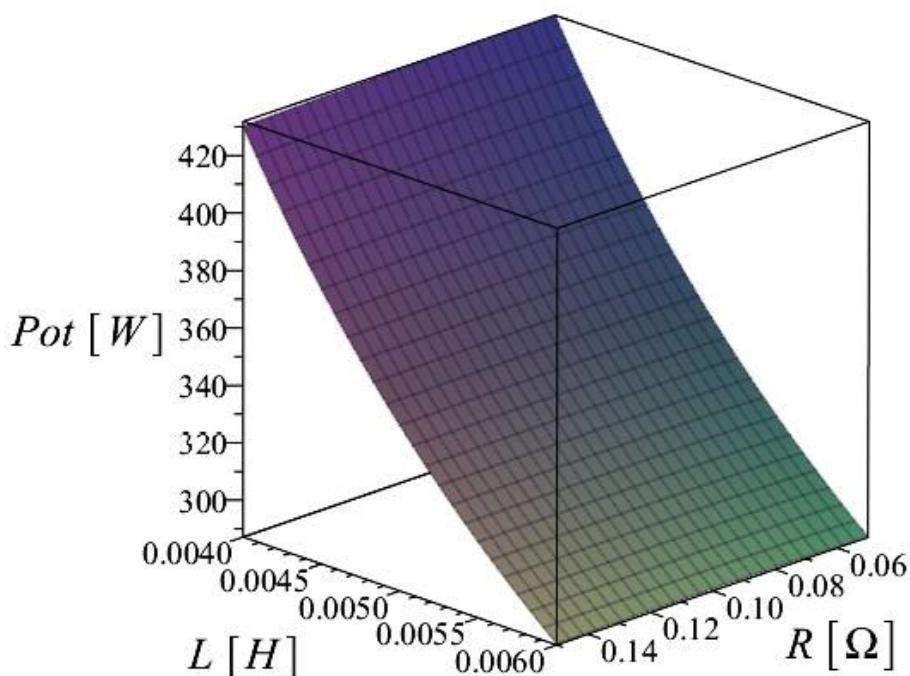


Figura 26 – Potência da fonte variando a Resistência e a Indutância da linha com 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> harmônicas na Fonte e na Rede

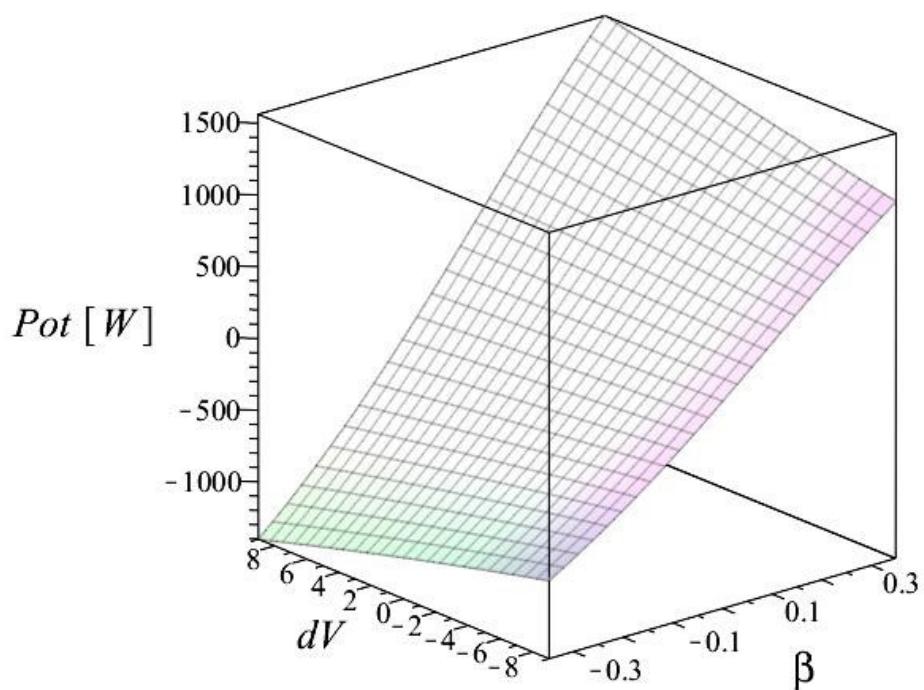


Figura 27 – Potência da fonte variando  $\beta$  e a tensão na Fonte com 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> harmônicas na Fonte e na Rede

## Capítulo 5 - Considerações Finais

O presente trabalho apresentou um embasamento nas normas referentes a legislação quando se leva em conta a Qualidade da Energia Elétrica em redes de distribuição. Tanto o PRODIST quanto o ONS foram analisados para os limites de harmônicos permitidos.

As fontes de energia alternativas citadas já são usadas para a produção de energia elétrica, sendo que as mais difundidas são a energia fotovoltaica e a energia eólica. Para compensar a saída em DC foi apresentado um tópico do capítulo 3 de inversores, que possibilita a mudança desse nível para AC. Como o trabalho é baseado em distorções harmônicas, uma leve introdução a série de Fourier foi mostrada, já que ela é a base para o cálculo de harmônicos.

Levando em conta os gráficos realizados anteriormente, uma breve análise foi realizada para discutir fatores importantes observados.

A base da simulação é o circuito puramente senoidal. Nessa situação é possível analisar o comportamento da potência na fonte. Através dela é possível observar que quando o ângulo beta é negativo a potência é absorvida pela fonte e quando o ângulo beta é positivo a potência é fornecida pela fonte.

Quando se aplica uma variação na tensão da fonte, ainda no cenário de onda puramente senoidal é possível observar que quanto maior o  $\Delta V$  maior a potência fornecida pela Fonte. Resultando em um potencial maior que o da rede e consequentemente a corrente fluirá da fonte para a rede.

O próximo cenário testado foi com a presença de harmônicos. Realizou-se uma comparação da 3<sup>a</sup> com a 5<sup>a</sup> harmônica, ambas na fonte. Dos gráficos obtidos é possível observar que a maior potência está associada a presença da 3<sup>a</sup> harmônica, um dos motivos é que durante a simulação a amplitude da 3<sup>a</sup> harmônica é maior que a da 5<sup>a</sup>.

O próximo caso testado se trata de uma situação onde existe harmônico na Fonte e na Rede, para efeito de cálculo foi considerado o 3<sup>a</sup> na rede e o 5<sup>a</sup> na fonte. O interessante desse caso é a forma de onda da potência em relação ao tempo. Ela apresenta uma distorção maior que nos outros casos já citados.

As últimas situações simuladas se tratam da presença das harmônicas de 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> ordem na Fonte e na Rede e posteriormente em ambos os lados. Essas foram as simulações mais completas, já que apresentam os dois harmônicos para cada lado do circuito.

## Referências

- [1] EL-KHATTAM, W.; SALAMA, M. Distributed generation Technologies, definitions and benefits. **Electric Power Systems Research**, v.71, n. 2, p. 119-128, out. 2004
- [2] KEYHANI, A.; MARWALI, M. N.; DAI, M. **Integration of Green and Renewable Energy in Electric Power Systems**. Hoboken, NJ, USA: Jonh Wiley & Sons, Inc., 2009
- [3] GONÇALVES, Amilcar Flamarion Querubini. **Sistema de geração distribuída controlado em tensão e potência e utilizado de forma isolada ou conectada à rede de distribuição**. 2015. Tese (Doutorado em Sistemas Dinâmicos) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015. Disponível em:<<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18153/tde-28012016-080537/>>. Acesso em: 16-05-2016.
- [4] ANEEL – **Procedimentos de Distribuição (Prodist) > Atribuições**. Acesso em: 16-05-2016. Disponível em: <http://www.aneel.gov.br/prodist>
- [5] ANEEL – **Institucional**. Acesso em: 16-05-2016. Disponível em: <http://www.aneel.gov.br/a-aneel>
- [6] ANNEL – **Procedimentos de Distribuição de Energia Elétrica no Sistema Elétrico Nacional – PRODIST, Módulo 8 – Qualidade da Energia Elétrica**. Acesso em: 16-05-2016. Disponível em: [www2.aneel.gov.br/arquivos/PDF/Módulo8\\_Revisão\\_7.pdf](http://www2.aneel.gov.br/arquivos/PDF/Módulo8_Revisão_7.pdf)
- [7] ONS – **Institucional**. Acesso em: 18-05-2016. Disponível em: <http://www.ons.org.br/institucional/>
- [8] ONS – **Procedimentos de Rede**. Acesso em: 18-05-2016. Disponível em: <http://www.ons.org.br/procedimentos>
- [9] ONS – **Instruções para Realização de Estudos e Medição de QEE Relacionados aos Novos Acessos à Rede Básica**. Acesso em: 18-05-2016. Disponível em: [http://www.ons.org.br/download/integracao\\_sin/Re%2020057-2008-%20estudos%20e%20medicoes%20relacionados%20aos%20novos%20acessos%20a%20RB-Rev%203.pdf](http://www.ons.org.br/download/integracao_sin/Re%2020057-2008-%20estudos%20e%20medicoes%20relacionados%20aos%20novos%20acessos%20a%20RB-Rev%203.pdf)
- [10] FERRET, F. A.; SIMÕES, M. G. **Integration of Alternative Sources of Energy**. [S.I.]: Wiley-IEEE Press, 2006. 504 p.
- [11] ANEEL – **Atlas de Energia Elétrica do Brasil, Capítulo 5 – Outras Fontes**. Acesso em: 20-05-2016. Disponível em: [http://www2.aneel.gov.br/arquivos/PDF/atlas\\_par2\\_cap5.pdf](http://www2.aneel.gov.br/arquivos/PDF/atlas_par2_cap5.pdf)
- [12] ANEEL – **Atlas de Energia Eólica**. Acesso em: 20-05-2016. Disponível em: [http://www2.aneel.gov.br/aplicacoes/atlas/pdf/06-Energia\\_Eolica\(3\).pdf](http://www2.aneel.gov.br/aplicacoes/atlas/pdf/06-Energia_Eolica(3).pdf)
- [13] SCIELO – **Uma Abordagem Sobre a Energia Eólica Como Alternativa de Ensino de Tópicos de Física Clássica**. Acesso em: 20-06-2016. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbef/v36n4/v36n4a07.pdf>
- [14] ANEEL – **Atlas de Energia Solar**. Acesso em: 20-05-2016. Disponível em: [http://www2.aneel.gov.br/aplicacoes/atlas/pdf/03-Energia\\_Solar\(3\).pdf](http://www2.aneel.gov.br/aplicacoes/atlas/pdf/03-Energia_Solar(3).pdf)

- [15] A. M. CARVALHO; C. H. F. da SILVA; E. E. S. LORA; M. A. R. NASCIMENTO, O. J. VENTURINI; R. V. ANDRADE, V. R. M. COBAS, **Microturbinas a Gás, Motores Stirling e Células a Combustível para Geração Distribuída.** Acesso em: 20-05-2016. Disponível em: <http://www2.aneel.gov.br/biblioteca/citenel2007/pdf/it96.pdf>
- [16] A. M. CARVALHO; C. H. F. da SILVA; E. E. S. LORA; M. A. R. NASCIMENTO, O. J. VENTURINI; R. V. ANDRADE, V. R. M. COBAS, **Microturbinas a Gás, Motores Stirling e Células a Combustível para Geração Distribuída.** Acesso em: 20-05-2016. Disponível em: <http://www2.aneel.gov.br/biblioteca/citenel2007/pdf/it96.pdf>
- [17] LINDEKE, D. **Projeto de Um Filtro Ativo Paralelo de 1kVA Usando Técnica de Controle Analógico e Digital.** Tese (Dissertação de Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), 2003.
- [18] Pinto, Carolina Ferreira. **Estudo sobre o uso de células a combustível movida a hidrogênio solar em residências.** 2014. Tese (Doutorado em Arquitetura, Urbanismo e Tecnologia) – Instituto de Arquitetura e Urbanismo, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014. Disponível em <http://www.teses.usp.br/disponiveis/102/102131/tde-18122014-161350/>. Acesso em: 2016-06-20
- [19] Li Penghui; Zhao BaiHaijin; Zhang Yanhua, **Power Quality Monitoring of Power System Based on Spectrum Analysis**, E-Product E-Service and E-Entertainment (ICEEEE), 2010 International Conference on, pp. 1,4, 7-9. 2010
- [20] MARIANI, Viviana Cocco; **Maple: fundamentos e aplicações.** – Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 2005

## APÊNDICE A

$$\begin{aligned}ode &:= L \left( \frac{d}{dt} i(t) \right) + R \cdot i(t) = V \cdot \sin(w \cdot t + \text{beta}) - Vg \cdot \sin(w \cdot t) \\&\quad L \left( \frac{d}{dt} i(t) \right) + R i(t) = V \sin(t w + \beta) - Vg \sin(w t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ics &:= i(0) = 0 \\&\quad i(0) = 0\end{aligned}$$

*dsolve( {ode, ics} )*

$$\begin{aligned}i(t) &= \frac{e^{-\frac{Rt}{L}} (L \cos(\beta) Vw - L Vgw - \sin(\beta) RV)}{L^2 w^2 + R^2} \\&\quad - \frac{1}{L^2 w^2 + R^2} (L \cos(t w + \beta) Vw - L \cos(w t) Vgw - \sin(t w \\&\quad + \beta) RV + \sin(w t) RVg)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}i(t) &:= \frac{e^{-\frac{Rt}{L}} (L \cos(\beta) Vw - L Vgw - \sin(\beta) RV)}{L^2 w^2 + R^2} \\&\quad - \frac{1}{L^2 w^2 + R^2} (L \cos(t w + \beta) Vw - L \cos(w t) Vgw - \sin(t w \\&\quad + \beta) RV + \sin(w t) RVg) \\t \rightarrow &\frac{e^{-\frac{Rt}{L}} (L \cos(\beta) Vw - L Vgw - \sin(\beta) RV)}{L^2 w^2 + R^2} \\&\quad - \frac{1}{L^2 w^2 + R^2} (L \cos(t w + \beta) Vw - L \cos(t w) Vgw - \sin(t w \\&\quad + \beta) RV + \sin(t w) RVg)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(t) &:= V \cdot \sin(w \cdot t + \text{beta}) \\&\quad t \rightarrow V \sin(t w + \beta)\end{aligned}$$

$$pot := i(t) \cdot v(t)$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\mathrm{e}^{-\frac{Rt}{L}} (L \cos(\beta) Vw - L Vg w - \sin(\beta) R V)}{L^2 w^2 + R^2} \right. \\
& - \frac{1}{L^2 w^2 + R^2} (L \cos(t w + \beta) Vw - L \cos(w t) Vg w - \sin(t w \\
& \left. + \beta) R V + \sin(w t) R Vg) \right) V \sin(t w + \beta)
\end{aligned}$$

## APÊNDICE B

Cálculo referente à 3<sup>a</sup> harmônica na Fonte

$$\begin{aligned} ode &:= L \left( \frac{d}{dt} i(t) \right) + R i(t) = V \cdot \sin(w \cdot t + \text{beta}) + A \cdot \sin(3 \cdot w \cdot t + 3 \cdot \text{beta}) - Vg \cdot \sin(w \cdot t) \\ &\quad L \left( \frac{d}{dt} i(t) \right) + R i(t) = V \sin(tw + \beta) + A \sin(3tw + 3\beta) - Vg \sin(wt) \end{aligned}$$

$$ics := i(0) = 0$$

$$i(0) = 0$$

*dsolve({ode, ics})*

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(3tw + 3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(3tw + 3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) + V \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw + \beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw + \beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) - Vg \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(wt)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) \right) \right) - \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w \cos(3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R \sin(3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) \right) + V \left( -\frac{w \cos(\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R \sin(\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) + \frac{Vgw}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right) \\ i(t) &:= \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(3tw + 3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(3tw + 3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) + V \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw + \beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw + \beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) - Vg \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(wt)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) \right) \right) - \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w \cos(3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R \sin(3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) \right) + V \left( -\frac{w \cos(\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R \sin(\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) + \frac{Vgw}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& t \rightarrow \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(3wt + 3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(3wt + 3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) + V \left( \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(wt + \beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(wt + \beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) - Vg \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(wt)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) \right) \right) - \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w \cos(3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R \sin(3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + V \left( -\frac{w \cos(\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R \sin(\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) + \frac{Vg w}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(t) &:= V \cdot \sin(w \cdot t + \text{beta}) + A \cdot \sin(3 \cdot w \cdot t + 3 \cdot \text{beta}) \\
&\quad t \rightarrow V \sin(wt + \beta) + A \sin(3wt + 3\beta)
\end{aligned}$$

$$pot := i(t) \cdot v(t)$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(3tw + 3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(3tw + 3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) + V \left( \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw + \beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw + \beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) - Vg \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(wt)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) \right) \right) - \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w \cos(3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R \sin(3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + V \left( -\frac{w \cos(\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R \sin(\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) + \frac{Vg w}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right) \right) \right) (V \sin(tw + \beta) \\
& \quad + A \sin(3tw + 3\beta))
\end{aligned}$$

Cálculo referente à 5ª harmônica na Fonte

$$ode := L \left( \frac{d}{dt} i(t) \right) + R i(t) = V \cdot \sin(w \cdot t + \text{beta}) + A \cdot \sin(5 \cdot w \cdot t + 5 \cdot \text{beta}) - Vg \cdot \sin(w \cdot t)$$

$$L \left( \frac{d}{dt} i(t) \right) + R i(t) = V \sin(tw + \beta) + A \sin(5tw + 5\beta) - Vg \sin(wt)$$

$$ics := i(0) = 0$$

$$i(0) = 0$$

*dsolve*(*{ode, ics}*)

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{5w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(5tw + 5\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(5tw + 5\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) + V \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw + \beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw + \beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) - Vg \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(wt)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) \right) \right) - \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{5w \cos(5\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R \sin(5\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) + V \left( -\frac{w \cos(\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R \sin(\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) + \frac{Vg w}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right) \right) \\ i(t) &:= \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{5w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(5tw + 5\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(5tw + 5\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) + V \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw + \beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw + \beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) - Vg \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(wt)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) \right) \right) - \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{5w \cos(5\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R \sin(5\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) + V \left( -\frac{w \cos(\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R \sin(\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) + \frac{Vg w}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& t \rightarrow \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{5w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(5tw + 5\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(5tw + 5\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) + V \left( \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw + \beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw + \beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) - Vg \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) \right) \right) - \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{5w \cos(5\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R \sin(5\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + V \left( -\frac{w \cos(\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R \sin(\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) + \frac{Vg w}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(t) &:= V \cdot \sin(w \cdot t + \text{beta}) + A \cdot \sin(5 \cdot w \cdot t + 5 \cdot \text{beta}) \\
&\quad t \rightarrow V \sin(tw + \beta) + A \sin(5tw + 5\beta)
\end{aligned}$$

$$pot := i(t) \cdot v(t)$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{5w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(5tw + 5\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(5tw + 5\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) + V \left( \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. - \frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw + \beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw + \beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) - Vg \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(wt)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) \right) \right) - \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{5w \cos(5\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R \sin(5\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + V \left( -\frac{w \cos(\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R \sin(\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) + \frac{Vg w}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right) \right) \right) (V \sin(tw + \beta) \\
& \quad + A \sin(5tw + 5\beta))
\end{aligned}$$

## APÊNDICE C

Cálculo referente à 3<sup>a</sup> na Fonte e 5<sup>a</sup> na Rede

$$\begin{aligned} ode &:= L \left( \frac{d}{dt} i(t) \right) + R i(t) = V \cdot \sin(w \cdot t + \text{beta}) + A \cdot \sin(3 \cdot w \cdot t + 3 \cdot \text{beta}) - B \cdot \sin(5 \cdot w \cdot t) - Vg \cdot \sin(w \cdot t) \\ &\quad L \left( \frac{d}{dt} i(t) \right) + R i(t) = V \sin(tw + \beta) + A \sin(3tw + 3\beta) - B \sin(5wt) - Vg \sin(wt) \end{aligned}$$

$$ics := i(0) = 0$$

$$i(0) = 0$$

*dsolve({ode, ics})*

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3we^{\frac{Rt}{L}} \cos(3tw + 3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{Re^{\frac{Rt}{L}} \sin(3tw + 3\beta)}{L(\frac{R^2}{L^2} + 9w^2)} \right) - B \left( -\frac{5we^{\frac{Rt}{L}} \cos(5wt)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{Re^{\frac{Rt}{L}} \sin(5wt)}{L(\frac{R^2}{L^2} + 25w^2)} \right) + V \left( -\frac{we^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw + \beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{Re^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw + \beta)}{L(\frac{R^2}{L^2} + w^2)} \right) - Vg \left( -\frac{we^{\frac{Rt}{L}} \cos(wt)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{Re^{\frac{Rt}{L}} \sin(wt)}{L(\frac{R^2}{L^2} + w^2)} \right) \right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w \cos(3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R \sin(3\beta)}{L(\frac{R^2}{L^2} + 9w^2)} \right) + \frac{5Bw}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + V \left( -\frac{w \cos(\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R \sin(\beta)}{L(\frac{R^2}{L^2} + w^2)} \right) + \frac{Vgw}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i(t) := & \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(3tw + 3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(3tw + 3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) - B \left( \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{5w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(5wt)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(5wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) + V \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw + \beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw + \beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) - Vg \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(wt)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) \right) \right) \\
& - \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w \cos(3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R \sin(3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) + \frac{5Bw}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + V \left( \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{w \cos(\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R \sin(\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) + \frac{Vgw}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right) \right) \\
& t \rightarrow \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(3tw + 3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(3tw + 3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) - B \left( \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{5w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(5tw)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(5tw)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) + V \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw + \beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw + \beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) - Vg \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) \right) \right) \right) \\
& - \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w \cos(3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R \sin(3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) + \frac{5Bw}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + V \left( \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{w \cos(\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R \sin(\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) + \frac{Vgw}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(t) := & V \cdot \sin(w \cdot t + \text{beta}) + A \cdot \sin(3 \cdot w \cdot t + 3 \cdot \text{beta}) \\
& t \rightarrow V \sin(tw + \beta) + A \sin(3tw + 3\beta)
\end{aligned}$$

$$pot := i(t) \cdot v(t)$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(3tw + 3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(3tw + 3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) - B \left( \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. - \frac{5w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(5wt)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(5wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) + V \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw + \beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw + \beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) - Vg \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(wt)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) \right) \right) \\
& - \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w \cos(3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R \sin(3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) + \frac{5Bw}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + V \left( \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{w \cos(\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R \sin(\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) + \frac{Vgw}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right) \right) (V \sin(tw + \beta) + A \sin(3tw \\
& + 3\beta))
\end{aligned}$$

## APÊNDICE D

Cálculo referente a 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> harmônica na Fonte

$$ode := L \left( \frac{d}{dt} i(t) \right) + R i(t) = V \cdot \sin(w \cdot t + \text{beta}) + A \cdot \sin(3 \cdot w \cdot t + 3 \cdot \text{beta}) + B \cdot \sin(5 \cdot w \cdot t + 5 \cdot \text{beta}) - Vg \cdot \sin(w \cdot t)$$

$$L \left( \frac{d}{dt} i(t) \right) + R i(t) = V \sin(tw + \beta) + A \sin(3tw + 3\beta) + B \sin(5tw + 5\beta) - Vg \sin(wt)$$

$$ics := i(0) = 0$$

$$i(0) = 0$$

*dsolve({ode, ics})*

$$i(t) = \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(3tw + 3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(3tw + 3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) + B \left( -\frac{5w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(5tw + 5\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(5tw + 5\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) \right) + V \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw + \beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw + \beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) \right) - Vg \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(wt)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) \right) \\ - \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w \cos(3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R \sin(3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) + B \left( -\frac{5w \cos(5\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R \sin(5\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) \right) + V \left( -\frac{w \cos(\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R \sin(\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) + \frac{w Vg}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
i(t) &:= \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(3tw + 3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(3tw + 3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) + B \left( -\frac{5w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(5tw + 5\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(5tw + 5\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) \right) + V \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw + \beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw + \beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) \right) \\
&\quad + Vg \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw + \beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw + \beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) \\
&\quad - \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w \cos(3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R \sin(3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) + B \left( -\frac{5w \cos(5\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R \sin(5\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) \right) + V \left( -\frac{w \cos(\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R \sin(\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) + \frac{w Vg}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right) \\
&\quad t \rightarrow \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(3tw + 3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(3tw + 3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) + B \left( -\frac{5w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(5tw + 5\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(5tw + 5\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) \right) + V \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw + \beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw + \beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) \right) \\
&\quad + Vg \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw + \beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw + \beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) \\
&\quad - \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w \cos(3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R \sin(3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) + B \left( -\frac{5w \cos(5\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R \sin(5\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) \right) + V \left( -\frac{w \cos(\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R \sin(\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) + \frac{w Vg}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(t) &:= V \cdot \sin(w \cdot t + \text{beta}) + A \cdot \sin(3 \cdot w \cdot t + 3 \cdot \text{beta}) + B \cdot \sin(5 \cdot w \cdot t + 5 \cdot \text{beta}) \\
&\quad t \rightarrow V \sin(tw + \beta) + A \sin(3tw + 3\beta) + B \sin(5tw + 5\beta)
\end{aligned}$$

$$pot := i(t) \cdot v(t)$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(3tw + 3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(3tw + 3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) + B \left( \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. - \frac{5w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(5tw + 5\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(5tw + 5\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right. \right. + V \left. \left. \left. \left. - \frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw + \beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw + \beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) - Vg \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(wt)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) \right) \right) \\
& \left. \left. \left. \left. - \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w \cos(3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R \sin(3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) + B \left( -\frac{5w \cos(5\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. \left. \left. \left. + \frac{R \sin(5\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) + V \left( -\frac{w \cos(\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R \sin(\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) + \frac{w Vg}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right) \right) \right) \right) \right) \\
& \left( V \sin(tw + \beta) + A \sin(3tw + 3\beta) + B \sin(5tw + 5\beta) \right)
\end{aligned}$$

Cálculo referente a 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> harmônica na Rede

$$\begin{aligned}
ode &:= L \left( \frac{d}{dt} i(t) \right) + R i(t) = V \cdot \sin(w \cdot t + \text{beta}) - A \cdot \sin(3 \cdot w \cdot t) - B \cdot \sin(5 \cdot w \cdot t) - Vg \cdot \sin(w \cdot t) \\
&\quad L \left( \frac{d}{dt} i(t) \right) + R i(t) = V \sin(tw + \beta) - A \sin(3wt) - B \sin(5wt) - Vg \sin(wt)
\end{aligned}$$

$$ics := i(0) = 0$$

$$i(0) = 0$$

$$dsolve(\{ode, ics\})$$

$$\begin{aligned}
i(t) = & \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( -A \left( -\frac{3w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(3wt)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(3wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) - B \left( \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{5w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(5wt)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(5wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) + V \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw + \beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw + \beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) - Vg \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(wt)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) \right) \right) \\
& - \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( \frac{3Aw}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{5Bw}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + V \left( -\frac{w \cos(\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R \sin(\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{Vgw}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i(t) := & \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( -A \left( -\frac{3w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(3wt)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(3wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) - B \left( \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{5w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(5wt)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(5wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) + V \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw + \beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw + \beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) - Vg \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(wt)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) \right) \right) \\
& - \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( \frac{3Aw}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{5Bw}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + V \left( -\frac{w \cos(\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R \sin(\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{Vgw}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& t \rightarrow \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( -A \begin{pmatrix} -\frac{3w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(3wt)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} & \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(3wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \\ \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 & L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right) \end{pmatrix} - B \begin{pmatrix} -\frac{5w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(5wt)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} & \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(5wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \\ \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 & L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right) \end{pmatrix} + V \begin{pmatrix} -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(wt + \beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} & \\ \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(wt + \beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} & \end{pmatrix} \right) - Vg \begin{pmatrix} -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(wt)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} & \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \\ \frac{R^2}{L^2} + w^2 & L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right) \end{pmatrix} \right) \\
& - \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( \frac{3Aw}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{5Bw}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + V \begin{pmatrix} -\frac{w \cos(\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} & \frac{R \sin(\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \\ \frac{R^2}{L^2} + w^2 & L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right) \end{pmatrix} \right) + \frac{Vgw}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right)
\end{aligned}$$

$$v(t) := V \cdot \sin(w \cdot t + \text{beta}) \\
t \rightarrow V \sin(wt + \beta)$$

$$pot := i(t) \cdot v(t)$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( -A \begin{pmatrix} -\frac{3w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(3wt)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} & \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(3wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \\ \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 & L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right) \end{pmatrix} - B \begin{pmatrix} -\frac{5w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(5wt)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} & \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(5wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \\ \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 & L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right) \end{pmatrix} + V \begin{pmatrix} -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw + \beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} & \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw + \beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \\ \frac{R^2}{L^2} + w^2 & L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right) \end{pmatrix} \right) + Vg \begin{pmatrix} -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(wt)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} & \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \\ \frac{R^2}{L^2} + w^2 & L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right) \end{pmatrix} \right) - \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( \frac{3Aw}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{5Bw}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + V \begin{pmatrix} -\frac{w \cos(\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} & \frac{R \sin(\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \\ \frac{R^2}{L^2} + w^2 & L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right) \end{pmatrix} + \frac{Vgw}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right) \right) \right) V \sin(tw + \beta)
\end{aligned}$$

## APÊNDICE E

Cálculo referente a 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> harmônica do lado da Fonte e do lado da Rede

$$\begin{aligned}
 ode &:= L \left( \frac{d}{dt} i(t) \right) + R i(t) = V \cdot \sin(w \cdot t + \text{beta}) + A \cdot \sin(3 \cdot w \cdot t + 3 \cdot \text{beta}) + B \cdot \sin(5 \cdot w \cdot t + 5 \cdot \text{beta}) - C \\
 &\quad \cdot \sin(3 \cdot w \cdot t) - E \cdot \sin(5 \cdot w \cdot t) - Vg \cdot \sin(w \cdot t) \\
 L \left( \frac{d}{dt} i(t) \right) + R i(t) &= V \sin(tw + \beta) + A \sin(3tw + 3\beta) + B \sin(5tw + 5\beta) \\
 &\quad - C \sin(3wt) - E \sin(5wt) - Vg \sin(wt)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ics := i(0) &= 0 \\
 i(0) &= 0
 \end{aligned}$$

*dsolve({ode, ics})*

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(3tw + 3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(3tw + 3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) + B \left( -\frac{5w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(5tw + 5\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(5tw + 5\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) - C \left( -\frac{3w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(3wt)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(3wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) - E \left( -\frac{5w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(5wt)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(5wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) + V \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw + \beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw + \beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) - Vg \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(wt)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) \right) + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) - \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w \cos(3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R \sin(3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) + B \left( -\frac{5w \cos(5\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R \sin(5\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) + \frac{3Cw}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{5Ew}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + V \left( -\frac{w \cos(\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R \sin(\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) + \frac{Vgw}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i(t) := & \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(3tw + 3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(3tw + 3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) + B \left( \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{5w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(5tw + 5\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(5tw + 5\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) - C \left( -\frac{3w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(3wt)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(3wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) - E \left( -\frac{5w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(5wt)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(5wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) + V \left( \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw + \beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw + \beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) - Vg \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(wt)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) \right) \right) - \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w \cos(3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R \sin(3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + B \left( -\frac{5w \cos(5\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R \sin(5\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) + \frac{3Cw}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{5Ew}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + V \left( \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{w \cos(\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R \sin(\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) + \frac{Vgw}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& t \mapsto \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(3tw + 3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(3tw + 3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) + B \left( -\frac{5w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(5tw + 5\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(5tw + 5\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - C \left( -\frac{3w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(3tw)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(3tw)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) + E \left( -\frac{5w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(5tw)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(5tw)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) + V \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw + \beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw + \beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) - Vg \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) \right) - \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w \cos(3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R \sin(3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + B \left( -\frac{5w \cos(5\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R \sin(5\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) + \frac{3Cw}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{5Ew}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + V \left( -\frac{w \cos(\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R \sin(\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) + \frac{Vgw}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(t) &:= V \cdot \sin(w \cdot t + \text{beta}) + A \cdot \sin(3 \cdot w \cdot t + 3 \cdot \text{beta}) + B \cdot \sin(5 \cdot w \cdot t + 5 \cdot \text{beta}) \\
&\mapsto V \sin(tw + \beta) + A \sin(3tw + 3\beta) + B \sin(5tw + 5\beta)
\end{aligned}$$

$$pot := i(t) \cdot v(t)$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(3tw + 3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(3tw + 3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) + B \left( -\frac{5w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(5tw + 5\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(5tw + 5\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) \right) \right. \\
& \quad \left. - C \left( -\frac{3w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(3wt)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(3wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) - E \left( -\frac{5w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(5wt)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(5wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) + V \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(tw + \beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(tw + \beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) - Vg \left( -\frac{w e^{\frac{Rt}{L}} \cos(wt)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{R e^{\frac{Rt}{L}} \sin(wt)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) \right) - \frac{1}{L} \left( e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \left( -\frac{3w \cos(3\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{R \sin(3\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 9w^2 \right)} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + B \left( -\frac{5w \cos(5\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + \frac{R \sin(5\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + 25w^2 \right)} \right) + \frac{3Cw}{\frac{R^2}{L^2} + 9w^2} + \frac{5Ew}{\frac{R^2}{L^2} + 25w^2} + V \left( -\frac{w \cos(\beta)}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} + \frac{R \sin(\beta)}{L \left( \frac{R^2}{L^2} + w^2 \right)} \right) + \frac{Vgw}{\frac{R^2}{L^2} + w^2} \right) \right) \left( V \sin(tw + \beta) + A \sin(3tw + 3\beta) + B \sin(5tw + 5\beta) \right)
\end{aligned}$$