

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

LUCAS TOLENTINO NEVES

Balança de Poggendorff: uma análise contemporânea

São Carlos

2025

LUCAS TOLENTINO NEVES

Balança de Poggendorff: uma análise contemporânea

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Lucas Marcelo Cavallari Nardi - Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo.

São Carlos

2025

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

RESUMO

Neste trabalho, é conduzida uma investigação teórica e experimental da balança de Poggen-dorff (ou aparato de Poggen-dorff). Ele consiste em uma balança de braço com uma máquina de Atwood servindo como peso em uma das pontas. Tal aparato foi projetado por Johann Christian Poggen-dorff para demonstrar a variação no peso aparente entre uma máquina de atwood parada e em movimento. Foi desenhada e construída uma versão moderna da balança de Poggen-dorff na qual a máquina de atwood é presa a uma barra rígida de alumínio, com um contrapeso na outra ponta, e o movimento da polia é travado por um fio de massa negligenciável. Quando o fio que trava o movimento da máquina de Atwood é queimado, a máquina de Atwood entra em movimento e o equilíbrio até então presente na balança se desfaz. O ângulo dependente do tempo $\alpha(t)$ do braço da balança com relação à horizontal é medido utilizando uma montagem de potenciômetro e Arduino e os dados são registrados com alta resolução temporal. As previsões teóricas são obtidas utilizando o formalismo Newtoniano e o formalismo Lagrangiano para a polia em duas configurações: polia “paralela” e polia “perpendicular”. As equações de movimento obtidas são integradas numericamente utilizando Fortran e gerando resultados quase idênticos para os três modelos. Foi visto que os cálculos concordam qualitativamente com o experimento; no entanto, desvios quantitativos dos resultados foram observados e podem ser atribuídos à falta de sincronia entre a queima do fio e o começo da coleta de dados (além dos efeitos de fricção no potenciômetro). O valor de experimentos historicamente negligenciados no ensino de física também é discutido, especificamente na ilustração da força como causa versus consequência do movimento e na comparação das abordagens Newtoniana e Lagrangiana para a resolução de problemas em mecânica.

Palavras-chave: Experimento de Poggen-dorff. Máquina de Atwood. Mecânica Newtoniana. Mecânica Lagrangiana. Ensino de Física

1 INTRODUÇÃO

A máquina de Atwood é um aparato bem conhecido e aparece em exemplos e problemas em virtualmente todo livro de física básica e pode ser utilizada para averiguar problemas mecânicos com precisão, como medir o valor local de g (COELHO, 2012).

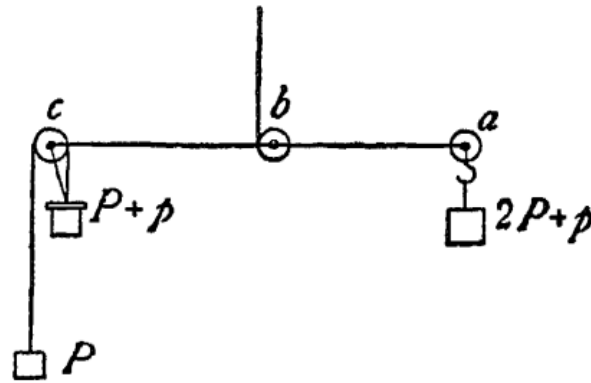


Figura 1: Esquema do experimento de Poggendorff feito por Mach. O contrapeso a possui a mesma massa que a máquina de atwood (descontando a polia). O fio conectando o peso $P + p$ ao centro da polia c mantém o sistema em repouso (MACH, 1902).

No século XIX, Johann Christian Poggendorff (1796-1877) desenvolveu um experimento para demonstrar que o peso efetivo de uma máquina de Atwood muda quando ela está em movimento. O físico e filósofo Ernst W. Josef Wenzel Mach (1838-1916) esquematizou o experimento de Poggendorff com a figura 1 (MACH, 1902, p. 206-207).

Na figura 1, o fio que liga $P + p$ a c mantém a máquina de atwood e, conseqüentemente, toda a balança em repouso. Se removermos o fio, queimando-o para perturbar o sistema apenas no mínimo possível, as massas na máquina de Atwood começam a se mover, dando início ao movimento da barra abc .

Esse experimento foi esquecido pelos livros didáticos de física, com pouquíssimas exceções (COELHO; SILVA; BORGES, 2015). Apesar disso, ele apresenta implicações educacionais substanciais ao mostrar que a consideração de que a força causa aceleração é uma afirmação mais metafísica que física. Nesse caso a aceleração das massas da máquina de Atwood gera uma mudança na força resultante no sistema (COELHO, 2012).

Apesar de pouco conhecido, alguns experimentos sobre a balança de Poggendorff foram realizados. Em 1970, o físico brasileiro Cintra do Prado pesou uma máquina de Atwood em uma versão do aparato de Poggendorff que ele construiu. Ele verificou que o peso diminui com o movimento (PRADO, 1970). De maneira semelhante, o Professor Ricardo Lopes Coelho, de Portugal, pesou uma máquina de Atwood em repouso e em movimento e mostrou uma redução no peso compatível com a previsão teórica. Mais precisamente, a diminuição de peso foi um pouco menor que a previsão teórica (cerca de 3% e 6%), “atribuível a uma pequena inclinação

do sensor de força ou alguns outros pequenos erros sistemáticos” (COELHO; SILVA; BORGES, 2015).

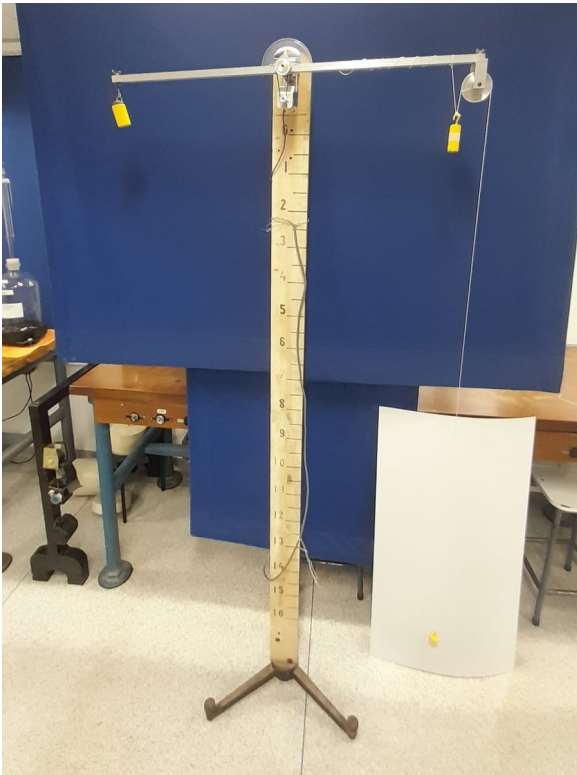
Decidimos medir o ângulo do braço da balança, a linha abc na figura 1, em relação à horizontal (que é a posição inicial, quando a balança se encontra em repouso). Com isso, podemos comparar os resultados experimentais e a previsão teórica gerada pelos formalismos Lagrangiano e Newtoniano da mecânica clássica. Distintivamente das análises que encontramos na literatura, não foi assumido que a polia é ideal. É interessante notar que durante a análise da bibliografia sobre o aparato de Poggendorff, não foi encontrada análises do experimento utilizando o formalismo Lagrangiano.

2 MATERIAIS E MÉTODOS

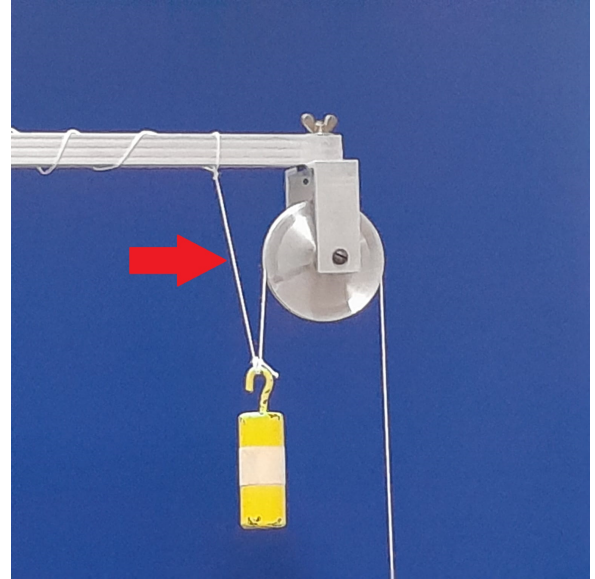
Como brevemente discutido na introdução, a montagem da balança de Poggendorff é, de forma sucinta, uma balança de pesagem onde o peso a ser medido é uma máquina de Atwood que consiste em dois pesos conectados por um fio inextensível através de uma polia. Na figura 2a está a montagem da balança de Poggendorff feita com uma balança de braço onde o braço é uma barra de alumínio.

A versão da balança construída para esse experimento é constituída por uma barra de alumínio, presa a um suporte vertical, que pode girar com baixa fricção interna. De um lado há um contrapeso conectado à uma das extremidades da balança, na outra extremidade está a máquina de Atwood, construída com dois pesos, uma polia de alumínio e um fio de barbante. A máquina de Atwood está conectada ao braço da balança por uma haste de alumínio em formato de “U”. O contrapeso tem peso aproximadamente igual ao peso da máquina de Atwood acrescido ao peso da haste em para manter o repouso. Como já indicado, a máquina de Atwood é mantida em repouso por um fio pequeno com uma das extremidades amarrada na máquina e outra no braço da balança (visto na figura 2b, este fio é queimado para iniciar o experimento, adicionando o mínimo de perturbação possível no sistema.

Tomamos medidas das grandezas relevantes do sistema usando as unidades do SI. As massas estão apresentas na tabela 1, e os tamanhos na tabela 2. As incertezas das medidas foram ignoradas para viabilizar os cálculos necessários para as análises teóricas do experimento. De qualquer forma, o erro estatístico do experimento suplantaria as incertezas nas medidas de massa e tamanho.



(a) O aparato de Poggendorff completo.



(b) A máquina de Atwood.

Figura 2: O aparato de Poggendorff utilizado. Na figura 2(a) temos uma visão do aparato construído para medir o ângulo entre a barra de alumínio e a horizontal $\alpha(t)$. Em (b) aplicamos zoom na região da máquina de Atwood do lado direito do aparato de Poggendorff. A seta vermelha indica o fio mantendo a máquina de Atwood (e toda a balança) em repouso. Esse fio é queimado para iniciar o experimento.

Objeto	Massa
Polia (m_D)	36,07 g
Haste de sustentação (m_r)	39,79 g
Parafuso e borboleta da haste (m_p)	9,56 g
Peso b (m_b)	110,81 g
Peso c (m_c)	172,80 g
Barra (braço da balança) (m_R)	135,86 g
Peso a, parte de m_a	355,54 g
Estrutura que segura o peso a, parte de m_a	12,99 g

Tabela 1: Tabela contendo todas as massas relevantes para o experimento.

Objeto	Comprimento
Comprimento da barra (braço da balança) ($2R$)	86,1 cm
Distância entre o centro da polia e a barra (r)	5,69 cm
Comprimento da corda na máquina de Atwood	2,03 m
Raio da polia (D)	3,1 cm

Tabela 2: Tabela contendo todos os comprimentos relevantes para o experimento.

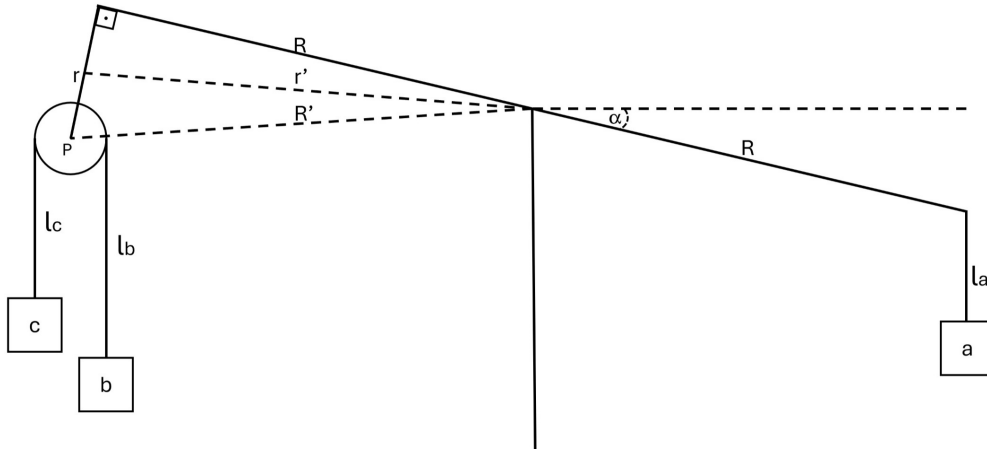


Figura 3: Esquema da balança de Poggendorff utilizada no experimento. A configuração exibida tem o eixo de rotação da polia paralelo ao eixo de rotação da balança.

O modelo teórico utilizado leva em consideração as massas dos pesos da máquina de Atwood, a massa (e o momento de inércia) da barra de alumínio, da polia e da haste segurando a polia. O fio foi considerado inextensível, sem massa e permanecendo sempre na vertical (exceto na dobra em que ele faz quando em contato direto com a polia). As figuras 3, 4 e 5 mostram os elementos considerados no modelo teórico, bem como a nomenclatura usada para definir cada elemento nos cálculos.

Na figura 3, R representa a barra de alumínio que constitui o braço da balança, mais precisamente, a distância entre o eixo de rotação da balança e a extremidade do braço da balança. A haste que prende a polia ao braço da balança é representada por r . O termo r' representa a distância entre o eixo de rotação da balança e o centro da haste que segura a polia e R' representa a distância entre o eixo de rotação da balança e o centro da polia. O contrapeso é representado por a e a distância entre a balança e o contrapeso é l_a . Os pesos da máquina de Atwood são representados por b e c e as distâncias (verticais) entre os pesos e

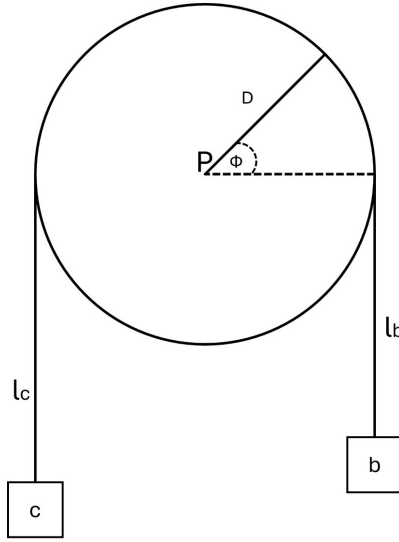


Figura 4: Esquema destacado da máquina de Atwood que compõe o aparato de Poggendorff.

a polia são, respectivamente, l_b e l_c . A polia é representada por P ; nas equações usaremos D para representar seu raio. Exceto quando explicitado o contrário, utilizamos uma letra x para representar o tamanho de um objeto e m_x para a massa. Note que α representa o ângulo entre o braço da balança e a horizontal.

Na figura 4 temos a polia em foco, destacando a coordenada angular generalizada da polia ϕ e o raio D da polia.

Além das grandezas destacadas nas figuras, os modelos teóricos também levam em consideração o ângulo θ entre R' e R e o ângulo θ' entre r' e R , bem como as massas do contrapeso (m_a), dos pesos na máquina de Atwood (m_b e m_c), da polia (m_D), da haste segurando a polia (m_r), da barra de alumínio (m_R) e do conjunto parafuso e borboleta segurando a haste (m_p).

2.1 Formalismo Newtoniano

A abordagem Newtoniana para um problema que é basicamente uma balança de braço pesando uma máquina de Atwood é, *prima facie*, simples, basta: 1) resolver a máquina de Atwood; 2) determinar o peso efetivo da máquina de Atwood; 3) resolver a balança.

Começamos pela máquina de Atwood: exibida na figura 2b e esquematizada na figura 4.

Primeiramente, devemos notar que a polia tem massa finita. Além disso, a polia está sendo acelerada (inicialmente para cima), o que pode ser modelado como se ela estivesse sob efeito de

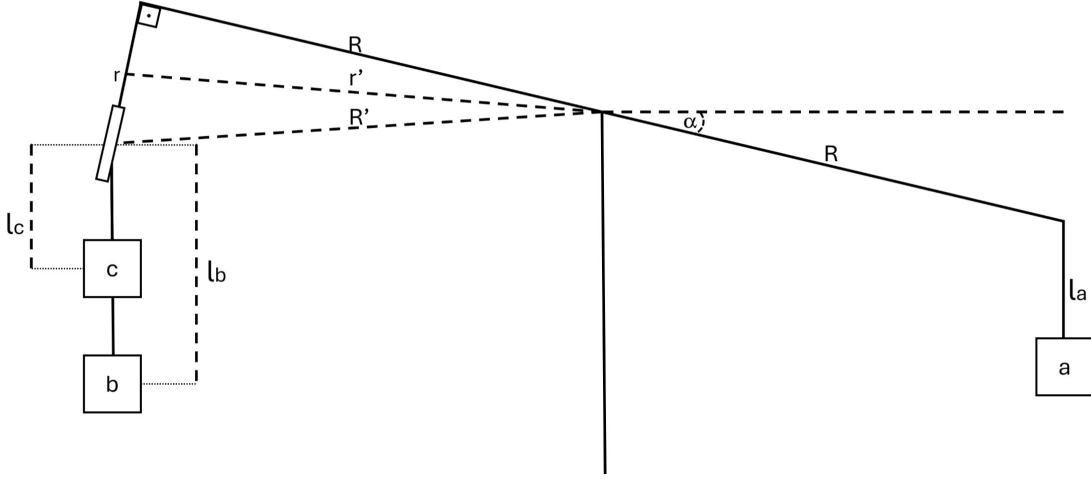


Figura 5: Esquema da balança de Poggendorff utilizada no experimento. A configuração exibida tem o eixo de rotação da polia perpendicular ao eixo de rotação da balança. Essa configuração aumenta a complexidade do movimento, uma vez que agora a polia rotaciona em dois eixos independentes: seu eixo “padrão”, que se encontra perpendicular ao eixo da balança, e em torno de si em um eixo paralelo ao da balança, forçando um tipo de precessão do eixo “padrão”.

um campo gravitacional modificado¹ : $g' = g + R'(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\cos(\alpha + \pi + \theta) - \frac{d\alpha}{dt}\sin(\alpha + \pi + \theta))$. Os termos de seno e cosseno se devem a uma rotação acelerada do braço da balança. Lembrando sempre que $\alpha(t)$ é o ângulo entre o braço da balança e a horizontal (que é a posição definida como inicial do experimento), convencionado de forma a aumentar quando o braço gira no sentido anti-horário, como mostrado nas figuras 3 e 5.

Considerando o momento de inércia da polia como o de um cilindro uniforme e aplicando as leis de Newton temos as seguintes equações:

$$\begin{cases} m_c g' - T_c = m_c a \\ T_b - m_b g' = m_b a \\ T_c - T_b = \frac{1}{2} m_D a. \end{cases} \quad (1)$$

Onde T_c e T_b são as tensões nos fios l_c e l_b respectivamente e cujos resultados são:

$$\begin{cases} a = \frac{(m_c - m_b)g'}{m_c + m_b + \frac{1}{2}m_D} \\ T_c = m_c g' \left(1 - \frac{m_c - m_b}{m_c + m_b + \frac{1}{2}m_D}\right) \\ T_b = m_b g' \left(1 + \frac{m_c - m_b}{m_c + m_b + \frac{1}{2}m_D}\right). \end{cases} \quad (2)$$

É fácil verificar que se g' for negativo, a tensão no fio empurrará a polia para cima e, do ponto de vista da polia, os pesos irão “cair para cima” (de outro ponto de vista, a aceleração para baixo dos pesos é menor que a da polia). Se g' for grande o suficiente, teremos o peso aparente (a força que a máquina de Atwood faz na polia) sendo maior que o peso de repouso. Ambos os casos podem acontecer em um movimento circular com velocidade suficiente.

Seguindo o raciocínio da referência (COELHO; SILVA; BORGES, 2015), a segunda lei de Newton nos dá o peso efetivo de uma máquina de Atwood. Em (COELHO; SILVA; BORGES, 2015), a polia é considerada sem massa, o que resulta em $W_m = 2T$, onde W_m é o peso da máquina de Atwood e T a tensão no fio. Porém, aqui temos uma polia com massa, o que resultaria em $W_m = (T_c + T_b) + m_D g$. Substituindo T_c e T_b , chega-se a:

$$W_m = m_D g' + \left(m_c g' - m_c \left(\frac{(m_c - m_b)g'}{m_c + m_b + \frac{1}{2}m_D} \right) \right) + \left(m_b g' + m_b \left(\frac{(m_c - m_b)g'}{m_c + m_b + \frac{1}{2}m_D} \right) \right). \quad (3)$$

Também é possível calcular a diferença entre o peso efetivo da máquina de Atwood em movimento e o peso dela em repouso W_r . O peso no lado da máquina de Atwood, antes do fio que trava a máquina ser queimado, deve ser igual ao peso $m_a g$ no lado do contrapeso. Nesse caso, a aceleração que define a máquina de Atwood é 0, pois a máquina de atwood está travada pelo fio que a conecta à barra de alumínio. Matematicamente, o peso da máquina de Atwood nessa situação é a soma dos pesos de suas componentes. Vale notar que as tensões T_a e T_b não são iguais as tensões descritas em (2), que entrará em vigor após a queima do fio.

Com W_r definido, temos que a variação de peso na máquina de Atwood ΔW é dada por:

$$\Delta W = W_r - W_m = (m_b + m_c + m_D)g - \left(m_D g' + \left(m_c g' - m_c \frac{(m_c - m_b)g'}{m_c + m_b + \frac{1}{2}m_D} \right) + \left(m_b g' + m_b \frac{(m_c - m_b)g'}{m_c + m_b + \frac{1}{2}m_D} \right) \right). \quad (4)$$

Também é necessário saber o momento de inércia I_0 da barra de alumínio se movendo. Com o teorema dos eixos paralelos, podemos dividir o momento de inércia em várias partes. Primeiramente, o momento de inércia da barra com relação ao seu eixo de rotação, que passa pelo seu centro e é perpendicular a sua extensão. Em segundo lugar temos o momento de inércia da pequena haste segurando a máquina de Atwood, que precisa ser considerada já que está rotacionando presa à barra de alumínio. O movimento da haste pode ser dividido em uma

rotação em torno de si composta com uma translação em torno do eixo de rotação da balança; então, utilizando o teorema dos eixos paralelos temos:

$$I_0 = \frac{m_R R^2}{3} + \frac{m_r r^2}{12} + m_r r'^2 + m_p R^2. \quad (5)$$

Com as tensões na máquina de Atwood calculadas, começamos a modelar a aceleração angular da balança. São considerados dois fatores chave: (1) o torque gerado pelos pesos e (2) as forças de reação do par ação-reação da barra de alumínio acelerando os pesos. Considerar o fator (2) é matematicamente equivalente a incluir os pesos no momento de inércia da balança, mas gera expressões mais fáceis de serem tratadas.

O torque total sobre a barra da balança (incluindo a haste em U que sustenta a polia) é: $\frac{d^2\alpha}{dt^2}(\frac{m_R R^2}{3} + \frac{m_r r^2}{12} + m_r r'^2 + m_p R^2)$. Isto é, a soma dos torques provenientes dos pesos, das tensões no fio da máquina de Atwood, do peso da polia e das forças de reação dos componentes sendo empurrados e puxados, que são, em suma, uma combinação de forças de reação (ao movimento) e peso.

O torque considerado como proveniente dos pesos é o torque gerado pela haste segurando a polia (de massa m_r), da polia (de massa m_D), do parafuso e da borboleta segurando a haste (de massa m_p) e do contrapeso (com massa m_a): $-g[R(m_a \cos(\alpha) + m_p \cos(\alpha + \pi)) + m_D R' \cos(\alpha + \pi + \theta) + m_r r' \cos(\alpha + \pi + \theta')]$. O torque das forças de reação é proveniente da reação da polia e do contrapeso ao serem empurrados pela balança e da componente horizontal da força de reação dos pesos na máquina de Atwood, representada pelos termos acompanhados de seno na expressão (a componente vertical da resistência ao movimento dos pesos na máquina de Atwood está contabilizada nas tensões no fio e a inércia da haste segurando a polia está inclusa no momento de inercia), resultando em: $-\frac{d^2\alpha}{dt^2}[m_a R^2 + R'^2(m_D + (m_b + m_c) \sin^2(\alpha + \pi + \theta))] - \frac{d\alpha}{dt} R'^2(m_b + m_c) \sin(\alpha + \pi + \theta) \cos(\alpha + \pi + \theta)$. Por fim, o torque gerado pelas tensões no fio da máquina de Atwood, que contabiliza a componente vertical dos pesos da máquina de Atwood quando ela é acelerada pela barra de alumínio, é $-(T_b + T_c) R' \cos(\alpha + \pi + \theta)$.

Com isso, podemos calcular o torque resultante e, a partir dele, chegar na equação de movimento:

$$\begin{aligned}
& -g \left[R(m_a \cos(\alpha) + m_p \cos(\alpha + \pi)) + m_r r' \cos(\alpha + \pi + \theta') \right. \\
& \quad \left. + R' \cos(\alpha + \pi + \theta) \left(m_b + m_c + m_D - \frac{(m_c - m_b)^2}{m_b + m_c + \frac{m_D}{2}} \right) \right] \\
& \quad - \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 R'^2 \cos(\alpha + \pi + \theta) \sin(\alpha + \pi + \theta) \frac{(m_c - m_b)^2}{m_b + m_c + \frac{m_D}{2}} \\
\frac{d^2\alpha}{dt^2} = & \frac{m_r \left(r'^2 + \frac{r^2}{12} \right) + R^2 \left(m_p + m_a + \frac{m_R}{3} \right)}{m_b + m_c + m_D - \frac{(m_c - m_b)^2}{m_b + m_c + \frac{m_D}{2}} \cos^2(\alpha + \pi + \theta)} \quad (6)
\end{aligned}$$

Aproximando a equação (6) para ângulos pequenos e considerando $r = 0$, temos que o sistema é equivalente a uma máquina de Atwood composta, possuindo a mesma equação de movimento:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{-g[m_a - (m_r + m_p + m_b + m_c + m_D) + \frac{(m_c - m_b)^2}{m_b + m_c + \frac{I_D}{D^2}}]}{R(\frac{I_R}{R^2} + m_a + m_r + m_p + m_b + m_c + m_D - \frac{(m_c - m_b)^2}{m_b + m_c + \frac{I_D}{D^2}})}.$$

Como demonstrado em (COELHO; BORGES; KARAM, 2016), podemos relacionar a aceleração em uma máquina de Atwood com uma mudança de posição no eixo de uma balança de braço simples se a balança sustentar os mesmos pesos que a máquina de Atwood, o que torna os dois problemas equivalentes, permitindo um estudo do problema utilizando torque.

É claro que algumas simplificações foram exigidas. Por exemplo, o fio conectando os pesos b e c foi considerado sem massa, qualquer oscilação que os pesos ou o contrapeso possam sofrer durante o movimento da balança foi negligenciado e o ponto onde os fios tocam a polia foi considerado constante. Além disso, fricções e a resistência do ar foram desconsideradas.

Uma característica interessante que observamos utilizando o formalismo Newtoniano é saber qual lado se move para baixo e qual lado se move para cima. Se a aceleração da barra for considerada negligenciável (efetivamente transformando o problema em uma pesagem com balança de braço, cujo objetivo é descobrir qual o torque feito por uma massa que se deseja pesar quando o sistema está em equilíbrio), a força total exercida no lado da polia é $W_m + g'(m_r + m_p)$, onde $g' = g$ porque a aceleração vertical da polia é, nesse cenário, nula. Nesse caso, para que a polia comece a descer (e o contrapeso a subir), precisamos que a inequação $\frac{W_m}{g'} + m_r + m_p > m_a$ seja verdadeira. Assim,

$$m_D + m_r + m_p + m_b + m_c - \left(\frac{(m_c - m_b)^2}{m_c + m_b + \frac{1}{2}m_D} \right) > m_b + m_c + m_D + m_r + m_p. \quad (7)$$

O que resulta em: $-(m_c - m_b)^2 > 0$. Tal resultado implica em uma massa imaginária, o que é absurdo! Ou seja, a máquina de Atwood sempre começa indo para cima quando parte do repouso, tendo peso aparente menor que a soma dos pesos de suas componentes.

Isso não impede, é claro, que exista uma combinação de $\alpha(t)$ e $\frac{d\alpha(t)}{dt}$ que faça com que o peso aparente do lado da máquina de Atwood seja maior que o do contrapeso em algum instante $t > 0$ (ou com outras condições iniciais (que não partem do repouso e de $\alpha(0) = 0$), como apontado na análise da equação (2)).

2.2 Formalismo Lagrangiano

Também é possível achar a equação de movimento para $\alpha(t)$ utilizando as equações de Euler-Lagrange. Antes disso, é prudente discutir os vínculos do sistema. Um sistema físico recebe tratamentos diferentes no formalismo Lagrangiano dependendo da holonomicidade de seus vínculos. Um vínculo é holonômico se ele pode ser expressado da forma: $f(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$, onde q_1, q_2, \dots, q_n são as coordenadas generalizadas e t é o tempo.

Vínculos não holonômicos podem tornar o tratamento matemático do sistema complicado. O fator chave aqui é integrabilidade: um vínculo é integrável quando ele é escrito de forma que não satisfaz a condição para holonomicidade, mas a equação que o define pode ser integrada, sendo equivalente uma equação para um vínculo holonômico. Assim, o vínculo também é equivalente a um vínculo holonômico (LE MOS, 2003).

O vínculo do sistema de interesse é o rolamento sem deslizamento (para a polia da máquina de Atwood), que pode ser descrito matematicamente como: $D\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{dl_c(t)}{dt}$, que não se apresenta de forma holonômica. Felizmente, no sistema de interesse, esse vínculo é integrável, sendo equivalente a $D\phi(t) + l_{c0} = l_c(t)$. Isso significa que podemos utilizar vínculos holonômicos na modelagem do sistema e, dessa forma, ele pode ser substituídos diretamente nas coordenadas, habilitando o uso direto das equações de Euler-Lagrange.

Considerando a configuração do sistema com a rotação da polia paralela à rotação da balança, que foi explorada utilizando formalismo newtoniano e está representada na figura 3, o procedimento para achar a equação de movimento é simples: escrever a energia cinética e a

energia potencial em função de $\alpha(t)$, $\phi(t)$, $\frac{d\alpha(t)}{dt}$ e $\frac{d\phi(t)}{dt}$ e, então, montar a Lagrangiana e aplicar as seguintes equações de Euler-Lagrange:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial(\frac{d\alpha}{dt})}\right) - \frac{\partial L}{\partial\alpha} = T_{ex\alpha} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial(\frac{d\phi}{dt})}\right) - \frac{\partial L}{\partial\phi} = T_{ex\phi}, \end{cases} \quad (8)$$

onde $T_{ex\alpha}$ é a soma dos torques de fontes externas afetando a velocidade angular de $\alpha(t)$. $T_{ex\phi}$ é a soma dos torques externos afetando a velocidade angular de $\phi(t)$ ².

Para construir as expressões para as energias do sistema, a origem do sistema, o ponto $(0,0)$ nas coordenadas (x,y) , foi colocada no centro do braço da balança (o eixo de rotação da balança). Trivialmente, o eixo y é alinhado verticalmente, de forma que tudo que está na altura da barra tem energia potencial (gravitacional) igual a 0. Dessa forma, a energia potencial gravitacional da barra de alumínio pode ser ignorada, pois sempre que uma metade dela estiver acima da coordenada $y = 0$, a outra metade estará abaixo, cancelando a energia potencial da metade acima.

Para o restante das massas no sistema, seu valor é multiplicado por sua posição y : para m_a e m_p temos $m_a y_a = (-l_a + R \sin(\alpha))m_a$ e $m_p y_p = R \sin(\alpha + \pi)m_p$; para m_b e m_c temos, respectivamente, $m_b y_b = (-l_b + R' \sin(\alpha + \theta + \pi))m_b = (-(l_{b0} - D\phi) + R' \sin(\alpha + \theta + \pi))m_b$ e $m_c y_c = (-l_c + R' \sin(\alpha + \theta + \pi))m_c = (-D\phi + R' \sin(\alpha + \theta + \pi))m_c$; a energia potencial da polia se dá por meio da expressão $m_D y_D = R' \sin(\alpha + \theta + \pi)m_D$ e, por fim, a energia potencial da haste segurando a polia é $m_r y_r = r' \sin(\alpha + \theta' + \pi)m_r$. Portanto, a energia potencial é

$$E_p = g \left[r' \sin(\alpha + \theta' + \pi)m_r + R' \sin(\alpha + \theta + \pi)(m_D + m_b + m_c) + R \sin(\alpha + \pi)m_p + (-l_a + R \sin(\alpha))m_a - (l_{b0} - D\phi)m_b - D\phi m_c \right]. \quad (9)$$

Para a energia cinética, a energia de rotação do braço da balança pode ser escrita como $\frac{I_R}{2}(\frac{d\alpha}{dt})^2 = \frac{m_R R^2}{6}(\frac{d\alpha}{dt})^2$. Os termos relacionados ao movimento da massa a e do parafuso e borboleta da haste que segura a máquina de Atwood também são consideravelmente simples: $\frac{m_a + m_p}{2}R^2(\frac{d\alpha}{dt})^2$. A energia cinética da polia pode ser dividida em energia cinética translacional, dado pela expressão $\frac{m_D}{2}(R' \frac{d\alpha}{dt})^2$, e energia rotacional, dada por $\frac{I_D}{2} \frac{d\phi}{dt}^2 = \frac{m_D}{4}(D \frac{d\phi}{dt})^2$. A situação é semelhante para o suporte da polia, com suas energias translacional e rotacional sendo, respectivamente, $\frac{m_r}{2}(r' \frac{d\alpha}{dt})^2$ e $\frac{I_r}{2} \frac{d\alpha}{dt}^2 = \frac{m_r}{24}(r \frac{d\alpha}{dt})^2$.

Os termos de energia para as massas b e c são um pouco mais complicados. Suas velocidades são composições de termos dependentes de $\alpha(t)$ e $\phi(t)$, apresentando termos cruzados. O termo de energia cinética para b é $\frac{m_b}{2}[R'^2\frac{d\alpha}{dt}^2 + D^2\frac{d\phi}{dt}^2 + 2R'\frac{d\alpha}{dt}D\frac{d\phi}{dt}\cos(\alpha + \pi + \theta)]$, enquanto para c temos $\frac{m_c}{2}[R'^2\frac{d\alpha}{dt}^2 + D^2\frac{d\phi}{dt}^2 - 2R'\frac{d\alpha}{dt}D\frac{d\phi}{dt}\cos(\alpha + \pi + \theta)]$.

A energia cinética total é a soma de todos esses termos, sendo escrita matematicamente como:

$$T = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \left[\frac{m_R R^2}{6} + \frac{m_a + m_p}{2} R^2 + R'^2 \left(\frac{m_D + m_b + m_c}{2} \right) + \frac{m_r}{2} \left(r'^2 + \frac{r^2}{12} \right) \right] + D^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \left[\frac{m_D}{4} + \frac{m_b + m_c}{2} \right] + (m_b - m_c) R' \frac{d\alpha}{dt} D \frac{d\phi}{dt} \cos(\alpha + \pi + \theta). \quad (10)$$

Então, a Lagrangiana do sistema é:

$$L = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \left[\frac{m_R R^2}{6} + \frac{m_a + m_p}{2} R^2 + R'^2 \left(\frac{m_D + m_b + m_c}{2} \right) + \frac{m_r}{2} \left(r'^2 + \frac{r^2}{12} \right) \right] + D^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \left[\frac{m_D}{4} + \frac{m_b + m_c}{2} \right] + (m_b - m_c) R' \frac{d\alpha}{dt} D \frac{d\phi}{dt} \cos(\alpha + \pi + \theta) - g \left[r' \sin(\alpha + \theta' + \pi) m_r + R' \sin(\alpha + \theta + \pi) (m_D + m_b + m_c) + R \sin(\alpha + \pi) m_p + (-l_a + R \sin(\alpha)) m_a - (l_{b0} - D\phi) m_b - D\phi m_c \right]. \quad (11)$$

Aplicando a lagrangiana obtida (11) nas equações de Euler-Lagrange mostradas em (8), as equações de movimento obtidas são:

$$\begin{cases} \frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{T_{ex\phi} + D(m_c - m_b)(g + R'(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\cos(\alpha + \pi + \theta) - (\frac{d\alpha}{dt})^2\sin(\alpha + \pi + \theta)))}{D^2(\frac{m_D}{2} + m_b + m_c)} \\ \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{T_{ex\alpha} - g[R'(m_b + m_c + m_D)\cos(\alpha + \pi + \theta) + r'm_r\cos(\alpha + \pi + \theta') + R(m_a\cos(\alpha) + m_p\cos(\alpha + \pi))] - R'D(m_b - m_c)\cos(\alpha + \pi + \theta)\frac{d^2\phi}{dt^2}}{(R^2(\frac{m_R}{3} + m_a + m_p) + R'^2(m_D + m_b + m_c) + m_r(r'^2 + \frac{r^2}{12}))} \end{cases} \quad (12)$$

É importante notar que se substituirmos a equação de movimento para $\phi(t)$ na equação de $\alpha(t)$, recuperamos a equação (6), demonstrando que o formalismo Lagrangiano e o formalismo Newtoniano, por caminhos diferentes, levam ao mesmo resultado³.

Para a configuração do experimento onde o eixo de rotação da polia se encontra perpendicular ao eixo de rotação da balança, como mostrado na figura 5, a Lagrangiana é consideravelmente parecida, com a exceção de que a polia gira em torno de um eixo perpendicular ao eixo

da balança e também rotaciona em torno de si no eixo paralelo ao eixo principal da balança, em um movimento análogo a uma precessão. Essa mudança adiciona um termo de energia cinética equivalente a $\frac{m_D}{8}(D\frac{d\alpha}{dt})^2$, o que produz uma pequena modificação na Lagrangiana do sistema. Utilizando as mesmas equações de Euler-Lagrange em (8), mas aplicadas à nova Lagrangiana, obtemos as equações de movimento abaixo:

$$\begin{cases} \frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{T_{ex\phi} + D(m_c - m_b)(g + R'(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\cos(\alpha + \pi + \theta) - (\frac{d\alpha}{dt})^2\sin(\alpha + \pi + \theta)))}{D^2(\frac{m_D}{2} + m_b + m_c)} \\ \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{T_{ex\alpha} - g[R'(m_b + m_c + m_D)\cos(\alpha + \pi + \theta) + r'm_r\cos(\alpha + \pi + \theta') + R(m_a\cos(\alpha) + m_p\cos(\alpha + \pi)) - R'D(m_b - m_c)\cos(\alpha + \pi + \theta)]\frac{d^2\phi}{dt^2}}{(\frac{m_D}{4}D^2 + R^2(\frac{m_R}{3} + m_a + m_p) + R'^2(m_D + m_b + m_c) + m_r(r'^2 + \frac{r^2}{12}))} \end{cases} \quad (13)$$

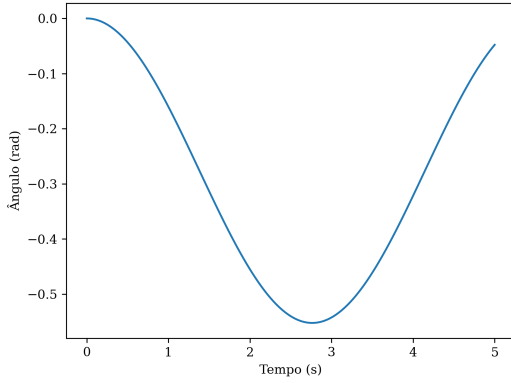
As equações (12) e (13) são muito parecidas, diferindo apenas pelo termo de rotação da polia sobre um segundo eixo: $\frac{m_D}{4}D^2$, o que diminui a aceleração na (13) em relação à (12) para um mesmo torque. Essencialmente, aumentando o momento de inércia em relação à configuração com a polia paralela.

2.3 Métodos numéricos e coleta de dados

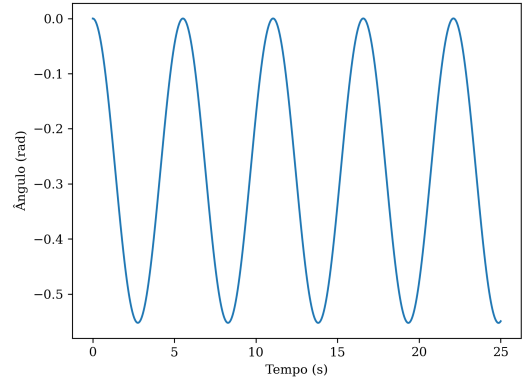
As equações de movimento (6), (12) e (13) são complicadas demais para serem resolvidas de forma analítica. Felizmente, como uma balança de Poggendorff foi construída e os parâmetros experimentais relevantes coletados, foi possível inserir os parâmetros experimentais em um software desenvolvido em Fortran que discretiza a integral das equações de movimento para obter soluções numéricas. Para tal, um somatório onde $\alpha(t) = \sum 0.5(\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}_{i-1} + \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}_i)\Delta t$ e $\frac{\Delta\alpha(t)}{\Delta t} = \sum \frac{d^2\alpha}{dt^2}(\alpha(t), \frac{\Delta\alpha(t)}{\Delta t})\Delta t$ foi implementado.

Na coleta de dados experimentais, foi utilizado um potenciômetro associado a uma unidade Arduino (CC, 2024) em conjunto com um programa Python. Com o potenciômetro acoplado à balança por uma engrenagem que gira junto com a balança e está presa ao potenciômetro por uma correia de borracha.

O tamanho da resistência entre o pino inicial (ou final) e o pino central do potenciômetro depende do ângulo no potenciômetro (mais precisamente, do seletor do potenciômetro). O que o Arduino essencialmente faz é aplicar uma tensão por toda a extensão do potenciômetro e medir a diferença de potencial entre uma das pontas do potenciômetro e o pino central. Como a diferença de potencial entre os pinos é diretamente proporcional ao tamanho da resistência



(a) Solução numérica com duração de 5 segundos.



(b) Solução numérica com duração de 25 segundos.

Figura 6: Soluções numéricas com diferentes durações para a equação de movimento (6). O ângulo $\alpha(t)$ é apresentado em radianos.

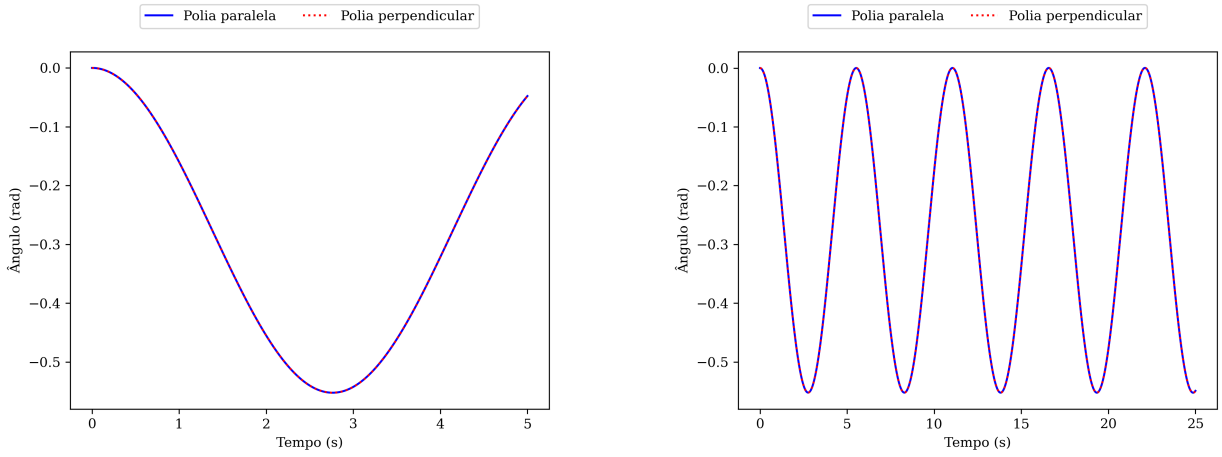
entre os dois pontos, que é proporcional ao ângulo do potenciômetro, que é proporcional ao ângulo da balança, existe uma função linear entre o ângulo da balança e a tensão medida pelo Arduino. Essa função linear é calibrada medindo a tensão para dois valores de ângulo conhecidos. Os dados são então transmitidos via porta serial para um computador, onde um programa Python registra os dados para serem salvos e analisados.

3 RESULTADOS

As soluções para as equações de movimento (6), (12) e (13) foram numericamente calculadas em um programa desenvolvido em Fortran e substituindo os parâmetros pelos valores presentes nas tabelas 1 e 2.

A solução numérica para a equação de movimento do caso Newtoniano, (6), para a configuração da polia paralela presente na figura 3, foi calculada para diferentes durações do experimento, exibida nas figuras em 6:

Um padrão oscilatório para o aparato de Poggendorff como um todo foi visto nas soluções numéricas (figura 6b). Esse padrão continua indefinidamente após os 25 segundos e também pode ser visto na figura 7, nas soluções numéricas para as equações de movimento (12) (polia paralela mostrada na figura 3), assim como para a equação (13) (polia perpendicular mostrada na figura 5).



(a) Solução numérica com duração de 5 segundos para as soluções com configurações paralela e perpendicular.

(b) Solução numérica com duração de 25 segundos para soluções com configurações paralela e perpendicular.

Figura 7: Soluções numéricas com diferentes durações para as equações de movimento (6), polia paralela com formalismo Newtoniano, em amarelo, (12), polia paralela com formalismo Lagrangiano, em vermelho e (13) polia perpendicular com formalismo Lagrangiano, em vermelho. O ângulo $\alpha(t)$ é apresentado em radianos.

Como esperado, as configurações paralela e perpendicular para o aparato de Poggendorff geram movimentos muito semelhantes, pois, comparada à massa total da balança, a massa da polia é bem pequena, e um momento de inércia como $\frac{m_d}{4} D^2$ altera pouco o resultado final. Além disso, o raio D da polia tem um dos menores comprimentos medidos para o experimento; em outras palavras, é razoável esperar que ambas as soluções sejam visualmente iguais.

Ademais, todas as soluções seguem o mesmo padrão de oscilação. O ponto interessante aqui é observar como essa oscilação se transpõe para a polia. Isso pode ser observado na figura 8, que representa uma solução para $\frac{d^2\phi(t)}{dt^2}$ quando acrescida de uma solução numérica para $\alpha(t)$.

A solução numérica para o movimento da polia, feita considerando um fio ideal suficientemente grande, mostra que a aceleração da própria máquina de Atwood também exibe um movimento oscilatório sincronizado entre $\alpha(t)$ e $\frac{d^2\phi(t)}{dt^2}$.

Com a balança montada, o experimento foi realizado diversas vezes para ambas as configurações do aparato de Poggendorff (polia paralela e polia perpendicular). Demonstrações do experimento para ambas as configurações estão disponíveis em ([POGGENDORFFEXPERIMENT](#), s.d.). Após a coleta, os dados foram processados e comparados com as respectivas soluções numéricas.

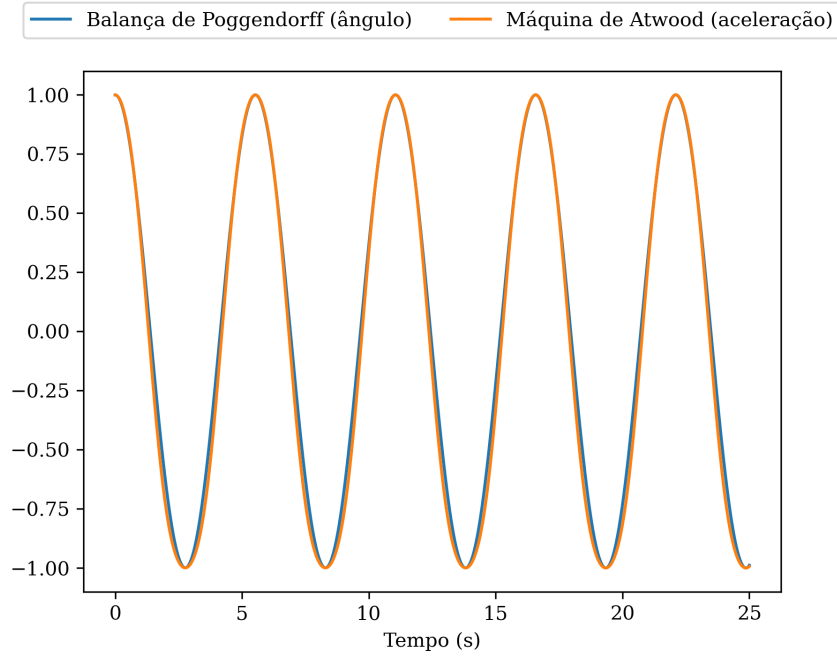
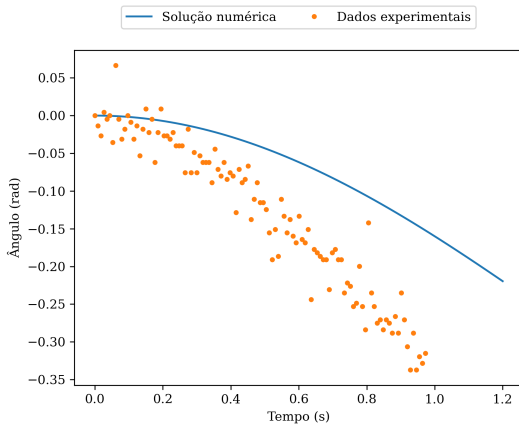
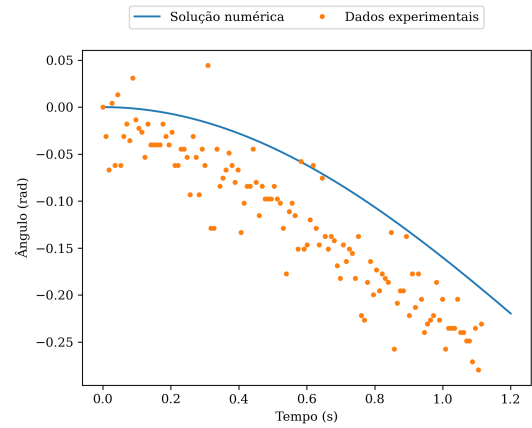


Figura 8: Soluções normalizadas para a equação de movimento da balança e a aceleração da polia. O ângulo da balança $\alpha(t)$ com a horizontal é representado em azul e a aceleração da coordenada generalizada para o ângulo da balança, $\frac{d^2\phi(t)}{dt^2}$, é representado em laranja.



(a) Comparação entre solução numérica e dados experimentais para polia paralela.



(b) Comparação entre solução numérica e dados experimentais para polia perpendicular.

Figura 9: Comparação entre soluções numéricas (em azul), desconsiderando resistência do ar e fricção, e dados experimentais (em laranja) para o ângulo $\alpha(t)$

Qualitativamente os dados experimentais estão muito próximos das soluções teóricas, como visível na figura 9, mas há um desvio sistemático entre eles. A principal fonte de erro é a falta de sincronia entre o início do script de coleta de dados e a queima do fio para iniciar o movimento, que não ocorre de forma automatizada. Outra fonte de erro pode ser a fricção, que não pôde ser eliminada completamente e pode ser proveniente da instalação do potenciômetro.

4 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

O experimento da balança de Poggendorff é muito mais rico do que parece, e continua subexplorado. Além da discussão já citada sobre a aceleração ser a causa da força ou *vice-versa* (COELHO, 2012), ele também mostra como os formalismos Lagrangiano e Newtoniano chegam às mesmas equações de movimento, reforçando a utilidade do formalismo lagrangiano para analisar sistemas complicados.

Crucialmente, esse aparato histórico tem um valor educacional significativo. Com ele, estudantes podem aprimorar o pensamento crítico e confrontar sutilezas, adquirindo um conhecimento mais profundo sobre a natureza e o fazer científicos. Esse experimento exemplifica muito bem como experimentos históricos podem enriquecer o aprendizado de física e a capacidade de resolução de problemas, de ordem tanto teórica quanto experimental, dos estudantes (COELHO, 2012). Assim, é justificável acreditar que ele (o experimento da balança de Poggendorff) deveria ser incorporado ao ensino de física⁴.

Para pesquisa futura, existem três caminhos imediatos. No âmbito educacional, podemos explorar o impacto de sua implementação no aprendizado. No aspecto experimental, podemos focar em automatizar e sincronizar o início da coleta de dados e o início do movimento do sistema. Em substituição a queima do fio, poderíamos montar um mecanismo usando um eletroímã que manteria a máquina de Atwood parada e que poderia ser desligado automaticamente pelo início do script de coleta de dados. Sob o aspecto teórico, um estudo do espaço de fase do sistema também pode vir a ser explorado.

REFERÊNCIAS

CC, Arduino. **Arduino**. [S.l.: s.n.], 2024. Disponível em: <https://www.arduino.cc/>.

CHANG, Hasok. Who cares about the history of science? **Notes and Records of the Royal Society of London**, v. 71, n. 1, p. 91–107, 2016.

COELHO, R. Lopes. Could HPS Improve Problem-Solving? **Springer Science+Business Media B.V.**, 2012.

COELHO, Ricardo Lopes; BORGES, Paulo; KARAM, Ricardo. Atwood and Poggendorff: An insightful analogy. **European Journal of Physics**, v. 37, p. 065003, nov. 2016.

COELHO, Ricardo Lopes Coelho; SILVA, P. A. S; BORGES, Paulo de F. On the Poggendorff experiment. **Physics Education**, v. 50, n. 667, 2015.

LEMOES, Nivaldo A. Sutilezas dos vínculos não-holônomos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 25, n. 1, 2003.

MACH, Ernst. **The Science of Mechanics: a Critical and Historical Account of its Development 2nd edn ed. by T. J. McCormack (Engl. transl.)** [S.l.]: The Open Court Publishing Company, 1902.

POGGENDORFFEXPERIMENT. **Home**. Acesso em 24 Jun. 2025. Disponível em: <https://www.youtube.com/@PoggendorffExperiment>.

PRADO, L. Cintra do. Utilizing Automatic Balances for Poggendorff's Experiment on the Second Law of Motion. **American Journal of Physics**, v. 38, n. 4, p. 541–542, 1970.

Notas

1. $g' = g + \frac{d^2y}{dt^2}$. No nosso caso a aceleração $\frac{d^2y}{dt^2}$ é a componente vertical de um movimento circular acelerado.
2. O torque externo aqui é proveniente da resistência do ar e de fricção, que serão desconsiderados.
3. O que também serve para conferir se o desenvolvimento das equações foi feito de forma correta; afinal, o sistema físico foi modelado da mesma forma e as mesmas leis da natureza são consideradas.
4. Experimentos científicos que foram esquecidos pelo cânone didático, chamados de experimentos complementares, além de fomentar o pensamento crítico e serem relevantes para ensino, podem reabrir discussões científicas e filosóficas que caíram no esquecimento sem uma conclusão (CHANG, 2016).