

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

**Thiago Freisleben Ribeiro Rezende**

**Análise numérica de escoamentos compressíveis sobre  
cavidades superficiais assimétricas**

**São Carlos**

**2024**



**Thiago Freisleben Ribeiro Rezende**

**Análise numérica de escoamentos compressíveis sobre  
cavidades superficiais assimétricas**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Aeronáutica, da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheiro Aeronáutico.

Orientador: Prof. Dr. Marcello Augusto Faraco de Medeiros

Coorientador: Prof. Dr. Ricardo Afonso Angélico

**São Carlos  
2024**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues  
Fontes da EESC/USP

R467a

Rezende, Thiago Freisleben Ribeiro

Análise numérica de escoamentos compressíveis sobre cavidades superficiais assimétricas / Thiago Freisleben Ribeiro Rezende; orientador Marcello Augusto Faraco de Medeiros; coorientador Ricardo Afonso Angélico. -- São Carlos, 2024.

Monografia (Graduação em Engenharia Aeronáutica) -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2024.

1. Camada limite. 2. Cavidades. 3. Escoamento compressível. 4. Simulação numérica direta. 5. Teoria de estabilidade linear. I. Título.

# FOLHA DE APROVAÇÃO

## *Approval sheet*

<b>Candidato / Student:</b> Thiago Freisleben Ribeiro Rezende
<b>Título do TCC / Title :</b> Análise numérica de escoamentos compressíveis sobre cavidades superficiais assimétricas
<b>Data de defesa / Date:</b> 04/10/2024

<b>Comissão Julgadora / Examining committee</b>	<b>Resultado / result</b>
Professor Doutor Marcello Augusto Faraco de Medeiros	Aprovado
Instituição / Affiliation: EESC - SAA	
Professor Doutor Paulo Celso Greco Júnior	Aprovado
Instituição / Affiliation: EESC - SAA	
Pesquisador Victor Barcelos Victorino	Aprovado
Instituição / Affiliation: EESC - SAA	

Presidente da Banca / Chair of the Examining Committee:



---

Professor Doutor Marcello Augusto Faraco de Medeiros  
(assinatura / signature)



*Este trabalho é dedicado ao meu pai Edson e à minha mãe Márcia.*



## **AGRADECIMENTOS**

O desenvolvimento deste trabalho de conclusão de curso contou com o apoio fundamental da minha família, dos meus amigos, de professores e de funcionários da Escola de Engenharia de São Carlos.

Em particular, agradeço ao meu orientador, o Professor Doutor Marcello Augusto Faraco de Medeiros, que me conduziu no estudo e contribuiu enormemente para o embasamento físico e científico dos resultados. Agradeço também aos meus colegas doutorandos e mestrandos no Grupo de Aeroacústica, Transição e Turbulência da Escola de Engenharia de São Carlos, que, em conjunto com o orientador, participaram ativamente de discussões técnicas a respeito do trabalho. Agradeço também ao meu coorientador, Professor Doutor Ricardo Afonso Angélico, pelas contribuições essenciais dos pontos de vista acadêmico e institucional ao longo de todo o meu percurso de graduação e de elaboração deste projeto.

Presto agradecimentos à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo nº 2023/08223-0, pelo financiamento de um projeto de Iniciação Científica cujos resultados foram parcialmente utilizados neste trabalho. Agradeço ao Centro de Ciências Matemáticas Aplicadas à Indústria (CeMEAI), financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo nº 2013/07375-0, pelo acesso ao cluster computacional Euler, dirigido pelo Professor José Alberto Cuminato.

Sou muito grato ao meu pai Edson Ribeiro de Rezende, à minha mãe Marcia Freisleben de Rezende e aos meus irmãos Matheus e Marcella pelo incentivo e pelo suporte imprescindíveis prestados ao longo de toda a minha trajetória educacional. Agradeço também o suporte essencial da minha companheira e amiga, Cecilia Rocha Thomé de Figueiredo, no dia a dia e ao longo do desenvolvimento deste trabalho.



*"Se vale a pena passar por tanto para aprender tão pouco, como disse o garoto da caridade quando chegou ao fim do alfabeto, é uma questão de gosto."*

*Charles Dickens*



## **RESUMO**

**Rezende, T.F.R. Análise numérica de escoamentos compressíveis sobre cavidades superficiais assimétricas.** 2024. 56p. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

A transição da camada limite em escoamentos de fluidos tem implicações significativas no arrasto aerodinâmico imposto a veículos de transporte aéreo, devido ao alto coeficiente de atrito da camada limite turbulenta. A presença de pequenas cavidades retangulares na superfície do veículo pode acelerar a transição. Análises de estabilidade do escoamento sobre cavidades demonstram que a interação entre os modos Rossiter bidimensionais e os modos centrífugos tridimensionais desempenha um papel importante no processo de transição da camada limite. Neste trabalho, é avaliada a estabilidade de escoamentos compressíveis sobre cavidades retangulares assimétricas. A assimetria é definida como a diferença entre a altura do bordo de ataque e a altura do bordo de fuga da cavidade. São aplicadas simulações numéricas diretas das equações compressíveis de Navier-Stokes e a teoria de estabilidade linear, ambas utilizando algoritmos de alta fidelidade. As análises sugerem que elevações na altura do bordo de fuga aumentaram a estabilidade de ambos os modos bidimensionais e tridimensionais, enquanto bordos de fuga baixos contribuíram para um aumento significativo na taxa de amplificação dos modos dominantes do escoamento, além de terem contribuído para um aumento na emissão acústica e na circulação dentro da cavidade. Por fim, os resultados sugerem que reduções na altura do bordo de fuga de uma cavidade aceleram a transição da camada limite, enquanto elevações da altura do bordo de fuga podem atrasá-la. Caso confirmado experimentalmente, o resultado pode ser explorado para estabelecer tolerâncias de fabricação no alinhamento entre os bordos de cavidades reais para atrasar a transição da camada limite e idealmente reduzir o consumo de combustível e a emissão de poluentes de veículos de transporte aéreo.

**Palavras-chave:** Camada limite. Cavidades. Escoamento compressível. Simulação numérica direta. Teoria de estabilidade linear.



## **ABSTRACT**

Rezende, T.F.R. **Numerical analysis of a compressible fluid flow over an asymmetric superficial gap.** 2024. 56p. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

The transition of the boundary layer in fluid flows has significant implications for the aerodynamic drag imposed on air transportation vehicles due to the high coefficient of friction of the turbulent boundary layer. The presence of small rectangular cavities on the surface of the vehicle can induce the transition. Flow stability analyses over cavities demonstrate that the interaction between two-dimensional Rossiter modes and three-dimensional centrifugal modes plays a crucial role in the boundary layer transition process. In this work, the stability of compressible flows over asymmetric rectangular cavities is investigated. The asymmetry is defined as the difference in heights between the leading edge and the trailing edge of the cavity. Direct numerical simulations of the compressible Navier-Stokes equations and linear stability theory are applied using high-fidelity algorithms. The analyses suggest that increases in the height of the trailing edge enhance the stability of both two-dimensional and three-dimensional modes, while lower trailing edges have the opposite effect, significantly increasing the amplification rate of dominant flow modes and contributing to increased acoustic emission and circulation within the cavity. Ultimately, the results suggest that reductions in the height of the trailing edge of a cavity may accelerate boundary layer transition, while increases in trailing edge height may delay it. If experimentally confirmed, this outcome could be exploited to establish manufacturing tolerances on the alignment between real cavity edges to delay boundary layer transition and ideally reduce fuel consumption and pollutant emissions from air transportation vehicles.

**Keywords:** Boundary layer. Gaps. Compressible flow. Direct numerical simulation. Linear stability theory.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Estágios da transição natural da camada limite . . . . .	26
Figura 2 – Fotografia de ondas acústicas emitidas por uma cavidade retangular. Visualização produzida utilizando técnica Schlieren . . . . .	27
Figura 3 – Variáveis geométricas. A espessura de deslocamento da camada limite no bordo de ataque da cavidade é definida com a notação $\delta^*$ (não mostrada na figura) . . . . .	31
Figura 4 – Domínio de simulação e condições de contorno . . . . .	32
Figura 5 – Distribuição das distâncias entre os pontos da malha ( $l_x, l_y$ ) estruturada para diferenças finitas . . . . .	33
Figura 6 – Configuração da geometria de três casos diferentes. A variável $s$ é positiva se o bordo de fuga for mais alto do que o bordo de ataque e negativa se for mais baixo . . . . .	34
Figura 7 – Ponto, curvas e superfície para registro de fenômenos físicos. O ponto $P$ captura o sinal de velocidade temporal, as curvas $SL$ e $Ac$ avaliam as emissões acústicas e a região $S$ é usada para calcular a circulação no escoamento médio . . . . .	35
Figura 8 – À esquerda, autovalores do escoamento e à direita, taxa amplificação dos modos Rossiter em função de $s$ . O aumento de $s$ reduziu as taxas de amplificações. Os modos bidimensionais são estáveis para $s > 0.3$ . .	36
Figura 9 – Autofunções dos modos instáveis em cinco configurações diferentes. Reduções na altura do bordo de fuga fizeram com que os picos das autofunções se deslocassem para à jusante da cavidade . . . . .	37
Figura 10 – À esquerda, campo de velocidade do escoamento médio para três valores de $s$ . No centro, flutuações da componente horizontal de velocidade em um ponto a uma distância de $d = \delta^*$ acima do bordo de fuga da lacuna. À direita, o espectro do sinal . . . . .	38
Figura 11 – Campo de velocidade do escoamento médio próximo ao bordo de fuga em nove configurações diferentes. A redução da altura do bordo de fuga favoreceu o impacto do fluido na parede . . . . .	39
Figura 12 – Perfis de velocidade do escoamento médio sobre o bordo de fuga. A redução da altura do bordo de fuga contribuiu para a formação de um perfil de velocidade inflexional a jusante da cavidade . . . . .	40
Figura 13 – Distribuição do coeficiente de pressão sobre a cavidade em cinco confi- gurações da variável $s$ . . . . .	41

Figura 14 – Propriedades físicas do escoamento em função da diferença de altura no bordo de fuga. Os resultados são divididos pelo valor de referência obtido para a cavidade simétrica ( $s = 0$ ) . . . . .	42
Figura 15 – Amplificação do modo centrífugo dominante em função do inverso do comprimento de onda transversal para diferentes valores de $s$ . . . . .	44
Figura 16 – À esquerda, distribuição dos autovalores no plano complexo. À direita, amplificação dos modos principais em função de $s$ . Cada linha está associada a um número de onda transversal da perturbação. De forma geral, a taxa de amplificação dos modos é reduzida com o aumento de $s$ . . . . .	45
Figura 17 – Seção das autofunções dos modos dominantes da cavidade em diferentes configurações da variável $s$ . À esquerda, autofunção do modo Rossiter dominante, no centro o modo centrífugo estacionário dominante e, à direita, o modo centrífugo não-estacionário dominante . . . . .	46
Figura 18 – Autofunções dos modos dominantes da cavidade em diferentes configurações da variável $s$ . À esquerda, autofunção do modo centrífugo estacionário dominante e, à direita, modo centrífugo não-estacionário dominante . . . . .	47
Figura 19 – Distribuição das distâncias entre os pontos $(l_x, l_y)$ da malha tridimensional estruturada para diferenças finitas . . . . .	48
Figura 20 – Estruturas coerentes identificadas com o método <i>Q-criterion</i> . A assimetria negativa intensificou o desenvolvimento de estruturas de vorticidade à jusante da cavidade . . . . .	50
Figura 21 – Coeficiente de fricção médio ( $C_f$ ) em função da coordenada longitudinal $x$ . A redução da altura do bordo de fuga acelerou a transição. Não foi observada transição da camada limite sobre a cavidade com bordo de fuga elevado . . . . .	51

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 – Parâmetros de simulação . . . . .	33
--	----



## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

DNS	Simulação Numérica Direta, do inglês <i>Direct Numerical Simulation</i>
LST	Teoria de Estabilidade Linear, do inglês <i>Linear Stability Theory</i>
TS	Tollmien-Schlichting
GATT	Grupo de Aeroacústica, Transição e Turbulência
MPI	Interface de Passagem de Mensagens, do inglês <i>Message Passing Interface</i>
SFD	Amortecimento Seletivo de Frequência, do inglês <i>Selective Frequency Damping</i>



## LISTA DE SÍMBOLOS

$U_\infty$	Velocidade do escoamento livre
$Ma_\infty$	Número de Mach do escoamento livre
$T_\infty$	Temperatura do escoamento livre
$p_\infty$	Pressão do escoamento livre
$\rho_\infty$	Densidade do escoamento livre
$\delta^*$	Espessura de deslocamento adimensional da camada limite
$Re_{\delta^*}$	Número de Reynolds adimensionalizado pela espessura de deslocamento da camada limite
$D$	Profundidade adimensional da cavidade
$L$	Largura adimensional da cavidade
$s$	Diferença de altura adimensional entre os bordos de ataque e de fuga da cavidade
$\omega$	Vorticidade
$\mathbf{V}$	Vetor de velocidade
$U$	Componente horizontal da velocidade
$p$	Pressão
$C_p$	Coeficiente de pressão
$C_f$	Coeficiente de fricção
$\Gamma$	Circulação avaliada em uma região no interior cavidade
$\sigma$	Taxa de amplificação complexa de um modo
$\beta$	Número de onda transversal
$\lambda$	Comprimento de onda transversal
$x$	Coordenada longitudinal com origem na linha de formação da camada limite

$y$	Coordenada vertical centralizada na altura do bordo de ataque da cavidade
$z$	Coordenada transversal
$x_{min}$	Limite longitudinal à montante do domínio de simulação
$x_{max}$	Limite longitudinal à jusante do domínio de simulação
$x_0$	Posição longitudinal do bordo de ataque da cavidade no domínio de simulação
$y_{min}$	Limite inferior do domínio de simulação na direção vertical
$y_{max}$	Limite superior do domínio de simulação na direção vertical
$l_x$	Distância longitudinal entre pontos da malha
$l_y$	Distância vertical entre pontos da malha
$l_z$	Distância transversal entre pontos da malha
$N_x$	Número de pontos na direção longitudinal da malha
$N_y$	Número de pontos na direção vertical da malha
$N_z$	Número de pontos na direção transversal da malha
$S$	Região de análise de circulação
$P$	Ponto da malha em uma distância unitária acima do bordo de fuga
$E_{SL}$	Integral de uma função ao longo da camada de mistura
$E_{Ac}$	Integral do quadrado das flutuações de pressão em uma curva
$\omega_{peak}$	Frequência do maior pico do sinal temporal de velocidade avaliado no ponto P
$\alpha_{peak}$	Amplitude do maior pico no espectro do sinal temporal de velocidade avaliado no ponto P
$\in$	Pertence
$\Delta$	Variações de uma variável
$'$	Flutuações de uma variável em relação ao valor médio

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>25</b>
<b>1.1</b>	<b>Revisão bibliográfica</b>	<b>25</b>
1.1.1	Escoamentos laminares e turbulentos	25
1.1.2	Efeitos de cavidades na transição da camada limite	26
<b>1.2</b>	<b>Justificativa do estudo</b>	<b>28</b>
<b>1.3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>29</b>
1.3.1	Simulações numéricas diretas	30
1.3.2	Análise de estabilidade linear	30
<b>2</b>	<b>DESENVOLVIMENTO</b>	<b>31</b>
<b>2.1</b>	<b>Análise bidimensional</b>	<b>31</b>
2.1.1	Construção do domínio de simulação bidimensional	31
2.1.2	Análise de estabilidade linear bidimensional	35
2.1.3	Simulações numéricas diretas em geometria bidimensional	37
<b>2.2</b>	<b>Análise tridimensional</b>	<b>43</b>
2.2.1	Análise de estabilidade linear tridimensional	43
2.2.2	Construção do domínio de simulação tridimensional	45
2.2.3	Simulações numéricas diretas em geometria tridimensional	48
<b>3</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>53</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>55</b>



# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Revisão bibliográfica

### 1.1.1 Escoamentos laminares e turbulentos

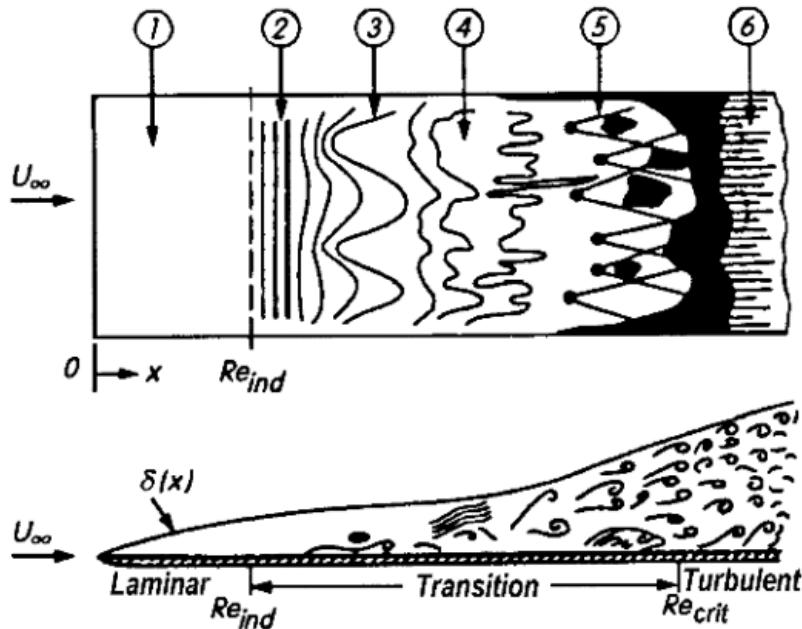
Observações empíricas de escoamentos reais demonstram que fluidos com grande viscosidade ou em baixa velocidade tendem a ter um comportamento regular e ordenado. Nessas condições, o escoamento é definido como laminar. No entanto, se o fluido for de baixa viscosidade ou se estiver em alta velocidade, o comportamento do escoamento se torna irregular e caótico, sendo definido como turbulento (DAVIDSON, 2015). Na prática, além da viscosidade e da velocidade, outros parâmetros podem contribuir para a transição de um escoamento, como gradientes de pressão, de densidade, de concentração de solutos ou de temperatura. O processo de transição é um fenômeno físico complexo que tem sido alvo de pesquisas há séculos.

Avanços significativos no estudo da estabilidade de escoamentos foram realizados por Taylor e Lord Rayleigh no final do século XIX, que introduziram a teoria que viria a ser conhecida como instabilidade de Rayleigh-Taylor, descrevendo a formação de turbulência na interfaces entre fluidos (RAYLEIGH, 1879). Pouco tempo depois, Osborne Reynolds investigou o fenômeno de transição por meio de experimentos em tubos e canais. Os resultados permitiram a distinção clara entre os regimes laminar e turbulento (REYNOLDS, 1883). Para caracterizar o regime do escoamento, Reynolds introduziu um parâmetro adimensional que relaciona a densidade, a viscosidade, a velocidade do escoamento e uma unidade de comprimento conveniente. O parâmetro veio a ser denominado número de Reynolds e é vastamente aplicado no estudo de escoamentos fluidos. Na mesma época, Ludwig Prandtl desenvolveu a base matemática para os princípios fundamentais da aerodinâmica subsônica e transônica. Além disso, Prandtl participou do desenvolvimento de equações que descrevem o comportamento de um fluido em regiões próximas a uma parede, onde os efeitos de viscosidade são consideráveis. A região veio a ser definida como camada limite e foi alvo do estudo de Prandtl por muitos anos.

Posteriormente, Hermann Schlichting contribuiu com pesquisas fundamentais sobre a transição da camada limite. Suas obras exploraram em detalhes os mecanismos de geração de turbulência em camadas limite e a influência de parâmetros como a rugosidade da superfície, os gradientes de pressão e as derivadas dos perfis de velocidade no processo de transição (SCHLICHTING; GERSTEN, 2016). Em particular, Schlichting investigou a influência de perturbações na formação de ondas de instabilidade, que posteriormente foram denominadas ondas de Tollmien-Schlichting (ou ondas TS). Essas ondas surgem durante a fase inicial da transição natural da camada limite. A Fig. 1 ilustra esquematicamente os

estágios encontrados na transição natural de uma camada limite tridimensional. Os pontos enumerados na Fig. 1 descrevem os fenômenos na seguinte ordem: escoamento laminar estável, ondas de Tollmien-Schlichting instáveis, formação de estruturas tridimensionais, decaimento das estruturas tridimensionais, formação de pontos turbulentos, escoamento completamente turbulento (SCHLICHTING; GERSTEN, 2016).

Figura 1 – Estágios da transição natural da camada limite



Fonte: Schlichting e Gersten (2016)

Em camadas limite instáveis, as ondas de Tollmien-Schlichting são amplificadas no espaço enquanto se propagam no sentido do escoamento. Quando as oscilações são pequenas, é justificada a utilização da teoria de estabilidade linear (*Linear Stability Theory*, LST) para a avaliação da estabilidade hidrodinâmica do escoamento. A teoria de estabilidade hidrodinâmica é discutida em detalhes em Criminale, Jackson e Joslin (2003) e algumas aplicações são exploradas em Theofilis (2011). Com essa ferramenta, é possível analisar a estabilidade dos modos principais do escoamento em resposta a diferentes frequências de excitação. O método permite avaliar a faixa de frequências de onda de Tollmien-Schlichting que são amplificadas por cada modo. Neste trabalho, a teoria de estabilidade linear foi aplicada para avaliar a estabilidade dos modos dominantes em escoamentos compressíveis sobre cavidades superficiais assimétricas.

### 1.1.2 Efeitos de cavidades na transição da camada limite

Diferentes fatores podem afetar a estabilidade de uma camada limite e acelerar o processo de transição, conforme apresentado em Schlichting e Gersten (2016). Em particular, no texto é demonstrado que a instabilidade de camadas limite pode ser causada pela existências de imperfeições superficiais na parede, um tópico explorado neste trabalho. Na

prática, qualquer escoamento sobre uma superfície real está sujeito a imperfeições superficiais. Estudos recentes realizados por Crouch, Kosorygin e Sutanto (2020) demonstram que pequenas cavidades retangulares, com dimensões da ordem de grandeza da espessura da camada limite, são suficientes para afetar a transição da camada limite.

Em um artigo científico publicado em 1964, J. E. Rossiter apresentou resultados de uma campanha de ensaios experimentais de escoamentos subsônicos e transônicos sobre cavidades retangulares (ROSSITER, 1964). Em uma equação semi-empírica, o autor propõe que o mecanismo de instabilidade em uma cavidade consiste em uma retroalimentação acústica. De forma geral, a cavidade produz vórtices na camada de mistura que se deslocam no sentido do escoamento até impactar o bordo de fuga da cavidade, o impacto produz uma onda acústica que excita novamente a camada de mistura, produzindo mais vórtices. As ondas acústicas produzidas por uma cavidade podem ser observadas na Figura 2, uma imagem produzida com técnica schlieren em uma campanha experimental realizada por Krishnamurty (KRISHNAMURTY, 1955).

Figura 2 – Fotografia de ondas acústicas emitidas por uma cavidade retangular. Visualização produzida utilizando técnica Schlieren



Fonte: Krishnamurty (1955)

Bres e Colonius (2008) utilizam simulações numéricas de alta fidelidade para explorar os efeitos de interação entre os modos bidimensionais e os modos tridimensionais da cavidade sobre a estabilidade do escoamento. De forma geral, a emissão acústica da cavidade está relacionada aos modos principais da cavidade e, em particular, à existência de modos instáveis. Avanços significativos no estudo das propriedades acústicas de cavidades foram alcançados através da utilização de ferramentas de análise de estabilidade bi-global (THEOFILIS, 2011; BRES; COLONIUS, 2008; VICENTE, Marcos Fernandes, 2010). A ferramenta permite posicionar os autovalores dos modos principais da cavidade no plano complexo, evidenciando a existência de modos instáveis e as suas frequências. Os modos instáveis crescem até que efeitos não lineares passam a atuar e levam a um ponto de saturação.

Em estudos experimentais recentes, Crouch, Kosorygin e Sutanto (2020) investigam a influência da profundidade e da largura da cavidade na estabilidade do escoamento. A análise mostra que existem combinações de profundidade e largura capazes de aumentar a instabilidade da camada limite sobre a cavidade. Em particular, Crouch mostra que algumas configurações de geometria são capazes de causar o mecanismo de *bypass*, ou seja, são capazes de produzir uma transição abrupta da camada limite, dispensando o processo natural de amplificação das ondas de Tollmien-Schlichting.

Em uma investigação numérica, Mathias (2021) utilizou uma ferramenta de cálculo de estabilidade linear para avaliar a estabilidade dos modos dominantes em cavidades semelhantes às exploradas em Crouch, Kosorygin e Sutanto (2020). Os resultados mostram que grande parte das geometrias que produziram *bypass* exibiam pelos menos dois modos instáveis: o modo bidimensional de Rossiter e o modo tridimensional centrífugo. As descobertas destacaram que a coexistência de ambos os modos bidimensionais e tridimensionais instáveis tem papel importante no processo de transição abrupta da camada limite sobre cavidades.

## 1.2 Justificativa do estudo

Vários processos em engenharia envolvem a manipulação de escoamentos de fluidos e são afetados pela transição para a turbulência. Conforme apresentado em Davidson (2015), os engenheiros civis precisam prever rajadas de vento turbulentas em pontes, enquanto os projetistas de motores precisam modelar a mistura turbulenta de combustível e comburente no interior da câmara de combustão. Em aviação, a previsão da transição da camada limite é particularmente importante pois o coeficiente de arrasto de fricção em escoamentos turbulentos é maior do que em escoamentos laminares. As estimativas em Cousteix (1992) mostram que, se o escoamento pudesse ser mantido em regime laminar ao longo de toda a extensão da asa e estabilizador vertical de uma aeronave comercial, seria possível atingir uma redução do arrasto total na ordem de 15%. Portanto, o controle da transição da camada limite tem grande potencial para reduzir os custos de operação das companhias aéreas e as emissões de poluentes.

Na prática, as estruturas reais possuem diferentes tipos de imperfeições superficiais. Em particular, cavidades superficiais podem ser identificadas no compartimento de armazenamento dos trens de pouso e, em menor escala, em furos de tratamento acústico na entrada dos motores ou na interface entre chapas sobre as asas de aeronaves comerciais. Levando em consideração as tolerâncias de fabricação, é esperado que hajam diferenças de altura entre o bordo de ataque e o bordo de fuga dessas cavidades. Portanto, qualquer cavidade real será potencialmente assimétrica dentro das tolerâncias de fabricação.

O estudo desenvolvido neste trabalho se propõe a analisar os efeitos da assimetria geométrica sobre a estabilidade dos modos bidimensionais e tridimensionais dominantes em

um escoamento sobre uma cavidade. Com os resultados, o trabalho visa propor alternativas em projetos de engenharia para o controle da transição da camada limite sobre superfícies aerodinâmicas reais. Por fim, espera-se que os resultados possam ser utilizados para determinar tolerâncias máximas de fabricação em estruturas aerodinâmicas que possuam cavidades superficiais.

### **1.3 Metodologia**

Neste trabalho são realizadas simulações numéricas e análises de estabilidade linear de escoamentos compressíveis sobre cavidades superficiais retangulares variando-se a altura do bordo de fuga da cavidade.

Em particular, a análise de estabilidade linear foi usada para capturar o comportamento dos modos principais do escoamento sobre a cavidade, fornecendo informações importantes à respeito dos mecanismos de transição da camada limite. Por outro lado, as simulações numéricas diretas foram essenciais para confirmar os efeitos previstos pela análise de estabilidade linear e para avaliar outras propriedades do escoamento, como a circulação, a emissão acústica, os perfis de velocidade média e, finalmente, a existência de estruturas turbulentas decorrentes da transição da camada limite.

As propriedades do escoamento são analisadas separadamente em regime bidimensional e tridimensional. As simulações numéricas bidimensionais apresentam custo computacional consideravelmente menor que as tridimensionais, possibilitando a investigação de um espaço paramétrico amplo e a avaliação de grande parte das propriedades do escoamento de interesse neste estudo. As simulações tridimensionais foram utilizadas em uma etapa final, à partir da seleção de casos particulares do espaço paramétrico investigado na análise bidimensional, com o objetivo principal de capturar os fenômenos não-lineares de transição da camada limite.

Os códigos computacionais utilizados foram desenvolvidos e consolidados por pesquisadores do Grupo de Aeroacústica, Transição e Turbulência (GATT) da Escola de Engenharia de São Carlos ao longo dos anos (BERGAMO, 2014; MARTÍNEZ, 2016; MATHIAS; MEDEIROS, 2018). Detalhes sobre as ferramentas computacionais são descritos em Mathias (2021).

Para executar os cálculos, foram utilizados computadores locais de alta performance e o cluster computacional Euler, disponibilizado pelo Centro de Ciências Matemáticas Aplicadas à Indústria (CeMEAI), financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo nº 2013/07375-0, dirigido pelo Professor José Alberto Cuminato.

### 1.3.1 Simulações numéricas diretas

O algoritmo adotado para a simulações numérica direta (*Direct Numerical Simulation*, DNS) resolve as equações compressíveis não lineares de Navier-Stokes sem utilização de modelos para a turbulência. O pré-processamento do algoritmo é escrito em Matlab, e as rotinas de simulação são escritas em FORTRAN 90. O código utiliza derivadas espaciais quase-espectrais e de alta ordem baseando-se em estudos em Lele (1992). A integração temporal é realizada utilizando o método Runge-Kutta de até quarta ordem. São utilizados filtros passa-baixa espaciais para evitar problemas de *aliasing* (GAITONDE; VISBAL, 1998). Também são utilizados filtros passa-baixa temporais para acelerar a convergência para um regime permanente, quando necessário (ÅKERVIK *et al.*, 2006). A malha é cartesiana e permite refinamento nas regiões de interesse. Além disso, ao redor do domínio físico de simulação são adicionadas zonas de amortecimento para evitar reflexões de ondas indesejadas. A execução do código é paralelizada, utilizando técnicas de divisão de domínio do tipo *pencil* e *slab* (LI; LAIZET, 2010) e adotando metodologia de Interface de Passagem de Mensagem (*Message Passing Interface*, MPI). A execução é paralelizada por programação multiprocesso com o uso de OpenMP.

### 1.3.2 Análise de estabilidade linear

O código utilizado para o cálculo de estabilidade linear é baseado nos trabalhos de Arnoldi (1951), Eriksson e Rizzi (1985), Chiba (1998) e Vicente *et al.* (2014). Para fornecer os modos dominantes do escoamento, o código calcula os autovalores e autovetores principais de uma matriz Jacobiana, linearizando as equações em torno de um escoamento base. Uma das características marcantes do código utilizado neste trabalho é que o cálculo da matriz Jacobiana não é feito de forma explícita, reduzindo o custo computacional consideravelmente, e em especial, os requisitos de memória. Detalhes do método são descritos em Mathias (2021).

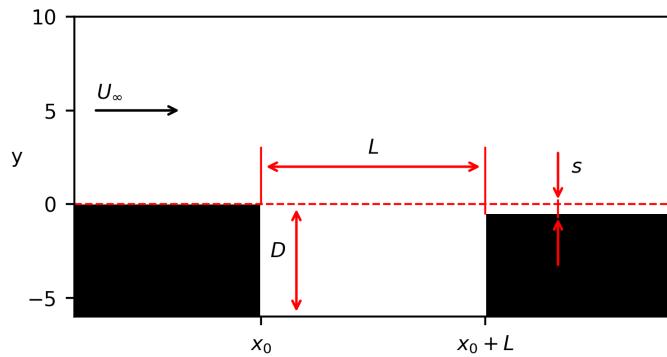
## 2 DESENVOLVIMENTO

### 2.1 Análise bidimensional

#### 2.1.1 Construção do domínio de simulação bidimensional

Os parâmetros geométricos do problema e a direção do escoamento livre são apresentados na Figura 3. A profundidade da cavidade é definida como  $D$  e o comprimento como  $L$ . A diferença de altura entre o bordo de ataque e o bordo de fuga é representada pela variável  $s$ . Na configuração apresentada na Fig. 3, uma camada limite é formada a montante da cavidade e sua espessura de deslocamento no bordo de ataque é definida como  $\delta^*$  (não mostrada).

Figura 3 – Variáveis geométricas. A espessura de deslocamento da camada limite no bordo de ataque da cavidade é definida com a notação  $\delta^*$  (não mostrada na figura)



Fonte: Elaborada pelo autor

Para construir o domínio físico, a posição do bordo de ataque da cavidade é calculada de modo que a espessura de deslocamento da camada limite laminar seja unitária nesse ponto ( $\delta^* = 1$  em  $x = x_0$ ). A estratégia permite dimensionar as medições de comprimento de todo o domínio, ou seja, todos os comprimentos geométricos da simulação são adimensionais e medidos como um múltiplo da espessura de deslocamento da camada limite no bordo de ataque da cavidade ( $\delta^*$ ). O valor numérico da posição  $x_0$  no domínio computacional é determinado pelo número de Reynolds da simulação (Tab. 1). O cálculo é efetuado considerando a espessura teórica de uma camada limite laminar à montante da cavidade. Com essa abordagem, o valor obtido para a posição do bordo de ataque ( $x_0$ ) neste estudo é  $x_0 \approx 248.1\delta^* = 248.1$ . O limite inferior do domínio no eixo  $y$  é a profundidade da cavidade ( $y_{min} = -D$ ) e o limite superior é aproximadamente duas vezes a espessura máxima de deslocamento da camada limite turbulenta esperada no domínio ( $y_{max} \approx 28.9$ ). O comprimento do domínio a jusante da cavidade foi arbitrário, com tamanho suficiente para capturar os fenômenos de interesse para este estudo ( $x_{max} = 500$ ). Por fim, uma zona de amortecimento é adicionada aos limites do domínio físico, uma região onde um

método de Amortecimento Seletivo de Frequência (*Selective Frequency Damping*, SFD) é aplicado para evitar a reflexão de ondas provenientes do domínio físico, conforme descrito em Mathias (2021). Uma condição de deslizamento livre foi aplicada na parede na região à montante do domínio físico para fixar a posição da formação da camada limite. O domínio completo da simulação e algumas das condições de contorno aplicadas são apresentados na Fig. 4.

Figura 4 – Domínio de simulação e condições de contorno



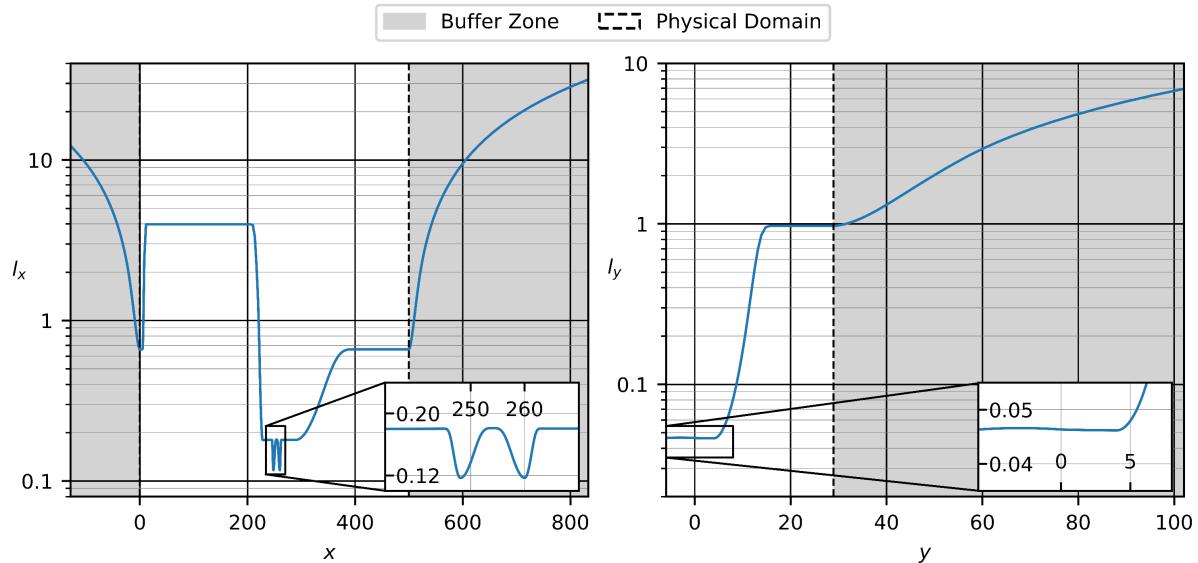
Fonte: Elaborada pelo autor

O domínio da simulação é preenchido com uma malha estruturada retangular, e a estratégia para calcular as distâncias entre os pontos para o método de diferenças finitas (distância horizontal  $l_x$  e distância vertical  $l_y$ ) foi baseada em estudos anteriores realizados com configurações semelhantes de cavidades superficiais bidimensionais (MATHIAS, 2021). A distribuição das distâncias entre os pontos da malha é mostrada na Fig. 5. Em particular, o bordo de ataque (ponto de descolamento da camada limite) e o bordo de fuga (impacto e recolamento da camada limite) foram as regiões de maior refinamento da malha, seguidas pela região imediatamente à jusante da cavidade para capturar o desenvolvimento do escoamento. Um refinamento de malha horizontal foi aplicado na região no início do domínio físico para garantir uma boa representação da formação da camada limite. A malha contém  $N_x = 1027$  pontos no eixo horizontal e  $N_y = 364$  pontos no eixo vertical, apresentando um total de cerca de 373 mil pontos. As menores distâncias são  $l_x = 0.12$  e  $l_y = 0.048$  e estão dentro da cavidade.

A malha foi validada por meio de uma análise de convergência. A configuração de cavidade simétrica ( $s = 0$ ) foi simulada usando a malha descrita acima e uma malha duas vezes mais refinada. Os resultados foram correspondentes e a malha foi considerada válida para todas as outras pequenas variações de geometria analisadas neste estudo.

A campanha de simulação é realizada fixando os parâmetros da Tab. 1 e variando apenas a altura do bordo de fuga com intervalos de  $\Delta s = 0.1$  no intervalo  $s \in [-1, 1]$ . O número de Reynolds é calculado considerando a espessura de deslocamento da camada limite laminar no bordo de ataque da cavidade como um comprimento de referência. A temperatura é medida em Kelvin. Em particular, os parâmetros de geometria  $D$  e  $L$  e a variável  $s$  são adimensionais e medidos como múltiplos da espessura de deslocamento da

Figura 5 – Distribuição das distâncias entre os pontos da malha ( $l_x, l_y$ ) estruturada para diferenças finitas



Fonte: Elaborada pelo autor

camada limite no bordo de ataque da cavidade, que é unitária ( $\delta^* = 1$ ), conforme descrito acima.

Tabela 1 – Parâmetros de simulação

Parâmetro	Valor
$Ma_\infty$	0.5
$Re_{\delta^*}$	734
$T_\infty$	300
D	6
L	12

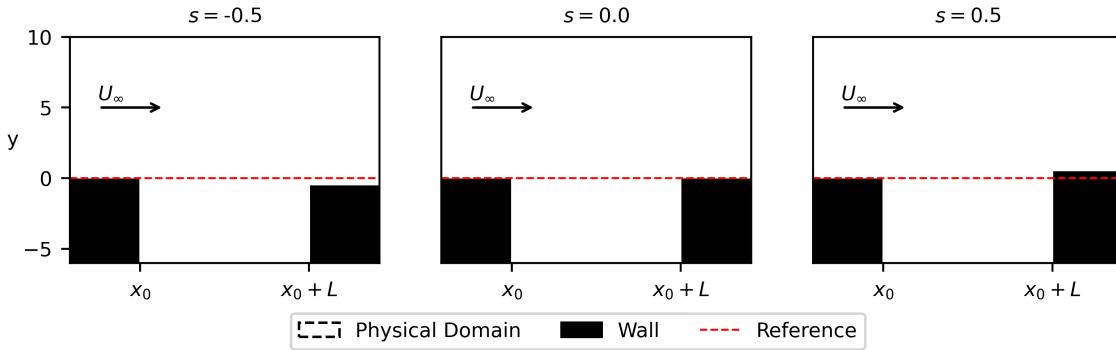
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: A profundidade e a largura da cavidade são parâmetros geométricos adimensionais normalizados pela espessura de deslocamento da camada limite no bordo de ataque da cavidade, cujo valor é unitário no domínio de simulação ( $\delta^* = 1$ ).

Para ilustrar a altura variável do bordo de fuga, a Fig. 6 mostra a geometria de três casos distintos. O valor de  $s$  é definido como positivo se o bordo de fuga estiver acima do bordo de ataque e negativo se estiver abaixo. Algoritmos descritos em Sec. 1.3 foram usado para resolver as equações compressíveis de Navier-Stokes pelo método de Simulação Numérica Direta e para calcular a estabilidade dos escoamentos com a Teoria de Estabilidade Linear (LST). As ferramentas usadas nos cálculos e as estratégias de otimização são descritas em detalhes em Mathias (2021).

Por fim, foram posicionados na malha um ponto de captura, duas linhas de captura

Figura 6 – Configuração da geometria de três casos diferentes. A variável  $s$  é positiva se o bordo de fuga for mais alto do que o bordo de ataque e negativa se for mais baixo



Fonte: Elaborada pelo autor

e uma superfície de captura, conforme mostrado na Fig. 7. O ponto  $P$  é posicionado a uma distância  $d = \delta^* = 1$  acima do bordo de fuga da cavidade e registra o sinal de velocidade temporal nesse ponto. O sinal é então processado e seu espectro fornece informações sobre as frequências e amplitudes dominantes das flutuações de velocidade dentro do escoamento. Além disso, a circulação dentro da cavidade é calculada na região  $S$  de acordo com a integral de superfície na Eq. 2.1. O procedimento permite quantificar a circulação do fluido nessa região e fornece informações sobre como a circulação é afetada pelas alterações na geometria. A posição da região  $S$  e seu comprimento horizontal foram selecionados de modo a capturar a circulação principal na segunda metade da cavidade. O limite superior da região  $S$  está alinhado com o bordo de fuga da cavidade para assimetrias negativas ( $s < 0$ ) e alinhado com o bordo de ataque para assimetrias positivas ( $s > 0$ ) para evitar a inclusão da vorticidade da camada de mistura na integral da Eq. 2.1.

$$\Gamma = \int \int_S \omega ds, \quad (2.1)$$

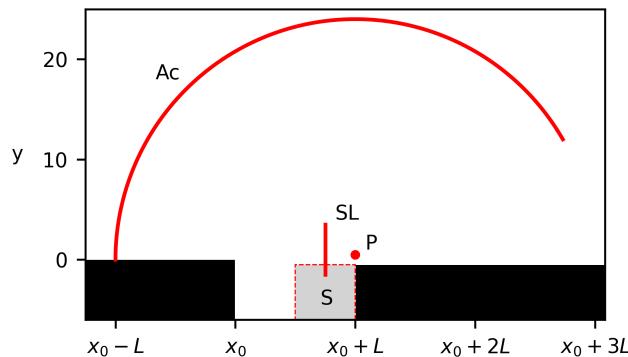
Por fim, as curvas  $SL$  e  $Ac$  são usadas para avaliar as propriedades acústicas da cavidade. Em particular, a curva  $SL$  é usada para quantificar as fontes sonoras na camada de cisalhamento do escoamento por meio do cálculo da integral na Eq. 2.2. A curva  $SL$  está posicionada em três quartos do comprimento da cavidade e tem tamanho suficiente para capturar a camada de cisalhamento do escoamento. Por outro lado, a energia das ondas de pressão emitidas pela cavidade é quantificada pela integral apresentada na Eq. 2.3. A curva  $Ac$  foi definida como um arco de círculo com centro fixo no bordo de fuga da cavidade com configuração simétrica ( $s = 0$ ). O raio do arco corresponde a duas vezes o comprimento da cavidade ( $R = 2L$ ). A geometria do arco foi selecionada para capturar flutuações de pressão estáveis e evitar a interação com a camada limite a jusante da cavidade. A análise combinada das fontes sonoras da camada de cisalhamento e das flutuações de pressão

permite quantificar o mecanismo de retroalimentação acústica da cavidade. Essa análise de emissão sonora é inspirada em um modelo descrito em Howe (2004).

$$E_{SL} = \int_{SL} |\nabla \cdot (\omega' \times \mathbf{V}')| ds, \quad (2.2)$$

$$E_{Ac} = \int_{Ac} |p'|^2 ds, \quad (2.3)$$

Figura 7 – Ponto, curvas e superfície para registro de fenômenos físicos. O ponto  $P$  captura o sinal de velocidade temporal, as curvas  $SL$  e  $Ac$  avaliam as emissões acústicas e a região  $S$  é usada para calcular a circulação no escoamento médio



Fonte: Elaborada pelo autor

### 2.1.2 Análise de estabilidade linear bidimensional

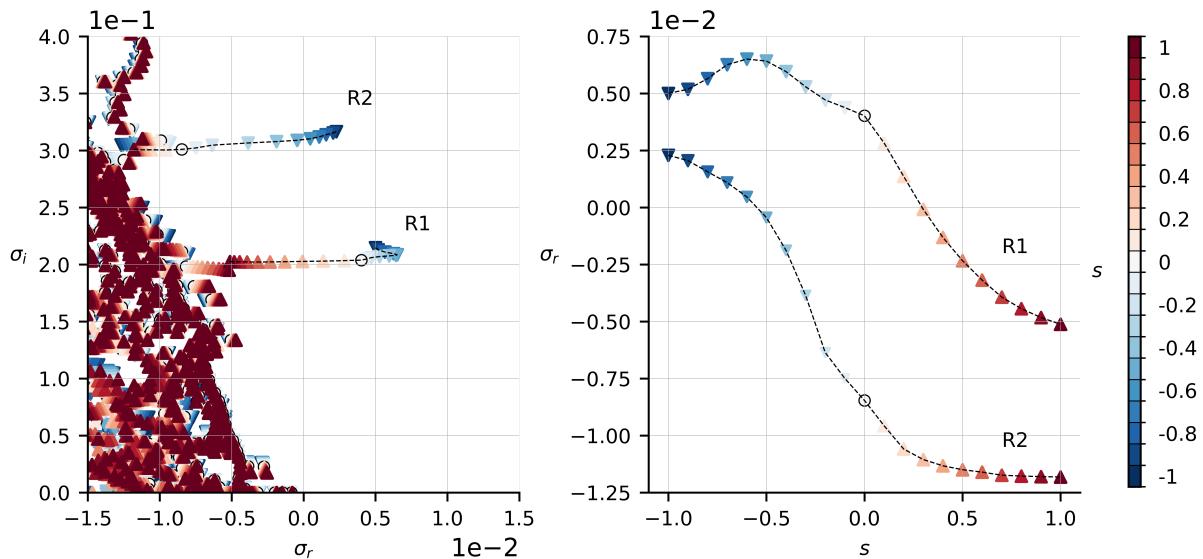
Uma campanha de cálculos de estabilidade linear de configurações de cavidade com valores de  $s$  no intervalo  $s \in [-1, 1]$  e com  $\Delta s = 0.1$  apontam que a estabilidade do escoamento é diretamente afetada pela altura do bordo de fuga da cavidade. As ferramentas numéricas adotadas para o cálculo de estabilidade são apresentadas em Mathias (2021).

O gráfico à esquerda da Fig. 8 mostra a distribuição dos autovalores complexos do sistema, que é simétrico em relação ao eixo das abscissas. A parte real do autovalor representa a taxa de amplificação temporal do modo e a parte imaginária está associada à frequência. Cada cor representa os autovalores do escoamento para uma configuração de geometria ( $s$ ). É notável a presença de um grupo de autovalores com frequências em torno de  $\sigma_i(R1) \approx \pm 0.21$  e outro grupo com frequências em torno de  $\sigma_i(R2) \approx \pm 0.32$ . Essas frequências são características dos modos Rossiter 1 e Rossiter 2, respectivamente. Neste estudo, o modo Rossiter 1 foi dominante em todas as configurações de altura do bordo de fuga.

Em particular, nota-se que a parte real dos modos Rossiter, ou seja, a taxa de amplificação, é deslocada com a alteração da altura do bordo de fuga. O gráfico à direita da Fig. 8 demonstra a taxa de amplificação ( $\sigma_r$ ) como uma função de  $s$ . É notável que

um aumento na altura do bordo de fuga está associado a uma diminuição na taxa de amplificação, o que implica um aumento na estabilidade do escoamento. De fato, a Fig. 8 demonstra que, para  $s \geq 0.3$ , todos os autovalores apresentam parte real menor que zero e, portanto, o escoamento bidimensional sobre a cavidade torna-se estável para todos os  $s \geq 0.3$ . A análise de estabilidade linear está de acordo com os resultados obtidos por meio das simulações numéricas diretas bidimensionais apresentados na seção seguinte. Além disso, a Fig. 8 mostra que o modo de Rossiter 2 também é altamente afetado pela altura do bordo de fuga. Em particular, observa-se que esse modo se torna instável para  $s \leq -0.6$  e que essa configuração também corresponde a uma instabilidade máxima do modo Rossiter 1. Após o pico de instabilidade do modo Rossiter 1 em torno de  $s = -0.6$ , nota-se que o modo começa a se estabilizar à medida que o bordo de fuga diminui ainda mais.

Figura 8 – À esquerda, autovalores do escoamento e à direita, taxa amplificação dos modos Rossiter em função de  $s$ . O aumento de  $s$  reduziu as taxas de amplificações. Os modos bidimensionais são estáveis para  $s > 0.3$



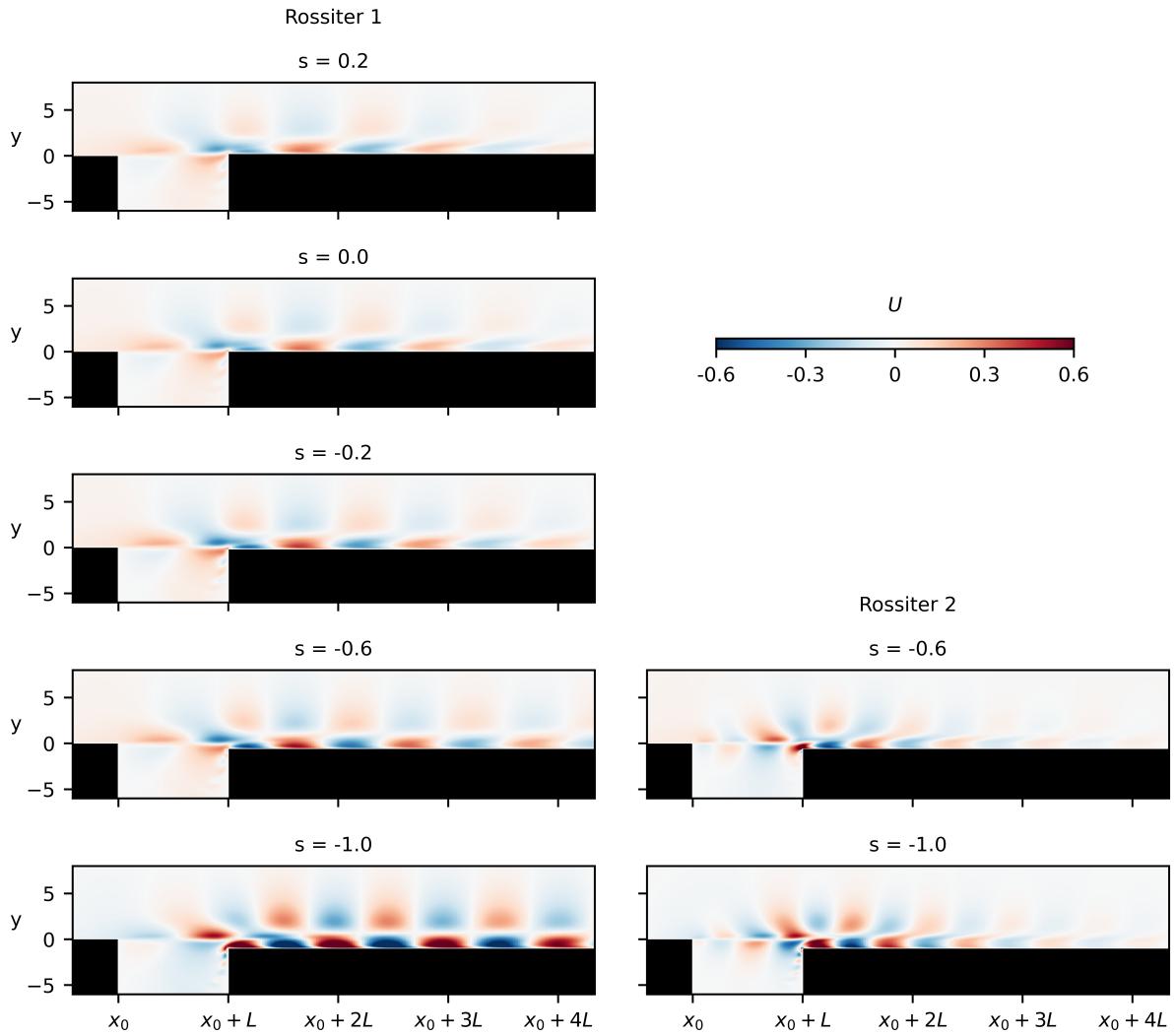
Fonte: Elaborada pelo autor

Por fim, uma análise das autofunções associadas aos modos 1 e 2 de Rossiter permite a identificação das regiões do escoamento em que as oscilações devem ser amplificadas. A Figura 9 mostra as formas das autofunções associadas aos modos instáveis de Rossiter em uma fase arbitrária. Cada linha da Fig. 9 corresponde a um valor fixo de  $s$ . O modo de Rossiter 2 é estável para as configurações em que  $s = [-0.2, 0, 0.2]$  e, portanto, as autofunções associadas a esse modo não foram exibidas para essas geometrias.

Observam-se picos de amplificação periódicos localizados na região da camada de mistura que se estendem do espaço aberto sobre a cavidade até a região a jusante do bordo de fuga. Em particular, observa-se que a redução da altura do bordo de fuga da cavidade deslocou e concentrou os picos das autofunções a jusante, sobre o bordo de fuga

da cavidade. Além disso, a Fig. 9 demonstra que, para as autofunções de Rossiter 1, há um único comprimento de onda no espaço aberto sobre a cavidade. Por outro lado, para o modo Rossiter 2, há dois comprimentos de onda sobre a cavidade. Esse comportamento é esperado para o modo Rossiter e está relacionado ao mecanismo de realimentação acústica descrito anteriormente.

Figura 9 – Autofunções dos modos instáveis em cinco configurações diferentes. Reduções na altura do bordo de fuga fizeram com que os picos das autofunções se deslocassem para à jusante da cavidade



Fonte: Elaborada pelo autor

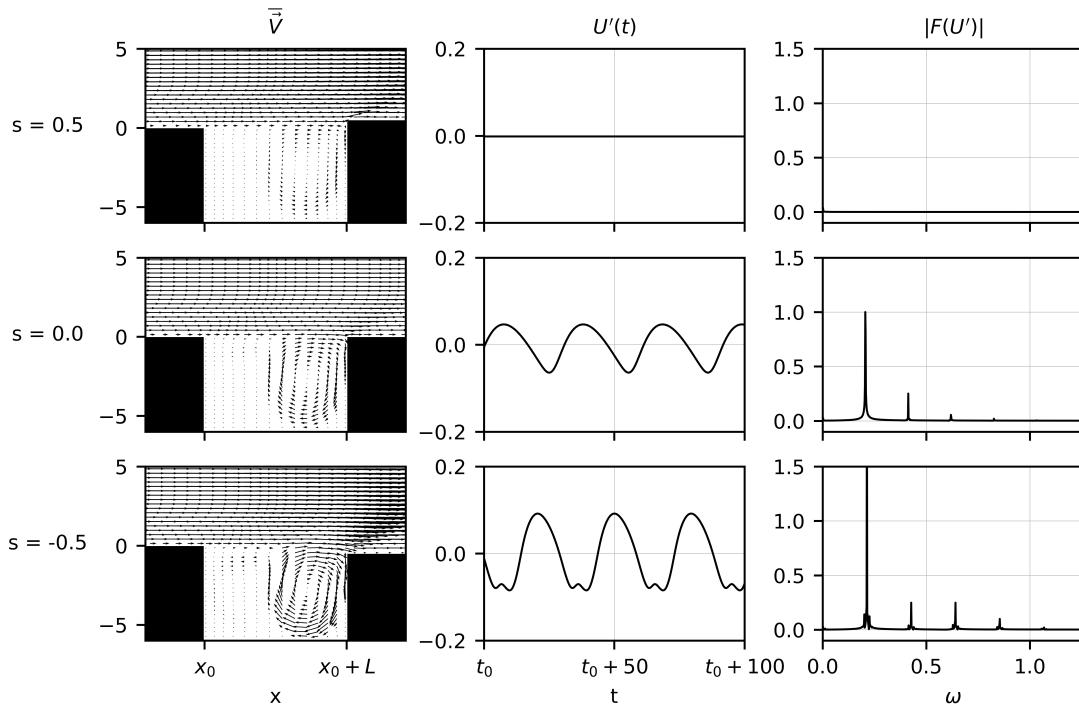
### 2.1.3 Simulações numéricas diretas em geometria bidimensional

Simulações numéricas diretas bidimensionais do escoamento sobre as três geometrias mostradas na Fig. 6 ( $s = [-0.5, 0, +0.5]$ ) indicam que a alteração da altura do bordo de fuga afeta drasticamente a estabilidade do escoamento. Os resultados são apresentados na Fig. 10. À esquerda da Fig. 10, os vetores de velocidade dos escoamentos médios indicam

a existência de circulação dentro da cavidade. Em particular, os campos de velocidade do escoamento sugerem que a circulação aumenta à medida que a altura do bordo de fuga é reduzida. Por outro lado, os gráficos no centro e à direita da Fig. 10 comparam as flutuações de velocidade registradas no ponto  $P$  apresentado na Fig. 7 (a uma distância de  $d = \delta^*$  acima do bordo de fuga da cavidade). Os gráficos mostram que a cavidade com  $s$  positivo amorteceu as oscilações de regime permanente observadas nos outros dois casos. A configuração com  $s$  negativo apresentou oscilações de maior amplitude e introduziu outras frequências no sinal. Portanto, os resultados sugerem que o aumento da altura do bordo de fuga da cavidade teve um efeito estabilizador nas simulações numéricas bidimensionais.

Figura 10 – À esquerda, campo de velocidade do escoamento médio para três valores de  $s$ .

No centro, flutuações da componente horizontal de velocidade em um ponto a uma distância de  $d = \delta^*$  acima do bordo de fuga da lacuna. À direita, o espectro do sinal



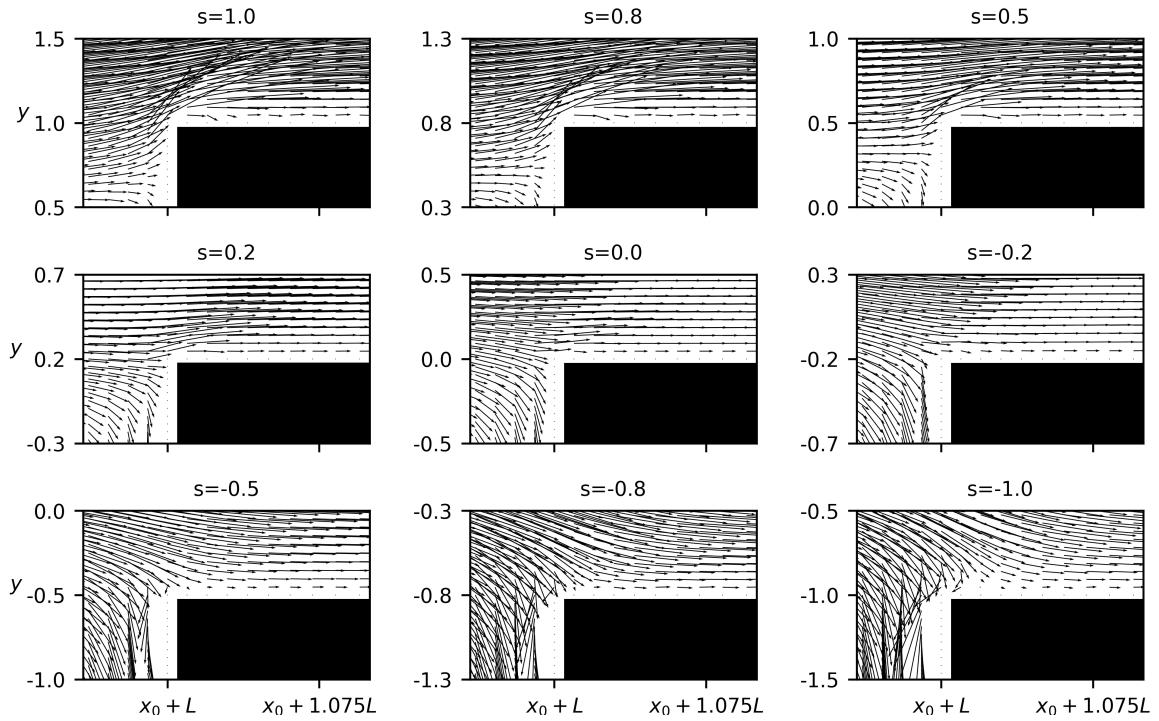
Fonte: Elaborada pelo autor

A análise apresentada para os três casos na Fig. 10 foi estendida para o intervalo  $s \in [-1, 1]$  com variações de  $\Delta s = 0.1$  e foi confirmado que o aumento do bordo de fuga contribuiu para estabilizar o escoamento sobre a cavidade, reduzindo a amplitude das oscilações. Em particular, o limite de estabilidade foi encontrado em torno de  $s = 0.3$ , acima do qual o escoamento bidimensional se torna estável e não oscilatório.

Além disso, foi realizada uma inspeção mais detalhada do campo de velocidades do escoamento médio nas proximidades do bordo de fuga, os resultados são mostrados na Fig. 11. Mudanças significativas são observadas no ângulo e na magnitude da velocidade

do escoamento que incide sobre o bordo de fuga. Em particular, observa-se que uma diminuição na altura do bordo de fuga no intervalo  $-0.5 < s < 0$  está associada a uma curvatura do escoamento e, possivelmente, a um aumento na velocidade do fluido antes do impacto com a parede, o que pode estar relacionado a um aumento na emissão acústica nessas configurações. Reduções maiores no bordo de fuga no intervalo  $s < -0.5$  fizeram com que o ponto de recolamento da camada limite se movesse para jusante da cavidade, o que gerou uma região de recirculação acima do bordo de fuga. Além disso, foi observado que reduções na altura do bordo de fuga produziram um aumento da circulação no interior da cavidade.

Figura 11 – Campo de velocidade do escoamento médio próximo ao bordo de fuga em nove configurações diferentes. A redução da altura do bordo de fuga favoreceu o impacto do fluido na parede

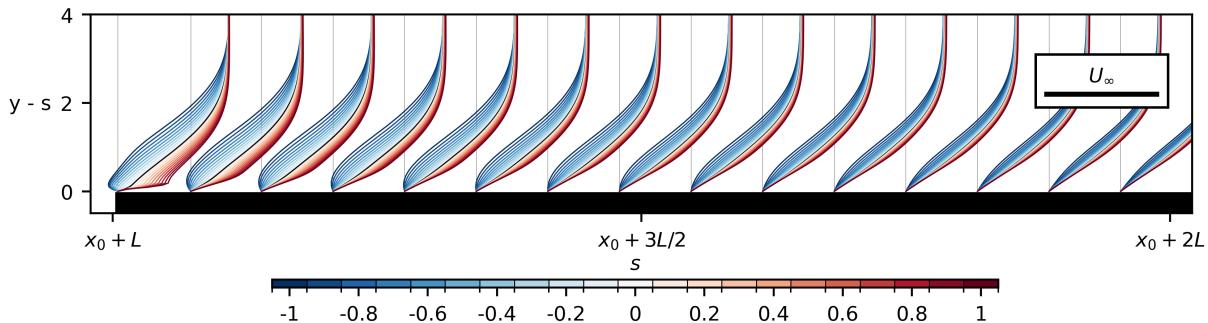


Fonte: Elaborada pelo autor

Na Fig. 12 são analisados os perfis de velocidade do escoamento médio sobre o bordo de fuga. O eixo das ordenadas varia com o valor de  $s$  para possibilitar a sobreposição e a comparação direta entre os perfis de velocidade em diferentes geometrias. O perfil de velocidade para o caso  $s = 0$  é tomado como referência de comparação e apresentado em cor preta. Os resultados mostram que as reduções na altura do bordo de fuga ( $s < 0$ ) contribuíram para a formação de um perfil de velocidade inflexional a jusante da cavidade e ao surgimento de uma região de recirculação sobre o bordo de fuga. Conforme discutido em Schlichting e Gersten (2016), a inflexão dos perfis de velocidade é uma condição importante para a amplificação de ondas de perturbação no escoamento, ou seja, a análise dos perfis de velocidade da Fig. 12 indica que reduções na altura do bordo de fuga foram associadas

a uma redução na estabilidade. A Fig. 12 também indica a formação de uma região de recirculação sobre o bordo de fuga em cavidades com bordos de fuga rebaixados. Por outro lado, aumentos na altura do bordo de fuga ( $s > 0$ ) contribuíram para um aumento da velocidade nesta região, o que favoreceu a formação de perfis de velocidade sem pontos de inflexão e, portanto, com maior estabilidade. Por fim, a Fig. 12 indica que os perfis de velocidade se tornam similares na região distante a jusante da cavidade.

Figura 12 – Perfis de velocidade do escoamento médio sobre o bordo de fuga. A redução da altura do bordo de fuga contribuiu para a formação de um perfil de velocidade inflexional a jusante da cavidade

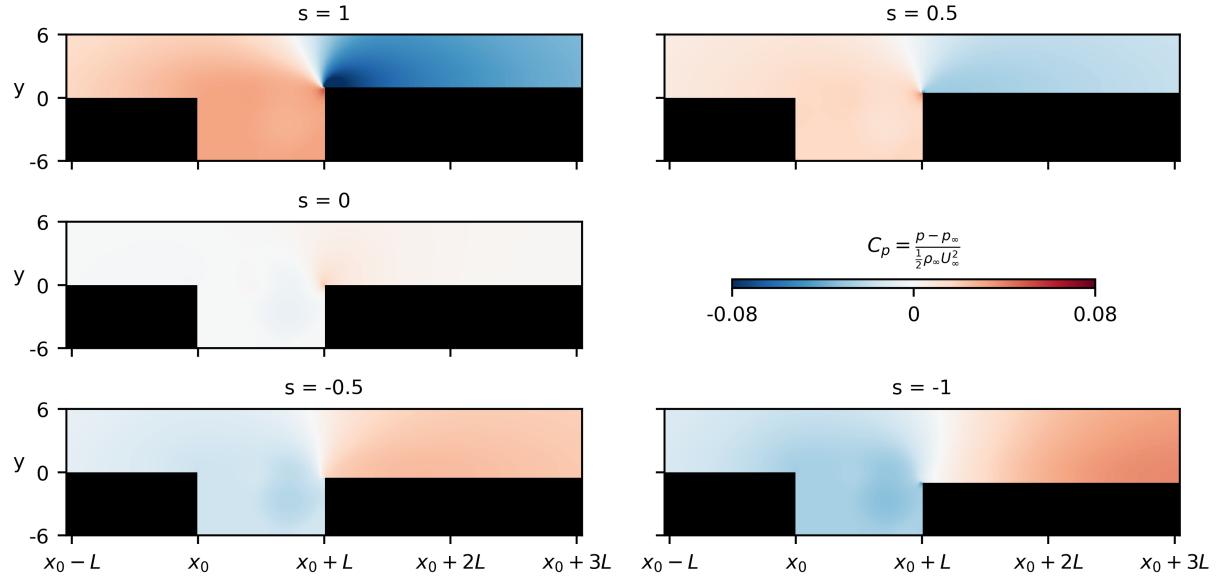


Fonte: Elaborada pelo autor

Em seguida, o campo de pressões do escoamento médio é apresentado na Fig. 13 para cinco configurações da variável  $s$ . A pressão é adimensionalizada pela pressão dinâmica do escoamento livre e, portanto, representada através do coeficiente de pressão ( $C_p$ ). Em particular, a imagem sugere que assimetrias negativas ( $s < 0$ ) favorecem a formação de um gradiente de pressão adverso sobre o bordo de fuga e a redução do coeficiente de pressão no interior da cavidade. A existência do gradiente de pressão adverso pode contribuir para a formação dos perfis inflexionais observados na Fig. 12 e para o aumento da circulação. Por outro lado, assimetrias positivas ( $s > 0$ ) tiveram o efeito contrário e demonstraram contribuir para o aumento da pressão no interior da cavidade e a redução da pressão sobre o bordo de fuga, gerando um gradiente de pressão favorável que pode estar associado à redução da recirculação e ao aumento da velocidade média do escoamento sobre o bordo de fuga nessas configurações.

Por fim, um grupo de propriedades do escoamento foi registrado para todas as configurações de geometria no intervalo  $s \in [-1, 1]$  para quantificar as alterações no comportamento do escoamento associadas às alterações de geometria da borda de fuga da cavidade. Os resultados são mostrados na Fig. 14. Todas as quantidades mostradas no gráfico são divididas pelo valor obtido na configuração simétrica ( $s = 0$ ), de modo que todas as variáveis tenham valor unitário no ponto  $s = 0$ . Além disso, algumas curvas foram interrompidas no ponto  $s = 0.2$ , pois esse ponto corresponde ao limite de estabilidade encontrado nesta pesquisa e, portanto, é um ponto de descontinuidade. Em particular,

Figura 13 – Distribuição do coeficiente de pressão sobre a cavidade em cinco configurações da variável  $s$



Fonte: Elaborada pelo autor

as curvas interrompidas têm valores que tendem a zero para  $s \geq 0.3$ , exceto para a relação  $E_{Ac}/E_{SL}$ , que se torna muito grande e também não foi mostrada. O ponto de descontinuidade coincide com a estabilização do modo bidimensional da cavidade.

Em particular, a variável  $\Gamma$  representa a circulação na segunda metade da cavidade, conforme mostrado na Fig. 7. A Figura 14 mostra que a circulação aumenta com a diminuição da altura do bordo de fuga e que há uma descontinuidade nas proximidades do valor  $s = -0.8$ . O aumento da circulação pode contribuir para alterar o ângulo e a intensidade do impacto do fluido no bordo de fuga, o que pode influenciar a estabilidade do escoamento e a capacidade de emissão de som da cavidade, conforme discutido anteriormente.

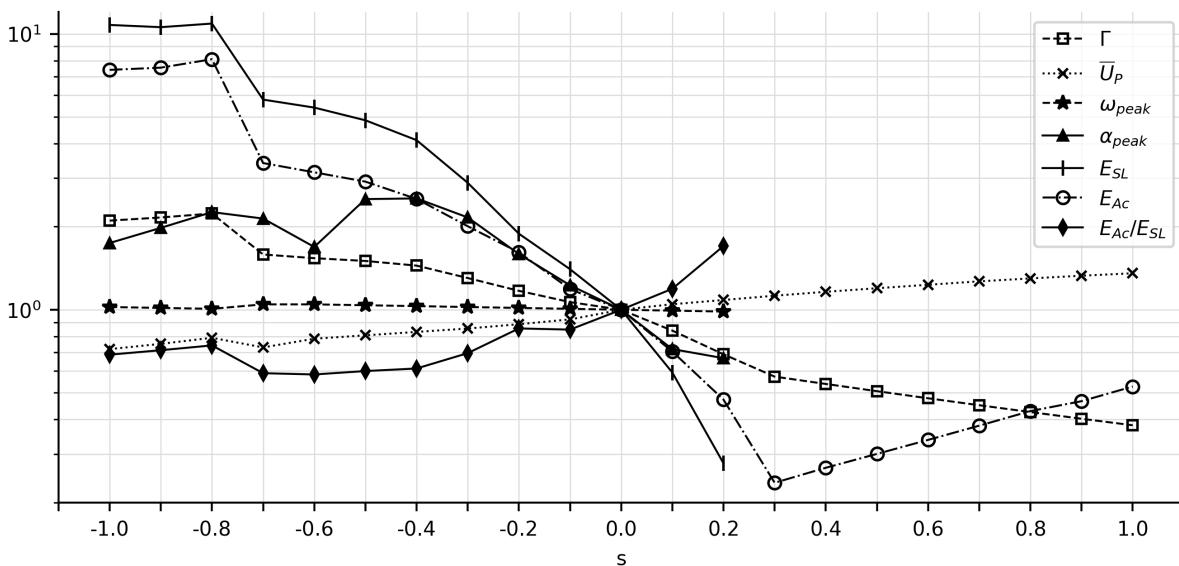
A variável  $\bar{U}_P$  representa a velocidade média do escoamento no ponto  $P$  da Fig. 7. Ao analisar a Fig. 14, nota-se que uma redução na altura do bordo de fuga teve o efeito de reduzir a velocidade média do escoamento, enquanto o aumento da altura teve o efeito de aumentar a velocidade média do fluido no ponto  $P$ . Esse resultado é esperado, pois as configurações com valores de  $s > 0$  implicam uma contração do escoamento, o que pode contribuir para o aumento da velocidade.

Por outro lado, as variáveis  $\omega_{peak}$  e  $\alpha_{peak}$  estão associadas ao espectro do sinal de velocidade obtido no ponto  $P$ . Em particular,  $\omega_{peak}$  representa a frequência dominante no espectro, enquanto  $\alpha_{peak}$  corresponde à amplitude do pico associado à frequência dominante. É possível notar na Fig. 14 que a frequência dominante é pouco alterada pelas mudanças de geometria. Por outro lado, a amplitude da frequência dominante aumenta até cerca de  $s = -0.5$ , depois há uma queda acentuada, uma recuperação e, em seguida, uma queda gradual com a diminuição das alturas do bordo de fuga. A descontinuidade observada na

vizinhança do ponto  $s = -0.5$  está possivelmente associada ao surgimento de um segundo modo bidimensional instável no escoamento (mostrado na Fig. 8), que contribui para uma distribuição do espectro e, consequentemente, para uma redução no pico associado ao primeiro modo instável. Além disso, por volta de  $s \approx -0.5$  ha uma mudança repentina do ponto de recolamento da camada limite, que se torna a jusante do bordo de fuga da cavidade, conforme discutido anteriormente e apresentado na Fig. 11 e na Fig. 12.

Por fim, as variáveis  $E_{Ac}$  e  $E_{SL}$  são usadas para quantificar a capacidade de emissão acústica da cavidade, conforme apresentado na Sec. 2.1.1 e ilustrado na Fig. 7. Em particular, a Fig. 14 mostra que tanto a intensidade das flutuações de pressão quanto as fontes sonoras na camada de cisalhamento são intensificadas por uma redução na altura do bordo de fuga ( $s < 0$ ). Novamente, há uma descontinuidade na vizinhança de  $s = -0.8$ . A Fig. 14 também apresenta uma curva para a relação  $E_{Ac}/E_{SL}$ , que pode ser considerada como uma forma de medir a eficiência do mecanismo de emissão sonora de Rossiter para a cavidade em cada configuração de  $s$ . Observa-se que a relação diminui à medida que a bordo de fuga da cavidade diminui, o que indica que, embora a cavidade produza mais som à medida que o bordo de fuga diminui, o processo de emissão de som parece ser mais eficiente para bordos de fuga mais elevados. Alternativamente, o resultado sugere que reduções na altura do bordo de fuga podem favorecer outros mecanismos de emissão acústica não capturados pela expressão de  $E_{SL}$  da Eq. 2.2.

Figura 14 – Propriedades físicas do escoamento em função da diferença de altura no bordo de fuga. Os resultados são divididos pelo valor de referência obtido para a cavidade simétrica ( $s = 0$ )



Fonte: Elaborada pelo autor

## 2.2 Análise tridimensional

### 2.2.1 Análise de estabilidade linear tridimensional

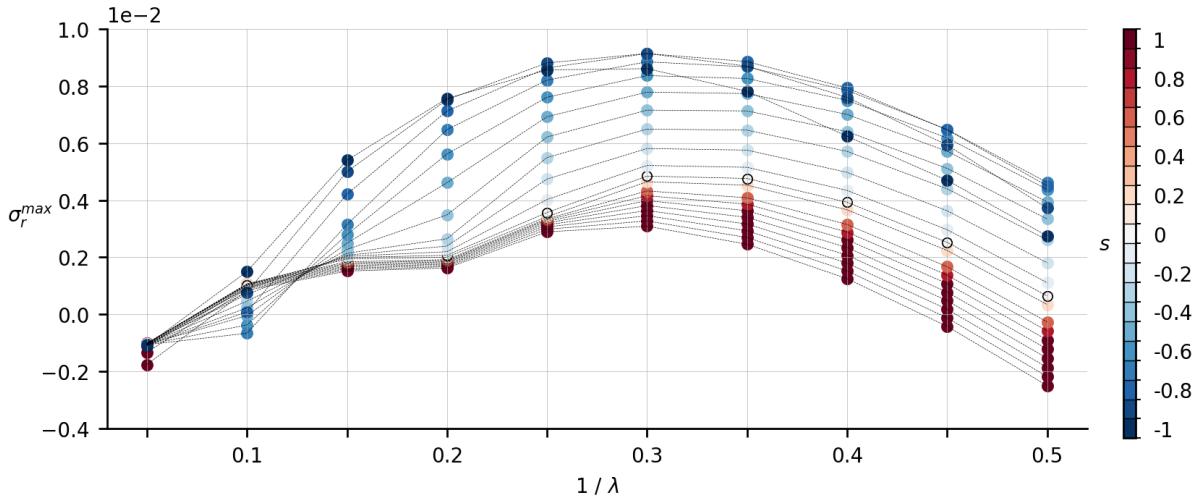
A análise de estabilidade apresentada na Sec. 2.1.2 é estendida de forma a demonstrar os efeitos da assimetria geométrica na estabilidade dos modos centrífugos tridimensionais. Sobre os mesmos escoamentos de base utilizados na análise bidimensional, são introduzidas perturbações tridimensionais com diferentes números de onda transversal, representados pela variável  $\beta$ . A variável  $\beta$  está relacionada com o comprimento de onda transversal da perturbação através da relação apresentada na Eq. 2.4, onde  $\lambda$  é o comprimento de onda transversal adimensionalizado pela espessura de deslocamento da camada limite no bordo de ataque da cavidade. Para cada valor de  $s$ , a estabilidade dos modos tridimensionais é calculada no intervalo de  $\beta \in [0, \pi]$  com variações  $\Delta\beta = 0.1\pi$ .

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (2.4)$$

Na Fig. 15 são apresentadas as amplificações dos modos dominantes em função do inverso do comprimento de onda transversal da perturbação para diferentes geometrias. Os resultados demonstram que a amplificação dos modos tridimensionais é drasticamente afetada pela altura do bordo de fuga da cavidade. Em particular, bordos de fuga baixos ( $s < 0$ ) estiveram associados a um aumento considerável da amplificação máxima dos modos centrífugos, indicando um aumento de instabilidade. Por outro lado, bordos de fuga elevados ( $s > 0$ ) contribuíram para a redução da amplificação dos modos em grande parte dos números de onda transversais analisados. Além disso, os resultados sugerem que o efeito da assimetria é particularmente marcante para perturbações com grandes números de onda transversais. Em particular, a assimetria teve grande efeito no modo centrífugo dominante que representa o ponto de máximo das curvas da Fig. 15, com inverso de comprimento de onda transversal por volta de  $1/\lambda \approx 0.3$ . Apesar dos efeitos significativos de assimetria, a Fig. 15 demonstra que os modos centrífugos dominantes da cavidade permaneceram instáveis em todo o intervalo de  $s$  analisado, ou seja, a taxa de amplificação dos modos centrífugos dominantes permaneceu positiva em todas as configurações.

A análise dos modos tridimensionais é aprofundada na Fig. 16. Cada linha da imagem está associada à estabilidade do escoamento para perturbações com número de onda transversal fixo. À esquerda são apresentadas as distribuições dos autovalores no plano complexo e à direita a evolução da taxa de amplificação dos modos principais em função da variável geométrica  $s$ . A figura pode ser interpretada como uma extensão da Fig. 8 para o caso de perturbações tridimensionais. Os resultados mostram que a existência de assimetria teve efeitos sutis na estabilidade do escoamento para perturbações com números de onda transversais baixos (linha superior da Fig. 16). Por outro lado, em números de onda mais elevados, e em particular nas proximidades do número de onda do

Figura 15 – Amplificação do modo centrífugo dominante em função do inverso do comprimento de onda transversal para diferentes valores de  $s$ .



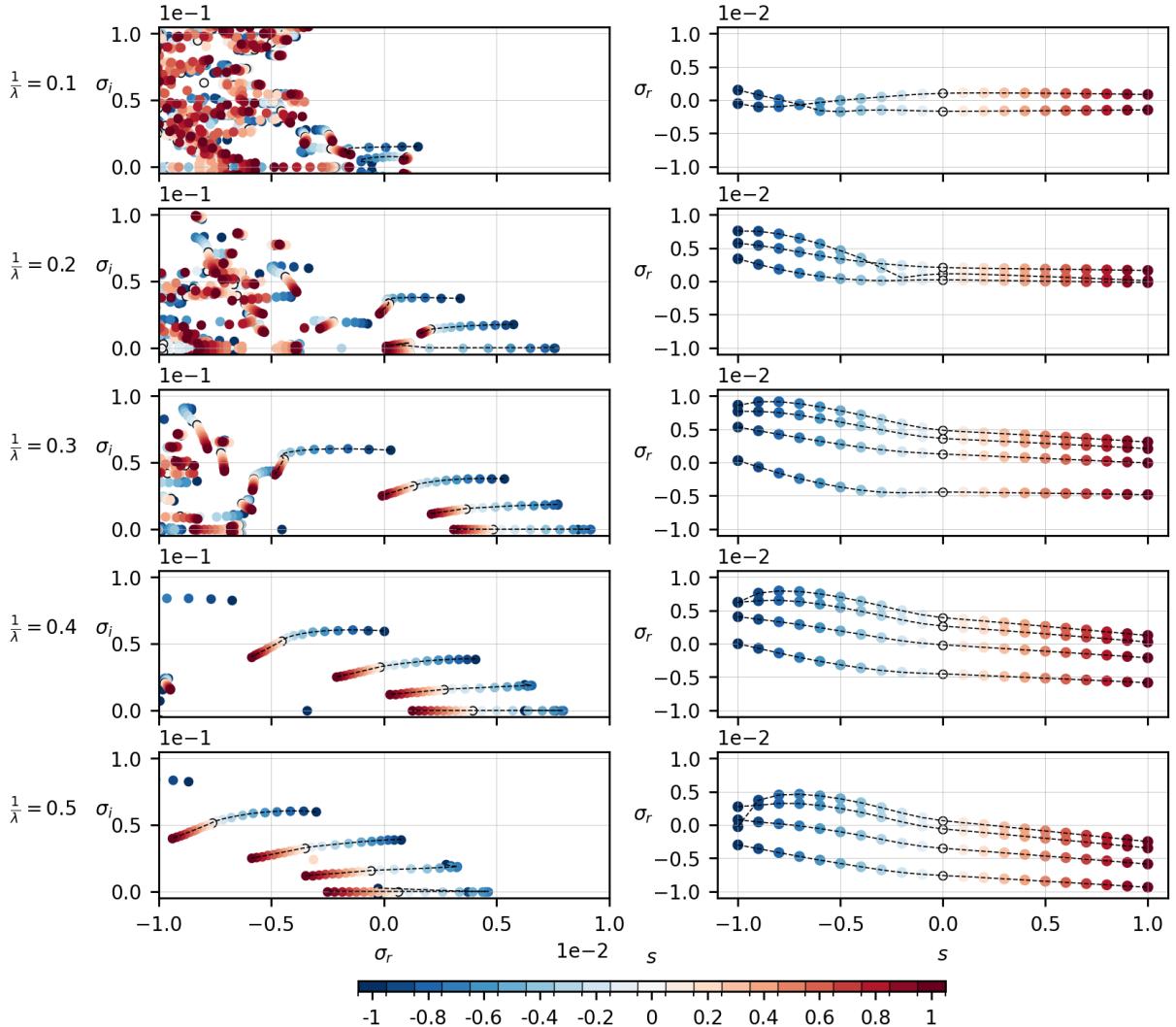
Fonte: Elaborada pelo autor

modo centrífugo dominante ( $1/\lambda \approx 0.3$ ), a variável  $s$  teve grandes efeitos na estabilidade dos modos. De forma geral, bordos de fuga elevados estiveram associados a uma redução significativa da taxa de amplificação dos modos centrífugos tridimensionais, assim como havia sido observado para os modos bidimensionais na Fig. 8. Portanto, os resultados sugerem que cavidades com bordos de fuga elevados apresentam maior estabilidade tanto nos modos bidimensionais quanto nos modos tridimensionais dominantes.

Por fim, a Fig. 17 mostra uma seção bidimensional das autofunções dos modos dominantes da cavidade em diferentes configurações da variável  $s$ . Para cada valor de  $s$ , o modo Rossiter dominante é apresentado à esquerda, o modo centrífugo estacionário dominante é apresentado no centro e o modo centrífugo não-estacionário dominante é apresentado à direita. As autofunções da Fig. 17 mostram que a morfologia dos modos centrífugos dominantes consiste em estruturas circulares no interior da cavidade e uma extensão sobre o bordo de fuga. Nos modos estacionários, foi observado que não há troca de sinal da autofunção em uma mesma estrutura circular no interior da cavidade. Por outro lado, é notável na parte direita da Fig. 18 que dentro de uma estrutura circular dos modos não estacionários há troca de sinal da autofunção.

O formato das autofunções dos modos centrífugos é apresentado em formato tridimensional na Fig. 18. Os resultados sugerem que a morfologia das autofunções dos modos centrífugos é levemente afetada pela existência de assimetria entre os bordos da cavidade. Em particular, as maiores mudanças foram observadas para grandes assimetrias negativas ( $s = -1$ ). De forma geral, assimetrias negativas ( $s < 0$ ) contribuíram para estender as autofunções sobre o bordo de fuga da cavidade. No entanto, os resultados sugerem que os efeitos da assimetria sobre a forma das autofunções dos modos centrífugos

Figura 16 – À esquerda, distribuição dos autovalores no plano complexo. À direita, amplificação dos modos principais em função de  $s$ . Cada linha está associada a um número de onda transversal da perturbação. De forma geral, a taxa de amplificação dos modos é reduzida com o aumento de  $s$ .



Fonte: Elaborada pelo autor

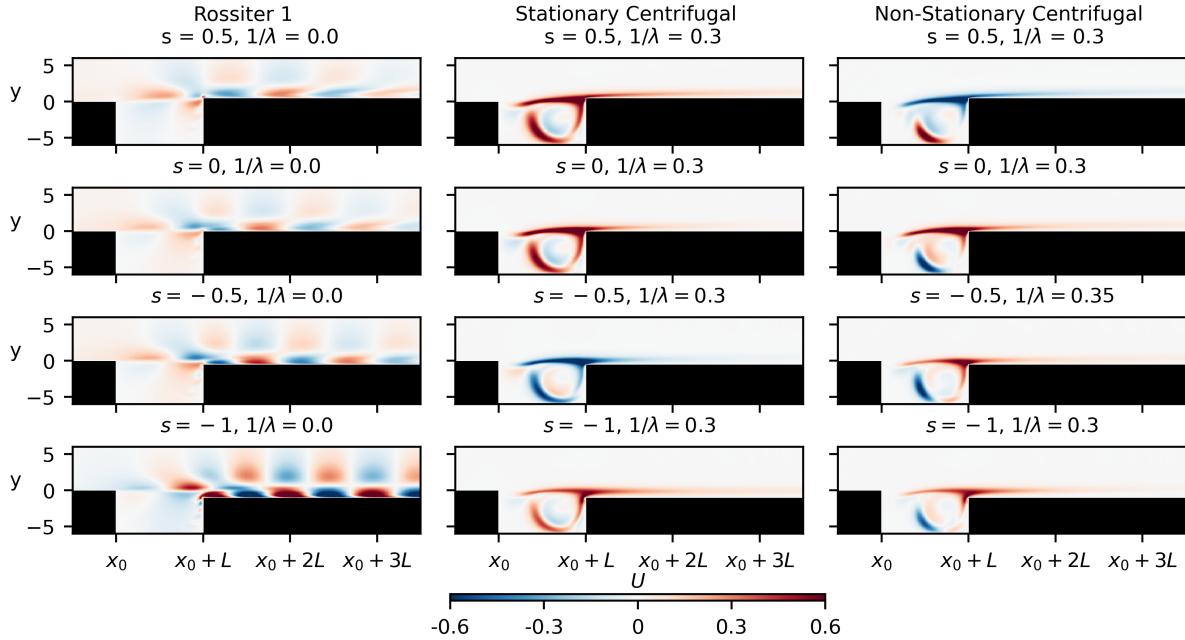
são menores que os observados para o modo de Rossiter dominante (Fig. 9).

### 2.2.2 Construção do domínio de simulação tridimensional

Para aplicar o algoritmo de Simulação Numérica Direta no caso tridimensional, a malha descrita na Sec. 1.3 foi refinada nas direções vertical e longitudinal e em seguida replicada na direção transversal. O refinamento da malha é necessário para garantir a representatividade adequada dos fenômenos físicos de turbulência.

Conforme documentado na bibliografia (DAVIDSON, 2015; SCHLICHTING; GERTSEN, 2016), as propriedades da camada limite podem ser aproximadas como lineares na região determinada pela sub-camada viscosa, cuja espessura é da ordem de grandeza

Figura 17 – Seção das autofunções dos modos dominantes da cavidade em diferentes configurações da variável  $s$ . À esquerda, autofunção do modo Rossiter dominante, no centro o modo centrífugo estacionário dominante e, à direita, o modo centrífugo não-estacionário dominante



Fonte: Elaborada pelo autor

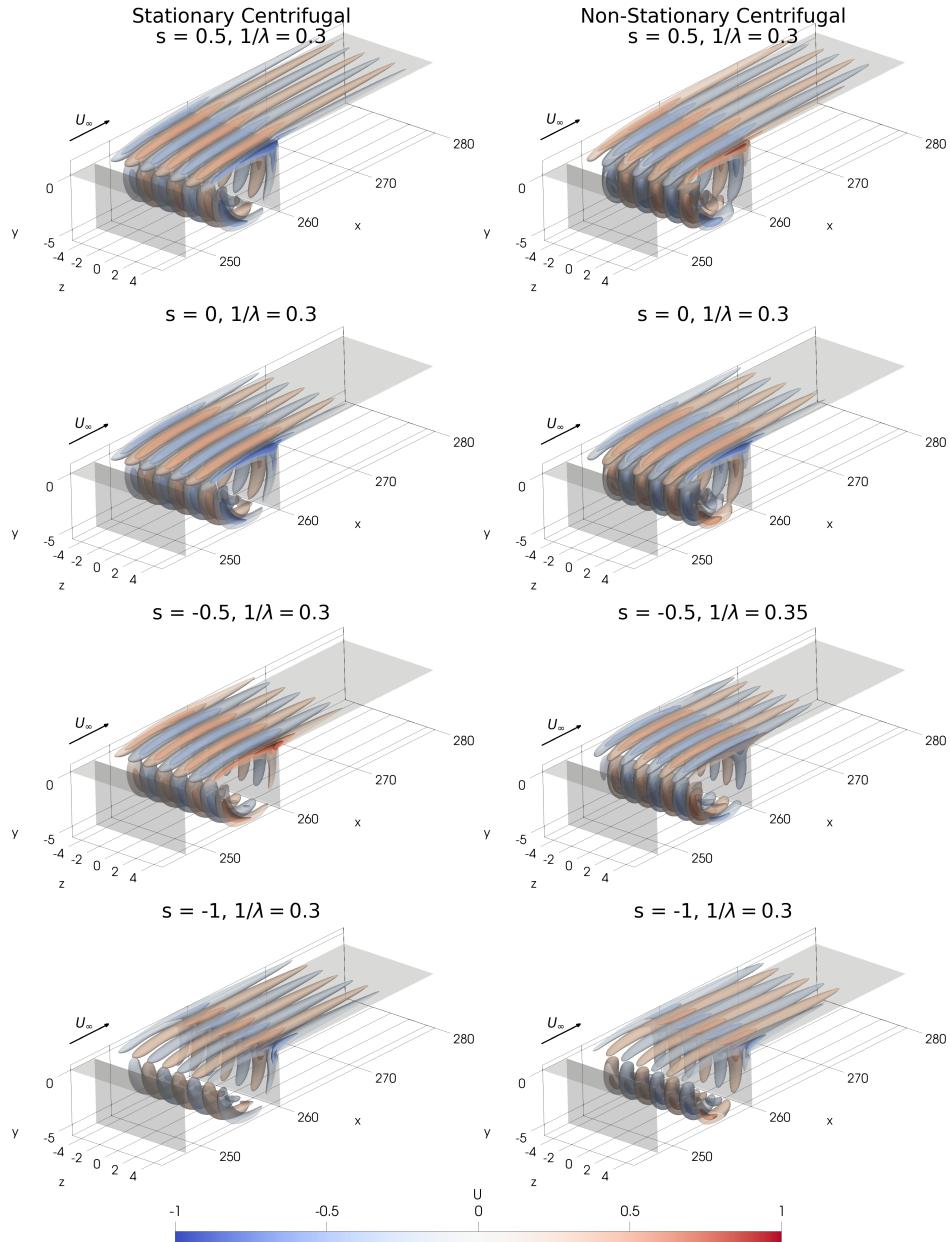
de  $y^+ \approx 5$ . Portanto, recomendações na bibliografia indicam que o espaçamento vertical entre os pontos da malha nas proximidades da parede deve ser dessa ordem de grandeza para garantir a representação adequada de camadas limite com turbulência desenvolvida. Partindo dos resultados das simulações bidimensionais obtidos na Sec. 2.1.3, a variável  $y^+$  foi estimada sobre o bordo de fuga da cavidade e o resultado adimensional é apresentado na Eq. 2.5.

$$y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu} \approx 0.005 \quad (2.5)$$

Levando em consideração o critério de  $y^+$  e consultando outras malhas utilizadas em simulações tridimensionais semelhantes, o refinamento da malha na direção vertical foi definido conforme apresentado à direita na Fig. 19. O menor espaçamento vertical entre os pontos corresponde a  $y^+ \approx 6$ . O refinamento se mostrou próximo do esperado para a representação da subcamada viscosa e suficiente para os objetivos desta análise.

Em seguida, o refinamento da malha na direção longitudinal foi determinado de forma que o espaçamento horizontal entre os pontos nas proximidades dos bordos de ataque e de fuga da cavidade fosse aproximadamente igual ao espaçamento vertical determinado anteriormente com o critério de  $y^+$ . Portanto, as proximidades dos bordos da cavidade foram a regiões de maior refinamento na direção longitudinal. Além disso, assim como na

Figura 18 – Autofunções dos modos dominantes da cavidade em diferentes configurações da variável  $s$ . À esquerda, autofunção do modo centrífugo estacionário dominante e, à direita, modo centrífugo não-estacionário dominante

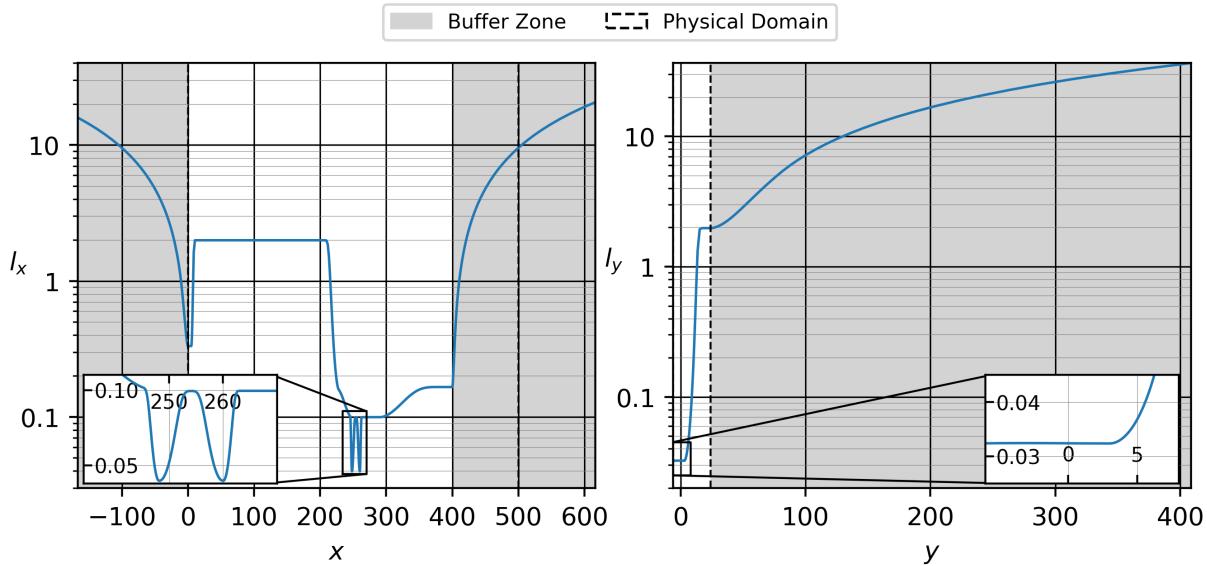


Fonte: Elaborada pelo autor

malha bidimensional, a região à jusante da cavidade, sobre o bordo de fuga, também foi alvo de grande refinamento para garantir boa representatividade da transição da camada limite. Nas outras regiões, o refinamento da malha na direção longitudinal foi reduzido de forma gradual garantindo uma transição suave do refinamento. A distância longitudinal entre os pontos da malha é apresentada à esquerda na Fig. 19.

Por fim, na direção transversal o comprimento da malha e a distância entre os pontos são determinados à partir da análise de estabilidade apresentada na Sec. 2.2.1.

Figura 19 – Distribuição das distâncias entre os pontos  $(l_x, l_y)$  da malha tridimensional estruturada para diferenças finitas



Fonte: Elaborada pelo autor

De forma geral, a malha deve ser longa o suficiente para representar mais de um período dos modos tridimensionais dominantes de menor número de onda transversal e refinada o suficiente para capturar mais de um período dos modos instáveis com maior número de onda transversal. Portanto, através da análise da Fig. 15 e levando em consideração malhas utilizadas em simulações semelhantes, o comprimento da malha na direção transversal adotado foi de  $40\delta^*$ , com  $z \in [-20, 20]$ , e a espaçamento entre os pontos foi uniforme e correspondente a  $l_z = 0.5$ . A malha tridimensional possui cerca de 67 milhões de pontos, contendo  $N_x = 1771$  pontos na direção longitudinal,  $N_y = 476$  pontos na direção vertical e  $N_z = 80$  pontos na direção transversal.

### 2.2.3 Simulações numéricas diretas em geometria tridimensional

Simulações numéricas diretas foram realizadas em três configurações distintas da variável  $s$  para investigar os efeitos tridimensionais de assimetrias positivas ( $s > 0$ ) e negativas ( $s < 0$ ) nas propriedades do escoamento. Em particular, para a análise tridimensional foram selecionadas as geometrias de  $s = [-0.5, 0, 0.5]$ , assim como na análise bidimensional da Fig. 10. Nos três casos, o tempo das simulações tridimensionais foi suficiente para ultrapassar o regime transitório de simulação e registrar pelo menos dois ciclos dos modos instáveis de maior período, permitindo a estimativa do escoamento médio em cada caso. A precisão no cálculo do escoamento médio se mostrou suficiente para esta análise.

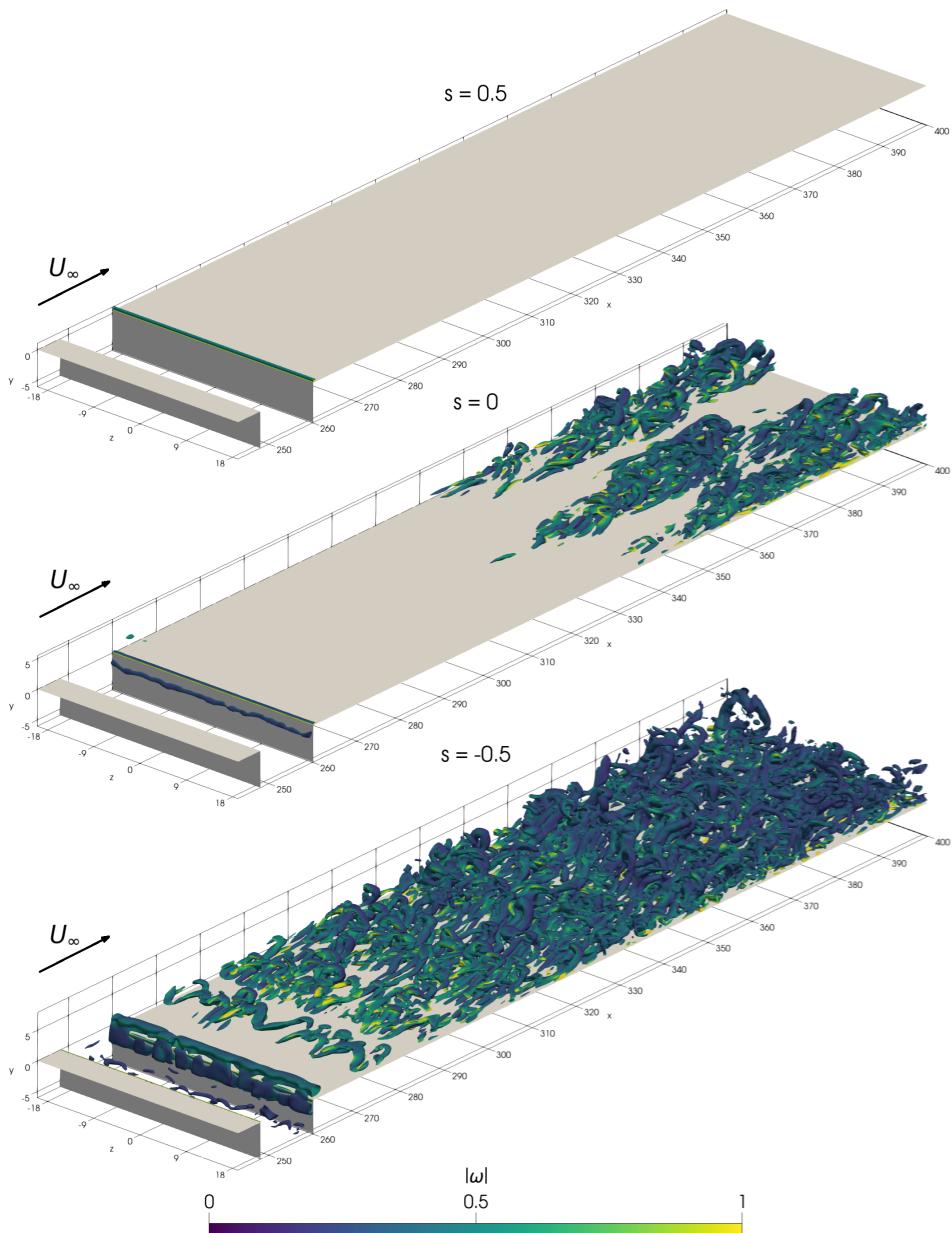
A Fig. 20 demonstra o desenvolvimento de estruturas coerentes na camada limite sobre a cavidade. Para a identificação das estruturas foi utilizada a metodologia *Q-criterion*,

descrita em Hunt, Wray e Moin (1988) e definida em termos do gradiente do campo de velocidades instantâneo em Chong, Perry e Cantwell (1990). As estruturas apresentadas na Fig. 20 correspondem a um nível de *Q-criterion* de 0.01 em um tempo de simulação arbitrário após a convergência do escoamento médio. As cores representam à magnitude da vorticidade em cada ponto. É marcante a influência da assimetria no desenvolvimento de estruturas de vorticidade à jusante da cavidade. Em particular, a Fig. 20 confirma qualitativamente os comportamentos esperados à partir dos resultados obtidos no estudo bidimensional e na análise de estabilidade linear tridimensional. De fato, a imagem sugere de forma qualitativa que a redução da altura do bordo de fuga pode acelerar a formação de estruturas de vorticidade na camada limite, enquanto a elevação do bordo de fuga pode retardar ou evitar o processo.

A análise da transição da camada limite é quantificada na Fig. 21, onde é apresentado o coeficiente de fricção médio ( $C_f$ ) em função da coordenada longitudinal  $x$ . Em particular, a Fig. 21 fornece informações quantitativas a respeito da distância longitudinal média da região de transição da camada limite em relação ao bordo de fuga da cavidade (situado em  $x \approx 260.1$ ) nas três geometrias investigadas. A identificação da região de transição é possível através da comparação entre os coeficientes de fricção médios calculados numericamente e as curvas teóricas de coeficiente de fricção para camadas limite em regime laminar e turbulento. A análise confirma o resultado qualitativo da Fig. 20 e demonstra que a redução da altura do bordo de fuga favoreceu a transição da camada limite. De fato, no caso  $s = -0.5$  a transição foi identificada próxima ao bordo de fuga da cavidade. A transição da camada limite também foi observada no caso simétrico ( $s = 0$ ), um resultado que concorda com dados numéricos disponíveis na bibliografia (MATHIAS, 2021) de cavidades simétricas similares. Nesta configuração, a transição foi identificada por volta de  $x \approx 340$  e apresentou comportamento intermitente, ou seja, houve o surgimento recorrente de pontos de turbulência e oscilação entre os regimes laminar e turbulento. Por fim, é marcante observar que o aumento da altura do bordo de fuga ( $s = 0.5$ ) retardou a transição da camada limite. De fato, não foi observada a transição da camada limite dentro do domínio de simulação no caso  $s = 0.5$ .

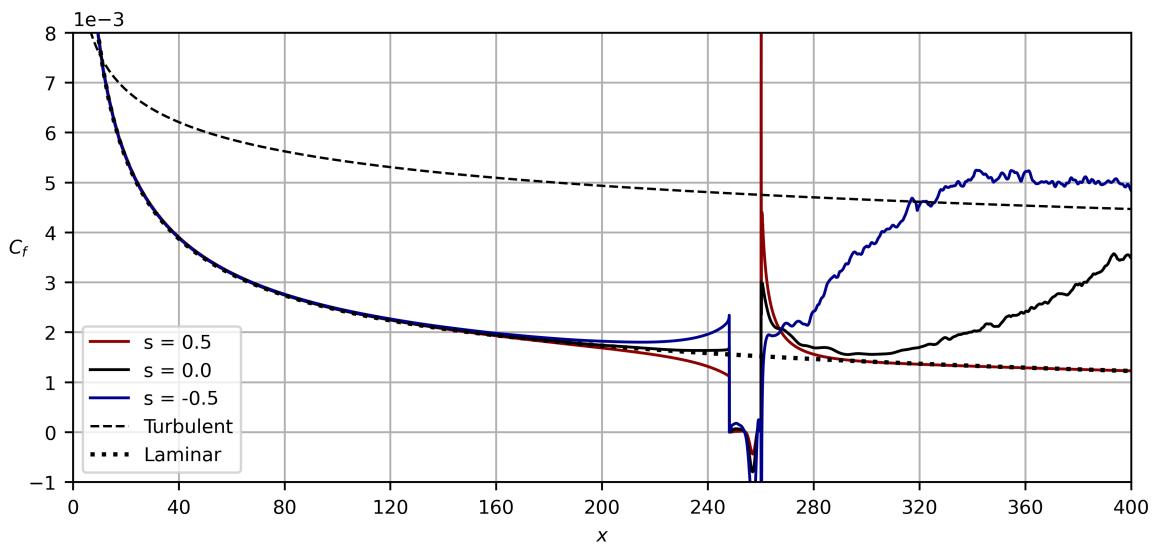
O resultado pode ser considerado como uma confirmação da previsão sugerida pelas análises de estabilidade das seções Sec. 2.1.2 e Sec. 2.2.1, já que nos casos  $s = -0.5$  e  $s = 0$  ambos os modos centrífugo e de Rossiter foram calculados como instáveis, enquanto no caso  $s = 0.5$  apenas o modo centrífugo é instável. Além disso, o resultado fortalece as indicações em Mathias e Medeiros (2018) de que a coexistência de ambos os modos instáveis bidimensionais e tridimensionais é uma condição importante para o mecanismo de transição da camada limite.

Figura 20 – Estruturas coerentes identificadas com o método *Q-criterion*. A assimetria negativa intensificou o desenvolvimento de estruturas de vorticidade à jusante da cavidade



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 21 – Coeficiente de fricção médio ( $C_f$ ) em função da coordenada longitudinal  $x$ . A redução da altura do bordo de fuga acelerou a transição. Não foi observada transição da camada limite sobre a cavidade com bordo de fuga elevado



Fonte: Elaborada pelo autor



### 3 CONCLUSÃO

O estudo apresentado neste trabalho de conclusão de curso demonstra que, no contexto de um escoamento de fluido compressível sobre uma cavidade retangular, a presença de uma assimetria entre a altura dos bordos de ataque e de fuga da cavidade pode ter efeitos significativos na estabilidade do escoamento.

Em particular, uma campanha de simulações utilizando a teoria de estabilidade linear indicou que reduções na altura do bordo de fuga da cavidade ( $s < 0$ ) estiveram associadas a um aumento da taxa de amplificação temporal de ambos os modos dominantes bidimensionais de Rossiter e tridimensionais centrífugos, sugerindo um aumento na instabilidade do escoamento nessas configurações. Por outro lado, a análise evidenciou que elevações do bordo de fuga da cavidade ( $s > 0$ ) contribuíram para uma redução na taxa de amplificação dos modos. Em particular, foi observado que valores de  $s \geq 0.3$  levaram à estabilização completa do modo bidimensional. Além disso, a análise de estabilidade aponta que as autofunções dos modos bidimensionais se manifestam principalmente na camada de mistura sobre a cavidade, enquanto os modos tridimensionais preenchem a camada de mistura mas também se estendem ao interior da cavidade com um formato circular, de forma similar ao encontrado em cavidades simétricas com geometria semelhante. No entanto, foi observado que reduções na altura do bordo de fuga apresentam um efeito significativo sobre as autofunções do modo bidimensional de Rossiter, causando um deslocamento dos picos da autofunção para a região a jusante do bordo de fuga da cavidade.

Além disso, os resultados da campanha de simulações numéricas diretas bidimensionais indicam que reduções na altura do bordo de fuga ( $s < 0$ ) podem induzir um aumento na circulação dentro da cavidade e que o fenômeno pode estar associado a uma mudança no ângulo e na velocidade do escoamento que impacta o bordo de fuga. Reduções na altura do bordos de fuga também foram associadas a uma intensificação dos vórtices formados na camada de mistura e a um aumento na emissão acústica. Para configurações com bordos de fuga elevados ( $s > 0$ ), foi observada uma redução na circulação, nas flutuações de pressão e na formação de vórtices na camada de mistura. Finalmente, os resultados das simulações numéricas diretas tridimensionais indicam que houve transição da camada limite tanto no caso da cavidade simétrica ( $s = 0$ ) quanto na cavidade com bordo de fuga rebaixado ( $s = -0.5$ ). Em particular, foi observado que a redução da altura do bordo de fuga acelerou o processo de transição, confirmando o aumento de instabilidade previsto pela análise linear. Por fim, o aumento da altura do bordo de fuga ( $s = 0.5$ ) atrasou a transição da camada limite. De fato, não foi observada transição dentro do domínio de simulação no caso  $s = 0.5$ . Os resultados das simulações numéricas diretas

tridimensionais estiveram em boa concordância com a análise de estabilidade linear e fortalecem as indicações apresentadas na bibliografia de que a coexistência de ambos os modos instáveis bidimensionais e tridimensionais é uma condição importante para o mecanismo de *bypass* da camada limite sobre cavidades.

Em suma, os resultados deste trabalho sugerem que o processo de transição da camada limite em um escoamento tridimensional compressível sobre uma cavidade retangular real pode ser acelerado, ou retardado, pela existência de pequenas assimetrias entre os bordos da cavidade. Em particular, a análise indica que reduções na altura do bordo de fuga podem favorecer o processo de transição da camada limite, aumentar emissão acústica e a circulação no interior da cavidade. Por outro lado, a análise sugere que aumentos na altura do bordo de fuga podem atrasar o processo de transição, contribuindo para a manutenção de uma camada limite laminar a jusante da cavidade. No entanto, investigações experimentais de cavidades assimétricas ainda são necessárias para confirmar os efeitos previstos nesta análise numérica, representando uma oportunidade de continuação dos estudos promovidos neste trabalho.

Por fim, este autor comprehende que os resultados apresentados neste trabalho de conclusão de curso podem ser explorados em projetos de engenharia para aumentar o controle e a previsibilidade de escoamentos sobre estruturas reais que apresentem cavidades superficiais. Em particular, o estudo poderia ser aplicado para estabelecer tolerâncias de fabricação no alinhamento entre os bordos de cavidades reais. Finalmente, este trabalho se insere no contexto de investigação do processo de transição da camada limite em escoamentos reais e, portanto, pode ser explorado para auxiliar a manutenção de camadas limite laminares sobre as superfícies de aeronaves com cavidades superficiais, permitindo uma redução no consumo de combustíveis fósseis e na emissão de poluentes durante a operação.

## REFERÊNCIAS

- ÅKERVIK, E. *et al.* Steady solutions of the navier-stokes equations by selective frequency damping. **Physics of Fluids**, v. 18, n. 6, 2006. DOI: 10.1063/11.2211705.
- ARNOLDI, W. E. The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem. **Quarterly of applied mathematics**, v. 9, n. 1, p. 17–29, 1951.
- BERGAMO, L. F. **Instabilidade hidrodinâmica linear do escoamento compressível em uma cavidade**. 2014. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.
- BRES, G. A.; COLONIUS, T. Three-dimensional instabilities in compressible flow over open cavities. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 599, p. 309–339, 2008.
- CHIBA, S. Global stability analysis of incompressible viscous flow. **Journal of Japanese Society of Computational Fluid Dynamics**, v. 7, n. 1, p. 20–48, 1998.
- CHONG, M. S.; PERRY, A. E.; CANTWELL, B. J. A general classification of three-dimensional flow fields. **Physics of Fluids A: Fluid Dynamics**, v. 2, n. 5, p. 765–777, 1990.
- COUSTEIX, J. **Basic concepts on boundary layers**. [S.l.: s.n.], 1992. (AGARD Report, v. 786).
- CRIMINALE, W. O.; JACKSON, T. L.; JOSLIN, R. D. **Theory and computation of hydrodynamic stability**. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. (Cambridge Monographs on Mechanics).
- CROUCH, J. D.; KOSORYGIN, V. S.; SUTANTO, M. I. Modeling gap effects on transition dominated by Tollmien-Schlichting instability. In: AIAA AVIATION 2020 Forum, 2020. **Virtual event**. DOI: <https://doi.org/10.2514/6.2020-3075>.
- DAVIDSON, P. A. **Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers**. Oxford: Oxford University Press, 2015.
- ERIKSSON, L. E.; RIZZI, A. Computer-aided analysis of the convergence to steady state of discrete approximations to the euler equations. **Journal of Computational Physics**, v. 57, n. 1, p. 90–128, 1985.
- GAITONDE, D. V.; VISBAL, M. **High-order schemes for Navier-Stokes equations: algorithm and implementation into FDL3DI**. Ohio: Air Vehicles Directorate, Air Force Research Laboratory, Air Force Materiel Command Wright-Patterson Air Force Base, 1998. (AFRL-VA-WP-TR-1998-3060).
- HOWE, M. Mechanism of sound generation by low mach number flow over a wall cavity. **Journal of sound and vibration**, v. 273, n. 1-2, p. 103–123, 2004.

HUNT, J. C.; WRAY, A. A.; MOIN, P. Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows. In: STUDYING TURBULENCE USING NUMERICAL SIMULATION DATABASES, 2., Stanford, 1988. **Proceedings of the 1988 Summer Program** [...]. Washington, DC: NASA; Stanford: University of Stanford, 1988. p.193-208.

KRISHNAMURTY, K. **Acoustic radiation from two-dimensional rectangular cutouts in aerodynamic surfaces**. Washington, DC.: NACA, 1955. (NACA-TN-3487).

LELE, S. K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. **Journal of computational physics**, v. 103, n. 1, p. 16–42, 1992.

LI, N.; LAIZET, S. **2DECOMP & FFT**: A highly scalable 2d decomposition library and fft interface. In: CRAY USER GROUP 2010 CONFERENCE. Proceedings [...] Edinburgh: University of Edinburgh, EPCC, 2010. Edinburgh.

MARTÍNEZ, G. A. G. **Towards natural transition in compressible boundary layers**. 2016. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

MATHIAS, M. S. **Computational study of the hydrodynamic stability of gaps and cavities in a subsonic compressible boundary layer**. 2021. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

MATHIAS, M. S.; MEDEIROS, M. Direct numerical simulation of a compressible flow and matrix-free analysis of its instabilities over an open cavity. **Journal of Aerospace Technology and Management**, v. 10, 2018. DOI: <https://doi.org/10.5028/jatm.v.10.949>.

RAYLEIGH, L. On the stability, or instability, of certain fluid motions. **Proceedings of the London Mathematical Society**, s1-11, n. 1, p. 57–72, Nov. 1879. DOI: <https://doi.org/10.1112/plms/s1-11.1.57>.

REYNOLDS, O. XXIX. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. **Philosophical Transactions of the Royal society of London**, The Royal Society London, n. 174, p. 935–982, Dec. 1883.

ROSSITER, J. **Wind-tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds**. [s.l.]: Ministry Of Aviation. 1964.

SCHLICHTING, H.; GERSTEN, K. **Boundary-layer theory**. Berlin: Springer, 2016.

THEOFILIS, V. Global linear instability. **Annual Review of Fluid Mechanics**, Annual Reviews, v. 43, p. 319–352, 2011.

VICENTE, J. *et al.* Three-dimensional instabilities over a rectangular open cavity: from linear stability analysis to experimentation. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 748, p. 189–220, 2014.

VICENTE, Marcos Fernandes. **Reservatório para sabão em pó com suporte para escova**. Depositante: Marcos Fernandes Vicente: MU8802281-1U2, 15 out. 2008, 29 jun, 2010. Depósito: 15 out. 2018. Concessão: 29 jun. 2010.