

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO, CONTABILIDADE E ATUÁRIA

Análise de desempenho dos métodos de interpolação para estimação da estrutura a termo da taxa de juros livre de risco para a economia brasileira

Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Souza Santos

Lucas Guimarães Gassert

SÃO PAULO
Dezembro de 2021

LUCAS GUIMARÃES GASSERT

Análise de desempenho dos métodos de interpolação para estimação da estrutura a termo da taxa de juros livre de risco para a economia brasileira

Monografia de conclusão do curso de Ciências Econômicas da Faculdade de Economia, Administração, Ciências Contábeis e Atuária (FEA) da Universidade de São Paulo (USP)
Área de concentração: Finanças e Métodos Quantitativos

Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Souza Santos

SÃO PAULO

2021

Resumo

Esta monografia deverá comparar o desempenho de diferentes métodos de interpolação que possam ser utilizados de forma instantânea para estimar a estrutura a termo da taxa de juros brasileira. O objetivo será utilizar uma validação cruzada do tipo *leave-one-out*, utilizando-se os dados reais diários de contratos de DI futuro em diversas maturações, e verificar a relação entre os diferentes métodos e seus erros quadrados médios.

Palavras-chave: Finanças, Curvas de Juros, Métodos Quantitativos

Classificação JEL: C82, E43, G17

Abstract

This work aims to compare the performance of multiple interpolation methods available that can instantaneously estimate the Brazilian yield curve. The goal is to use a leave-one-out cross-validation strategy on real-life data from daily interbank deposit futures transactions with several maturities, and verifying the relation between the multiple methods and their respective mean squared errors.

Keywords: Finance, Yield Curves, Quantitative Methods

JEL classification: C82, E43, G17

Sumário

Introdução	7
Revisão Bibliográfica	9
Dados	11
Metodologia	15
Resultados	17
Conclusão	25
Referências Bibliográficas	26

Índice de Figuras

Figura 1.1: Histogramas das variáveis Vencimento, Negócios Efetuados, Cotação e Taxa a.a.	12
Figura 1.2: Gráficos de Dispersão das variáveis Negócios, Cotação e Taxa a.a contra Vencimento e Data	13
Figura 2.1: Boxplot dos Erros Quadráticos Médios	17
Figura 2.2: Dispersão dos Erros Quadráticos Médios do Método de Interpolação Linear	18
Figura 2.3: Dispersão dos Erros Quadráticos Médios do Método de Interpolação Exponencial	18
Figura 2.4: Dispersão dos Erros Quadráticos Médios do Método de Interpolação por Splines	19
Figura 2.5: Boxplot dos Erros Quadráticos Médios para os dados a partir de janeiro de 2004	22
Figura 2.6: Boxplot dos Erros Quadráticos Médios para os dados a partir de janeiro de 2013	23

Índice de Tabelas

Tabela 1.1: Médias e Erros-padrão das variáveis Vencimento, Negócios Efetuados, Cotação e Taxa a.a.	12
Tabela 2.1: Médias e Erros-padrão dos Erros Quadráticos Médios dos Métodos de Interpolação	17
Tabela 2.2: Médias e Erros-padrão dos Erros Quadráticos Médios removendo os 5% maiores erros	19
Tabela 2.3: Médias e Erros-padrão dos Erros Quadráticos Médios apenas para os vértices externos	20
Tabela 2.4: Médias e Erros-padrão dos Erros Quadráticos Médios para os vencimentos a até 1571 d.u.	20
Tabela 2.5: Médias e Erros-padrão dos Erros Quadráticos Médios apenas para os vencimentos a partir de 100 d.u.	21
Tabela 2.6: Médias e Erros-padrão dos Erros Quadráticos Médios aplicando todas as técnicas anteriores	21
Tabela 2.7: Médias e Erros-padrão dos Erros Quadráticos Médios para os dados a partir de janeiro de 2004	22
Tabela 2.8: Médias e Erros-padrão dos Erros Quadráticos Médios para os dados a partir de janeiro de 2004, com os 5% maiores erros removidos	22
Tabela 2.9 Médias e Erros-padrão dos Erros Quadráticos Médios para os vértices internos dos dados a partir de janeiro de 2004	23
Tabela 2.10: Médias e Erros-padrão dos Erros Quadráticos Médios para os dados a partir de janeiro de 2013	23
Tabela 2.11: Médias e Erros-padrão dos Erros Quadráticos Médios para os dados a partir de janeiro de 2013, com os 5% maiores erros removidos	24
Tabela 2.12: Médias e Erros-padrão dos Erros Quadráticos Médios para os vértices internos dos dados a partir de janeiro de 2004	24

Introdução

Este trabalho tem como objetivo principal analisar e comparar o desempenho entre diferentes métodos de estimação por interpolação da estrutura a termo da taxa de juros (ETTJ, daqui em diante) para o caso específico da economia brasileira. Mais especificamente, o interesse deste trabalho se voltará para a estimação da ETTJ através de estimação por interpolação das taxas observadas nas operações diárias de futuro de DI.

A ETTJ é uma curva contínua que associa uma taxa de juros a cada possível maturidade (Caldeira, 2011). A ETTJ pode ser definida com base nas taxas de títulos de diferentes classes de crédito, desde que os títulos escolhidos pertençam à mesma classe de crédito. Segundo nota técnica da Anbima de 2010, podemos entender que para estimar a curva de juros devemos assumir que o preço de um título de renda fixa é exatamente igual ao fluxo de caixa futuro que foi prometido pelo emissor através de contrato e trazido a valor presente por uma função desconto.

O conhecimento sobre a ETTJ em um dado momento, portanto, permite aos agentes econômicos tomarem melhores decisões de alocação intertemporal de seus recursos ao lhes dar a taxa a ser usada para descontar tais fluxos futuros. Segundo Hull (2002), existem três teorias que buscam explicar a ETTJ: Teoria das Expectativas, Teoria da Segmentação de Mercado e Teoria da Preferência pela Liquidez. A ETTJ é um dos dados utilizados por gestores e outros agentes do mercado financeiro no seu processo decisório, permite aos formuladores da Política Monetária ter acesso às expectativas de juros do mercado e pode ser utilizada na precificação de outros ativos de renda fixa e derivativos (Caldeira & Torrent, 2011). Por esses motivos é importante conhecermos as capacidades preditivas dos diferentes métodos à disposição para estimar essa curva.

Segundo o site da B3, o Depósito Interfinanceiro (DI) é um título de renda fixa negociado apenas entre bancos e outras instituições do mercado financeiro e é utilizado para captar recursos, aplicar excedentes e realizar fechamento de caixa. Esses títulos são considerados títulos de baixo risco. Os títulos DI negociados diariamente na B3 pelos bancos, por sua vez, dão origem à Taxa DI. A taxa é composta diariamente através de uma média ponderada das taxas utilizadas em transações diversas utilizando títulos DI. Segundo Assaf Neto (2011, p. 65), a taxa DI pode ser admitida como livre de risco. Também de acordo com o site da B3, esta

taxa é utilizada atualmente pelo mercado como um dos principais *benchmarks*. Dessa forma, a taxa DI pode ser utilizada de forma segura para aproximar a ETTJ livre de risco da economia brasileira.

O futuro de taxa DI (DI1), negociado na B3 é um contrato de valor nominal de R\$100.000,00 na data de vencimento, cujo valor na data de negociação é igual àquele valor nominal descontado pela taxa negociada. A posição de cada contrato é atualizada diariamente de acordo com um fator de correção, de forma que o investidor recebe ao final do contrato o equivalente à diferença entre a taxa negociada e a taxa DI efetiva no período, aplicada ao montante do contrato. Os futuros de DI são contratos disponíveis. As taxas desses futuros de DI exprimem, portanto, os valores que o mercado como um todo compreende como livres de arbitragem para a taxa DI nos respectivos vencimentos. Como são negociados em pregão, esses contratos são padronizados e apenas alguns vencimentos estão disponíveis em cada data, de forma que se faz necessário realizar a interpolação das taxas para se ter acesso ao formato completo da ETTJ implícita a cada dia.

Através da comparação dos resultados das estimativas dos métodos de interpolação dos dados, será possível identificar quais dos métodos são capazes de melhor estimar a ETTJ para o caso brasileiro.

Revisão Bibliográfica

Dois grupos distintos de métodos para realizar essa estimação surgem na literatura (Monteiro & Salles, 2001). O primeiro deles envolve a derivação da ETTJ através de modelagem econômica, seja via equilíbrio geral ou arbitragem zero. Já o segundo o faz empiricamente e utilizando as mais diversas técnicas de interpolação e extrapolação a partir das taxas observadas dos diferentes títulos disponíveis nos mercados. Este segundo grupo pode ainda ser dividido entre métodos paramétricos e métodos não paramétricos.

O trabalho fundamental para os modelos de equilíbrio geral é o de Vasicek (1977), que estabelece um modelo no qual se chega à taxa de juros de curto prazo. Outra referência para esse grupo é o modelo proposto por Cox, Ingersoll e Ross (1985). Os modelos de equilíbrio geral usualmente utilizam pressupostos principalmente sobre os prêmios de risco para deduzir as taxas relativas a outras maturidades. Para os modelos de arbitragem zero, os principais trabalhos são os de Hull e White (1990) e de Heath et al (1992).

Para os modelos não paramétricos, os trabalhos pioneiros são os de McCullough (1971, 1975), que exploram o uso de splines quadráticas e posteriormente cúbicas para estimar a ETTJ, e serve de fundamento para grande parte da literatura para esse tipo de modelo. Fama e Bliss (1987) derivam as taxas de juros a termo aplicando uma função de desconto aos preços dos títulos. Segundo Ribeiro (2007), esse modelo é conhecido como *flat forward* ou *bootstrap* e tem adoção ampla no mercado financeiro brasileiro. O trabalho de Fisher et al (1995) introduz suavização ao modelo com splines cúbicas de McCullough, penalizando polinômios com muitas variações, obtendo assim polinômios que em tese se ajustam melhor à maioria dos dados empíricos.

Já entre os modelos paramétricos se destacam os trabalhos de Nelson e Siegel (1987) e a expansão do modelo Nelson-Siegel por Svensson (1994). O modelo final de Nelson-Siegel-Svensson estabelece uma forma funcional para as taxas a ser estimada econometricamente por MQO que estabelece para a taxa de juros um componente de longo prazo (β_0), um componente de curto prazo (β_1) e dois componentes de médio prazo (β_2 e β_3) - também chamados de “corcovas” - com seus respectivos parâmetros de decaimento (τ_1 e τ_2 , respectivamente) que

estabelecem também quando ambas as “corcovas” atingem seus máximos. Como exposto por Aljinović et al, o modelo de Nelson-Siegel-Svensson e suas derivações são utilizados para a estimação da ETTJ por diversos Bancos Centrais no mundo.

Finalmente, na literatura de comparação entre diferentes métodos de estimação da curva de juros para o caso brasileiro podemos citar o trabalho de Ribeiro (2007), que compara os métodos estabelecidos por McCullough, Nelson-Siegel, Fama-Bliss e Fisher-Nychka-Zervos, utilizando critérios de comparação estabelecidos em Bliss (1987) e que chega à conclusão de que segundo os critérios mencionados, o modelo de splines cúbicas de McCullough se mostrou vantajoso em relação aos demais.

Muitos dos métodos de estimação, porém, tem o problema de serem computacionalmente caros e impedirem os gestores de tomarem decisões em termos de poucos minutos ou segundos. Este trabalho busca investigar quais entre os modelos de interpolação linear, exponencial e por splines cúbicas qual obtém melhores resultados para interpolação da ETTJ e se há diferenças significativas nos seus tempos de resposta.

Dados

Os dados utilizados neste trabalho são referentes às negociações de contratos de futuros de DI de um dia (DI-1) nos pregões da BM&F, BM&FBOVESPA e B3 de julho de 1994 a setembro de 2019 e foram compilados e cedidos pela pessoa orientadora desta monografia. A data início foi escolhida para coincidir o lançamento do Plano Real. Tentativas de recriar ou mesmo estender os dados aqui utilizados foram infrutíferas, já que na presente data a B3 não mais disponibiliza publicamente estas séries de dados no mesmo formato, sendo disponibilizados apenas em forma de boletins diários. Os dados originais estão compilados em 17 arquivos distintos, compreendendo períodos disjuntos que totalizam o período total analisado. Os arquivos possuem colunas distintas em alguns casos, mas os dados necessários para este trabalho estão dispostos em todos os arquivos. Um arquivo completo contendo toda a intersecção de colunas entre os 17 arquivos foi gerado. Além disso, a base também apresenta dados de diferentes formas de negociação em linhas diferentes, em geral com preços de cotação diferentes. Há diversas colunas de cotação presentes nos arquivos, a escolhida para ser interpolada foi a relativa ao ajuste diário. Já entre as colunas de dias corridos até o vencimento e dias úteis até o vencimento, foi escolhida a de dias úteis. Todos os procedimentos adiante de adequação, limpeza e de aplicação dos métodos de interpolação neste trabalho foram realizados em código Python utilizando as bibliotecas Pandas, NumPy e SciPy.

Em relação à adequação dos dados para processamento, descrevem-se a seguir os procedimentos que foram realizados. Foram removidas as linhas que apresentassem zero negócios efetuados ou que tivessem a coluna de cotação com preço zerado. Após essa primeira filtragem, foram selecionadas apenas datas com 3 ou mais vencimentos distintos disponíveis, para que pudesse ser realizado o procedimento de interpolação de cada uma das taxas pelas outras (validação cruzada do tipo *leave-one-out*). Após isso, foi realizada uma ponderação pelo número de negócios efetuados dos preços de cada forma de negociação numa mesma data e vencimento, de maneira que cada um dos pares data-vencimento possuisse uma e apenas uma cotação. Em seguida, foi derivada através da cotação e do vencimento a taxa de juros ao ano implícita para cada linha, utilizando-se a

seguinte fórmula: $i = (100.000/cotac\tilde{o})^{(252/vencimento)} - 1$. Foram então criados para cada linha os vetores de outros vencimentos e cotações da mesma data a serem utilizados na interpolação. Seguem alguns resultados de análise descritiva da base final:

	vencimento	negócios	cotação	taxa
mean	627.345372	930.263772	77285.610511	0.144125
std	629.295784	3095.466938	18759.084051	0.076508

Tabela 1.1: Médias e Erros-padrão das variáveis Vencimento, Negócios Efetuados, Cotação e Taxa a.a.

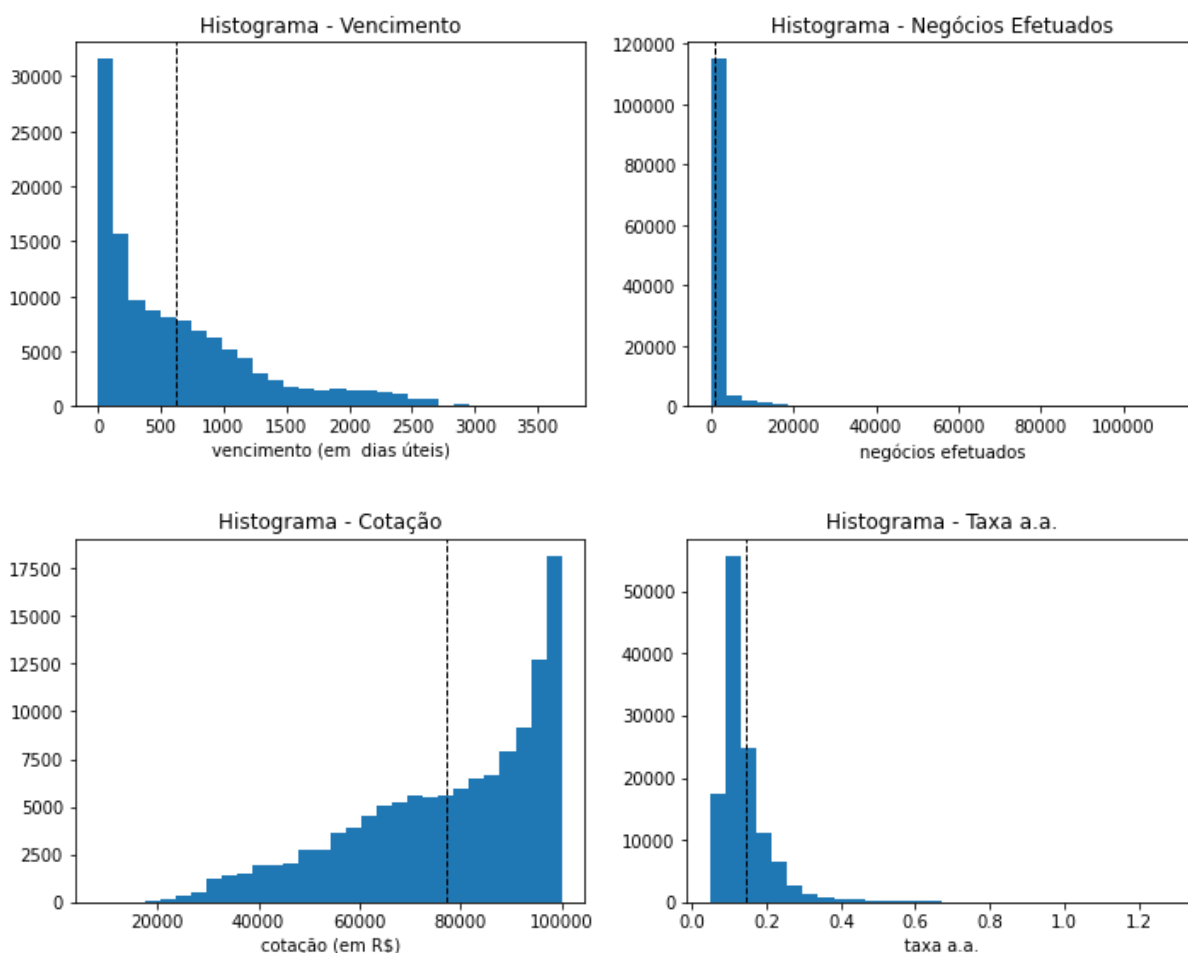


Figura 1.1: Histogramas das variáveis Vencimento, Negócios Efetuados, Cotação e Taxa a.a.

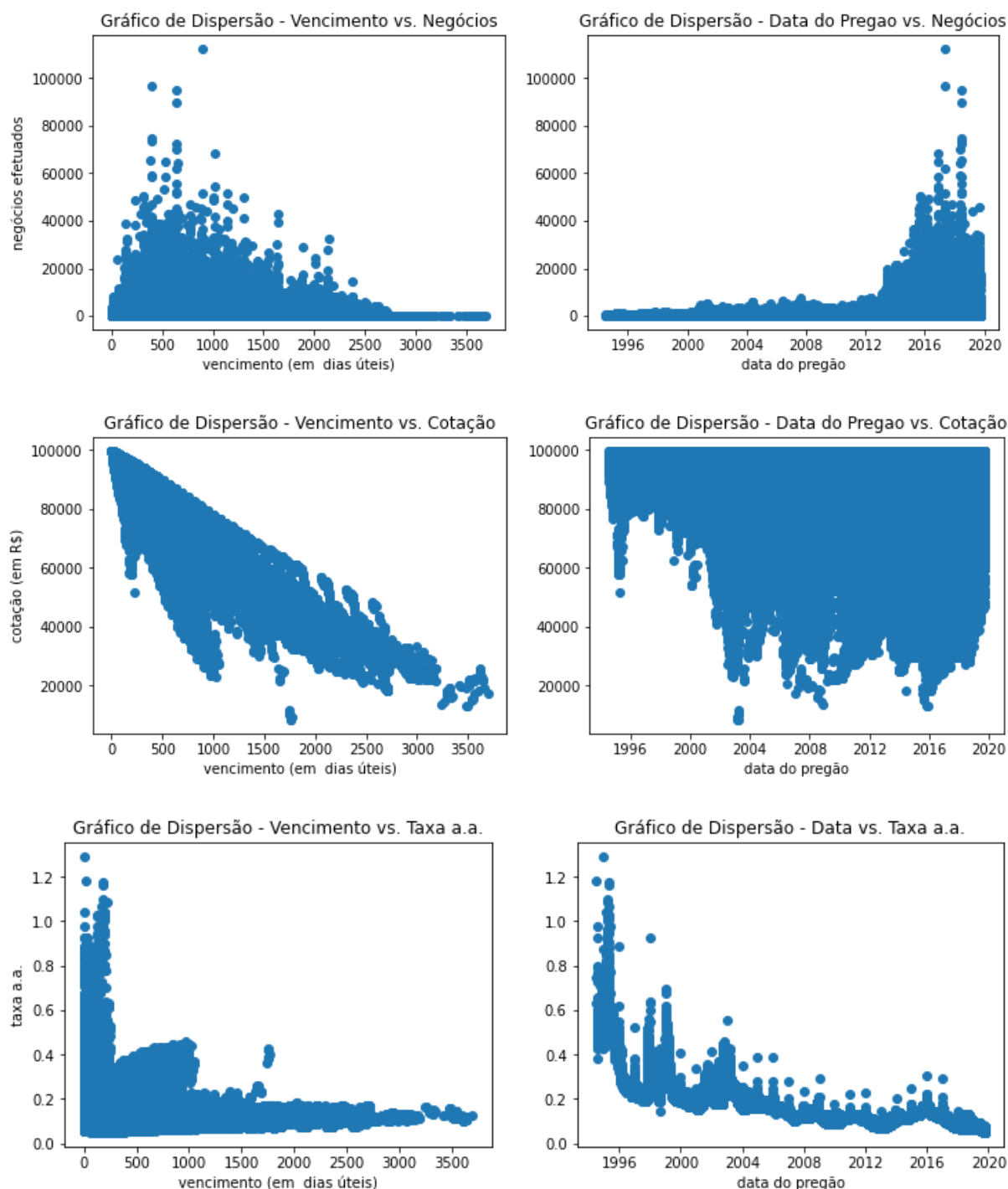


Figura 1.2: Gráficos de Dispersão das variáveis Negócios, Cotação e Taxa a.a contra Vencimento e Data

Como vemos do gráfico de dispersão entre vencimento em dias úteis e cotação em R\$, o valor da cotação parece decair com os vencimentos, o que representa que datas mais futuras são de fato mais descontadas. Esse é um resultado esperado.

Além disso, podemos ver que a maior parte dos contratos negociados foram para até cerca de 2,5 anos da data de negociação, o que nos diz que os agentes tendem a tentar operar com mais frequência as taxas mais próximas.

Vemos também uma tendência de queda no período na faixa onde se situam as taxas a.a., bem como um aumento significativo dos negócios efetuados, sobretudo a partir de meados de 2013.

Metodologia

Os métodos de interpolação escolhidos para este trabalho foram os de interpolação linear, interpolação exponencial e por splines cúbicas. A medida escolhida para comparar os resultados foi a de erros quadráticos médios. Para aplicar os métodos e realizar as medidas, foram utilizadas as implementações disponibilizadas pela biblioteca SciPy.

Para obter o resultado da interpolação linear, é necessário calcular a seguinte fórmula:

$$\bar{y}_{lin} = y_0 + (y_1 - y_0) \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

Onde \bar{y} é a taxa desconhecida a ser interpolada, x é o seu vencimento, x_0 e x_1 são, respectivamente, os vencimentos anteriores e posteriores ao vencimento x na data e y_n é a taxa correspondente ao vencimento x_n .

A mesma fórmula pode ser utilizada para se fazer a interpolação exponencial, desde que se utilize o log das taxas conhecidas, e se aplique a exponencial no resultado. Assim:

$$\bar{y}_{exp} = \exp\{\log(y_0) + [\log(y_1) - \log(y_0)] \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}\}$$

Já o modelo de splines cúbicas separa os dados em $n - 1$ intervalos (onde n é o número de pontos conhecidos da função a ser interpolada), e cria polinômios seccionados de grau 3 que interpolam o valor da função em seus respectivos intervalos e se “encontram” nos pontos conhecidos da função (chamados de nós). Como cada polinômio tem 4 coeficientes, temos um total de $4(n - 1)$ coeficientes a encontrar. Esses polinômios devem ser tais que nos nós (ou seja, onde a função passa de ser interpolada por um polinômio a ser por outro), os polinômios de cada lado devem ter valores iguais ao y conhecido correspondente a x e também ter derivadas primeira e segunda coincidentes. Além disso, para as chamadas splines naturais, nas extremidades iniciais e finais dos valores conhecidos onde, portanto, não há secção de um polinômio para outro, são colocadas condições adicionais para

as derivadas segundas. Dessa forma, para cada um dos $n - 2$ nós internos temos quatro restrições:

- I. $S_i(x_j) = y_j$
- II. $S_{i+1}(x_j) = y_j$
- III. $S'_i(x_j) = S'_{i+1}(x_j)$
- IV. $S''_i(x_j) = S''_{i+1}(x_j)$

De maneira similar, para ambos os nós extremos duas restrições são impostas:

- I. $S_i(x_j) = y_j$
- II. $S''_i(x_j) = 0$

Terminamos então com $4(n - 2) + 4 = 4(n - 1)$ equações para determinar a mesma quantidade de coeficientes dos polinômios e o sistema é possível e determinado.

A estratégia escolhida para realizar a validação dos métodos de interpolação foi de validação cruzada do tipo *leave-one-out*, em que se remove cada ponto de observação da massa de dados uma vez e utiliza-se o restante dos dados para interpolar aquele. Ou seja, para uma determinada data com os pares de observação (x_0, y_0) , (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , utilizam-se (x_0, y_0) e (x_1, y_1) para interpolar y_2 através de x_2 . A medida utilizada para comparar os resultados foi a de erro absoluto médio.

Resultados

Ao aplicar inicialmente a metodologia descrita aos dados escolhidos, temos as seguintes estatísticas descritivas relativas aos erros. Todas as tabelas e figuras neste capítulo foram elaboradas pelo autor da presente monografia.

	erro_linear	erro_exponencial	erro_spline_cubica
mean	0.001487	0.001516	0.007329
std	0.010839	0.017033	0.402339

Tabela 2.1: Médias e Erros-padrão dos Erros Quadráticos Médios dos Métodos de Interpolação

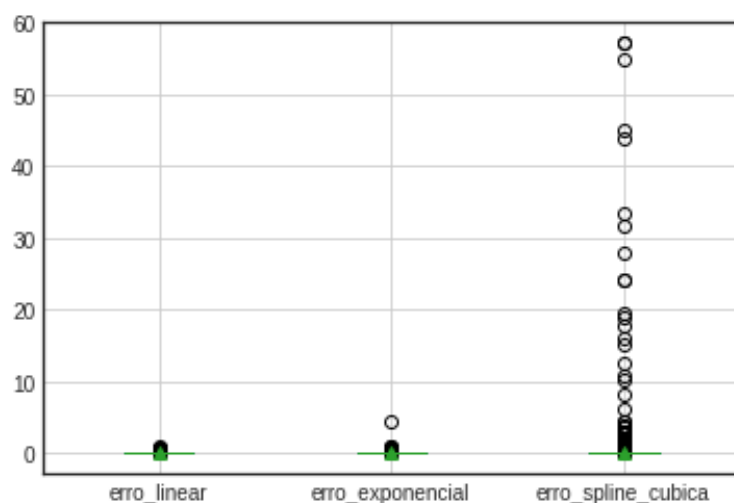


Figura 2.1: Boxplot dos Erros Quadráticos Médios

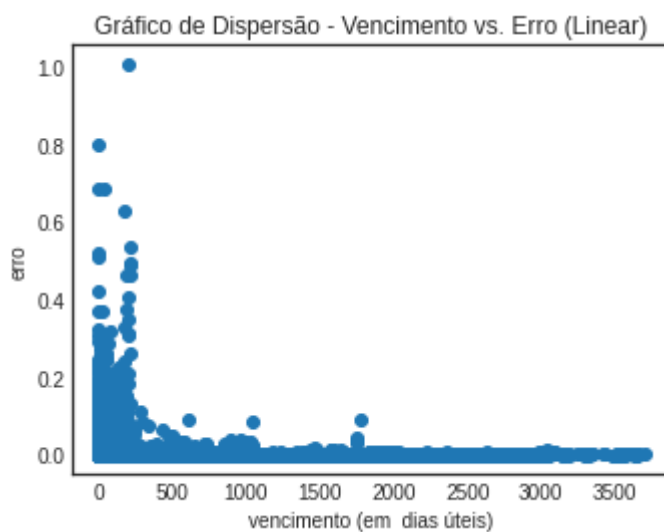


Figura 2.2: Dispersão dos Erros Quadráticos Médios do Método de Interpolação Linear

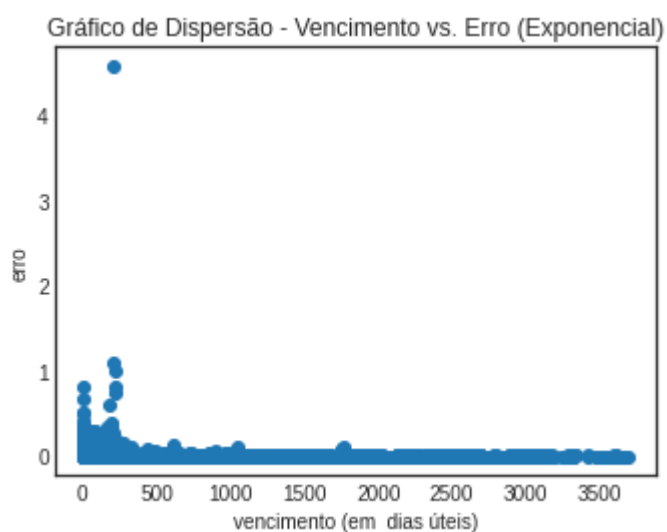


Figura 2.3: Dispersão dos Erros Quadráticos Médios do Método de Interpolação Exponencial

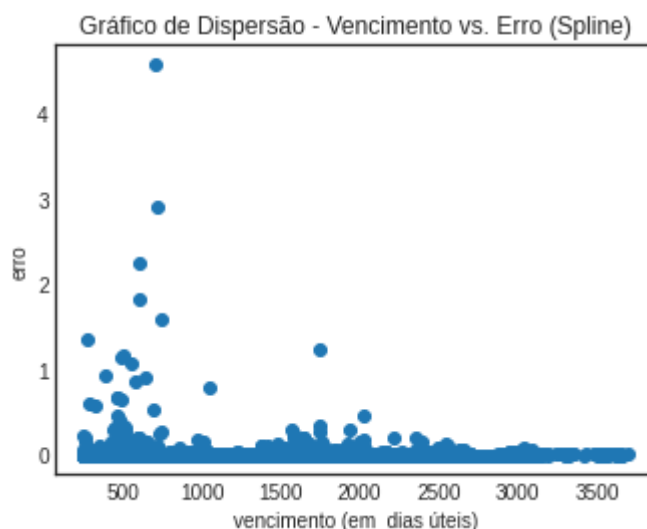


Figura 2.4: Dispersão dos Erros Quadráticos Médios do Método de Interpolação por Splines

Como vemos, o método de splines cúbicas conforme descrito neste trabalho apresenta os piores resultados, tanto em termos de média dos erros absolutos médios quanto de sua distorção. Por outro lado, o método de interpolação linear apresenta erros médios absolutos com média e dispersão menores.

Dos gráficos de dispersão, percebemos que a dispersão dos erros varia com os vencimentos, com muitos dos maiores erros agrupados nos vencimentos menores. Aqui podemos ver um problema em geral com o método de splines, que aparenta ter uma dispersão de erros maior ao longo de toda a curva quando comparado com os demais métodos. Isso pode indicar que, mesmo que haja um intervalo de vencimentos no qual o método resulte em médias menores, ainda é possível que a sua dispersão seja maior.

Removendo os erros acima do 95º percentil para cada um dos métodos, os resultados do método de splines cúbicas melhora comparativamente, mas permanece sendo o pior dentre os três. Os resultados do método exponencial se aproximam também dos resultados do método linear, mas o segundo continua sendo mais eficaz e com menor dispersão, como vemos nas estatísticas abaixo:

	erro_linear	erro_exponencial	erro_spline_cubica
mean	0.000444	0.000446	0.000605
std	0.000649	0.000653	0.001125

Tabela 2.2: Médias e Erros-padrão dos Erros Quadráticos Médios removendo os 5% maiores erros

Os métodos, porém, foram aplicados tanto nos vértices internos quanto nos externos da curva, de forma que todos os métodos realizam extrapolação em alguma medida para o primeiro e o último vencimentos disponíveis em cada dia. Podemos então refazer os cálculos dos erros, removendo estes vértices mais extremos. Fazendo isto e também retirando os 5% maiores erros, vemos que o método de splines cúbicas se aproxima ainda mais dos demais:

	<code>erro_linear</code>	<code>erro_exponencial</code>	<code>erro_spline_cubica</code>
mean	0.000331	0.000332	0.000358
std	0.000405	0.000407	0.000473

Tabela 2.3: Médias e Erros-padrão dos Erros Quadráticos Médios apenas para os vértices externos

Como vimos anteriormente, os vencimentos mais longos apresentam uma quantidade menor de operações diárias, e também são menos operados. Podemos então verificar o desempenho de cada um dos métodos apenas para aqueles vencimentos a até 1,5 erro padrão em dias úteis da média¹ e também removendo os 5% maiores erros. Novamente, os resultados usuais persistem:

	<code>erro_linear</code>	<code>erro_exponencial</code>	<code>erro_spline_cubica</code>
mean	0.000478	0.000481	0.000653
std	0.000716	0.000720	0.001230

Tabela 2.4: Médias e Erros-padrão dos Erros Quadráticos Médios para os vencimentos a até 1571 d.u.

Também notamos nos gráficos de dispersão de erros uma certa tendência a erros maiores nos vencimentos mais próximos. Ao utilizar um corte para remover os vencimentos menores do que 100 dias úteis, os resultados gerais ficam bem próximos entre os três métodos, mas sem perda de generalidade dos resultados anteriores. As estatísticas abaixo também removem os 5% maiores erros:

¹ A saber, 1.571 d.u.

	erro_linear	erro_exponencial	erro_spline_cubica
mean	0.000248	0.000251	0.000255
std	0.000253	0.000257	0.000275

Tabela 2.5: Médias e Erros-padrão dos Erros Quadráticos Médios apenas para os vencimentos a partir de 100 d.u.

Aplicando todas as técnicas mencionadas anteriormente, as médias dos erros do método de interpolação linear caem drasticamente (bem como sua dispersão), mas as estatísticas dos erros dos demais métodos não se alteram consideravelmente com relação à última técnica:

	erro_linear	erro_exponencial	erro_spline_cubica
mean	0.00023	0.000232	0.000226
std	0.00022	0.000223	0.000221

Tabela 2.6: Médias e Erros-padrão dos Erros Quadráticos Médios aplicando todas as técnicas anteriores

Finalmente, como verificamos nas estatísticas descritivas dos dados, há não só uma variação considerável no nível das taxas entre o começo da série, como também na quantidade de contratos negociados no final do período. Podemos então aplicar os métodos para duas outras datas de início, mais recentes: janeiro de 2004 e janeiro de 2013. A primeira foi escolhida para verificar se a mudança no nível das taxas é relevante, enquanto a segunda incorpora também o aumento percebido nas negociações diárias de contratos de futuro DI. Para cada uma dessas datas início, iremos calcular as estatísticas dos erros da metodologia conforme inicialmente descrita, para metodologia com a remoção dos 5% maiores erros, e com a metodologia apenas para os vértices internos da curva (e também com os 5% maiores erros removidos). Em nenhum dos casos modificamos as conclusões anteriores.

I. Estatísticas dos erros para os dados a partir de janeiro de 2004:

	<code>erro_linear</code>	<code>erro_exponencial</code>	<code>erro_spline_cubica</code>
mean	0.000452	0.000450	0.000778
std	0.002079	0.002024	0.004255

Tabela 2.7: Médias e Erros-padrão dos Erros Quadráticos Médios para os dados a partir de janeiro de 2004

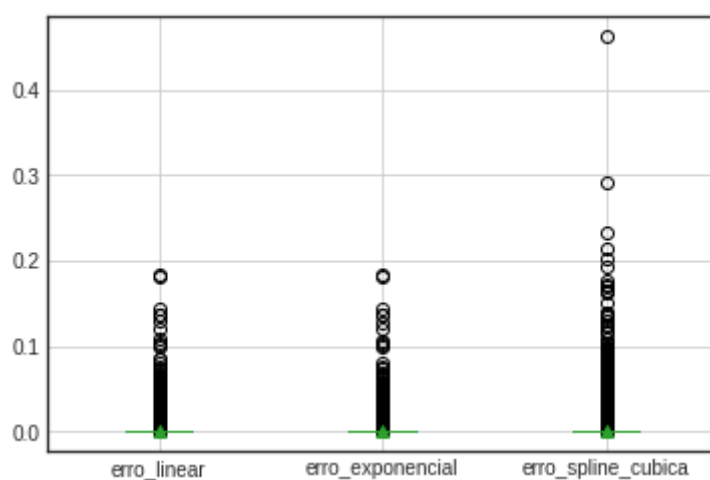


Figura 2.5: Boxplot dos Erros Quadráticos Médios para os dados a partir de janeiro de 2004

	<code>erro_linear</code>	<code>erro_exponencial</code>	<code>erro_spline_cubica</code>
mean	0.000258	0.000259	0.000296
std	0.000266	0.000266	0.000366

Tabela 2.8: Médias e Erros-padrão dos Erros Quadráticos Médios para os dados a partir de janeiro de 2004, com os 5% maiores erros removidos

	erro_linear	erro_exponencial	erro_spline_cubica
mean	0.000226	0.000227	0.000233
std	0.000213	0.000213	0.000227

Tabela 2.9 Médias e Erros-padrão dos Erros Quadráticos Médios para os vértices internos dos dados a partir de janeiro de 2004

II. Estatísticas dos erros para os dados a partir de janeiro de 2013

	erro_linear	erro_exponencial	erro_spline_cubica
mean	0.000334	0.000333	0.000505
std	0.001648	0.001607	0.002458

Tabela 2.10: Médias e Erros-padrão dos Erros Quadráticos Médios para os dados a partir de janeiro de 2013

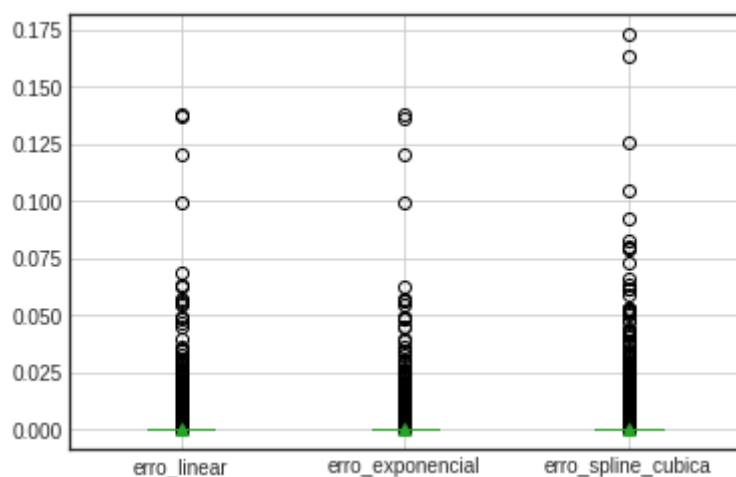


Figura 2.6: Boxplot dos Erros Quadráticos Médios para os dados a partir de janeiro de 2013

	erro_linear	erro_exponencial	erro_spline_cubica
mean	0.000193	0.000194	0.000217
std	0.000173	0.000173	0.000218

Tabela 2.11: Médias e Erros-padrão dos Erros Quadráticos Médios para os dados a partir de janeiro de 2013, com os 5% maiores erros removidos

	erro_linear	erro_exponencial	erro_spline_cubica
mean	0.000176	0.000176	0.000189
std	0.000146	0.000146	0.000167

Tabela 2.12: Médias e Erros-padrão dos Erros Quadráticos Médios para os vértices internos dos dados a partir de janeiro de 2004

Conclusão

As técnicas de interpolação da estrutura a termos da taxa de juros são técnicas importantes para determinarmos com alguma precisão as curvas de juro do mercado brasileiro. Por sua vez, podemos utilizar este conhecimento para precificar ativos com fluxos de investimentos diversos àqueles apresentados pelos próprios papéis disponíveis no mercado.

Vimos neste trabalho que podem existir diferenças significativas entre as diversas técnicas aqui analisadas. No entanto, de maneira global, identificamos que o método de interpolação linear se mostrou não só menos viesado, como também mais acurado. A interpolação exponencial apresentou resultados aproximadamente tão satisfatórios quanto o da interpolação linear na maioria dos casos. Por fim, não foi possível identificar circunstâncias sob as quais o método de interpolação por splines cúbicas se mostrasse superior aos demais; pelo contrário, em muitos dos casos este método apresentou resultados bastante inferiores.

Os resultados aqui encontrados não são totalmente compatíveis com boa parte da literatura internacional e nacional sobre o tema, que no geral aponta resultados bastante satisfatórios para a técnica de splines cúbicas.

Alguns fatores podem ter contribuído para o resultado divergente encontrado: a escolha de método de validação cruzada por *leave-one-out*, a escolha dos erros absolutos médios como medida comparativa, a dificuldade de reconstituir e estender os dados aqui utilizados, da própria escolha de títulos futuros de DI, da escolha pelas datas iniciais e outras condições utilizadas nos testes, bem como eventuais problemas de implementação dos métodos e/ou dos tratamentos dos dados. Ainda assim é possível que, por ser a ETTJ uma curva usualmente monotônica, as splines não adicionem de fato capacidade preditiva maior para o caso brasileiro.

Referências Bibliográficas

ALJINOVIĆ, Z., POKLEPOVIĆ, T., & KATALINIĆ, K. (2012). Best fit model for yield curve estimation. *Croatian Operational Research Review*, 3(1), 28-40.

ANBIMA. Estimação a Termo das Taxas de Juros Estimada e Inflação Implícita Metodologia. Versão Abril 2010. Disponível em: https://www.anbima.com.br/data/files/18/42/65/50/4169E510222775E5A8A80AC2/est-termo_metodologia.pdf. Acesso em: 5 de agosto de 2021.

ASSAF NETO, A (2011). Mercado Financeiro. 10. São Paulo: Atlas.

B3. Depósito Interfinanceiro. Disponível em: https://www.b3.com.br/pt_br/produtos-e-servicos/registro/renda-fixa-e-valores-mobiliarios/deposito-interfinanceiro.htm. Acesso em: 9 de novembro de 2021.

B3. Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia. Disponível em: https://www.b3.com.br/pt_br/produtos-e-servicos/negociacao/juros/futuro-de-taxa-media-de-depositos-interfinanceiros-de-um-dia.htm. Acesso em: 9 de novembro de 2021.

BLISS, R. R. (1997). Testing term structure estimation methods. *Advances in Futures and Options research*, 9, pp. 197-232.

CAJUEIRO, D. O., DIVINO, J. A., & TABAK, B. M. (2009). Forecasting the yield curve for Brazil. *Central Bank of Brazil Working Paper Series*, 197. Disponível em: <http://bibliotecadigital.fgv.br/ocs/index.php/sbe/EBE08/paper/viewPDFInterstitial/444/27>. Acesso em: 25 de junho de 2021.

CALDEIRA, J. F. (2011). Estimação da Estrutura a Termo da Curva de Juros no Brasil através de Modelos Paramétricos e Não Paramétricos. *Análise Econômica*, 29(55). Disponível em: <https://www.seer.ufrgs.br/AnaliseEconomica/article/view/13198>. Acesso em: 25 de junho de 2021.

CALDEIRA, J. F., & TORRENT, H. (2011). Previsão de curvas de juros zero-cupom: Estimação não-paramétrica de dados funcionais. *Escola de Séries Temporais e Econometria*. Disponível em: <http://bibliotecadigital.fgv.br/ocs/index.php/sbe/EBE11/paper/viewPDFInterstitial/2946/1340>. Acesso em: 25 de junho de 2021.

COX, J., INGERSOLL, J. & ROSS, S. (1985). A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 53, pp. 385-408. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/1911242>. Acesso em 5 de agosto de 2021.

FAMA, E., & BLISS, R. (1987). The Information in Long-Maturity Forward Rates. *The American Economic Review*, 77(4), 680-692. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1814539>. Acesso em 5 de agosto de 2021.

HULL, J., & WHITE, A. (1990). Pricing interest-rate-derivative securities. *The review of financial studies*, 3(4), pp. 573-592. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/rfs/3.4.573>. Acesso em 5 de agosto de 2021.

MCCULLOCH, J. H. (1971). Measuring the term structure of interest rates. *The Journal of Business*, 44(1), pp. 19-31.

MCCULLOCH, J. H. (1975). The tax-adjusted yield curve. *The Journal of Finance*, 30(3), pp. 811-830.

MONTEIRO, A., & SALLES, F. M. (2001). Interpolação da curva de juros brasileira: métodos e medidas de desempenho. *Resenha BM&F*, (147), pp. 1-15.

NELSON, C. R., & SIEGEL, A. F. (1987). Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of business*, pp. 473-489.

PIENAAR, R., & CHOUDHRY, M. (2010). Fitting the term structure of interest rates: the practical implementation of cubic spline methodology. Centre for Mathematical Trading and Finance City University Business School, London. Disponível em: http://www.yieldcurve.com/Mktresearch/files/PenaarChoudhry_CubicSpline2.pdf. Acesso em: 25 de junho de 2021.

RIBEIRO, P. R. N. (2007). Comparação de modelos de estimação da estrutura a termo das taxas de Juros: um estudo exploratório do mercado brasileiro. Disponível em: <http://dspace.insper.edu.br/xmlui/handle/11224/1095>. Acesso em: 25 de junho de 2021.

SVENSSON, L. E. O. 1994 (Sept.). Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994. IMF Working Papers 94/114. International Monetary Fund.

VASICEK, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of financial economics*, 5(2), pp. 177-188.