

2299850

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

TRABALHO DE FORMATURA

ESCOAMENTO DE GASES A ALTAS VELOCIDADES

Sergio Rodrigues Sewaybricker nº 3.118.311

orientador: Prof. Dr. Marcos de Mattos Pimenta

- 1.981-

ÍNDICE

Capítulo 1- Introdução

1.1. Barreira térmica	1
1.2. O conceito de camada limite	2
1.3. Hipóteses simplificadoras para a cam. limite	4
1.4. Fator de recuperação.....	6
1.5. Perfis de temperatura.....	6

Capítulo 2- Equações básicas para a cam. limite laminar

2.1. Volume de controle	9
2.2. Equação da continuidade	9
2.3. Equação da quantidade de movimento	10
2.4. Equação da conservação da energia	10

Capítulo 3- Escoamento laminar sobre uma placa plana

3.1. Uma simplificação na eq. da energia	13
3.2. Escoamento adiabático	13
3.3. Solução particular para temp. sup. constante	14
3.4. Definição do coeficiente de película	16
3.5. Analogia de Reynolds	16
3.6. Solução da eq. da quant. de movimento	17
3.7. Resultados teóricos	20

Capítulo 4- Escoamento laminar em corpos de revolução

4.1. Equações diferenciais	25
4.2. Eq. integral da quantidade de movimento ...	27
4.3. Equação integral da energia	28

Capítulo 5- Camada limite turbulenta

5.1. Viscosidade turbilhonar	29
5.2. Número de Prandtl turbulento	31
5.3. Equações diferenciais	33

5.4. Escoamento turbulento sobre placa plana com	
$Pr = 1$	34
5.5. Fator de recuperação para escoamento turb. ..	36
Capítulo 6- Dados experimentais para o fator de recuperação	
.....	39

1.1. BARREIRA TÉRMICA

O escoamento de um flúido é sempre, em menor ou maior extensão, afetado pela dissipação de energia que ocorre entre camadas adjacentes do flúido, quando há um gradiente de velocidade.

No caso de escoamento de gases a alta velocidade sobre uma superfície, pode ser que os gradientes de velocidade que se formem, sejam tão grandes que a dissipação de energia adquira um caráter significativo e até dominante. Quando um sólido qualquer é colocado num escoamento deste tipo, ainda que em princípio tenha a mesma temperatura do gás, a dissipação de energia devido ao atrito entre camadas do flúido provocará um aumento de temperatura na região próxima à superfície do sólido, e a conseqüente transferência de calor para este.

Mais adiante será mostrado que a temperatura alcançada por um corpo isolado em uma corrente de gás a alta velocidade está mais próxima da temperatura de estagnação da corrente livre que da sua temperatura estática. Esta conclusão traz importantes implicações práticas, tais como: determinação da temperatura superficial de aviões, foguetes e projéteis; o problema do resfriamento de cabines de aeronaves a altas velocidades; determinação da temperatura superficial das pás e bocais de turbinas a gás ou a vapor; o problema de termometria a altos números de Mach; avaliação da temperatura de superfícies de túneis de vento de altas velocidades. Ela explica também, porque

o obstáculo real para vôos a velocidades extremas é a chamada "barreira térmica", já que a temperatura superficial pode ser tão alta que influa nas propriedades estruturais do material.

1.2. O CONCEITO DA CAMADA LIMITE

Do ponto de vista matemático, tanto as equações de Navier-Stokes do movimento de um fluido viscoso como a equação da energia são muito complexas. Só se conhecem soluções exatas em um número muito pequeno de casos, a maioria dos quais tem condições de contorno muito especiais e, com frequência, totalmente destituídas de valor prático. Por este motivo são aceitas soluções aproximadas destas equações, soluções exatas de versões simplificadas e, as vezes, soluções aproximadas de equações aproximadas. Isto não destrói o valor das equações fundamentais, já que são absolutamente precisas para que se compreenda fisicamente o efeito das simplificações realizadas.

Como as equações de Navier-Stokes são a expressão de um equilíbrio entre as forças de inércia, viscosas, de pressão e de campo, podem ser simplificadas desprezando alguma das forças que seja muito pequena em comparação com as demais, sempre e quando as condições de escoamento e a magnitude relativa dos termos implicados permitam. Temos uma aplicação muito importante nos casos em que se chega à conclusão que todas as forças viscosas são desprezíveis frente as de inércia e pressão. Sendo assim, pode-se supor que a viscosidade do fluido é suficientemente pequena para ser desprezada, em cujo caso as equações de Navier-Stokes se reduzem às de Euler. Esta simplificação tem muitas aplicações, entre as quais figuram as teorias gerais da aerodinâmica.

Quando se considera o escoamento de um flúido ao longo de uma superfície sólida, a suposição de uma viscosidade pequena o suficiente para ser desprezada, pode conduzir a resultados que não concordam com os ensaios práticos. Partindo da hipótese que as partículas adjacentes à superfície aderem a esta e não têm velocidade, tem que existir gradientes de velocidade no movimento flúido, já que esta deve variar de zero, nas proximidades da superfície, até um valor finito em algum ponto mais afastado. Na vizinhança imediata da superfície o gradiente pode ser tão alto que ainda que a viscosidade do flúido seja pequena o produto de ambos (o esforço viscoso) pode não ser desprezível. A extensão da região em que o esforço viscoso deve ser considerado dependerá das propriedades do flúido, da forma da superfície, da velocidade da corrente livre, etc..

Mesmo em uma região deste tipo pode ocorrer que nem todos os esforços viscosos sejam apreciáveis, nem que todas as componentes das forças de inércia sejam significativas. É sobre esta base que a teoria da camada limite foi proposta. O conceito fundamental é que no movimento de um flúido de pequena viscosidade ao longo de um contorno sólido podem-se distinguir duas regiões. Uma delas, a camada limite, é a que se encontra próxima a superfície sólida, e se define como a região em que os gradientes de velocidades são grandes o bastante para que não se possa desprezar os efeitos da viscosidade. A outra, chamada região potencial, é aquela em que a influência do sólido se reduziu a ponto que os gradientes de velocidade sejam pequenos de forma que a viscosidade do flúido possa ser desprezada.

No caso de escoamentos reais, a presença do corpo influi em todas as regiões do flúido, mas esta influência di-

minui rapidamente a medida que aumenta a distância a partir do corpo, especialmente se a viscosidade é pequena e a velocidade grande. Como esta diminuição é contínua não é possível definir um lugar geométrico preciso para o limite entre a camada limite e a região potencial. Em condições reais a espessura da camada limite é definida como aquela em que a velocidade atingiu uma certa porcentagem da de corrente livre, da ordem de 90% a 99%.

1.3. HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS PARA A CAMADA LIMITE

Com referência à fig.1.1, onde x e y são as coordenadas curvilíneas paralela e normal à superfície, e u e v as correspondentes componentes de velocidade, as simplificações básicas para a camada limite podem ser assim relacionadas:

- O efeito da viscosidade está restrito a uma estreita região de forma que a espessura da camada limite δ , é muito pequena comparada com a distância ao ponto de estagnação, x . Devido à inclinação das linhas de corrente pode-se dizer que:

$$\frac{v}{u} = (0) \frac{\delta}{x}$$

onde (0) significa "da ordem de grandeza de". Com a hipótese de $\delta/x \ll 1$, segue que a componente da velocidade normal à placa é desprezível e que a camada limite é quase paralela à superfície.

- As forças de inércia e as forças viscosas dentro da camada limite são de magnitudes comparáveis. Portanto:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = (0) \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

ou

$$\rho \frac{u^2}{x} = (0) \frac{u_{\infty}}{\delta^2} \mu$$

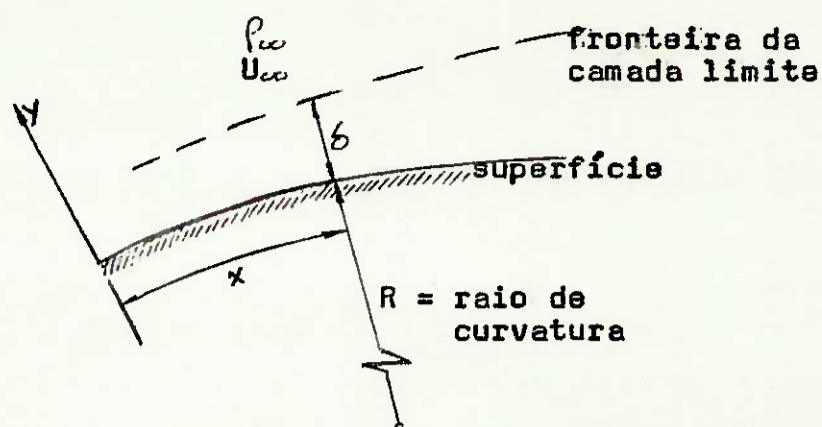


figura 1.1

dando

$$\frac{\delta}{x} = (0) \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_{\infty} x}} = (0) \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

Isto mostra que δ é proporcional a \sqrt{x} , e que a primeira hipótese não pode ser satisfeita próximo ao ponto de estagnação onde o perfil da camada limite é uma função parabólica. Especificamente, para que a primeira hipótese seja válida é necessário que a análise esteja restrita a regiões onde o número de Reynolds Re é bem maior que a unidade.

- O raio de curvatura da superfície, R , é ao menos da mesma ordem de grandeza da dimensão x . Da equação de Navier Stokes, pode ser escrito que na direção y :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = (0) \rho \frac{v^2}{R}$$

ou

$$(\Delta p)_{\text{camada limite}} = (0) \rho U_{\infty}^2 \frac{\delta}{R} = (0) \rho U_{\infty}^2 \frac{\delta}{x} \frac{x}{R}$$

Se x/R é da ordem de grandeza da unidade ou menor, significa que $(\Delta p)_{c.l.} / \rho U_{\infty}^2$ não é maior, em ordem de magnitude que δ/x . Neste caso a pressão dentro da camada limite dificilmente difere da pressão na borda da camada para um mesmo valor de x , e

justifica-se que seja assumido que a pressão dentro da camada limite varia somente com x , variação esta que é estabelecida pelo escoamento potencial fora da camada limite.

- Os gradientes de velocidade e temperatura na direção x são muito menores que os na direção y . Logo as tensões de cisalhamento viscoso associadas com o termo $\partial u / \partial x$ e a condução de calor associada com o termo $\partial T / \partial x$ podem ser ignoradas comparadas respectivamente com $\partial u / \partial y$ e $\partial T / \partial y$.

1.4. FATOR DE RECUPERAÇÃO

Uma superfície isolada numa corrente de gás a alta velocidade acaba por alcançar uma temperatura de equilíbrio, e equilíbrio este que é estabelecido quando o fluxo de calor recebido pela superfície devido à dissipação viscosa é igual ao fluxo de calor cedido, por esta, por convecção. Esta temperatura de equilíbrio é conhecida por "temperatura adiabática de superfície", T_{as} .

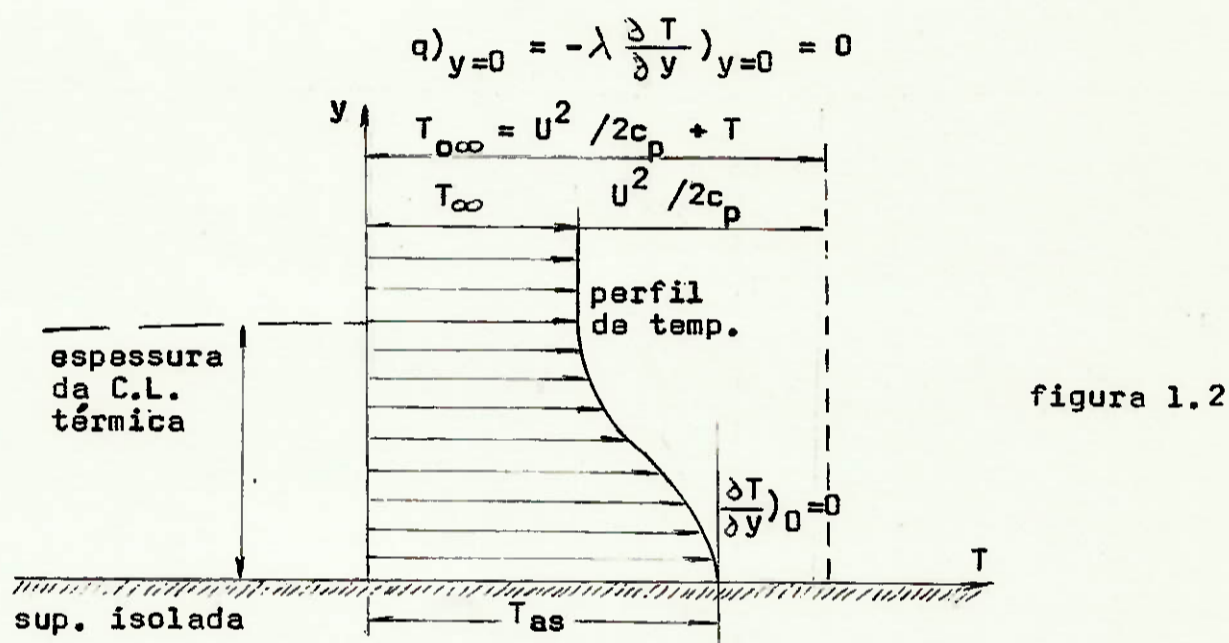
Nos gases a temperatura adiabática de superfície é sempre menor que a temperatura de estagnação da corrente livre $T_{0\infty}$. Para cálculos práticos é conveniente definir a quantidade conhecida por "fator de recuperação", r , que é dado por:

$$r = \frac{T_{as} - T_{\infty}}{u_{\infty}^2 / 2c_p} = \frac{T_{as} - T_{\infty}}{T_{0\infty} - T_{\infty}} = \frac{2}{(k - 1) M_{\infty}^2} \left(\frac{T_{as}}{T_{\infty}} - 1 \right)$$

1.5. PERFIS DE TEMPERATURA

Para ilustrar considere-se a camada limite para uma placa plana isolada termicamente em um escoamento de alta velocidade. As camadas superiores do fluido realizam trabalho de

cisalhamento viscoso nas camadas inferiores, e, consequentemente, a energia interna e a temperatura do fluido nas camadas inferiores tende a aumentar. Se não for retirado calor a partir da superfície ela tende a se aquecer juntamente com as camadas inferiores do fluido. Por outro lado, os gradientes de temperatura criados pelos efeitos viscosos incrementam a transmissão de calor por convecção da placa para o fluido chegando finalmente à temperatura de equilíbrio T_{as} , como já discutido anteriormente. A distribuição de temperaturas para este caso é mostrada na fig. 1.2. Deve-se notar que o gradiente de temperatura na superfície é igual a zero, de acordo com a lei de Fourier para a condução de calor na direção y , com a condição de fluxo calor nulo na superfície.



Se toda a placa é isolada, considerações de energia exigem que a temperatura média de estagnação na camada limite seja igual a $T_{0\infty}$. Desde que a temperatura da superfície é menor que $T_{0\infty}$, a distribuição da temperatura de estagnação dentro da camada limite deve ser da forma mostrada na fig. 1.3, com alguma parte da camada limite tendo T_{as} maior que $T_{0\infty}$.

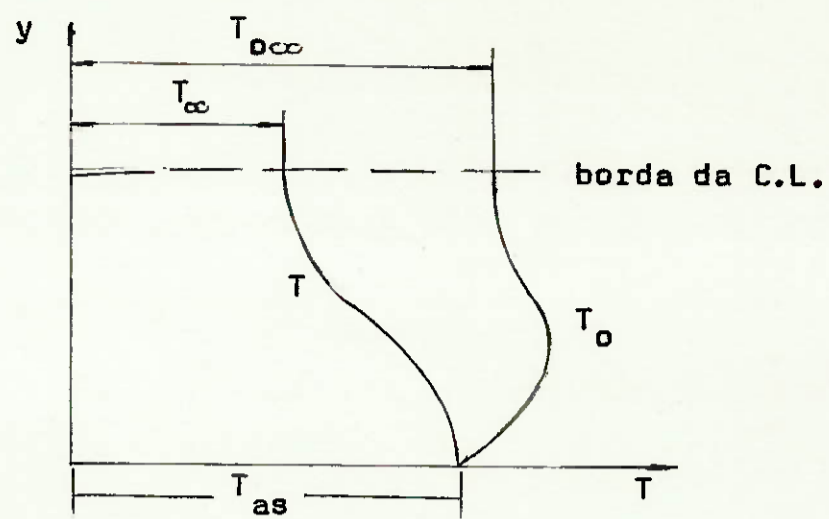


figura 1.3

Quando a superfície não é isolada a distribuição de temperaturas na camada limite, para aquecimento ou resfriamento da superfície é esquematizada na fig. 1.4. As inclinações das curvas são dadas pela lei de Fourier.

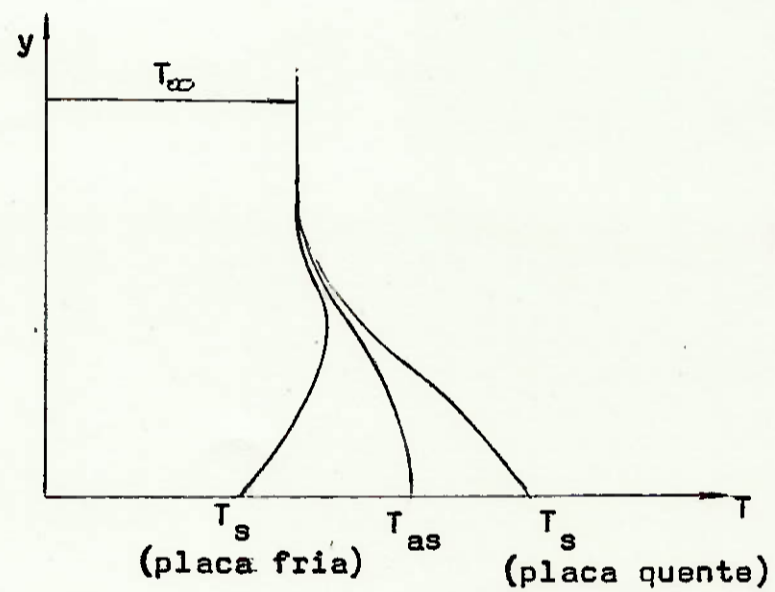


figura 1.4

Capítulo 2

EQUAÇÕES BÁSICAS PARA A CAMADA LÍMITE LAMINAR

2.1. VOLUME DE CONTROLE

As equações básicas da continuidade, da quantidade de movimento, e da conservação da energia, serão obtidas através da análise do volume de controle elementar mostrado na fig. 2.1. Será admitido escoamento bidimensional em regime permanente, em virtude disto o volume de controle infinitesimal terá espessura unitária.

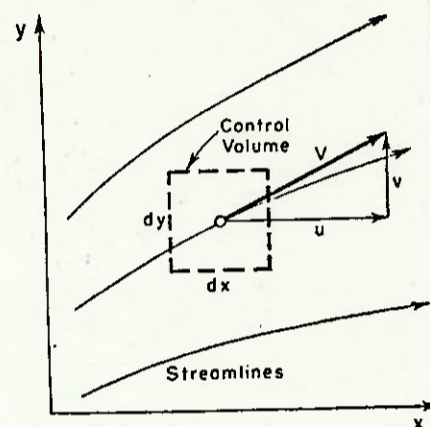


figura 2.1

2.2. EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

Conforme indica a fig. 2.2, o fluxo líquido de massa para ou do volume de controle será zero quando:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (2.1)$$

Não nenhuma simplificação possível com as hipóteses de camada limite.

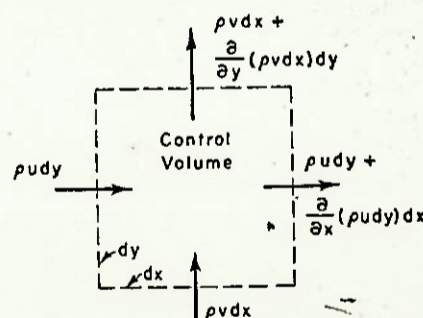


figura 2.2

2.3. EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Na fig. 2.3, estão mostrados os fluxos de quantidade de movimento e as forças atuantes no volume de controle segundo a direção x. Igualando as duas parcelas:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v u) =$$

$$= u \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) \right] + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y}$$

O termo entre colchetes é, pela equação da continuidade, igual a zero, portanto:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.2)$$

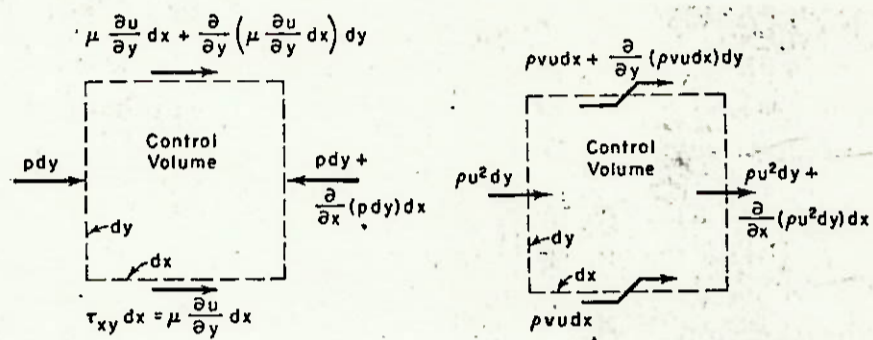


figura 2.3

Na direção y, conclui-se, diretamente das hipóteses simplificadoras da camada limite, que:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

2.4. EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

A equação da energia para o escoamento em regime permanente através de um volume de controle determina que o fluxo de entalpia mais o de energia cinética (desprezando-se as outras formas de energia) é igual ao fluxo líquido de calor mais a taxa de trabalho de cisalhamento viscoso no volume de contro

1a.

A fig. 2.4, mostra o balanço de energia para o volume de controle em estudo.

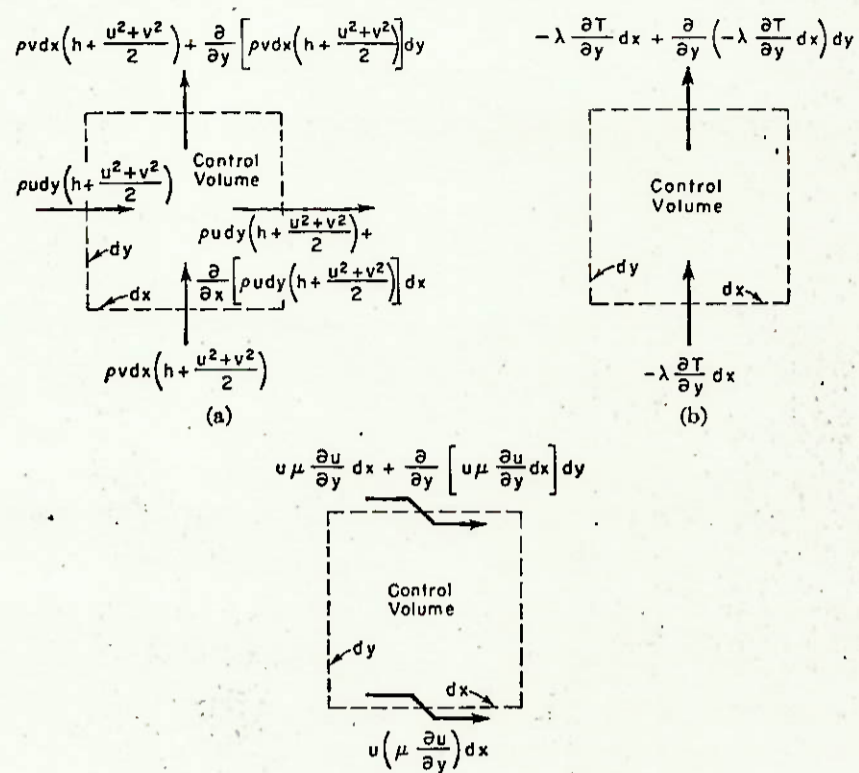


figura 2.4

O fluxo líquido de entalpia e energia cinética por unidade de área $dx dy$ é:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \left(h + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) \left(h + \frac{u^2 + v^2}{2} \right)$$

Expandindo os termos:

$$\left(h + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) \right] + \rho u \frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) + \rho v \frac{\partial}{\partial y} \left(h + \frac{u^2 + v^2}{2} \right)$$

e, da equação da continuidade, o termo entre colchetes é igual

a zero.

Admitindo comportamento de gás perfeito, $dh = c_p dT$.

Sendo assim a equação da energia pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} \rho u \left[c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) \right] + \rho v \left[c_p \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) \right] \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu u \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

A equação da energia pode ser simplificada se c_p puder ser admitido constante, isto é, independente de T . Usando a hipótese de que $v/u \ll 1$:

$$T_o = T + \frac{u^2 + v^2}{2c_p} \approx T + \frac{u^2}{2c_p}$$

e daí:

$$u \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{u^2}{2} = c_p \left(\frac{\partial T_o}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

e a equação (2.4) pode ser colocada na forma:

$$\rho u \frac{\partial T_o}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T_o}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial T_o}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{Pr} - 1 \right) \mu \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.5)$$

onde $Pr = c_p \mu / \lambda$ é o número de Prandtl.

Capítulo 3

ESCOAMENTO LAMINAR SOBRE UMA PLACA PLANA

3.1. UMA SIMPLIFICAÇÃO NA EQUAÇÃO DA ENERGIA

Devido as grandes variações de temperatura que podem existir dentro da camada limite para altas velocidades, considerações devem ser feitas sobre o comportamento de c_p, μ, λ e Pr . Para gases, a variação com a pressão destas propriedades do fluido são pequenas e não importantes para o escopo deste trabalho. As variações de c_p e Pr com a temperatura são sabidamente pequenas e não é usual levá-las em conta a não ser para números de Mach muito altos. Entretanto, μ e λ , tem uma influência significativa no comportamento da camada limite.

O número de Prandtl para gases é sempre menor que a unidade, e de maneira geral igual a 0,75. Um exame da equação da energia (2.5) mostra que ela pode ser consideravelmente simplificada se o número de Prandtl for igual a 1. Como esse valor não difere muito do valor real de Pr para gases, será admitida esta simplificação. A equação da energia passa a ser:

$$\rho u \frac{\partial T_o}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T_o}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial T_o}{\partial y} \right) \quad (3.1)$$

3.2. ESCOAMENTO ADIABÁTICO

Uma solução óbvia da equação (3.1) é:

$$T_o = T + \frac{u^2}{2c_p} = \text{constante}$$

O valor da constante é igual a T_o , uma vez que a temperatura na borda da camada limite é igual a do fluxo potencial.

Desde que a velocidade na superfície é nula concluímos que a temperatura na superfície é constante e igual a temperatura de estagnação da corrente livre. O fluxo de calor na direção y fica:

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{u}{c_p} \frac{\partial u}{\partial y}$$

de onde chega-se a conclusão que o fluxo de calor na superfície onde $u = 0$, também é nulo.

Resumindo, quando um gás com número de Prandtl unitário escoa sobre um corpo isolado, a temperatura de estagnação é constante através de toda a camada limite. A temperatura adiabática de superfície T_{as} é igual a temperatura de estagnação da corrente livre T_o . O fator de recuperação, portanto, é igual a unidade.

3.3. SOLUÇÃO PARTICULAR PARA TEMPERATURA SUPERFICIAL CONSTANTE

O fato de se admitir que o escoamento é sobre uma placa plana implica em que os gradientes de pressão na direção x se anulem. Com essa importante simplificação, a equação da quantidade de movimento fica:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.2)$$

Uma comparação entre as equações (3.1) e (3.2), mostra que elas podem ser reduzidas a mesma equação se:

$$T_o = T + \frac{u^2}{2c_p} = au + b$$

onde a e b são constantes a serem determinadas pelas condições de contorno da camada limite, que são:

$$T_o = T_o \quad \text{quando } u = u_\infty; \quad T_o = T_s \quad \text{quando } u = 0$$

Logo, para a distribuição de temperatura de estagnação:

$$\frac{T_o - T_s}{T_{o\infty} - T_s} = \frac{u}{U_\infty}$$

e como $T_o = T + (u^2/2c_p)$, a distribuição de temperatura pode ser dada por:

$$\begin{aligned} T - T_s &= (T_{o\infty} - T_s) \frac{u}{U_\infty} - \frac{u^2}{2c_p} = \\ &= (T_{o\infty} - T_s) \frac{u}{U_\infty} - \frac{k-1}{2} M_\infty^2 T_\infty \left(\frac{u}{U_\infty}\right)^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

O fluxo de calor na direção y é dado pela lei de Fourier e pela eq. (3.3) como:

$$q = \frac{\lambda}{U_\infty \delta y} \left[T_s - T_{o\infty} + (k-1) M_\infty^2 T_\infty \frac{u}{U_\infty} \right]$$

A direção do fluxo de calor depende somente do sinal da quantidade entre colchetes. Quando $T_s > T_{o\infty}$, o fluxo será na direção da corrente livre para todos os pontos da camada limite, já para $T_s < T_{o\infty}$, a direção do fluxo não é constante ao longo da camada limite, a fig. 1.4 ilustra esta discussão.

Usando a relação $\mathcal{E} = \mu (\partial u / \partial y)$, para eliminar $\partial u / \partial y$ da equação anterior, e admitindo $Pr = 1$, o fluxo de calor na direção y fica:

$$q = c_p \frac{\mathcal{E}}{U_\infty} \left[T_s - T_{o\infty} + (k-1) M_\infty^2 T_\infty \frac{u}{U_\infty} \right]$$

para qualquer ponto da camada limite. De especial importância é o fluxo de calor na superfície q_s , o qual ocorre onde $u = 0$, desta forma:

$$q_s = c_p \frac{\mathcal{E}^s}{U_\infty} (T_s - T_o) = c_p \frac{\mathcal{E}^s}{U_\infty} (T_s - T_{as}) \quad (3.4)$$

onde foi usado o fato que $T_{o\infty} = T_{as}$ quando $Pr = 1$.

3.4. DEFINIÇÃO DO COEFICIENTE DE PELÍCULA

Uma conclusão importante que pode ser tirada da eq. (3.4) é que a direção do fluxo de calor na superfície da placa não depende da diferença de temperatura entre a placa e a corrente livre: $(T_s - T_\infty)$, e sim da diferença entre a temperatura da superfície e a temperatura adiabática da superfície, o que sugere a definição de um coeficiente de película, para flúidos compressíveis, baseado nesta diferença de temperaturas $(T_s - T_{as})$

$$H = \frac{q_s}{(T_s - T_{as})} \quad (3.5)$$

3.5. ANALOGIA DE REYNOLDS

Considerando o coeficiente de arrato baseado nas propriedades do fluido na região de escoamento potencial, tem-se:

$$C_a = \frac{C_s}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2}$$

A eq. (3.4) pode então ser escrita:

$$St = \frac{H}{c_p \rho_\infty U_\infty} = \frac{C_a}{2}.$$

onde St é o número de Stanton.

Este resultado é idêntico ao da familiar analogia de Reynolds entre atrito e transferência de calor para um flúido incompressível. Pode-se concluir portanto que, pelo menos para $Pr = 1$, a analogia de Reynolds é válida também para flúidos compressíveis, desde que o coeficiente de película seja definido como o foi H. Como $St = Nu/Pr.Re$,

$$Nu_\infty = \frac{C_a}{2} Re_\infty$$

é uma outra forma da Analogia de Reynolds.

Estes resultados também são válidos para os parâmetros dimensionais avaliados a partir das propriedades do fluido na superfície.

3.6. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Para chegar à distribuição de velocidades é necessário integrar as equações da continuidade juntamente com a equação da quantidade de movimento.

O fato de se admitir que o escoamento é sobre uma placa plana implica em que os gradientes de pressão na direção x se anulam. Com essa importante simplificação, a equação da quantidade de movimento fica:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.7)$$

A equação da continuidade (2.1), é identicamente satisfeita se for introduzida a função de corrente (x, y) , cuja derivada fornece:

$$u = \frac{\rho_\infty}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \quad v = - \frac{\rho_\infty}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Efetuada uma mudança de variável a equação (3.7) fica:

$$\rho_\infty \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\mu u \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) \quad (3.8)$$

onde as derivadas parciais são tomadas com x e ψ como variáveis independentes.

A equação anterior pode ser generalizada introduzindo-se as seguintes variáveis dimensionais:

$$\tilde{u} = u/U \quad , \quad \tilde{T} = T/T \quad , \quad \tilde{x} = x/L \quad , \quad \tilde{\mu} = \mu/\mu_\infty$$

$$\tilde{\rho} = \rho/\rho_\infty \quad , \quad \tilde{\Psi} = \psi / \sqrt{\mu_\infty L U_\infty / \rho_\infty} \quad , \quad \tilde{T}_{o_\infty} = T_{o_\infty} / T_\infty$$

Agora será assumido que a relação viscosidade-tempe-

atura para um gás pode ser dada por:

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_{\infty}} = \left(\frac{T}{T_{\infty}} \right)^n = \tau^n$$

A teoria cinética dos gases prevê que $n = 1/2$, mas dados experimentais indicam que para o ar $n = 0,76$ é um bom valor.

Introduzindo estas relações na equação (3.8) resulta:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\psi}} \left(\tilde{u} \tau^{n-1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\psi}} \right) \quad (3.9)$$

A tensão de cisalhamento pode ser escrita:

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_x = \mu \frac{\rho_{\infty} u}{\rho_{\infty}} \left(\frac{\partial u}{\partial \psi} \right)_x$$

Sendo a pressão constante, a lei dos gases perfeitos indica que $T = \text{constante}$, ou em termos adimensionais $\tilde{T} = 1$.

O coeficiente de arrasto pode ser expresso, então, por:

$$C_a = \frac{Z_s}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} u_{\infty}^2} = 2 \left[\tau^{n-1} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\psi}} \right]_{\text{sup.}} \sqrt{\frac{\mu_{\infty}}{\rho_{\infty} u_{\infty} L}}$$

Convém notar que se $n = 1$ o coeficiente de arrasto é independente do número de Mach e que $C_a \sqrt{Re}$ é igual ao valor determinado por Blasius para flúidos incompressíveis, isto é 0,664.

A equação (3.9) é uma equação de derivadas parciais, mas através de outra mudança de variável, ela pode ser transformada numa equação diferencial ordinária:

$$\frac{\tilde{\eta}}{2} \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{\eta}} = \frac{d}{d\tilde{\eta}} \left(\tilde{u} \tau^{n-1} \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{\eta}} \right) \quad (3.10)$$

onde a variável $\tilde{\eta}$ é definida como:

$$\tilde{\eta} = \frac{\tilde{\psi}}{\sqrt{\tilde{x}}} = \frac{\psi}{\sqrt{u_{\infty} \mu_{\infty} x / \rho_{\infty}}}$$

A equação não linear (3.10) deve ser resolvida por aproximações sucessivas. A primeira aproximação é convenientemente assumida como a solução incompressível de Blasius.

A relação temperatura-velocidade da eq. (3.3) pode ser adimensionalizada :

$$T - T_s = (T_{\infty} - T_s) \tilde{u} - \frac{k-1}{2} M_{\infty}^2 \tilde{u}^2 \quad (3.11)$$

Dai, para uma dada T_s , o termo $\tilde{u} T^{n-1}$ pode ser computado em primeira aproximação. Se $f(\tilde{\eta}) = \tilde{u} T^{n-1}$, a eq. (3.10) pode ser escrita:

$$-\frac{\tilde{\eta}}{2} \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{\eta}} = \frac{d}{d\tilde{\eta}} \left(f \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{\eta}} \right)$$

Aplicando os métodos tradicionais de solução de equações diferenciais ordinárias não lineares, e assumindo a condição de contorno $\tilde{\eta} = 0$ quando $\tilde{u} = 0$, a solução fica:

$$\tilde{u} = K \int_0^{\tilde{\eta}} \frac{F}{f} d\tilde{\eta} \quad (3.12)$$

onde

$$F = \exp \left(- \int_0^{\tilde{\eta}} \frac{\tilde{\eta} d\tilde{\eta}}{f} \right) \quad (3.13)$$

e K é a constante de integração a ser determinada pelas condições de contorno:

$u = u_{\infty}$ quando $y = \infty$, isto é, quando $\psi = \infty$ o que, em variáveis adimensionais, fica:

$$\tilde{u} = 1 \text{ quando } \tilde{\eta} = \infty$$

Aplicando estas condições de contorno a eq. (3.12) :

$$\frac{1}{K} = \int_0^{\infty} \frac{F}{f} d\tilde{\eta} \quad (3.14)$$

Tendo avaliado $f(\)$ em primeira aproximação, $F(\tilde{\eta})$ é obtido de (3.13), K de (3.14) e finalmente $\tilde{u}(\tilde{\eta})$ de (3.12). O processo é então reiniciado para uma segunda aproximação e, posteriormente uma terceira que já fornece uma solução bastante exata.

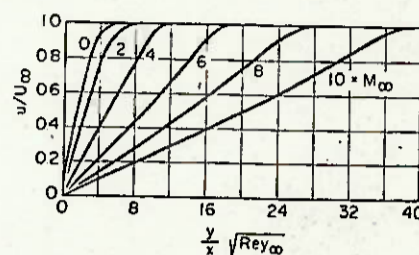
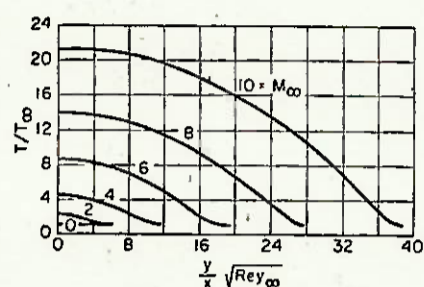
Tendo calculado $\tilde{u}(\tilde{\eta})$ com precisão aceitável, $T(\tilde{\eta})$ é obtido da eq. (3.11), e então o coeficiente de arrasto pode

ser calculado de:

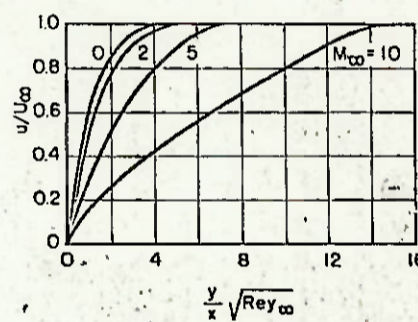
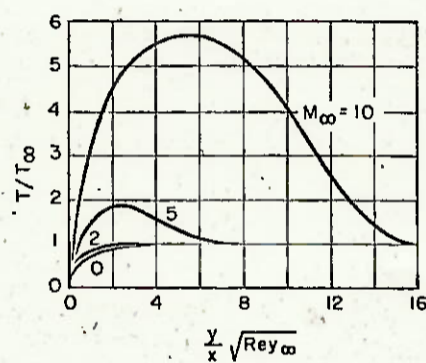
$$\sqrt{\frac{\rho_e U_{e,e} x}{\mu_{e,e}}} C_a = 2 \left(\tau^{n-1} \tilde{u} \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{\eta}} \right)_{\text{sup}}$$

3.7. RESULTADOS TEÓRICOS

- Resultados baseados nas propriedades de corrente livre:

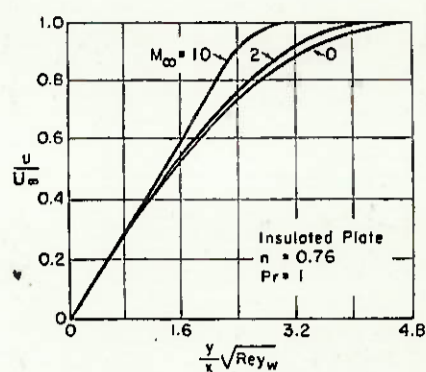


Perfis de temperatura e velocidade para escoamento sobre uma placa plana, com $Pr = 1$ e $n = 0,76$ (placa isolada)

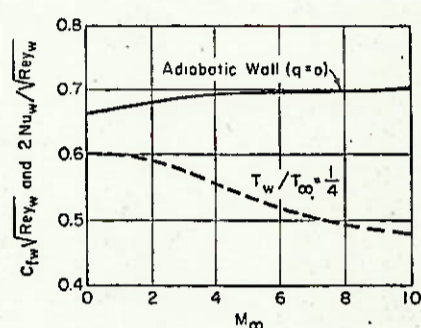


Perfis de temperatura e velocidade para escoamento sobre uma placa plana resfriada, com $T_s/T = 1/4$, $Pr = 1$, e $n = 0,76$

- Resultados baseados nas propriedades a temperatura da superfície:



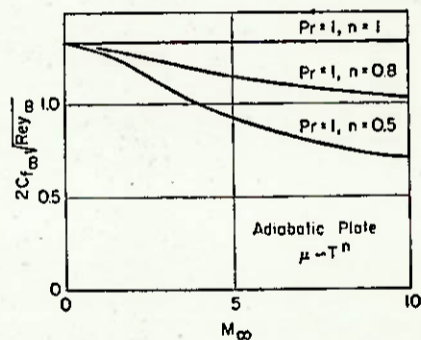
Perfis de velocidade para placa plana isolada, com $Pr = 1$, e $n = 0,76$



Coeficiente de arrasto e fluxo de calor para escoamento sobre placa plana, com $Pr = 1$, e $n = 0,76$

- Efeitos da variação de viscosidade:

Os efeitos da variação da viscosidade com a temperatura são mostrados na figura abaixo.

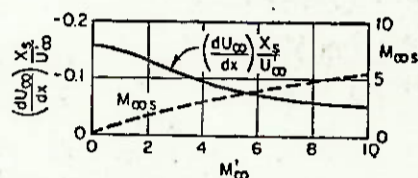


Pode-se observar que para $Pr = 1$ e $n = 1$, os coeficientes de arrasto e de transmissão de calor são independentes do número de Mach. Entretanto, com $n = 0,8$, os coeficientes decrescem como resultado da compressibilidade.

- Efeito do gradiente de pressão

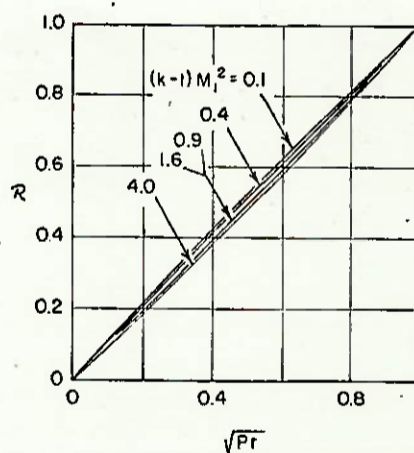
Os efeitos de um gradiente de pressão adverso na separação da camada limite, foram investigados com as hipóteses: $Pr = 1$, $n = 1$, e que a velocidade média da corrente livre cresce linearmente com a distância até a borda.

Os resultados são mostrados na figura abaixo.



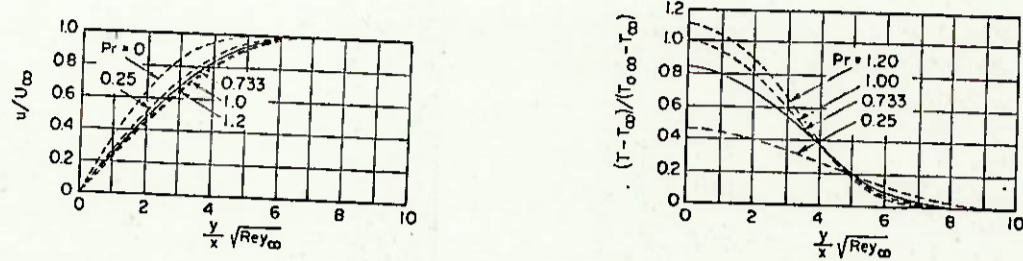
- Escoamentos com números de Prandtl arbitrários

Quando o número de Prandtl é diferente da unidade, as equações básicas somente podem ser integradas com dificuldade através de métodos iterativos, por integração numérica ou com o auxílio da análise diferencial. A seguir estão relacionados alguns resultados dessas análises.

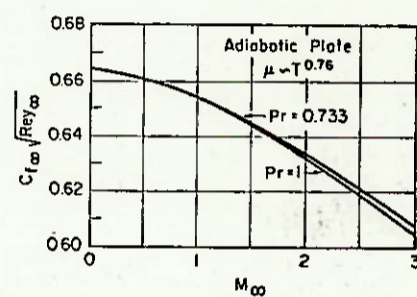


Fator de recuperação para escoamento sobre placa plana

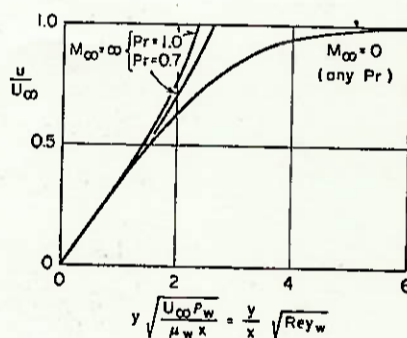
Na figura anterior percebe-se claramente que o fator de recuperação, r , quase não varia com o número de Mach, mantendo-se sempre aproximadamente igual a \sqrt{Pr} .



Efeito do nº de Prandtl na forma dos perfis de velocidade e temperatura. Placa isolada, com $(k-1)M^2 = 10$ e viscosidade constante:

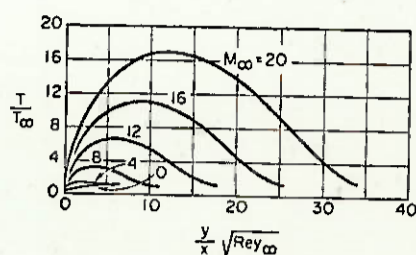
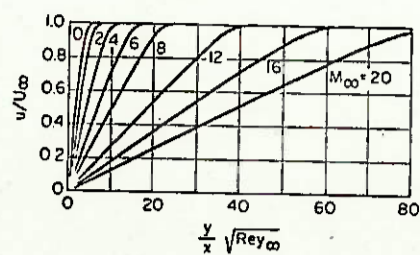


Efeito do número de Prandtl no perfis de velocidade, com as propriedades baseadas na temperatura da superfície. Placa isolada com $n = 1$.

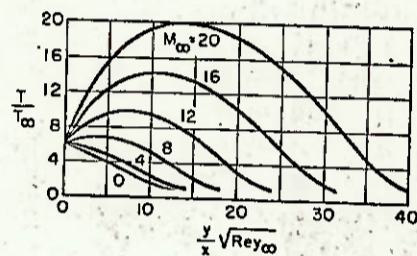
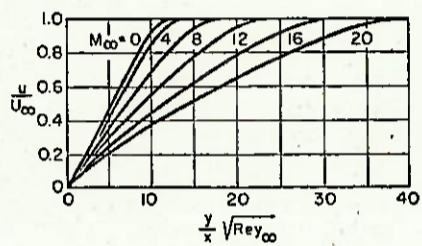


Efeito do número de Prandtl no coeficiente de arrasto. Placa plana com $n = 0,76$

- Escoamento sobre placas aquecidas ou resfriadas:



Perfis de velocidade e temperatura, placa plana resfriada, com $T_s/T_\infty = 0,25$, $Pr = 0,75$



Perfis de velocidade e temperatura, placa plana aquecida, com $T_s/T_\infty = 6$, $Pr = 0,75$

Capítulo 4

ESCOAMENTO LAMINAR EM CORPOS DE REVOLUÇÃO

4.1. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Para a fina camada limite laminar que se forma no contorno de corpos de revolução ou no interior de bocais ou dutos, as equações da quantidade de movimento e da energia são as mesmas que para escoamento laminar sobre placa plana. Por outro lado a equação da continuidade toma uma forma diferente, e assim, os resultados da análise da camada limite sobre placa plana não podem ser aproveitados diretamente, exceto para o caso especial em que o corpo tenha seção constante.

No corpo de revolução esquematizado na fig. 4.1, r é função apenas de x . Se for assumido que r é pequeno em comparação com x , e que a espessura da camada limite é pequena comparada com r , então as equações da quantidade de movimento e da energia como em (2.2) e (2.3), são válidas para escoamento axissimétrico. A equação da continuidade, entretanto, assume a forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u r) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v r) = 0 \quad (4.1)$$

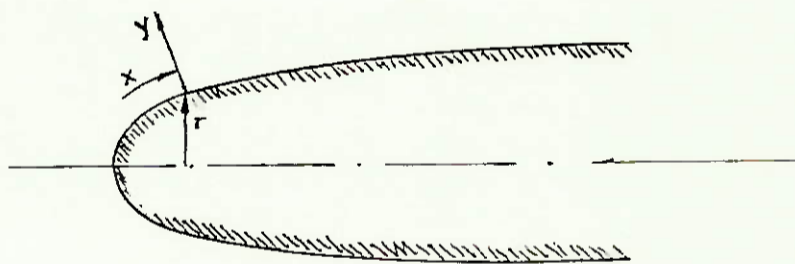


figura 4.1

Deve-se notar que esta aproximação nem sempre é válida, afastando-se muito da realidade nas regiões frontais e traseiras do corpo de revolução. Entretanto Mangler determinou uma série de transformações que reduzem as equações da camada limite axi-simétrica para aquelas da camada limite laminar plana. Consequentemente não há diferenças apreciáveis entre obter a solução para as equações da camada limite nos dois casos, sendo que a maior dificuldade sobrevém de levar-se em conta os gradientes de pressão.

Para certas aplicações, porém, esta dificuldade não existe, como por exemplo, em escoamentos supersônicos ao longo de um cone quando ocorre uma onda de choque solidária ao corpo de forma que a pressão superficial e a velocidade são constantes ao longo do cone. Assim, chega-se a relação simples da camada limite para placa plana.

Baseado nas propriedades da corrente livre, ainda dentro da onda de choque cônica, e para os mesmos números de Reynolds, a análise indica para os coeficientes de arrasto local e médio respectivamente:

$$\frac{C_{a(\text{cone})}}{C_{a(\text{placa})}} = \sqrt{3}$$

$$\frac{C_{A(\text{cone})}}{C_{A(\text{placa})}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Portanto o coeficiente de película é determinado através do número de Nusselt:

$$Nu_{\infty} = \frac{C_{a\infty}}{2} Re_{\infty} = \frac{Hx}{\lambda}$$

4.2. EQUAÇÃO INTEGRAL DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Quando gradientes de pressão estão presentes, o método para abordar o problema da camada limite é o chamado método integral.

Na obtenção de equações exatas foram solucionadas as equações diferenciais que consideravam as principais leis físicas aplicadas em qualquer elemento infinitesimal do fluido, no método integral, entretanto, as equações básicas são obtidas através do balanço de um volume de controle não elementar, que contém toda a espessura da camada limite.

A figura 4.2 mostra esse balanço de quantidade de movimento numa faixa de um corpo qualquer com largura unitária.

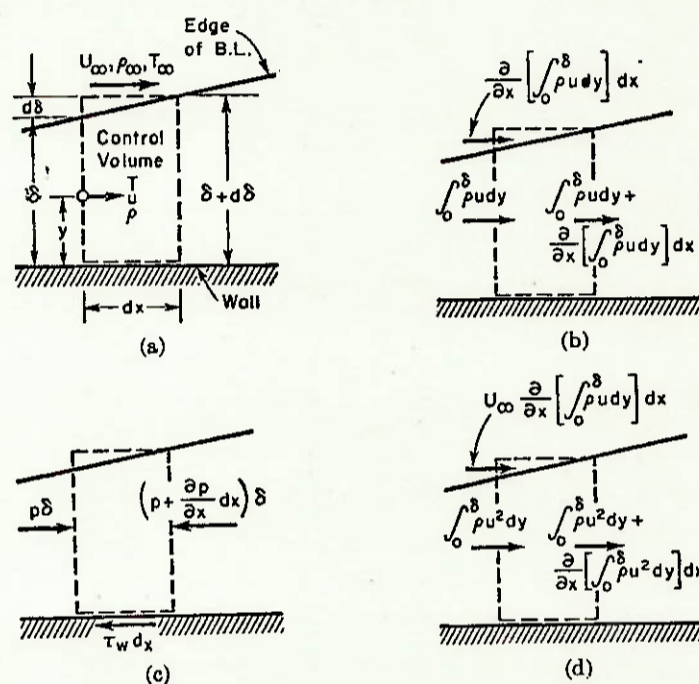


figura 4.2

Desse balanço obtem-se:

$$\tau_s = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta (\rho_\infty U_\infty^2 - \rho u^2) dy - U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta (\rho_\infty U_\infty - \rho u) dy$$

Se o corpo considerado for um sólido de revolução com raio da seção transversal igual a r , chega-se a:

$$Z_{sr} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^b (\rho_\infty u_\infty^2 - \rho u^2) r dy - u_\infty \frac{\partial}{\partial x} \int_0^b (\rho_\infty u_\infty - \rho u) r dy \quad (4.2)$$

4.3. EQUAÇÃO INTEGRAL DA ENERGIA

A figura 4.3 mostra o balanço de energia para um volume de controle idêntico ao do item anterior.

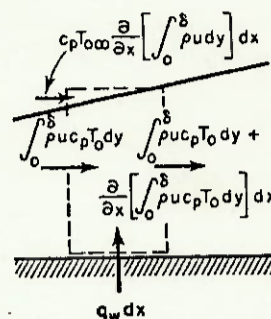


figura 4.3

Desse balanço de energia segue:

$$q_s = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho u c_p T_0 dy - c_p T_{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho u dy$$

que pode ser rearranjada na forma:

$$q_s = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta c_p (\rho u T_o - \rho_\infty u_\infty T_{o\infty}) dy - c_p T_{o\infty} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta (\rho u - \rho_\infty u_\infty) dy$$

Para um sólido de revolução a equação anterior fica:

$$q_{sr} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta c_p (\rho u T_0 - \rho_\infty u_\infty T_\infty) dy - c_p T_\infty \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta (\rho u - \rho_\infty u_\infty) dy \quad (4.3)$$

Conhecido, ou admitido, o perfil de velocidades as equações (4.2) e (4.3) resolvem o problema.

Capítulo 5

CAMADA LIMITE TURBULENTA

5.1. VISCOSIDADE TURBILHONAR

Na maioria das aplicações práticas, o escoamento na camada limite é mais turbulento do que laminar. Ainda não foi obtido sucesso na estimativa dos coeficientes de atrito e de película por uma via direta. A razão disso é a extrema complexibilidade do movimento turbulento. No escoamento turbulento, flutuações irregulares de velocidade estão sempre sobrepostas ao movimento da corrente principal, e as componentes de flutuação não podem ser descritas por meio de equações simples. Ainda mais, essas flutuações são precisamente as principais responsáveis pela transmissão de calor, bem como da quantidade de movimento, no escoamento turbulento. Como a mistura no escoamento turbulento é numa escala macroscópica, com grupos de partículas transportados, segundo um caminho em ziguezague através do fluido, o mecanismo de troca é muitas vezes mais eficaz do que no escoamento laminar. Em consequência, a transferência de calor e de quantidade de movimento, por unidade de tempo, no escoamento turbulento, e os correspondentes coeficientes de atrito e de película são muitas vezes maiores do que no escoamento laminar.

Se no escoamento turbulento for tomada uma média do escoamento num ponto, num intervalo de tempo longo, quando comparado ao período de uma única flutuação, as propriedades e as velocidades médias do fluido, em relação ao tempo, serão constantes se o escoamento médio permanecer invariável. É, portanto, de uso geral, descrever cada propriedade e velocidade do fluido

no escoamento turbulento, em termos de um valor médio que não varia com o tempo, e de uma componente flutuante que é uma função do tempo. Para um escoamento bidimensional, no qual a velocidade média é paralela à direção x, as componentes instantâneas de velocidade u e v podem ser expressas na forma:

$$u = \bar{u} + u'$$

$$v = v'$$

Onde o apóstrofe indica o desvio instantâneo do valor médio.

A média em relação ao tempo de u' e v' é igual a zero, isto é, $\overline{u'} = 0$ e $\overline{v'} = 0$. O fluxo instantâneo da quantidade de movimento, segundo x, na direção y, em qualquer ponto, é:

$$-(\rho v)'(\bar{u} + u')$$

A transferência média, em relação ao tempo, da quantidade de movimento segundo x origina uma tensão de cisalhamento turbulenta aparente, definida por:

$$\tau_t = -\frac{1}{\theta} \int_0^\theta (\rho v)'(\bar{u} + u') d\theta$$

onde θ é o tempo, grande quando comparado com o período das flutuações. Como $v'\bar{u} = 0$, tem-se:

$$\tau_t = -\frac{1}{\theta} \int_0^\theta (\rho v')u' d\theta = -\overline{(\rho v')u'}$$

Prandtl postulou que as flutuações de porções macroscópicas de fluido no escoamento turbulento são, em média, semelhantes ao movimento das moléculas num gás, isto é, elas percorrem, em média, uma distância perpendicular a \bar{u} antes de atingir o repouso em outro plano y. Essa distância l é conhecida como comprimento de mistura de Prandtl, e corresponde qualitativamente ao caminho livre médio de uma molécula de gás. Além disso é admitido que as partículas fluidas retêm suas identidades e propriedades físicas durante o movimento cruzado, e que a flutua-

ção turbulenta resulta principalmente da diferença das propriedades médias, em relação ao tempo, entre os planos y distanciadados: 1. De acordo com esse argumento, se uma partícula fluida se desloca de uma camada y à camada y + 1,

$$u' \approx l \frac{d\bar{u}}{dy}.$$

Com esse modelo, pode-se escrever a tensão de cisalhamento turbulenta numa forma análoga à da tensão de cisalhamento laminar:

$$\tau_t = -(\rho \bar{v} u') = \epsilon \frac{d\bar{u}}{dy}$$

onde ϵ é chamado de viscosidade turbilhonar, e pode ser dado por:

$$\epsilon = -(\rho \bar{v} l)$$

Deve-se notar, entretanto que a tensão de cisalhamento laminar é uma tensão real, enquanto que a tensão aparente turbulenta de cisalhamento é simplesmente um conceito introduzido para considerar os efeitos da transferência de quantidade de movimento pelas flutuações turbulentas.

5.2. NÚMERO DE PRANDTL TURBULENTO

A transferência de energia como calor num escoamento turbulento pode ser ilustrada de maneira análoga. As componentes flutuantes de velocidade transportam continuamente as partículas fluidas e a energia nelas armazenada, através de um plano normal à direção y. O fluxo instantâneo de energia em qualquer ponto, na direção y, é:

$$(\rho v') (c_p T'),$$

onde $T = \bar{T} + T'$. Seguindo o mesmo raciocínio anterior, define-se a transferência turbulenta de calor por unidade de tempo :

$$\tau_t = c_p \overline{(\rho v') T'}$$

Usando o conceito de Prandtl do comprimento de mistura:

$$T' = l \frac{dT}{dy}$$

Fisicamente, isso significa que, quando uma partícula fluida migra de uma camada y a outra camada, distanciada l , acima ou abaixo, a flutuação de temperatura resultante é causada principalmente pela diferença entre as temperaturas médias, em relação ao tempo, das camadas. Admitindo que os mecanismos de transporte de temperatura e de velocidade sejam semelhantes, os comprimentos de mistura serão iguais. Desta forma:

$$q_t = c_p (\rho v)' T' = - \frac{dT}{dy} K$$

e o fluxo térmico turbulento é expresso de maneira análoga à da equação da condução de calor de Fourier, definindo-se K como a difusividade térmica turbulenta:

$$K = -c_p (\overline{v l})$$

portanto:

$$\frac{c_p \epsilon}{K} = 1$$

Finalmente, por analogia com o caso laminar, pode-se definir o número de Prandtl turbulento:

$$Pr_t = \frac{c_p \epsilon}{K}$$

Note-se que a teoria do comprimento de mistura de Prandtl prediz um número de Prandtl turbulento unitário.

Uma análise dos resultados de vários diferentes tipos de experiências com escoamentos turbulentos levou à notável conclusão de que o número de Prandtl turbulento é substancialmente independente do valor do número de Prandtl laminar e também do

tipo de experiência. Estes experimentos indicaram que, dentro de uma margem de erro de mais ou menos 10%, $Pr_t \approx 0,70$. Para a maioria das aplicações práticas, portanto, os números de Prandtl laminar e turbulento podem ser admitidos iguais.

5.3. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Com a definição de \bar{e} , as equações da continuidade, quantidade de movimento e energia, da camada limite turbulenta com um escoamento em regime permanente são dadas por:

continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \bar{v}) = 0 \quad (5.1)$$

quantidade de movimento segundo x:

$$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\epsilon + \bar{\mu}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \quad (5.2)$$

quantidade de movimento segundo y:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0 \quad (5.3)$$

energia:

$$\bar{\rho} \bar{u} c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (K + \bar{\lambda}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + (\epsilon + \bar{\mu}) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (5.4)$$

Quando $\bar{\mu}$ e $\bar{\lambda}$ são respectivamente pequenos quando comparados com ϵ e K para escoamentos turbulentos, normalmente são omitidos das equações acima.

Nos gases tanto o número de Prandtl laminar como o turbulento estão na proximidade de 0,7. Isto pode ser considerado suficientemente próximo da unidade na prática, permitindo uma análise simples com a hipótese de $Pr = 1$ e $Pr_t = 1$.

As equações diferenciais acima são completamente similares as equações para escoamento laminar e as condições de con

to também, consequentemente todos os resultados obtidos para escoamento laminar com número de Prandtl unitário são também válidos para escoamento turbulento com número de Prandtl igual a unidade.

5.4. ESCOAMENTO TURBULENTO SOBRE PLACA PLANA COM $Pr = 1$

Devido a ausência de gradientes de pressão, a placa plana alinhada com o escoamento é o caso mais simples de ser analisado. Outra grande simplificação é a consideração de que o número de Prandtl é igual a unidade.

A melhor maneira de se atacar problemas de escoamento turbulento é a utilização do método integral, sendo a maior dificuldade o estabelecimento dos perfis de velocidade e temperatura. A camada limite turbulenta sempre é acompanhada por uma sub-camada laminar, muito fina de forma que aí o perfil de velocidade pode ser admitido linear. Dessa forma:

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_i} = \frac{y}{y_i}$$

onde o índice i , refere-se a interface laminar/turbulento.

O perfil de temperatura é obtido aplicando-se a equação da energia com a consideração de que não há aumento considerável da entalpia na sub-camada laminar devido sua pequena espessura. Chega-se a:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{q_s}{\lambda_s} - \frac{z_s^2}{\mu_s \lambda_s} y$$

que integrado com relação a y , fornece um perfil parabólico para a temperatura:

$$T - \bar{T}_s = -\frac{q_s}{\lambda_s} y - \frac{z_s^2}{2\mu_s \lambda_s} y^2$$

Desde que o número de Prandtl turbulento seja assumido como unitário, uma relação linear entre a temperatura de estagnação e a velocidade dentro da camada turbulenta pode ser considerada válida. Chega-se a:

$$\frac{T_{o\infty} - T_{oi}}{U_{\infty} - u_i} = \frac{u_i}{c_p} + \left[\frac{(\partial \bar{T}/\partial y)_i}{(\partial \bar{u}/\partial y)_i} \right]_{\text{turb}} \quad (5.5) \quad 5$$

Considerando que não haja descontinuidade na tensão de cisalhamento e no fluxo de calor na interface tem-se:

$$\tau_i = \tau_s \quad \text{e} \quad q_i = q_s + \frac{\tau_s^2}{\mu_s} y_i$$

Notando que $Pr_t = 1$, e usando a eq. 5.1, a relação entre o fluxo de calor e a tensão de cisalhamento na placa fica:

$$-\frac{q_s}{\tau_s} = c_p \frac{T_{o\infty} - T_{oi}}{U_{\infty} - u_i} = \frac{c_p (T_{\infty} - T_i)}{U_{\infty} - u_i} + \frac{U_{\infty}^2 - u_i^2}{2(U_{\infty} - u_i)}$$

que pode ser rearranjada para:

$$\frac{q_s}{\tau_s} = \frac{c_p (T_s - T_{\infty}) - \frac{U_{\infty}^2 - (1 - Pr)u_i^2}{2}}{U_{\infty} - (1 - Pr)u_i} \quad (5.6) \quad 6$$

Quando a placa é isolada, sem transferência de calor, $q_s = 0$, e a temperatura da superfície é igual à temperatura adiabática de superfície, T_{as} . Assim a eq. 5.2 fica, depois de rearranjada:

$$r = 1 - (1 - Pr) \left(\frac{u_i}{U} \right)^2$$

A relação u_i/U não é conhecida com precisão para escoamentos compressíveis, porém usando-se a aproximação de que as relações para escoamento incompressível são válidas desde que as propriedades sejam avaliadas a temperatura de superfície, chega-se a:

$$r = 1 - 66(1 - Pr) C_{as} \quad (5.7) \quad 7$$

A relação dada pela equação (5.7), está mostrada graficamente na fig. 5.1, para o ar com $Pr = 0,72$.

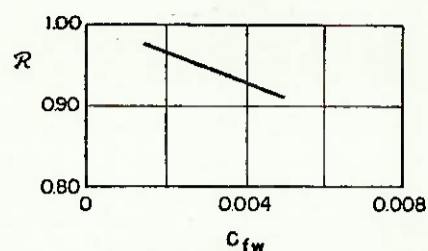


figura 5.1

5.5 FATOR DE RECUPERAÇÃO PARA ESCOAMENTO TURBULENTO

É necessário levar em consideração o desvio do número de Prandtl da unidade para calcular-se a temperatura adiabática de superfície, portanto para altos números de Mach isso deve ser levado em conta.

Dados experimentais indicam que o número de Prandtl para escoamentos turbulentos de diferentes tipos é aproximadamente constante e da ordem de 0,7. Como para muitos gases o número de Prandtl laminar é da mesma ordem de grandeza, pode ser assumido que o número de Prandtl permanece constante através da camada limite.

Pode-se admitir a relação de temperaturas é uma função do quadrado da relação de velocidades para o escoamento turbulento com Pr menor que a unidade. Supondo que:

$$\frac{\bar{U}}{U_\infty} = g\left(\frac{y}{\delta_u}\right)$$

onde g é uma função qualquer, e com as seguintes condições de contorno:

$$y = 0, \quad g = 0 \quad \text{e} \quad \bar{T} = T_{as}$$

$$y = \delta_T \quad \text{e} \quad \bar{T} = T$$

chega-se a:

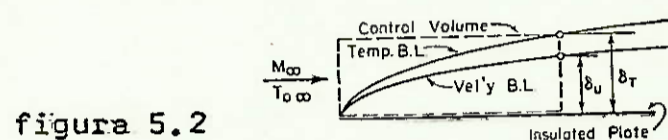
$$\frac{\bar{T}}{T} = 1 + r \frac{k-1}{2} M^2 \left[1 - g^2 \left(\frac{y}{\delta_T} \right) \right] \quad (5.8)$$

Usando a eq. 5.8 juntamente com a equação da energia chega-se, finalmente a:

$$r = Pr \left(\frac{\delta_T}{\delta_u} \right)^2 \quad (5.9)$$

Aplicando a equação da energia ao volume de controle mostrado na fig. 5.2, juntamente com a eq. 5.9 tem-se:

$$\int_0^{r/Pr} \frac{r \left[1 - g^2 \left(\frac{y}{\delta_T} \right) \right] - \left[1 - g^2 \left(\frac{y}{\delta_u} \right) \right]}{1 + r \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \left[1 - g^2 \left(\frac{y}{\delta_T} \right) \right]} g \left(\frac{y}{\delta_u} \right) d \left(\frac{y}{\delta_u} \right) = 0 \quad (5.10)$$



A função g , pode ser avaliada a partir de dados experimentais como mostrado nas fig. 5.3 e 5.4.

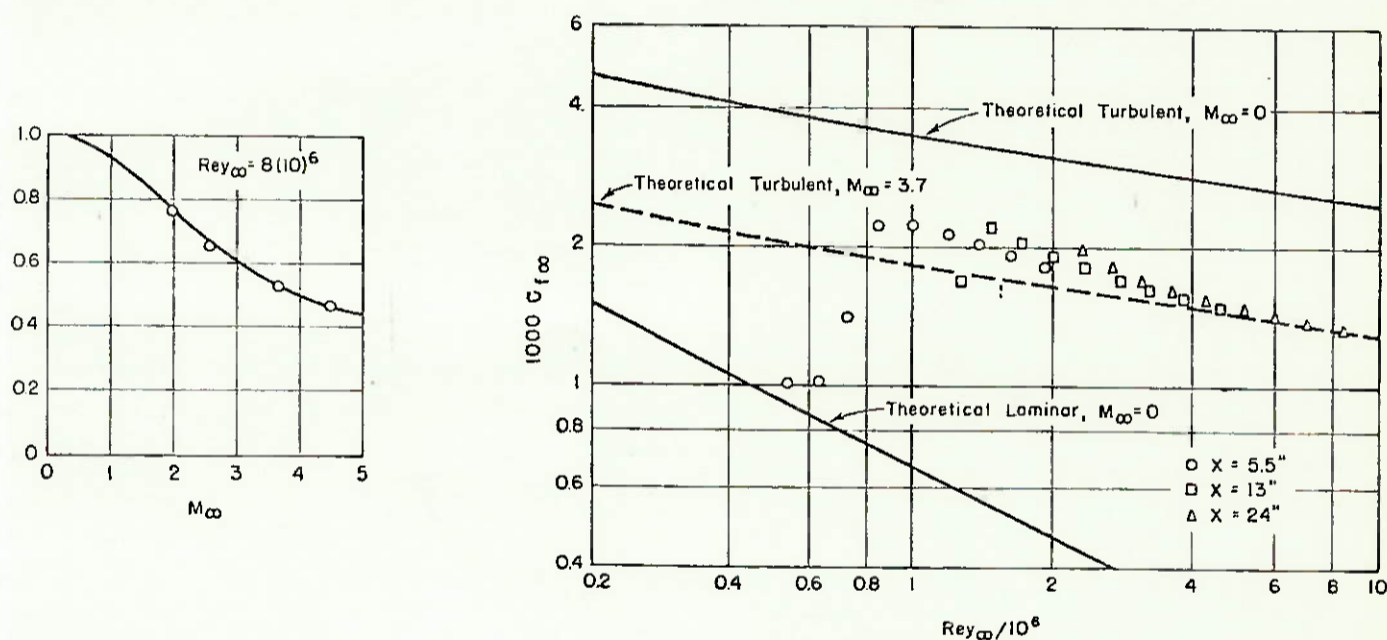


figura 5.3

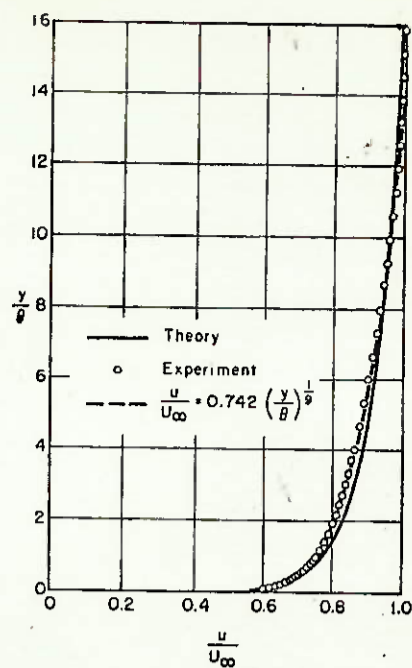


figura 5.4

Portanto :

$$g\left(\frac{y}{\delta_T}\right) = \left(\frac{y}{\delta_T}\right)^{1/N} = \left(\frac{y}{\delta_u}\right)^{1/N} \left(\frac{Pr}{Pr^*}\right)^{1/2N}$$

A integral resultante só pode ser avaliada por meio de iterações. Para $Pr = 0,7$, os resultados são mostrados na fig. 5.5.

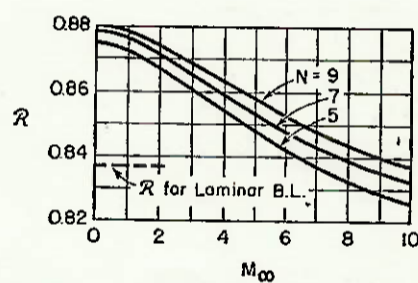


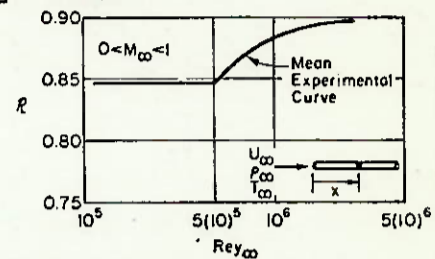
figura 5.5

Capítulo 6

DADOS EXPERIMENTAIS PARA O FATOR DE RECUPERAÇÃO

Para ar com $Pr = 0,72$, o fator de recuperação é teoricamente igual a 0,85, e substancialmente independente do número de Mach. As medidas do fator de recuperação para escoamentos subsônicos concorda excelentemente com isso para números de Reynolds até 5×10^5 . A figura 6.1 ilustra tal fato.

figura 6.1



Para velocidades supersônicas os fatores de recuperação para cones com onda de choque solidária são dados na fig. 6.2 .

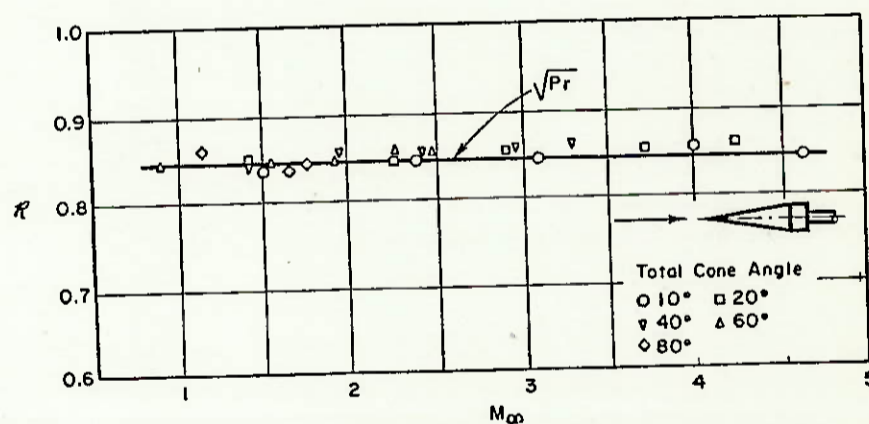
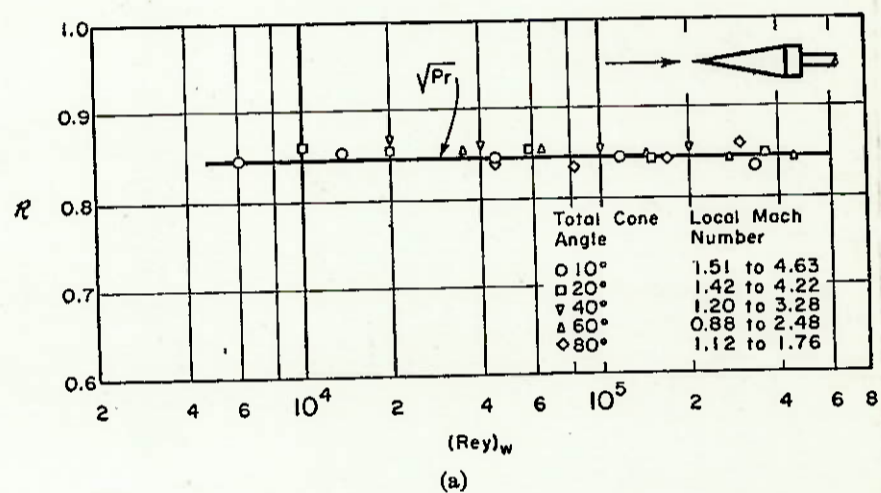


figura 6.2

A fig. 6.3, mostra os fatores de recuperação para superfícies cilíndricas para velocidades subsônicas:

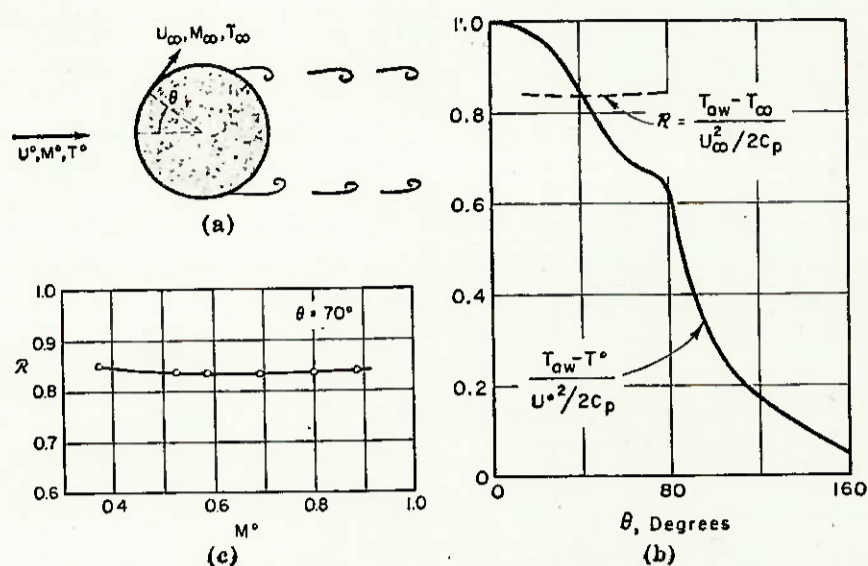


figura 6.3

A tabela a seguir mostra os valores de alguns fatores de recuperação laminares.

DATA ON RECOVERY FACTOR FOR LAMINAR BOUNDARY LAYER					
Author	Reference	Geometry	10^4 Re_{x_0}	M_∞	R
Wimbrow	25, 32	Cone (20°)	0.7-5	2.0	$0.855 \pm .008$
		Cone (20°)	0.7-3	1.5	$0.845 \pm .008$
		Paraboloid	0.5-5	2.0	$0.855 \pm .008$
Stalder, Rubesin, and Tendeland*	18	Flat plate	0.2-1	2.4	$0.881 \pm .007$
Eber	28	Cones (10°-80°)	0.006-0.5	0.88-4.65	$0.845 \pm .008$
des Clers and Sternberg	33	Cone (10°)	0.1-1.3	1.4-3.4	$0.851 \pm .007$
Slack	34	Flat Plate	0.15-3	2.4	$0.884 \pm .006$
Stine and Scherrer	35	Cone	0.2-1.3	2.0-3.8	0.845
Ladenburg and Bershader	38	Flat Plate	0.45	2.35	$0.860 \pm .005$
Mackay and Nagamatsu	44	Cone (20°)	0.02-0.5	4.9**	$0.844 \pm .008$

A figura 6.4 mostra o fator de recuperação para placas planas, $M = 2,4$.

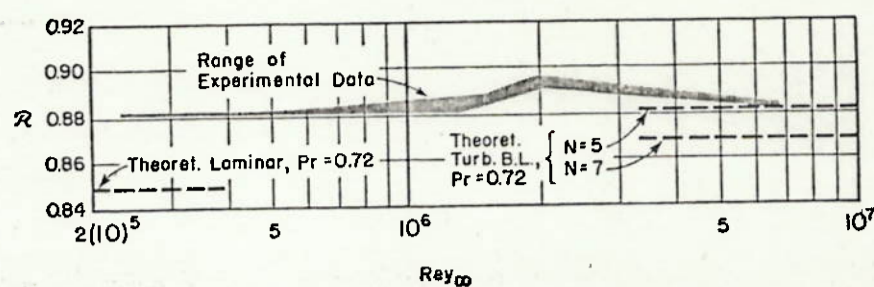


figura 6.4

A tabela a seguir relaciona vários fatores de recuperação para formas diversas.

DATA ON RECOVERY FACTORS FOR TURBULENT BOUNDARY LAYER

Author	Reference	Geometry	M_∞	R
Wimbrow	17, 26	Cone (20°)	2.0	0.885 ± .008
		Paraboloid	1.5	0.902 ± .005
		Paraboloid	2.0	0.894 ± .008
Stalder, Rubesin, and Tendeland	16	Flat plate	2.4	0.884 - .897
Hilton	18	Ogive-cylinder	2.0	0.880 ± .004
		Ogive-cylinder	1.73	0.882 ± .003
des Clers and Sternberg	27	Cone (10°)	1.4-3.4	0.882 ± .007
Slack	28	Flat plate	2.4	0.906
Stine and Scherrer	29	10° Cone	2.0-3.8	0.882 ± .008
		40° Cone-cylinder	2.0-3.8	0.885 ± .011
Eckert and Weise	19	Wire, axis normal to flow	0-1	0.84-0.87
Eber	20	Wire, axis normal to flow	1.2	0.83
			1.85	0.89
			2.5	0.91
			3.2	0.91
Eber	20	Stagnation point of disk normal to flow	1.5	0.96
			2.0	0.97
			2.5	0.98
			3.0	0.98
Ladenburg and Bershader	32	Flat plate	2.35	0.892 ± .005

BIBLIOGRAFIA:

SHAPIRO, A. H. - The Dynamics and Thermodynamics of Compressi-
ble Fluid Flow - The Ronald Press Company

KUETHE, A.M. , e SCHETZER, J.D. - Foundations of Aerodynamics -
J. Wiley & Sons, inc.

KREITH, F. - Princípios da transmissão de Calor - Editora Ed-
gard Blucher Ltda.

ECKERT, E. R. G. - Heat and Mass Transfer - Mc Graw Hill

CHAPMAN, A. J. - Transmission del Calor - Madrid Interciencia