

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

**Leonardo Rodrigues Giacomello**

**Eficiência e potência em máquinas térmicas quânticas  
correlacionadas a tempo finito**

**São Carlos**

**2025**



**Leonardo Rodrigues Giacomello**

**Eficiência e potência em máquinas térmicas quânticas  
correlacionadas a tempo finito**

Trabalho de conclusão de curso apresentado  
Instituto de Física de São Carlos da  
Universidade de São Paulo, para obtenção do  
título de Bacharel em Física Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Krissia Zawadzki

**São Carlos**

**2025**



AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.



# Resumo

A área de termodinâmica quântica emergiu da necessidade de entender a conversão energética em escalas nas quais efeitos quânticos tornam-se relevantes. Superposição, emaranhamento e interferência são propriedades sem análogo clássico que levam a interessantes efeitos, como a possibilidade de obter vantagens em performance. Máquinas térmicas baseadas em sistemas quânticos correlacionados representam um exemplo intrigante e excitante para explorar tais vantagens. O presente trabalho visa revisar alguns resultados obtidos para máquinas térmicas quânticas operando ciclos termodinâmicos em sistemas correlacionados a tempo finito. Além disso, busca fazer um estudo aprofundado sobre os efeitos de correlações na eficiência e potência. A compensação entre estas duas quantidades é um indicador da performance energética em cenários realistas, que são intrinsecamente dependentes do tempo. Em um ciclo ideal, etapas de extração/injeção de trabalho são executadas adiabaticamente, o que resulta em potência nula. Por outro lado, processos a tempo finito resultam em flutuações e redução do trabalho médio, impactando a eficiência final. Mais especificamente, vamos considerar sistemas de spin- $1/2$  com interações primeiros vizinhos e campos externos locais, ambos controláveis no tempo. Analisaremos eficiência, a potência e o emaranhamento em um ciclo de Otto não ideal, buscando identificar regimes ótimos para o funcionamento da máquina como um motor, refrigerador, aquecedor ou acelerador.

**Palavras-chave:** Termodinâmica quântica. Efeitos não-adiabáticos. Correlações quânticas.

## 1 Introdução

O interesse em máquinas térmicas remonta ao início da termodinâmica. A necessidade de entender como converter energia em trabalho útil foi a base da Revolução Industrial, culminando em avanços com impacto direto no progresso da sociedade. Deste período até o presente, testemunhamos diversos avanços científicos, muitos dos quais só foram possíveis graças ao advento da Mecânica Quântica. Atualmente, vivemos a Segunda Revolução Quântica[6], impulsionada pela demanda por novas tecnologias prometendo performance muito superior aos melhores sistemas clássicos.

Nesse contexto, surge a intrigante questão da implementação de máquinas térmicas baseadas em sistemas quânticos e a exploração de suas vantagens. Esse tópico se tornou um dos principais focos da Termodinâmica Quântica [3], um campo que investiga como os princípios da mecânica quântica podem ser aplicados à termodinâmica. A literatura apresenta diversos trabalhos que exploram ciclos termodinâmicos em modelos que variam de sistemas simples de poucos qubits a cadeias de spin em fases críticas, além de realizações experimentais [8, 3, 10] .

Os ingredientes quânticos, como emaranhamento e coerência, oferecem novas potencialida-



des para a obtenção de vantagens quânticas em máquinas térmicas. O emaranhamento, que descreve uma correlação entre partículas quânticas, pode ser explorado para aumentar a eficiência dos ciclos termodinâmicos, permitindo a transferência de energia de forma mais eficaz [12]. A coerência, por sua vez, é crucial para manter a superposição de estados quânticos, possibilitando operações que seriam inviáveis em sistemas clássicos. A combinação dessas propriedades pode levar a melhorias significativas na eficiência e potência das máquinas térmicas quânticas[13].

Para levar as previsões teóricas a implementações que levariam a aplicações reais é desafiador, pois exige incorporar detalhes realistas nos modelos. Na prática, nem sempre é possível operar etapas de ciclos de fato adiabaticamente, além de que o processo de termalização também pode exigir escalas de tempo muito maiores do que os tempos de decoerência do sistema. Assim, levar em conta efeitos não-adiabáticos é essencial para realmente avaliar a performance energética em qualquer proposta de máquina térmica quântica com possível vantagem.

Esta é a motivação para este trabalho, em que reproduzimos alguns resultados do artigo e realizamos análises complementares sobre performance e correlação. Estando baseado no artigo [5], desenvolvido pelo grupo de termodinâmica quântica do Prof. Thiago Oliveira. O foco do artigo são efeitos não-adiabáticos em um sistema de 2 qubits operando um ciclo de Otto a tempo finito.

## 2 Primeira Lei da Termodinâmica Quântica

A termodinâmica quântica visa adaptar a linguagem de termodinâmica para sistemas quânticos, adotamos o formalismo de sistemas quânticos abertos. Nessa abordagem, estamos interessados em modelar processos dinâmicos de um sistema de interesse quando em contato com outros sistemas, que chamamos de banho. Um banho é geralmente considerado um grande sistema térmico a uma temperatura bem definida  $T$ , cujo estado não muda sob a interação com um pequeno sistema quântico. O equilíbrio térmico entre o sistema e o banho depende da forma como o sistema quântica está acoplado ao banho, se um sistema quântico está fracamente acoplado a um banho térmico obedecendo a uma dinâmica Markoviana, então a evolução do operador densidade do sistema  $\hat{\rho}_s$  segue a equação mestra de Lindblad-Gorini-Kossakowski-Sudarshan (LGKS) [4]

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_s(t) = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_s, \hat{\rho}_s] + \sum_k \gamma_k \left( \hat{L}_k \hat{\rho}_s \hat{L}_k^\dagger - \frac{1}{2} \hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k, \hat{\rho}_s - \frac{1}{2} \hat{\rho}_s \hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k \right). \quad (1)$$

onde os operadores  $\hat{L}_k$  são os operadores de Lindblad, que representam as variações induzidas pelo banho no sistema e  $\gamma_k$  são taxas de transição devido ao acoplamento com o banho. Para um banho térmico, a solução da Eq.(1) corresponde ao sistema quântico em equilíbrio



térmico, atingindo o estado térmico de Gibbs

$$\hat{\rho}(t) = e^{-\beta \hat{H}(t)} / Z_t \quad (2)$$

onde  $\hat{\rho}(t)$  é o operador densidade do sistema,  $\hat{H}(t)$  o hamiltoniano da dinâmica do sistema,  $Z_t = \text{Tr}[e^{-\beta \hat{H}(t)}]$  é a função de partição, para a qual  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  é o inverso da temperatura  $T$ , multiplicada pela constante de Boltzmann  $k_B$ .

Partindo da energia interna média em um instante arbitrário dada por

$$U = \langle \hat{H}(t) \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}(t) \hat{H}(t)]. \quad (3)$$

A variação temporal da energia interna fica da seguinte forma

$$\dot{U} = \text{Tr}[\dot{\hat{\rho}}(t) \hat{H}(t)] + \text{Tr}[\hat{\rho}(t) \dot{\hat{H}}(t)]. \quad (4)$$

Atribui-se os dois termos do lado direito como quantidades termodinâmicas. O primeiro termo

$$\langle \delta W \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}(t) \dot{\hat{H}}(t)] \quad (5)$$

(6) é devido a uma mudança associada à reconfiguração dos estados do sistema, em resposta ao acoplamento do sistema com o banho térmico. Esta quantidade é identificada como o fluxo de calor instantâneo médio.

O segundo termo

$$\langle \delta Q \rangle = \text{Tr}[\dot{\hat{\rho}}(t) \hat{H}(t)] \quad (6)$$

é devido a uma mudança controlável de energia, associada à variação do hamiltoniano, dada por algum parâmetro externo. Esta quantidade é identificada como o fluxo de trabalho instantâneo. Assim, integrando esses fluxos ao longo do tempo total  $\tau$  do processo, obtêm-se o calor e trabalho.

$$\langle Q \rangle = \int_0^\tau dt \text{Tr}[\dot{\hat{\rho}}(t) \hat{H}(t)], \quad (7)$$

$$\langle W \rangle = \int_0^\tau dt \text{Tr}[\hat{\rho}(t) \dot{\hat{H}}(t)]. \quad (8)$$

Essas definições foram propostas originalmente por Robert Alicki [1]. Como suas análogas clássicas, as integrais são feitas ao longo de uma trajetória de um dado processo termodinâmica, que leva de um estado inicial  $\hat{\rho}(0)$  e  $\hat{H}(0)$  até um estado final  $\hat{\rho}(\tau)$  e  $\hat{H}(\tau)$ , o que implica que o caminho escolhido é importante para a quantificação do calor e do trabalho. Por outro lado, a mudança na energia interna só depende dos estados inicial e final do sistema. Utilizando as



equações anteriores, podemos escrever a primeira lei da termodinâmica como:

$$\Delta \mathbb{E} = \int_0^\tau dt \frac{d}{dt} \text{Tr}[\hat{\rho}(t)\hat{H}(t)] = \langle Q \rangle + \langle W \rangle. \quad (9)$$

Onde o sinal positivo(negativo) de  $\langle W \rangle$  indica trabalho injetado na (extraído da) substância e o sinal positivo(negativo) de  $\langle Q \rangle$  indica calor absorvido (rejeitado). Nesse paradigma, calor e trabalho são valores médios de variações ao longo de um processo.

## 2.1 Trabalho e Calor

As definições de calor e trabalho, portanto, são fundamentadas na decomposição da variação da energia interna,  $\dot{\mathbb{E}}$ , em termos das variações do operador densidade ( $\dot{\hat{\rho}}$ ) e do Hamiltoniano ( $\dot{\hat{H}}$ ). Para expressar estas quantidades em termos dos níveis de energia e das populações, utilizamos a base de autoestados instantâneos  $|n(t)\rangle$  do Hamiltoniano  $\hat{H}(t)$ , tal que  $\hat{H}(t)|n(t)\rangle = E_n(t)|n(t)\rangle$ . A população do  $n$ -ésimo nível é  $p_n(t) = \langle n(t)|\hat{\rho}(t)|n(t)\rangle$ , ou seja, as populações são os elementos na diagonal principal de  $\hat{\rho}$ , enquanto as chamadas coerências são os elementos fora da diagonal principal ( $p_{nm}(t) = \langle m(t)|\hat{\rho}(t)|n(t)\rangle$ , com  $m \neq n$ ).

A energia interna,  $\mathbb{E}$ , nessa base é

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(t) &= \text{Tr}[\hat{\rho}(t)\hat{H}(t)] = \sum_n \langle n(t)|\hat{\rho}(t)\hat{H}(t)|n(t)\rangle = \sum_n E_n(t) \langle n(t)|\hat{\rho}(t)|n(t)\rangle \\ \mathbb{E}(t) &= \sum_n E_n(t)p_n(t) \end{aligned} \quad (10)$$

A variação temporal da energia interna é obtida pela derivando a equação anterior.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbb{E}}(t) &= \frac{d}{dt} \text{Tr}[\hat{\rho}(t)\hat{H}(t)] \\ &= \text{Tr} \left[ \dot{\hat{\rho}}(t)\hat{H}(t) \right] + \text{Tr} \left[ \hat{\rho}(t)\dot{\hat{H}}(t) \right] \end{aligned}$$

Para o primeiro termo, o fluxo de calor nessa base é

$$\langle \delta Q \rangle = \text{Tr}[\dot{\hat{\rho}}\hat{H}] = \sum_n \dot{p}_n E_n - \sum_{n \neq m} p_{nm} \langle m | \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} | n \rangle \quad (11)$$

Enquanto para o segundo termo, correspondente ao fluxo de trabalho,

$$\langle \delta W \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}\dot{\hat{H}}] = \sum_n p_n \dot{E}_n + \sum_{n \neq m} p_{nm} \langle m | \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} | n \rangle \quad (12)$$

O calor, portanto, está relacionado às variações nas populações enquanto o trabalho está



relacionado com variações nas energias.

Nota-se que a mudança dos estados ao longo do tempo introduz nas expressões de calor e trabalho termos proporcionais às coerências, na expressão do trabalho esse termo corresponde ao trabalho não-adiabático, enquanto na expressão do calor esse termo é o calor não-adiabático. O trabalho não adiabático corresponde à redução de trabalho ao longo de um processo devido à variação temporal do hamiltoniano, que é convertido em calor não adiabático.

Utilizando a equação (9) nessa base, obtêm-se que a variação de energia interna ao longo de um intervalo de tempo será

$$\Delta\mathbb{E} = \sum_n \int_0^\tau (\dot{p}_n E_n) dt + \sum_n \int_0^\tau (p_n \dot{E}_n) dt \quad (13)$$

Ressalta-se que as definições de calor e trabalho apresentadas aqui não são únicas, a correspondência entre calor e trabalho no regime quântico é um problema em aberto na literatura.

### 3 Máquinas Térmicas Quânticas

Máquinas térmicas quânticas (MTQs) consistem de processos cíclicos sobre uma substância de trabalho cujas propriedades são descritas pela mecânica quântica, onde trabalho é injetado ou realizado pela substância e ocorrem troca de calor com dois reservatórios de temperaturas distintas. Esse conceito emergiu a partir do trabalho basilar de Scovil e Schulz-DuBois[7], no qual se estabeleceu a correspondência entre um maser de três níveis e uma máquina de Carnot.

#### 3.1 Processos Termodinâmicos Quânticos

#### 3.2 Processo Isocórico Quântico

Nesse processo, o sistema é colocado em contato com um banho térmico e o parâmetro externo do hamiltoniano é mantido fixo ( $\dot{H} = 0$ ). A única troca energética se dá na forma de calor. A população  $p_n$ , e portanto, a entropia  $S$ , variam até que o sistema entre em equilíbrio térmico com o banho. O calor trocado com o banho será

$$\langle Q \rangle = \sum_n E_n \Delta p_n \quad (14)$$

#### 3.3 Processo Adiabático Quântico

Os processos adiabáticos quânticos deixam as populações inalteradas ( $\dot{p}_n = 0$ ), isto é, sob um Hamiltoniano  $H(t)$  com autoestados instantâneos  $|n(t)\rangle$  e energias correspondentes  $E_n(t)$ , um



sistema quântico evolui do estado inicial

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n(0)|n(0)\rangle$$

para o estado final

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)|n(t)\rangle,$$

com  $|c_n(t)|^2 = |c_n(0)|^2$  e os coeficientes  $c_n(t) = c_n(0)e^{i\theta_n(t)}e^{i\gamma_n(t)}$  onde as chamadas fase dinâmica e fase geométrica (ou de Berry[2]) são  $\theta_m(t) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^t E_m(t')dt'$  e  $\gamma_m(t) = i\int_0^t \langle m(t')|\dot{m}(t')\rangle dt'$ , respectivamente, de modo que se o sistema começa em um autoestado de  $H(0)$ , ele permanece no mesmo autoestado durante a evolução.

O estudo das condições suficientes para que a adiabaticidade seja satisfeita são dadas pelo teorema adiabático. Pode-se demonstrar que uma variação suficientemente lenta do Hamiltoniano, ou um gap de energia suficientemente grande  $(\frac{\hbar|\langle m(t)|\frac{dH}{dt}|n(t)\rangle|}{|E_m(t)-E_n(t)|^2} \ll 1$  para todos  $m \neq n$  e todo  $t \in [0, T]$ ) garantem a adiabaticidade. A teoria de perturbação adiabática analisa outras condições e cenários que garantem a adiabaticidade.

Nos processos adiabáticos então, com a invariância das populações, o calor trocado, será nulo. O trabalho resultante, que corresponde a variação de energia interna, equação 13), resulta em

$$\langle W \rangle = \sum_n p_n \Delta E_n \quad (15)$$

### 3.4 Ciclo de Otto Quântico

Classicamente o ciclo de Otto é composto por dois processos adiabáticos e dois isocóricos, o sistema é descritos pelas variáveis de estado de pressão, volume e temperatura. Nas etapas isocóricas o sistema interage com um de dois reservatórios térmicos, cada um à temperatura  $T_h$  e  $T_l$  (com  $T_h > T_l$ ), após cada interação segue-se uma etapa adiabática clássica onde é realizada a extração de trabalho. A eficiência depende da natureza da substância de trabalho e as contribuições de calor e trabalho ocorrem em estágios separados.

De forma análoga, o Ciclo de Otto Quântico é composto por quatro etapas, operando entre dois reservatórios térmicos, um na temperatura  $T_2$  e o outro na temperatura  $T_1$ .

Consideramos uma substância de trabalho (ST) quântica descrita por um Hamiltoniano  $\hat{H}(h)$  que depende de um parâmetro externo  $h(t)$ , variado entre  $h_1$  e  $h_2$  ( $h_2 > h_1$ ), onde  $\hat{H}_i = \hat{H}(h_i)$ . A operação do ciclo é ilustrada na Figura 1:



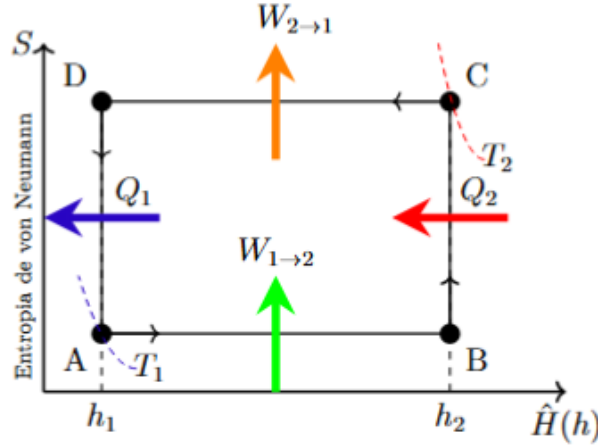


Figura 1: Representação de um ciclo de Otto atuando como motor em um diagrama de entropia de von Neumann ( $S$ ) com relação ao parâmetro externo  $h$

### Etapa 1 Adiabática ( $A \rightarrow B$ ):

O sistema é desacoplado do banho à temperatura  $T_1$  após ser preparado no estado de Gibbs  $\hat{\rho}_1 = e^{-\beta_1 \hat{H}_1} / Z_1$ , onde  $\beta_1 = \frac{1}{k_B T_1}$  e  $Z_1 = \text{Tr}[e^{-\beta_1 \hat{H}_1}]$ . O parâmetro externo é alterado de  $h_1$  para  $h_2$ , atingindo o estado  $\hat{\rho}_2$ . Em um processo adiabático quântico ideal, as populações  $P_n(A)$  dos autoestados não mudam, não havendo variação de calor. O trabalho nessa etapa será igual a variação de energia interna,  $W_{1 \rightarrow 2} = \mathbb{E}_2 - \mathbb{E}_1$ , com  $\mathbb{E}_1 = \text{Tr}(\hat{\rho}_1 \hat{H}_1)$  e  $\mathbb{E}_2 = \text{Tr}(\hat{\rho}_2 \hat{H}_2)$ . Como a entropia de von Neumann,  $S = -\sum_n P_n \ln P_n$ , depende apenas das populações, este processo é isentrópico ( $S_A = S_B$ ).

### Etapa 2 Termalização isocórica ( $B \rightarrow C$ ):

Com o parâmetro externo fixo em  $h_2$ , a substância de trabalho é acoplado ao banho à temperatura ( $T_2$ ) e relaxa com um hamiltoniano fixo  $\hat{H}_2$  até atingir o estado térmico  $\hat{\rho}_3 = e^{-\beta_2 \hat{H}_2} / Z_2$  com  $Z_2 = \text{Tr}(e^{-\beta_2 \hat{H}_2})$ . Como o parâmetro externo do sistema permanece fixo, por definição, apenas calor é trocado com o banho, dado pela variação na energia interna,  $Q_2 = \mathbb{E}_3 - \mathbb{E}_2$ , com  $\mathbb{E}_3 = \text{Tr}(\hat{\rho}_3 \hat{H}_2)$ .

### Etapa 3 Adiabática ( $C \rightarrow D$ ):

O sistema é novamente isolado termicamente e o parâmetro externo  $h$  é alterado de  $h_2$  para  $h_1$ , atingindo o estado  $\hat{\rho}_4$ . Assim como na etapa 1, as populações são conservadas,  $P_n(C) = P_n(D)$ , e o processo é isentrópico ( $S_C = S_D$ ). O trabalho nessa etapa será  $W_{2 \rightarrow 1} = \mathbb{E}_4 - \mathbb{E}_3$ , com  $\mathbb{E}_4 = \text{Tr}(\hat{\rho}_4 \hat{H}_1)$ .

### Etapa 4 Termalização isocórica ( $D \rightarrow A$ ):

Com o parâmetro fixo em  $h_1$ , o sistema é acoplado ao banho ( $T_1$ ). O sistema termaliza sem realizar trabalho e retorna ao seu estado térmico inicial  $\hat{\rho}_1$ , encerrando o ciclo. O calor trocado com o banho será  $Q_1 = \mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_4$ .

No fim do ciclo a variação da energia total será nula ( $\Delta \mathbb{E} = 0$ ), permitindo classificar o regime de operação da máquina como motor, refrigerador, aquecedor ou acelerador, a depender



do sinal do trabalho total

$$W_{cyc} = (W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 1}) = -(Q_1 + Q_2) \quad (16)$$

injetado substância ao longo do ciclo, do sinal do calor trocado com os reservatórios nas etapas de termalização e das temperaturas dos reservatórios.

Na operação como motor, calor é absorvido do reservatório quente, o sistema realiza trabalho líquido sobre o exterior e rejeita o calor residual no reservatório frio. No regime de refrigerador, trabalho é injetado na máquina para extrair calor do reservatório frio e despejá-lo no reservatório quente. O aquecedor, por sua vez, também requer trabalho injetado, mas seu objetivo é aquecer ambos os reservatório. Por fim, no acelerador, trabalho é igualmente injetado para remover calor da fonte quente e rejeitar uma quantidade maior de calor no reservatório frio, amplificando a dissipação térmica total. Os regimes de operação estão esquematizados na Figura (2)

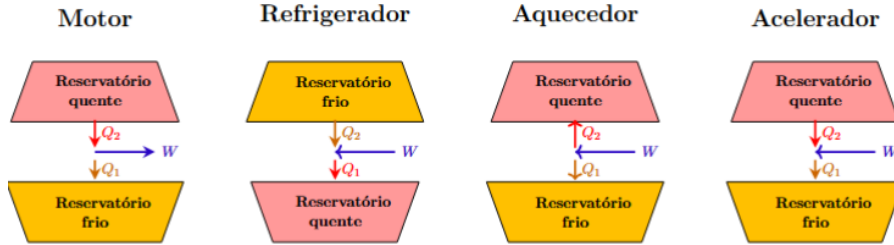


Figura 2: Regimes de operação de uma máquina térmica: motor, refrigerador, bomba de calor e acelerador. O reservatório quente é mostrado em vermelho e o frio em laranja.

A eficiência de um motor é dada por  $\eta = \frac{-W_{cyc}}{Q_h}$ , onde  $Q_h$  é o calor trocado com o reservatório de maior temperatura, e a potência é dada por  $P = \frac{-W_{cyc}}{\tau_c}$ , onde  $\tau_c$  é o tempo total das quatro etapas do ciclo. A eficiência de um ciclo de Otto quântico depende da estrutura de níveis de sua substância de trabalho e de como esses níveis se deslocam durante as etapas unitárias. Se todos os intervalos de energia se deslocam proporcionalmente entre si, e a etapa é realizada adiabaticamente, então  $\eta$  é igual à “eficiência padrão de Otto”[9]

$$\eta_{Otto} = 1 - h_2/h_1 \quad (17)$$

## 4 SISTEMA ANISOTRÓPICO DE DOIS QUBITS

A substância de trabalho analisada nesse trabalho é composta por duas partículas de spin 1/2 com interações em x e y e sujeitas a um campo externo transversal  $h(t)$  dependente do tempo. O hamiltoniano desse sistema é

$$\hat{H}(t) = J_x \hat{\sigma}_{1x} \hat{\sigma}_{2x} + J_y \hat{\sigma}_{1y} \hat{\sigma}_{2y} + h(t) [\hat{\sigma}_{1z} + \hat{\sigma}_{2z}] \quad (18)$$



onde  $\hat{\sigma}_{ix}, \hat{\sigma}_{iy}$  e  $\hat{\sigma}_{iz}$  sendo as matrizes de Pauli associadas à  $i$ -ésima partícula.  $J_x, J_y$  são as constantes de acoplamento nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Adotaremos unidades tais que as constantes  $\hbar, k_B$  e o momento magnético  $\mu$  de cada spin são iguais à 1. Nota-se que o Hamiltoniano conserva o produto  $\hat{\sigma}_{1z}\hat{\sigma}_{2z}$  e possui simetria de troca de partículas (paridade).

Diagonalizando o Hamiltoniano na base computacional, obtêm-se as autoenergias

$$\epsilon_4(t) = \sqrt{4h(t)^2 + (J_x - J_y)^2} \quad (19)$$

$$\epsilon_3 = J_x + J_y \quad (20)$$

$$\epsilon_2 = -(J_x + J_y) \quad (21)$$

$$\epsilon_1(t) = -\epsilon_4(t) \quad (22)$$

com os autoestados correspondentes

$$|\epsilon_4(t)\rangle = \alpha_+(t) |\uparrow\uparrow\rangle + \alpha_-(t) |\downarrow\downarrow\rangle \quad (23)$$

$$|\epsilon_3\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad (24)$$

$$|\epsilon_2\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad (25)$$

$$|\epsilon_1(t)\rangle = \alpha_-(t) |\uparrow\uparrow\rangle - \alpha_+(t) |\downarrow\downarrow\rangle \quad (26)$$

onde

$$\alpha_{\pm}(t) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ 1 \pm \frac{2h(t)}{\sqrt{4h(t)^2 + (J_x - J_y)^2}} \right]} \quad (27)$$

Como o hamiltoniano não comuta consigo mesmo em diferentes instantes  $[\hat{H}(t), \hat{H}(t')] \neq 0$  a evolução temporal unitária a tempo finito de um estado térmico levará o sistema para estados de não-equilíbrio. Este regime induz transições entre os autoestados de energia durante as etapas do ciclo, fenômeno denominado na literatura como "fricção quântica interna"[11]

#### 4.1 Ciclo de Otto à tempo finito e coeficiente adiabático

O ciclo empregado será semelhante ao ciclo de Otto, no entanto, as etapas 1 e 3 não serão adiabáticas, pois as etapas de injeção e extração de trabalho serão operadas a tempo finito. O sistema evolue sob a correspondente transformação unitária  $\hat{U}(\tau) = \mathcal{T}e^{-i\int_0^\tau dt \hat{H}(t)}$ , sendo  $\mathcal{T}$  o operador de ordenamento temporal, durante o tempo  $\tau$  terminando a etapa no estado



$$\hat{\rho}_2 = \hat{U}(\tau)\hat{\rho}_1\hat{U}^\dagger(\tau).$$

Na etapa 3 o campo externo  $h(t)$  é revertido de volta ao seu valor inicial, sob uma dependência temporal  $\tilde{h}(t)$  durante a reversão, com  $\tilde{h}(t) = h(\tau - t)$ . O sistema evolue sob a seguinte operação unitária reversa  $\hat{V}(\tau) = \mathcal{T}e^{-i\int_0^\tau dt\hat{H}'(t)}$ , com  $\hat{H}'(t) = \hat{H}(\tau - t)$ , atingindo o estado  $\hat{\rho}_4 = \hat{V}(\tau)\hat{\rho}_3\hat{V}^\dagger(\tau)$ .

Nota-se que  $\hat{U}(\tau)$  e  $\hat{V}(\tau)$  não são independentes. Como  $\hat{H}(t)$  é representado por uma matriz real na base  $\hat{\sigma}_{1z}, \hat{\sigma}_{2z}$ , seja  $\hat{K}$  o operador de conjugação complexa, do fato que  $\hat{K}\hat{H}(t)\hat{K}^\dagger = \hat{H}(t)$  para todo  $t$ , então

$$\hat{V}(\tau) = \hat{K}\hat{U}^\dagger(\tau)\hat{K}^\dagger. \quad (28)$$

Por conta dessa simetria, a probabilidade de transição de dois autoestados de energia  $|\epsilon_j^{(1)}\rangle = |\epsilon_j(0)\rangle$  e  $|\epsilon_i^{(2)}\rangle = |\epsilon_i(\tau)\rangle$  ao longo da primeira etapa,  $|\langle\epsilon_i^{(2)}|\hat{U}(\tau)|\epsilon_j^{(1)}\rangle|^2$ , iguala-se à probabilidade da transição reversa na terceira etapa,  $|\langle\epsilon_j^{(1)}|\hat{V}(\tau)|\epsilon_i^{(2)}\rangle|^2$ . Para demonstrar isso basta notar que  $|\epsilon_i^{(k)}\rangle$  tem coeficientes reais na base  $\hat{\sigma}_{1z}, \hat{\sigma}_{2z}$ , de forma que  $\hat{K}|\epsilon_i^{(k)}\rangle = |\epsilon_i^{(k)}\rangle$ . Segue-se que

$$\begin{aligned} |\langle\epsilon_j^{(1)}|\hat{V}(\tau)|\epsilon_i^{(2)}\rangle|^2 &= |(\langle\epsilon_j^{(1)}|\hat{K}^\dagger)\hat{V}(\tau)(\hat{K}|\epsilon_i^{(2)}\rangle)|^2 \\ &= |(\langle\epsilon_j^{(1)}|\hat{K}^\dagger)(\hat{K}\hat{U}^\dagger(\tau)\hat{K}^\dagger)(\hat{K}|\epsilon_i^{(2)}\rangle)|^2 \\ &= |\langle\epsilon_j^{(1)}|(\hat{K}^\dagger\hat{K}\hat{U}^\dagger(\tau)\hat{K}^\dagger\hat{K})|\epsilon_i^{(2)}\rangle^*|^2 \\ &= |\langle\epsilon_j^{(1)}|\hat{U}^\dagger(\tau)|\epsilon_i^{(2)}\rangle^*|^2 \\ &= |\langle\epsilon_i^{(2)}|\hat{U}(\tau)|\epsilon_j^{(1)}\rangle|^2. \end{aligned} \quad (29)$$

onde utilizou-se (28) e o fato que, para operadores antiunitários,  $(\langle a|\hat{K})|b\rangle = [\langle a|(\hat{K}|b\rangle)]^*$  e  $\hat{K}^\dagger\hat{K} = \hat{1}$ . É suficiente, portanto, calcular as probabilidades de transição apenas para a primeira etapa.

Expandindo os estados evoluídos na base dos auto estados no tempo  $\tau$ ,  $\hat{U}(\tau)|\epsilon_m(0)\rangle = \sum_n c_n^{(m)}(\tau)e^{i\theta_n(\tau)}|\epsilon_n(\tau)\rangle$ , com  $\theta_n(\tau) := -\int_0^\tau \epsilon_n(t)dt$  sendo a fase dinâmica e com a condição inicial  $c_n^{(m)}(0) = \delta_{nm}$ . Substituindo essa expansão na equação de Schrödinger dependente do tempo, obtêm-se um conjunto de equações diferenciais ordinárias para as amplitudes de energia  $c_n^{(m)}(t)$ ;

$$\begin{aligned} \dot{c}_1^{(m)}(t) &= \dot{h}(t)\frac{e^{-2i\theta_1(t)}}{\epsilon_1^2(t)}|J_x - J_y|c_4^{(m)}(t) \\ \dot{c}_2^{(m)}(t) &= 0 \\ \dot{c}_3^{(m)}(t) &= 0 \\ \dot{c}_4^{(m)}(t) &= -\dot{h}(t)\frac{e^{2i\theta_1(t)}}{\epsilon_1^2(t)}|J_x - J_y|c_1^{(m)}(t). \end{aligned} \quad (30)$$

Como esperado,  $c_2^{(m)}(t)$  e  $c_3^{(m)}(t)$  são independentes do tempo, mas  $c_1^{(m)}(t)$  e  $c_4^{(m)}(t)$  são



acopladas, possibilitando transições entre os auto estados correspondentes. As amplitudes dependem de  $J_x$ ,  $J_y$ , do protocolo  $h(t)$  usado para alterar o campo externo e do tempo total utilizado para executar esse protocolo, ressaltando a não adiabaticidade desse processo, como apenas os níveis 1 e 4 são acoplados, a evolução adiabática é um sistema de dois-níveis. Em uma evolução adiabática ideal,  $|c_k^{(k)}(\tau)|^2 \equiv 1$  para todo  $k$ . Como o acoplamento não adiabático da equação (30) gera coerências na base dos auto estados de energia, a igualdade é falsa para os níveis  $k = 1, 4$ .

Desta forma, toda a dinâmica não adiabática do sistema pode ser capturada por um único parâmetro,  $\mathcal{P}(\tau)$ , que definimos como a probabilidade de permanência no autoestado (probabilidade de sobrevivência) do nível  $|\epsilon_1\rangle$  durante a primeira etapa:

$$\mathcal{P}(\tau) \equiv |\langle \epsilon_1^{(2)} | \hat{U}(\tau) | \epsilon_1^{(1)} \rangle|^2 \quad (31)$$

onde  $|\epsilon_i^{(k)}\rangle \equiv |\epsilon_i(h_k)\rangle$ .

Devido à unitariedade,  $|c_1^{(4)}(\tau)|^2 = |c_4^{(1)}(\tau)|^2 = 1 - \mathcal{P}(\tau)$ , e  $|c_4^{(4)}(\tau)|^2 = \mathcal{P}(\tau)$ . Portanto,  $\mathcal{P}(\tau)$  representa o grau de adiabaticidade da evolução. Quanto mais perto de 1, mais adiabática é a evolução. Os limites assintóticos de  $\mathcal{P}(\tau)$  dependem somente da escolha dos valores extremos de  $h(t)$  ( $h_1 = h(t) \rightarrow h_2 = h(\tau)$ ). No limite de "quench" onde  $\tau \rightarrow 0$ , o hamiltoniano é alterado de forma instantânea, e  $\hat{U}(\tau) \rightarrow \hat{1}$ , usando (??) obtêm-se

$$\mathcal{P}(\tau \rightarrow 0) \rightarrow \mathcal{P}_0 \equiv |\langle \epsilon_1^{(2)} | \epsilon_1^{(1)} \rangle|^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{4h_1h_2 + (J_x - J_y)^2}{\sqrt{[4h_1^2 + (J_x - J_y)^2][4h_2^2 + (J_x - J_y)^2]}} \right\}$$

É importante notar que, para nosso sistema, não ocorrem cruzamentos de níveis entre os estados acoplados (1 e 4), para os estados  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  (e, simultaneamente, entre  $\epsilon_3$  e  $\epsilon_4$ ), ocorrem cruzamento de níveis quando  $h(t) = \sqrt{J_x J_y}$ , no entanto, a evolução temporal não acopla esses estados ( $\langle \epsilon_2(t) | \dot{\epsilon}_1(t) \rangle = \langle \epsilon_3(t) | \dot{\epsilon}_4(t) \rangle = 0$ ). Assim, o limite adiabático  $\mathcal{P} \rightarrow 1$  é sempre atingido para  $\tau$  suficientemente grande.

## 5 RESULTADOS

### 5.1 Coeficiente de adiabaticidade para um protocolo monotônico

Adotamos ao longo desse trabalho um protocolo monotônico (32) para variação de campo externo da forma.

$$h(t) = \sqrt{h_2^2 \left( \frac{t}{\tau} \right) + h_1^2 \left( 1 - \frac{t}{\tau} \right)} \quad (32)$$



Nesse trabalho o conjunto de equações de (30), bem como  $\mathcal{P}(\tau)$  serão resolvidos numericamente em Python usando numpy para escolhas arbitrárias de constantes de acoplamento  $J_x, J_y$ , tempo  $\tau$  de evolução e protocolo  $h(t)$ . Como exemplo, tomemos  $J_x = 10.0$ ,  $J_y = 2.0$ ,  $h_1 = 4.0$  e  $h_2 = 1.0$ . A figura (3) mostra a dependência de  $\mathcal{P}$  em função do intervalo  $\tau$ , observa-se que  $\mathcal{P}(\tau) \approx 1$  para valores grandes de  $\tau$ . Além disso, como esperado pela equação (32),  $\mathcal{P}(\tau) \approx 0.929$  conforme  $\tau \rightarrow 0$ , nesse caso, mesmo para etapas rápidas observamos um alto grau de adiabaticidade. Para protocolos monotônicos decrescentes de  $h(t)$  o valor do coeficiente adiabático será sempre maior que o de (32).

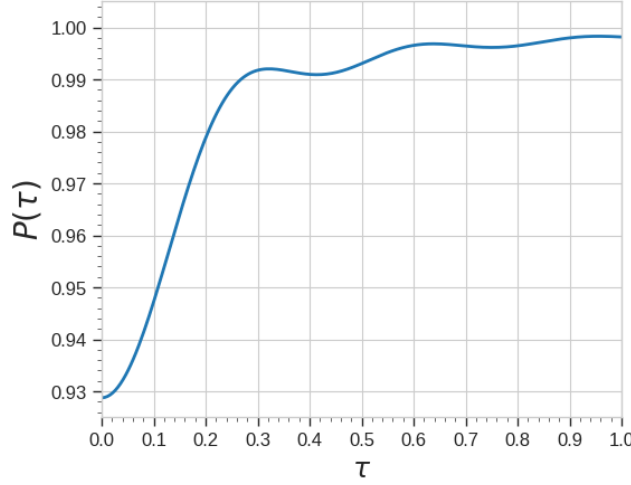


Figura 3: Coeficiente de adiabaticidade  $\mathcal{P}(\tau)$  em função da duração  $\tau$  da etapa, para a evolução  $\hat{U}(\tau)$  com parâmetros  $J_x = 10.0$ ,  $J_y = 2.0$ ,  $h_1 = 4.0$ ,  $h_2 = 1.0$  e campo  $h(t)$  variando de acordo com o protocolo da equação (32)

## 5.2 Trabalho e Calor Não Adiabáticos

A energia interna da substância de trabalho ao final das etapas 1 e 3 será

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_2 &= \sum_{i,j=1}^4 \epsilon_i^{(2)} p_j^{(1)} |c_i^{(j)}(\tau)|^2 \\ \mathbb{E}_4 &= \sum_{i,j=1}^4 \epsilon_j^{(1)} p_i^{(2)} |c_i^{(j)}(\tau)|^2\end{aligned}\tag{33}$$

onde  $\epsilon_i^{(k)}$  denota as autoenergias em cada ponto extremo do Hamiltoniano  $\hat{H}_k$ ,  $p_j^{(k)} = e^{-\beta_k \epsilon_j^{(k)}} / Z_k$  são as populações térmicas à respectiva temperatura inversa  $\beta_k$  e na segunda linha usamos  $(W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 1}) = -(Q_1 + Q_2)$ . Por causa da termalização nas etapas 2 e 4 as energias internas médias após cada etapa,  $\mathbb{E}_3$  and  $\mathbb{E}_1$ , serão invariantes à não adiabaticidade.



Decompondo o trabalho de cada etapa unitária em uma contribuição adiabática ( $W^{ad}$ ) e uma contribuição não adiabática ( $W^{na}$ ), obtêm-se:

$$W_{1 \rightarrow 2}^{ad} = f^{(1)}[\epsilon_4^{(1)} - \epsilon_4^{(2)}] \quad (34)$$

$$W_{1 \rightarrow 2}^{na} = 2(1 - P)f^{(1)}\epsilon_4^{(2)} \quad (35)$$

$$W_{2 \rightarrow 1}^{ad} = f^{(2)}[\epsilon_4^{(2)} - \epsilon_4^{(1)}] \quad (36)$$

$$W_{2 \rightarrow 1}^{na} = 2(1 - P)f^{(2)}\epsilon_4^{(1)} \quad (37)$$

onde  $f^{(j)}$  é uma "função de trabalho" definida como:

$$f^{(j)} := p_1^{(j)} - p_4^{(j)} = \frac{\sinh(\beta_j \epsilon_4^{(j)})}{\cosh(\beta_j \epsilon_3) + \cosh(\beta_j \epsilon_4^{(j)})} \quad (38)$$

A análise destas equações revela o impacto físico da não adiabaticidade, as contribuições não adiabáticas,  $W_{1 \rightarrow 2}^{na}$  e  $W_{2 \rightarrow 1}^{na}$ , são sempre positivas ( $\geq 0$ ), pois  $P \leq 1$  e  $f^{(j)}$  e  $\epsilon_4^{(k)}$  são positivos, enquanto  $W_{1 \rightarrow 2}^{ad} \geq 0$  e  $W_{2 \rightarrow 1}^{ad} \leq 0$ .

Além disso, para que  $W_{1 \rightarrow 2}^{na} > |W_{1 \rightarrow 2}^{ad}|$ , seria necessário que

$$\mathcal{P} < \frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt{\frac{\epsilon_4^{(2)}}{\epsilon_4^{(1)}}} \right] = \frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt{\frac{4h_2^2 + (J_x - J_y)^2}{4h_1^2 + (J_x - J_y)^2}} \right] \quad (39)$$

Comparando com a equação 32, vemos que  $\mathcal{P}_0$  é maior que a expressão de 39, portanto trabalho sempre será extraído mesmo durante etapas não adiabáticas de curta duração.

Na compressão ( $1 \rightarrow 2$ ),  $W^{na}$  adiciona um custo extra. A não adiabaticidade sempre aumenta o trabalho necessário para a compressão. Na expansão ( $2 \rightarrow 1$ ),  $W^{na}$  (positivo) atua contra o ganho (negativo). A não adiabaticidade sempre diminui o trabalho extraído na expansão.

O trabalho líquido injetado também pode ser separado em,  $W_{cyc} = W_{cyc}^{ad} + W_{cyc}^{na}$ , com

$$W_{cyc}^{ad} = W_{1 \rightarrow 2}^{ad} + W_{2 \rightarrow 1}^{ad} = (f^{(1)} - f^{(2)})[\epsilon_4^{(1)} - \epsilon_4^{(2)}], \quad (40)$$

$$W_{cyc}^{na} = W_{1 \rightarrow 2}^{na} + W_{2 \rightarrow 1}^{na} = 2(1 - P)[\epsilon_4^{(2)}f^{(1)} + \epsilon_4^{(1)}f^{(2)}]. \quad (41)$$

O termo  $W_{cyc}^{na}$  é sempre positivo, representando a energia total dissipada como fricção interna por ciclo.

As trocas de calor também são afetadas. A contribuição não adiabática para o calor vem



exclusivamente da energia dissipada  $W^{na}$  na etapa unitária anterior:

$$Q_1^{na} = -W_{2 \rightarrow 1}^{na} \leq 0 \quad (42)$$

$$Q_2^{na} = -W_{1 \rightarrow 2}^{na} \leq 0 \quad (43)$$

Ambas as contribuições são negativas. Fisicamente, isso significa que a fricção interna gera um "excesso" de energia no sistema ao final de cada etapa unitária. Esse excesso de energia é, então, inevitavelmente dissipado como calor em ambos os reservatórios durante as etapas de termalização.

As contribuições adiabáticas serão

$$\begin{aligned} Q_1^{ad} &= (\Delta p_3 - \Delta p_2)\epsilon_3 + [f^{(2)} - f^{(1)}]\epsilon_4^{(1)}, \\ Q_2^{ad} &= (\Delta p_2 - \Delta p_3)\epsilon_3 + [f^{(1)} - f^{(2)}]\epsilon_4^{(2)}, \end{aligned} \quad (44)$$

onde  $\Delta p_j := p_j^{(1)} - p_j^{(2)}$ . Cada uma das contribuições de calor adiabática pode ser tanto positiva quanto negativa.

### 5.3 Análise dos Regimes de Operação

As condições de calor e trabalho para cada regime estão sintetizadas na Tabela 1.

Regime	Condição de Temperatura	Calor $Q_1$	Calor $Q_2$	Trabalho $W_{cyc}$
<i>Regime regular: <math>T_1 &gt; T_2</math></i>				
Motor	$T_1 > T_2$	$> 0$	$< 0$	$< 0$
Refrigerador	$T_1 > T_2$	$< 0$	$> 0$	$> 0$
Acelerador	$T_1 > T_2$	$> 0$	$> 0$	$> 0$
Aquecedor	$T_1 > T_2$	$< 0$	$< 0$	$> 0$
<i>Regime reverso: <math>T_1 &lt; T_2</math></i>				
Motor	$T_1 < T_2$	$< 0$	$> 0$	$< 0$
Refrigerador	$T_1 < T_2$	$> 0$	$< 0$	$> 0$
Acelerador	$T_1 < T_2$	$< 0$	$> 0$	$> 0$
Aquecedor	$T_1 < T_2$	$< 0$	$< 0$	$> 0$

Tabela 1: Classificação dos regimes de operação

O regime de operação depende não só das temperaturas  $T_1$  e  $T_2$  dos banhos, mas também do conjunto de parâmetros  $h_1, h_2, J_x, J_y$  do Hamiltoniano e também do grau de adiabaticidade  $\mathcal{P}$  do ciclo. A Figura 4. Em ambas as linhas a adiabaticidade reduz da esquerda para a direita,



começando no limite adiabático ( $\mathcal{P} = 1$ ). Os diferentes regimes de operação são representados respectivamente pelas seguintes cores: refrigerador (azul), motor (vermelho), aquecedor (laranja) e acelerador (verde).

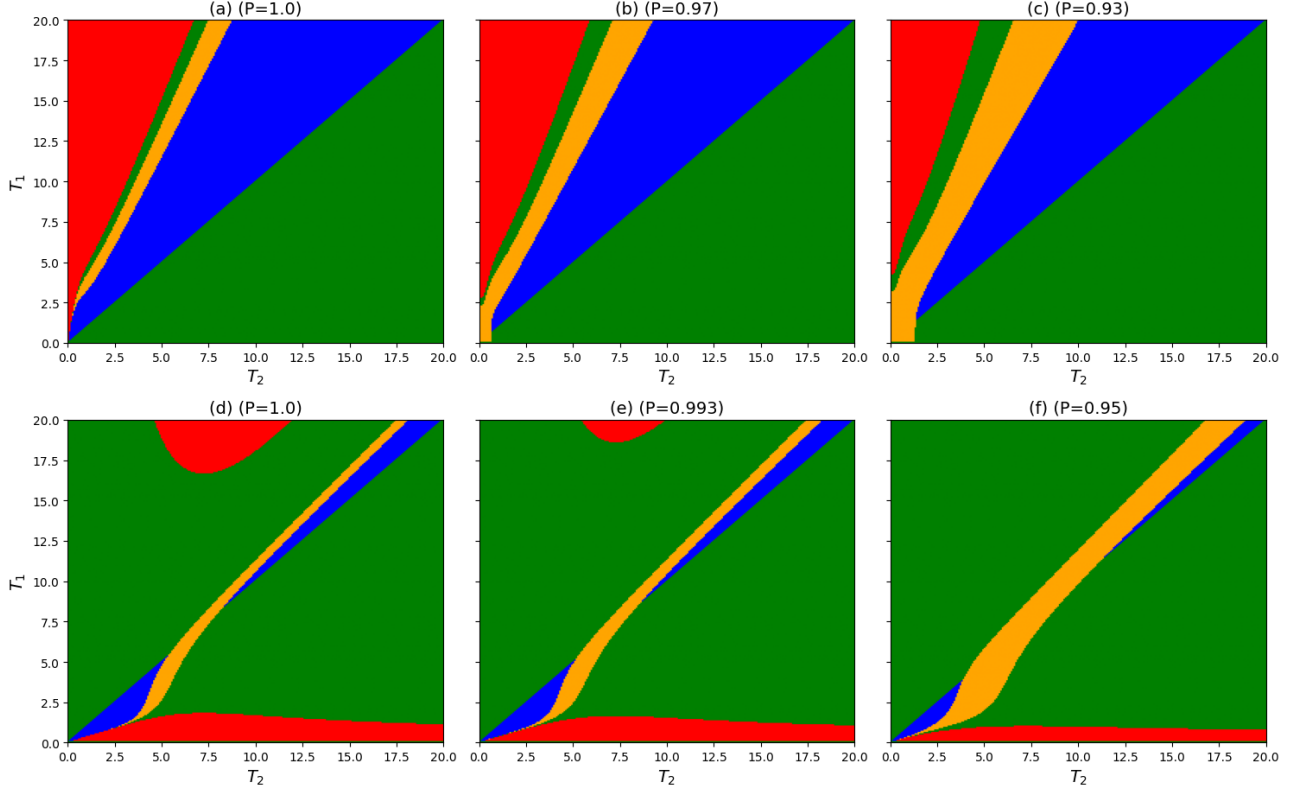


Figura 4: Intervalos de temperatura onde o ciclo opera como um refrigerador (azul), motor (vermelho), aquecedor (laranja) ou acelerador (verde), para diferentes valores de adiabaticidade  $\mathcal{P}$ . Na linha superior:  $J_x = 0.01$ ,  $J_y = 2.00$ ,  $h_1 = 4$  e  $h_2 = 1$ , com  $\mathcal{P} = 1.0$ ,  $\mathcal{P} = 0.97$  e  $0.93$  da esquerda para a direita. Nesta faixa de parâmetros, apenas motores regulares (onde  $T_1 > T_2$ ) ocorrem. Na linha inferior  $J_x = 10.0$ ,  $J_y = 2.6$ ,  $h_1 = 4$  e  $h_2 = 1$ , com  $\mathcal{P} = 1.0$ ,  $\mathcal{P} = 0.993$  e  $\mathcal{P} = 0.95$  da esquerda para a direita.

A análise das zonas de operação do ciclo de Otto revela características qualitativas importantes em função do acoplamento e do grau de adiabaticidade. Na Figura 4(a), correspondente ao regime de acoplamento fraco ( $J_x J_y < h_1^2$ ), observa-se uma única zona de motor na região onde  $T_1 > T_2$ , incluindo o eixo  $T_2 = 0$  - o que indica que o ciclo sempre opera como motor quando  $T_2 \rightarrow 0$ . Este comportamento, denominado motor regular, é representado por um ciclo anti-horário no diagrama  $S \times h$  (entropia de von Neumann versus intensidade de campo), conforme ilustrado na Figura 1.

No regime de acoplamento forte [Figura 4(d)],

$$J_x J_y > h_1^2 \quad (45)$$



emergem características adicionais notáveis, incluindo duas zonas de motor separadas. A nova zona de motor ocorre para  $T_2 > T_1$  e inclui o eixo  $T_1 = 0$ , sendo representada por um ciclo horário no diagrama  $S \times h$ , que denominaremos motor reverso. Esta dupla possibilidade de operação significa que, dependendo das temperaturas dos banhos, o sistema pode funcionar como motor térmico em ambos os sentidos de rotação no ciclo de Otto.

As duas zonas de motor são separadas por uma lacuna de temperatura para  $T_1$ , dentro da qual nenhum motor térmico é possível. Adicionalmente, mesmo para  $T_1$  fora desta lacuna, o motor regular deixa de operar para  $T_2$  suficientemente baixo, enquanto o motor reverso cessa sua operação para  $T_2$  excessivamente alto.

A condição estabelecida pela Equação (45) é suficiente para a existência de motores reversos no limite adiabático. Fisicamente, esta condição implica que o autoestado  $|\epsilon_3\rangle$  corresponde ao estado fundamental durante a equilibração com o banho frio em  $T_1$ . Consequentemente, a população do sistema concentra-se predominantemente neste estado. Por tratar-se de um nível ocioso que não se desloca nem acopla a outros durante a etapa de compressão  $h_1 \rightarrow h_2$ , sua contribuição para o trabalho injetado  $W_{1 \rightarrow 2}^{ad}$  é nula. Para  $T_1$  suficientemente baixo,  $W_{1 \rightarrow 2}^{ad}$  tende a zero, enquanto  $W_{2 \rightarrow 1}$  mantém-se negativo no limite adiabático, resultando em  $W_{cic}^{ad} < 0$  - condição necessária para a operação como motor térmico.

As Figuras 4(b) e 4(c) (acoplamento fraco) e 4(e) e 4(f) (acoplamento forte) ilustram os efeitos da redução do parâmetro de adiabaticidade  $\mathcal{P}$ . Em todos os casos analisados, onde  $P \geq P_0$ , observa-se que:

As regiões de motor e refrigerador encolhem progressivamente. A zona de aquecedor expande-se correspondentemente. As contribuições não adiabáticas reduzem o trabalho líquido do ciclo e aumentam a dissipação nos banhos.

Para acoplamento fraco, este efeito é mais pronunciado em baixas temperaturas, com a zona de motor deslocando-se para valores mínimos de  $T_1$  cada vez mais elevados. No acoplamento forte, a zona de motor regular também se desloca para cima, enquanto a zona de motor reverso é comprimida para baixo, efetivamente ampliando a lacuna de temperatura.

Embora essas mudanças tornem-se mais pronunciadas com a diminuição de  $\mathcal{P}$ , é notável que todas as características qualitativas do limite adiabático permanecem presentes quando  $0,5 < \mathcal{P} < 1$ .

## 5.4 Análise de Eficiência e potência

O principal objetivo desta análise é investigar como os efeitos de eficiência são impactados pela falta de adiabaticidade perfeita. Como mencionado anteriormente, uma evolução não adiabática afasta o sistema do equilíbrio térmico devido à introdução de coerência na base de energia. Consequentemente, observa-se um aumento na energia dissipada durante a reequilibração com os banhos térmicos, resultando na diminuição da eficiência do motor.



Neste trabalho, demonstramos que a eficiência do motor  $\eta$  é uma função monotonicamente crescente do parâmetro de adiabaticidade  $P$ . Suponha  $0 < f(x) \equiv a(x)/b(x) < 1$ , onde  $a(x), b(x) > 0$ , e  $a'(x) \geq b'(x) > 0$ . Então  $f'(x) > 0$ .

Para um motor regular operando no limite adiabático ( $0 < -W_{cic}^{ad} < Q_1^{ad}$ ), a eficiência é dada por

$$\eta = \frac{-W_{cic}^{ad} - W_{1 \rightarrow 2}^{na}(P) - W_{2 \rightarrow 1}^{na}(P)}{Q_1^{ad} - W_{2 \rightarrow 1}^{na}(P)}$$

Uma vez que  $W_{1 \rightarrow 2}^{na}(P)$  e  $W_{2 \rightarrow 1}^{na}(P)$  são funções positivas e monotonicamente decrescentes de  $P$ , é claro que  $\eta(P)$  satisfaz as condições delineadas acima e, portanto,  $\eta'(P) > 0$ . O mesmo argumento também é claramente aplicável a motores “reversos”, apenas substituindo  $Q_1$  por  $Q_2$ . Na verdade, isso deve valer para qualquer motor de Otto cuja adiabaticidade seja mensurável por um único parâmetro.

A Figura 5 ilustra o comportamento da eficiência para um motor regular com acoplamento fraco ( $J_x = 0,01$ ,  $J_y = 0,8$ ). Observa-se que:

$\eta$  decresce monotonicamente com a redução de  $P$ . No limite adiabático,  $\eta$  pode superar  $\eta_{Otto} = 0,75$ . A faixa de temperaturas com  $\eta > \eta_{Otto}$  reduz-se rapidamente com a diminuição de  $P$ . Para  $P \leq 0,9996$ , perde-se completamente a capacidade de exceder  $\eta_{Otto}$ .

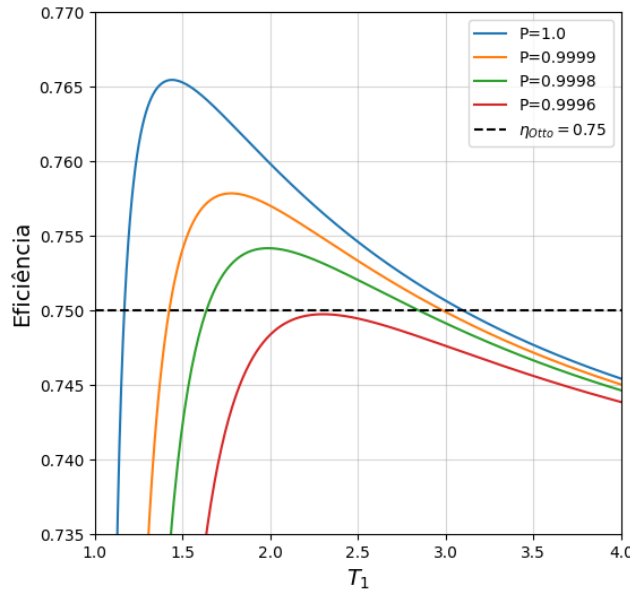


Figura 5: Eficiência de um motor regular em função de  $T_1$  para diferentes valores de  $P$  ( $T_2 = 0,2$ ). Parâmetros:  $h_1 = 4,0$ ,  $h_2 = 1,0$ ,  $J_x = 0,01$ ,  $J_y = 0,8$ .

Notavelmente,  $\eta$  não aumenta monotonicamente com  $T_1$ , apresentando um máximo mesmo com o aumento da diferença de temperatura entre os banhos, comportamento atípico em comparação com ciclos tradicionais.



A Figura 6 apresenta resultados similares para um motor reverso com acoplamento forte ( $J_x = 10, 0$ ,  $J_y = 1, 6$ ), onde:

A condição  $\eta > \eta_{Otto}$  persiste em uma faixa mais ampla ( $P \geq 0,976$ ). Mesmo para  $P = P(\tau \rightarrow 0) = 0,932$ , o motor reverso mantém operação (embora ineficiente).  $\eta$  decresce para  $T_2$  elevados, mantendo o comportamento não monotônico

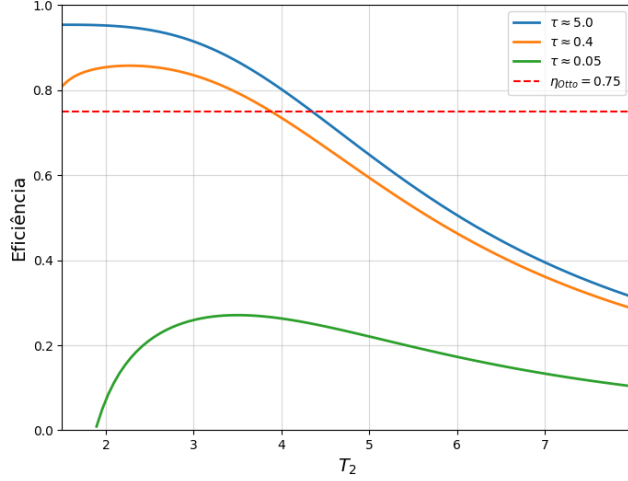


Figura 6: Eficiência de um motor reverso em função de  $T_2$  para diferentes valores de  $P$  ( $T_1 = 0,05$ ). Parâmetros:  $h_1 = 4,0$ ,  $h_2 = 1,0$ ,  $J_x = 10,0$ ,  $J_y = 1,6$ .

A Figura 7 fornece uma visão abrangente das faixas de temperatura onde  $\eta > \eta_{Otto}$  para ambos os tipos de motor. Destaca-se que: A redução de  $P$  diminui rapidamente as regiões de alta eficiência. Motores regulares são mais sensíveis à não-adiabaticidade. Motores reversos apresentam maior robustez em regimes não adiabáticos

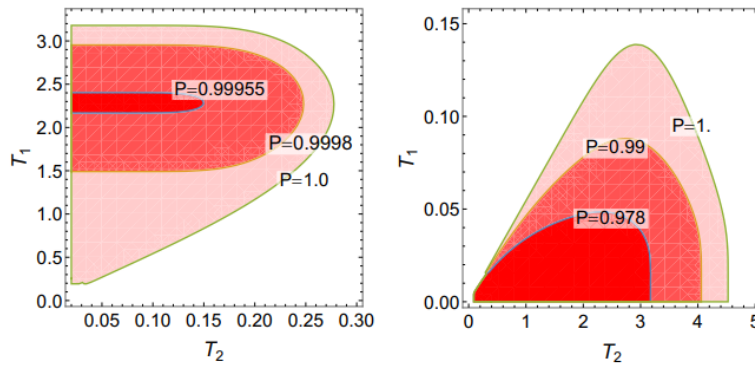


Figura 7: Faixas de temperatura com  $\eta > \eta_{Otto}$  para diferentes valores de  $P$ . Esquerda: motor regular ( $J_x = 0,01$ ,  $J_y = 0,8$ ). Direita: motor reverso ( $J_x = 10,0$ ,  $J_y = 1,6$ ).

Estes resultados demonstram que, embora a não-adiabaticidade degrade a eficiência, os comportamentos qualitativos fundamentais do sistema mantêm-se preservados, com ambos os tipos de motor mantendo operação mesmo em regimes significativamente não adiabáticos.



## 6 Conclusão

Este trabalho dedicou-se a investigar o desempenho termodinâmico de uma máquina térmica quântica de Otto, cuja substância de trabalho é um sistema anisotrópico de dois *qubits*, operando em regimes de tempo finito. A análise centrou-se nos efeitos da não adiabaticidade, quantificada pelo coeficiente  $\mathcal{P}(\tau)$ , sobre o trabalho, o calor, os regimes de operação e, principalmente, a eficiência e a robustez do ciclo.

A principal contribuição deste estudo reside na demonstração analítica e numérica de que a dinâmica de não equilíbrio do sistema, induzida pela evolução unitária a tempo finito, pode ser completamente caracterizada por um único parâmetro: a probabilidade de sobrevivência  $\mathcal{P}(\tau)$  no autoestado fundamental durante a etapa de compressão. Esta simplificação, decorrente da simetria do Hamiltoniano e do protocolo de reversão temporal, permitiu uma análise precisa e abrangente da "fricção quântica interna" e de suas consequências.

Os resultados obtidos revelaram que a não adiabaticidade introduz contribuições positivas e dissipativas ao trabalho em ambas as etapas unitárias ( $W^{na}$ ), as quais se refletem como calor extra dissipado nos reservatórios durante as termalizações ( $Q^{na}$ ). Consequentemente, o trabalho líquido do ciclo é reduzido e a eficiência do motor,  $\eta$ , mostrou-se uma função monotonicamente crescente de  $\mathcal{P}$ , diminuindo à medida que o processo se afasta da adiabaticidade perfeita.

A análise da eficiência demonstrou que, no limite adiabático ( $\mathcal{P} = 1$ ), ambos os motores podem superar a eficiência padrão de Otto. No entanto, a faixa de temperaturas onde  $\eta > \eta_{Otto}$  é altamente sensível à não adiabaticidade, encolhendo rapidamente com a diminuição de  $\mathcal{P}$ . Observou-se que o motor regular é significativamente mais vulnerável a esses efeitos, perdendo a capacidade de superar  $\eta_{Otto}$  mesmo para valores de  $\mathcal{P}$  ainda próximos de 1. Em contraste, o motor reverso exibiu uma robustez notável, mantendo regiões de alta eficiência em regimes não adiabáticos.

## Referências

- [1] Robert Alicki. "The quantum open system as a model of the heat engine". Em: *J. Phys. A: Math. Gen.* 12.5 (1979), p. L103. DOI: 10.1088/0305-4470/12/5/007.
- [2] Michael Victor Berry. "Transitionless quantum driving". Em: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 42.36 (2009), p. 365303.
- [3] F. Binder et al., eds. *Thermodynamics in the Quantum Regime: Fundamental Aspects and Modern Developments*. Springer, 2018.
- [4] Heinz-Peter Breuer e Francesco Petruccione. *The theory of open quantum systems*. OUP Oxford, 2002.



- [5] Cleverson Cherubim, Thiago R de Oliveira e Daniel Jonathan. “Nonadiabatic coupled-qubit Otto cycle with bidirectional operation and efficiency gains”. Em: *Physical Review E* 105.4 (2022), p. 044120.
- [6] Ivan H Deutsch. “Harnessing the power of the second quantum revolution”. Em: *PRX Quantum* 1.2 (2020), p. 020101.
- [7] J. E. Geusic, E. O. Schulz-DuBois e H. E. D. Scovil. “Quantum Equivalent of the Carnot Cycle”. Em: *Phys. Rev.* 156 (2 abr. de 1967), pp. 343–351. DOI: 10.1103/PhysRev.156.343. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.156.343>.
- [8] Nathan M Myers, Obinna Abah e Sebastian Deffner. “Quantum thermodynamic devices: From theoretical proposals to experimental reality”. Em: *AVS quantum science* 4.2 (2022).
- [9] Thiago R de Oliveira e Daniel Jonathan. “Efficiency gain and bidirectional operation of quantum engines with decoupled internal levels”. Em: *Physical Review E* 104.4 (2021), p. 044133.
- [10] John P. S. Peterson et al. “Experimental Characterization of a Spin Quantum Heat Engine”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 123.24 (2019), p. 240601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.240601.
- [11] Francesco Plastina et al. “Irreversible work and inner friction in quantum thermodynamic processes”. Em: *Physical review letters* 113.26 (2014), p. 260601.
- [12] Facundo Sapienza, Federico Cerisola e Augusto J Roncaglia. “Correlations as a resource in quantum thermodynamics”. Em: *Nature communications* 10.1 (2019), p. 2492.
- [13] Alexander Streltsov, Gerardo Adesso e Martin B Plenio. “Colloquium: Quantum coherence as a resource”. Em: *Reviews of Modern Physics* 89.4 (2017), p. 041003.