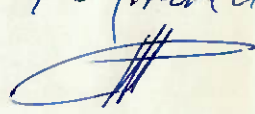


ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

9.5

NOTA 9.5 (nove e cinco)


PROJETO MECÂNICO

CÁLCULO ESTRUTURAL DE VASOS DE PRESSÃO

AUTOR: MAURO KENITI TAGOMORI

ORIENTADOR: HILDO PERA

1988

Faint, illegible text, possibly a library stamp or institutional mark.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1 TEORIA GERAL DOS CASCOS CILÍNDRICOS	
1.1 Casco Circular Cilíndrico Carregado Simetricamente com Respeito a Seu Eixo	1
1.2 Casos Particulares de Deformação Simétrica de Cascos Circulares Cilíndricos	10
1.3 Vasos de Pressão	29
CAPÍTULO 2 CASCO COM A FORMA DE UMA SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO E CARREGADO SIMETRICAMENTE EM RELAÇÃO AO SEU EIXO	
2.1 Equações de Equilíbrio	36
2.2 Redução das Equações de Equilíbrio para 2 Equações Diferenciais de Segunda Ordem	43
2.3 Cascos Esféricos com Espessura Constante	50
2.4 Métodos Aproximados de Análise de Tensões em Cascos Esféricos	57

INTRODUÇÃO

O trabalho tem como finalidade apresentar algumas soluções analíticas para o cálculo estrutural de vasos de pressão.

O cálculo analítico tem importância fundamental no caso de vasos de alta pressão, onde os métodos propostos pelas normas tais como DIN, ASME, etc... não podem ser aplicados.

Um exemplo de aplicação desse tipo de vaso é no armazenamento do metano, devido a alta pressão de liquefação desse gás. Um armazenamento adequado dessa substância possibilitaria a sua utilização em veículos automotores com grande eficiência, baixo custo e baixos índices de poluição.

1- TEORIA GERAL DOS CASCOS CILÍNDRICOS

1.1- Casco Circular Cilíndrico Carregado Simetricamente com Respeito a Seu Eixo

Em aplicações práticas nós frequentemente encontramos problemas nos quais um casco circular cilíndrico é submetido a ação de forças distribuídas simetricamente com respeito ao eixo do cilindro. A distribuição de esforços em caldeiras cilíndricas submetidas a ação da pressão de vapor, esforços em reservatórios circulares tendo eixo vertical e submetidos a pressão interna do líquido, e esforços em tubos circulares sobre pressão interna uniforme são exemplos de tal problema.

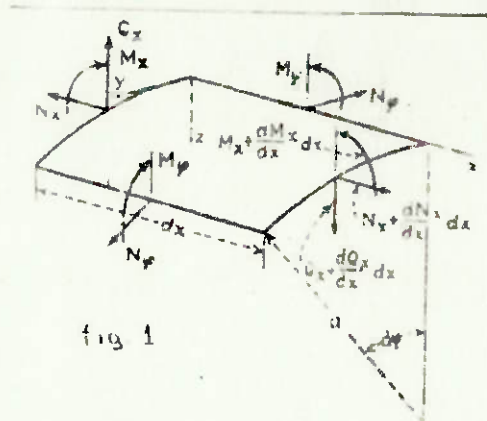


fig 1

Para se estabelecer as equações requeridas para solucionar esses problemas vamos considerar um elemento, como mostrado na figura 1.1, e considerar as equações de equilíbrio. Podemos concluir por simetria que as forças de cisalhamento na membrana $N_{\phi} = N_{\phi}$ se anulam nesse caso e que as forças N_{ϕ} são constantes ao longo da circunferência. Devido as forças transversais de cisalhamento, pode-se também concluir por simetria que somente as forças Q_x não se anulam. Considerando-se os momentos atuantes sobre o elemento na figura 1.1, também podemos concluir por simetria que os momentos torsores $M_{\phi} = M_{\phi}$ se anulam e que os momentos fletores M_{ϕ} são constantes ao longo da circunferência. Sobre tais condições de simetria 3 das 6 equações de equilíbrio do elemento são identicamente satisfeitas, e nós devemos considerar somente as 3 equações restantes, obtidas pela projeção das forças nos eixos x e z. Assumindo que as forças externas consistem somente da pressão normal sobre a superfície, essas 3 equações são:

$$\frac{dN_x}{dx} \cdot a \cdot dx \cdot d\phi = 0$$

$$\frac{dQ_x}{dx} \cdot a \cdot dx \cdot d\phi + N_{\phi} \cdot dx \cdot d\phi + Z \cdot a \cdot dx \cdot d\phi = 0 \quad \text{eq. a}$$

$$\frac{dM_x}{dx} \cdot a \cdot dx \cdot d\phi - Q_x \cdot a \cdot dx \cdot d\phi = 0$$

A primeira indica que as forças N_x são constantes, e as assumiremos com o valor zero em discussões adiante. Se elas forem diferentes de zero, a deformação e a tensão correspondentes a tais forças constantes podem ser facilmente calculadas e superpostas nas tensões e deformações produzidas pelas cargas laterais. As duas equações restantes podem ser escritas na seguinte forma simplificada:

$$\frac{dQ_x + 1}{dx} \cdot \frac{N\phi}{a} = -Z$$

$$\frac{dM_x - Q_x}{dx} = 0$$

eq. b

Essas duas equações contêm três parâmetros desconhecidos: $N\phi$, Q_x e M_x . Para resolver o problema nós devemos então considerar a disposição dos pontos no meio da superfície do casco.

Por simetria podemos concluir que a componente v da disposição na direção circunferencial se anula. Assim, devemos somente considerar as componentes u e w nas direções x e z , respectivamente. As expressões para as componentes de tensão então são:

$$x = \frac{du}{dx} \quad = -\frac{w}{a}$$

eq. c

Pela aplicação da lei de Hooke, obtemos:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{E \cdot h}{1-\nu} (\epsilon_x + \nu \cdot \epsilon_\varphi) = \frac{E \cdot h}{1-\nu} \left[\frac{du}{dx} - \nu \cdot \frac{w}{a} \right] = 0 \\ N_\varphi &= \frac{E \cdot h}{1-\nu} (\epsilon_\varphi + \nu \cdot \epsilon_x) = \frac{E \cdot h}{1-\nu} \left[\frac{-w}{a} + \nu \cdot \frac{du}{dx} \right] \end{aligned} \quad \text{eq. d}$$

Através da primeira dessas equações, segue-se:

$$\frac{du}{dx} = \nu \cdot \frac{w}{a}$$

A segunda equação nos fornece:

$$N_\varphi = -\frac{E \cdot h \cdot w}{a} \quad \text{eq. e}$$

Considerando-se os momentos fletores, podemos concluir por simetria que não há mudança na curvatura na direção circunferencial. A curvatura na direção x é igual a $-d^2w/dx^2$. Utilizando as mesmas equações, obtemos:

$$\begin{aligned} M_\varphi &= \nu \cdot M_x \\ M_x &= -D \cdot \frac{d^2w}{dx^2} \end{aligned} \quad \text{eq. f}$$

onde
$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1-\nu^3)}$$

que representa a rigidez a flexão do casco.

Retornando a eq.a e eliminando Q_x dessas equações, obtemos:

$$\frac{d^2 Mx + 1.N\varphi}{dx^2} = -Z$$

das quais, pela utilização das eq.e e eq.f, obtemos:

$$\frac{d^2}{dx^2} \cdot \left[D \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \right] + \frac{E \cdot h}{a^2} \cdot w = Z \quad \text{eq.1}$$

Todos os problemas de deformação simétrica de cascos circulares cilíndricos assim se reduzem a integração da eq.1.

A aplicação mais simples dessa equação é feita quando a espessura do casco é constante. Sob tais condições, a eq.1 torna-se:

$$D \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{E \cdot h}{a^2} \cdot w = Z \quad \text{eq.2}$$

Utilizando a notação:

$$\beta^4 = \frac{E \cdot h}{4 \cdot a^2 D} = \frac{3 \cdot (1 - \nu^2)}{a^2 h^2} \quad \text{eq.3}$$

A eq.2 pode ser representada na forma simplificada:

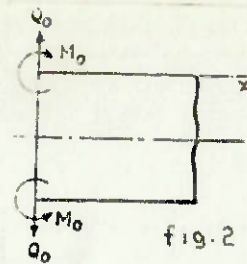
$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4 \cdot \beta^4 \cdot w = \frac{Z}{D} \quad \text{eq.4}$$

Essa equação é a mesma para uma barra prismática com a rigidez a flexão D, suportada por uma fundação elástica contínua e submetida a ação de uma carga de intensidade Z. A solução geral dessa equação é:

$$w = e^{\beta x} \cdot (C1 \cdot \cos \beta x + C2 \cdot \sin \beta x) + e^{-\beta x} \cdot (C3 \cdot \cos \beta x + C4 \cdot \sin \beta x) + f(x) \quad \text{eq.5}$$

na qual $f(x)$ é uma solução particular da eq.4 e $C1, \dots, C4$ são constantes de integração as quais podem ser determinadas em cada caso particular para as condições das extremidades do cilindro. Por exemplo no caso de um tubo circular longo submetido a ação de momentos fletores M_0 e forças de cisalhamento Q_0 , ambas uniformemente distribuídas ao longo do eixo $x=0$, como mostra a fig.2. Nesse caso, não há pressão Z distribuída sobre a superfície do casco, e $f(x)=0$ é a solução geral, ou seja a eq.5. Desde que as forças aplicadas na extremidade $x=0$ produzam uma flexão local a qual diminui rapidamente a medida que a distância x da extremidade carregada cresce, podemos concluir que o primeiro termo do lado direito da eq.5 é:

$$w = e^{-\beta x} \cdot (C3 \cdot \cos \beta x + C4 \cdot \sin \beta x) \quad \text{eq.9}$$



As duas constantes C3 e C4 podem ser determinadas pelas condições da extremidade carregada, que podem ser escritas como:

$$Mx(x=0) = -D \cdot \frac{d^2 w}{dx^2}(x=0) = M_0$$

$$Qx(x=0) = \frac{dMx}{dx}(x=0) = -D \cdot \frac{d^3 w}{dx^3}(x=0) = Q_0$$

eq. h

Substituindo a eq. g na w, obtemos para essas condições:

$$C_3 = -\frac{1}{2 \cdot \beta^3 \cdot D} \cdot (Q_0 + \beta \cdot M_0) \quad C_4 = \frac{M_0}{2 \cdot \beta^2 \cdot D}$$

eq. i

Assim a expressão final para w é:

$$w = \frac{e^{-\beta x}}{2 \cdot \beta^2 \cdot D} \cdot (\beta \cdot M_0 \cdot (\sin \beta x - \cos \beta x) - Q_0 \cdot \cos \beta x)$$

eq. 6

A deflexão máxima é obtida na extremidade carregada, onde:

$$w(x=0) = -\frac{1}{2 \cdot \beta^2 \cdot D} \cdot (\beta \cdot M_0 + Q_0)$$

eq. 7

O sinal negativo da deflexão resulta do fato que w é tomado como positivo em relação ao eixo do cilindro. A inclinação na extremidade carregada é obtida pela diferenciação da eq.6. Isso nos fornece:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx}(x=0) &= \frac{e^{-\beta x}}{2 \cdot \beta^2 \cdot D} \cdot (2 \cdot \beta \cdot M_0 \cdot \cos \beta x + Q_0 \cdot (\cos \beta x + \sin \beta x)) (x=0) \\ &= \frac{1}{2 \cdot \beta^2 \cdot D} \cdot (2 \cdot \beta \cdot M_0 + Q_0) \end{aligned} \quad \text{eq.8}$$

Pela introdução da notação:

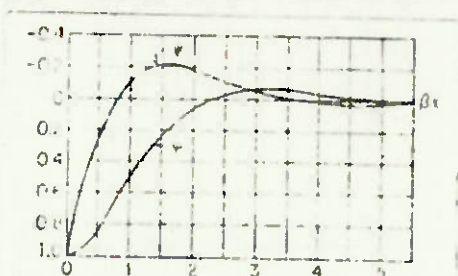
$$\begin{aligned} \varphi(\beta x) &= e^{-\beta x} \cdot (\cos \beta x + \sin \beta x) \\ \psi(\beta x) &= e^{-\beta x} \cdot (\cos \beta x - \sin \beta x) \\ \theta(\beta x) &= e^{-\beta x} \cdot \cos \beta x \\ \mathcal{J}(\beta x) &= e^{-\beta x} \cdot \sin \beta x \end{aligned} \quad \text{eq.9}$$

as expressões para a deflexão e as consecutivas derivadas podem ser representadas na seguinte forma simplificada:

$$\begin{aligned} w &= -\frac{1}{2 \cdot \beta^2 \cdot D} \cdot (\beta \cdot M_0 \cdot \psi(\beta x) + Q_0 \cdot \theta(\beta x)) \\ \frac{dw}{dx} &= \frac{1}{2 \cdot \beta^2 \cdot D} \cdot (2 \cdot \beta \cdot M_0 \cdot \theta(\beta x) + Q_0 \cdot \varphi(\beta x)) \\ \frac{d^2 w}{dx^2} &= -\frac{1}{2 \cdot \beta \cdot D} \cdot (2 \cdot \beta \cdot M_0 \cdot \varphi(\beta x) + 2 \cdot Q_0 \cdot \mathcal{J}(\beta x)) \\ \frac{d^3 w}{dx^3} &= \frac{1}{D} \cdot (2 \cdot \beta \cdot M_0 \cdot \mathcal{J}(\beta x) - Q_0 \cdot \psi(\beta x)) \end{aligned} \quad \text{eq.10}$$

Os valores numéricos das eq.9 são dados na tab.1. As funções ϕ e ψ são representadas graficamente na fig.3. Pode-se notar através da tab.1 e dessas curvas que as funções que definem a flexão do casco se aproximam de zero assim que o valor βx aumenta.

Isso indica que a flexão produzida no casco é uma característica local, como já foi mencionado no começo quando as constantes de integração foram calculadas.

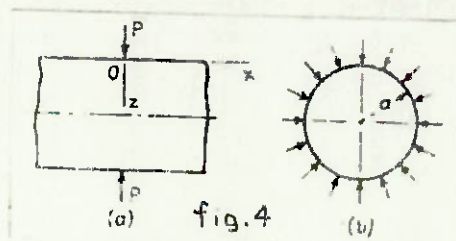


tab.3

Se o momento M_x e a deflexão w forem calculados pela eq.10, o momento fletor M_ϕ é obtido pela primeira expressão da eq.f, e o valor da força N_ϕ da eq.e. Assim todas as informações necessárias para o cálculo de esforços no casco podem ser obtidas.

1.2- Casos Particulares de Deformação Simétrica de Cascos Circulares Cilíndricos

A fig.4 representa uma seção circular de um casco cilíndrico longo com uma carga uniformemente distribuída. Se a carga estiver suficientemente longe das extremidades do cilindro, a eq.6 pode ser usada para cada metade do casco.



Pelas condições de simetria podemos concluir que o valor de Q_0 nesse caso é $-P/2$. Nós assim obtemos para a porção direita:

$$w = \frac{e^{-\beta x}}{2 \cdot \beta^3 D} \cdot (\beta \cdot M_0 \cdot (\sin \beta x - \cos \beta x) + P \cdot \cos \beta x) \quad \text{eq.a}$$

onde x é tomado para cada seção transversal em que a carga é aplicada. Para calcular o momento M_0 o qual aparece na eq.a utilizamos a eq.8, a qual nos fornece a inclinação em $x=0$. Em nosso caso essa inclinação se anula devido a simetria.

Assim:

$$2 \cdot \beta \cdot M_0 - \frac{P}{2} = 0$$

e nós obtemos:

$$M_0 = \frac{P}{4 \cdot \beta} \quad \text{eq. b}$$

Substituindo esse valor na eq. a, a deflexão do casco torna-se:

$$w = \frac{P \cdot e^{-\beta x}}{8 \cdot \beta^3 \cdot D} \cdot (\sin \beta x + \cos \beta x) = \frac{P}{8 \cdot \beta^3 \cdot D} \cdot \varphi(\beta x) \quad \text{eq. 11}$$

e por diferenciação obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= -2 \cdot \beta \cdot \frac{P}{8 \cdot \beta^3 \cdot D} \cdot e^{-\beta x} \cdot \sin \beta x = -\frac{P}{4 \cdot \beta^2 \cdot D} \cdot \zeta(\beta x) \\ \frac{d^2 w}{dx^2} &= 2 \cdot \beta^2 \cdot \frac{P}{8 \cdot \beta^3 \cdot D} \cdot e^{-\beta x} \cdot (\sin \beta x - \cos \beta x) = -\frac{P}{4 \cdot \beta \cdot D} \cdot \psi(\beta x) \quad \text{eq. c} \\ \frac{d^3 w}{dx^3} &= 4 \cdot \beta^3 \cdot \frac{P}{8 \cdot \beta^3 \cdot D} \cdot e^{-\beta x} \cdot \cos \beta x = \frac{P}{2 \cdot \beta \cdot D} \cdot \theta(\beta x) \end{aligned}$$

Observando as equações b e f do capítulo anterior, temos:

$$M_x = -D \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \quad Q_x = -D \cdot \frac{d^3 w}{dx^3}$$

Finalmente obtemos as seguintes expressões para o momento fletor e as forças de cisalhamento:

$$M_x = \frac{P}{4 \cdot \beta} \cdot \psi(\beta x) \quad Q_x = -\frac{P}{2} \cdot \theta(\beta x) \quad \text{eq.12}$$

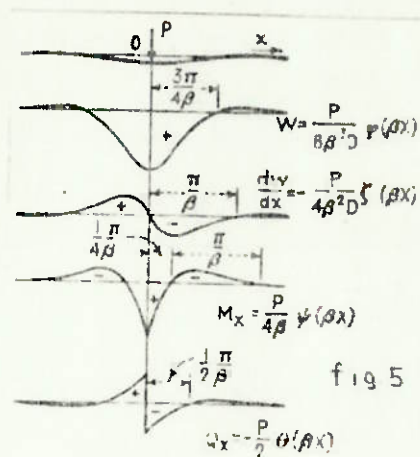
Os resultados obtidos estão todos graficamente representados na fig.5. Pode-se notar que a deflexão máxima está localizada sob a carga P e que esse valor como dado pela eq.11 é:

$$w_{\text{máx}} = \frac{P}{8 \cdot \beta^3 \cdot D} = \frac{P \cdot a^2 \cdot \beta}{2 \cdot E \cdot h} \quad \text{eq.13}$$

O máximo momento fletor também está localizado sob a carga e é definido pela eq.12 como:

$$M_{\text{máx}} = \frac{P}{4 \cdot \beta} \quad \text{eq.14}$$

O valor máximo absoluto da força de cisalhamento é evidentemente igual a $P/2$. Esses valores a uma certa distância da carga podem ser rapidamente obtidos pela utilização da tab.1. Observando essa tabela e a fig.5, podemos concluir que todos os valores que determinam a flexão do casco são menores que $x > \pi/\beta$. Esse fato indica que a flexão é uma característica local e que um casco de comprimento $l = 2\pi/\beta$ carregado no centro terá praticamente a mesma deflexão máxima e a mesma tensão máxima no caso de um casco longo.



Analizando a solução do problema no qual a carga está concentrada na secção circular, podemos imediatamente resolver o problema da carga distribuída ao longo de um certo comprimento do cilindro pela aplicação do princípio da superposição. Como exemplo vamos considerar o caso de uma carga de intensidade q uniformemente distribuída ao longo do comprimento l do cilindro, como mostrado na fig.6. Assumindo que a carga está a uma distância considerável das extremidades do cilindro, podemos utilizar a eq.11 para calcular as deflexões. A deflexão no ponto A produzida por um anel elementar de carga de intensidade $q.d.\xi$ a uma distância ξ de a é obtida pela eq.11 pela substituição de $q.d.\xi$ por P no eixo x e é igual a:

$$\frac{q.d.\xi}{8.\beta^3 D} . e^{-\beta\xi} . (\cos \beta\xi + \sin \beta\xi)$$

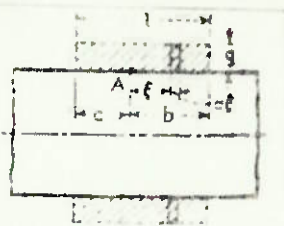


fig.6

A deflexão produzida em A pela carga total distribuída sobre o comprimento l é então:

$$w = \int_0^b \frac{q.d.\xi}{8.\beta^3 D} . e^{-\beta\xi} . (\cos \beta\xi + \sin \beta\xi) + \int_0^c \frac{q.d.\xi}{8.\beta^3 D} . e^{-\beta\xi} . (\cos \beta\xi + \sin \beta\xi)$$

$$= \frac{q.a^2}{2.E.h} . (2 - e^{-\beta b} . \cos \beta b - e^{-\beta c} . \cos \beta c)$$

o momento fletor no ponto A pode ser calculado por uma aplicação similar ao método da superposição.

A fig.7 representa um casco cilíndrico com uma pressão interna uniforme. Se os cantos do casco estiverem livres, a pressão interna p produz somente uma tensão no arco:

$$\sigma_t = \frac{p \cdot a}{h}$$

e o raio do cilindro aumenta para:

$$\delta = a \cdot \frac{\sigma_t}{E} = \frac{p \cdot a^2}{E \cdot h}$$

eq.d

Se as extremidades do casco são construídas como mostrado na fig.7a, elas não podem se mover, e a flexão local ocorre nas extremidades. Se o comprimento l do casco for suficientemente grande, podemos utilizar a eq.6 para investigar essa flexão, o momento M_0 e a força de cisalhamento Q_0 sendo determinadas pelas condições nas quais a deflexão e a inclinação ao longo dos cantos $x=0$ na fig.7a se anulam. De acordo com essas condições, as equações 7 e 8 do capítulo anterior tornam-se:

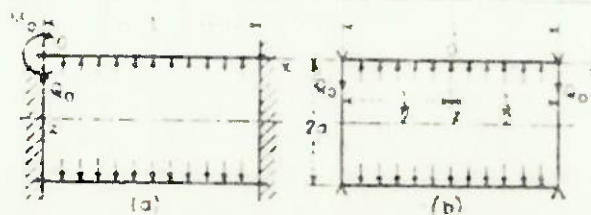


fig.7

$$-\frac{1}{2.\beta^2.D} . (\beta.M_0+Q_0) = \delta$$

$$\frac{1}{2.\beta^2.D} . (2.\beta.M_0+Q_0) = 0$$

onde δ é dado pela eq.d

Resolvendo por M_0 e Q_0 , obtemos:

$$M_0 = 2.\beta^2.D.\delta = \frac{p}{2.\beta^2} \quad Q_0 = -4.\beta^2.D.\delta = -\frac{p}{\beta} \quad \text{eq..15}$$

Assim obtemos um momento fletor positivo e uma força de cisalhamento negativa atuando como mostrado na fig.7a. Substituindo esses valores na eq.10, a deflexão e o momento fletor a qualquer distância da extremidade podem ser imediatamente calculados pelo uso da tab.1.

Ao invés de se construir os cantos como mostrado na fig.7a, simplesmente colocamos bordas suportadas como mostrado na fig.7b, a deflexão e o momento fletor M_x se anulam ao longo do canto $M_0=0$, e obtemos pela eq.7:

$$Q_0 = -2.\beta^3.D.\delta$$

Pela substituição desses valores na eq.6 a deflexão a qualquer distância da extremidade pode ser calculada.

βz	ψ	ψ	θ	ξ	βz	ψ	ψ	θ	ξ
0	1 0000	1 0000	1 0000	0					
0 1	0 8907	0 8100	0 9003	0 0903	4 0	-0 0258	0 0019	-0 0120	-0 0139
0 2	0 9051	0 6398	0 8024	0 1627	4 1	-0 0231	0 0040	-0 0095	-0 0136
0 3	0 9267	0 4888	0 7077	0 2189	4 2	-0 0204	0 0057	-0 0074	-0 0131
0 4	0 8784	0 3594	0 6174	0 2610	4 3	-0 0179	0 0070	-0 0054	-0 0125
					4 4	-0 0155	0 0079	-0 0038	-0 0117
0 5	0 8231	0 2415	0 5323	0 2908	4 5	-0 0132	0 0085	-0 0023	-0 0108
0 6	0 7628	0 1431	0 4536	0 3099	4 6	-0 0111	0 0089	-0 0011	-0 0100
0 7	0 6997	0 0599	0 3798	0 3199	4 7	-0 0092	0 0090	0 0001	-0 0091
0 8	0 6354	-0 0093	0 3131	0 3223	4 8	-0 0075	0 0089	0 0007	-0 0082
0 9	0 5712	-0 0657	0 2527	0 3185	4 9	-0 0059	0 0087	0 0014	-0 0073
1 0	0 5083	-0 1108	0 1988	0 3098					
1 1	0 4476	-0 1457	0 1510	0 2967	5 0	-0 0046	0 0084	0 0019	-0 0065
1 2	0 3899	-0 1716	0 1091	0 2807	5 1	-0 0033	0 0080	0 0023	-0 0057
1 3	0 3355	-0 1897	0 0729	0 2626	5 2	-0 0023	0 0075	0 0026	-0 0049
1 4	0 2849	-0 2011	0 0419	0 2430	5 3	-0 0014	0 0069	0 0028	-0 0042
					5 4	-0 0006	0 0064	0 0029	-0 0035
1 5	0 2384	-0 2068	0 0158	0 2226					
1 6	0 1959	-0 2077	-0 0059	0 2018	5 5	0 0000	0 0058	0 0029	-0 0029
1 7	0 1576	-0 2047	-0 0235	0 1812	5 6	0 0005	0 0052	0 0029	-0 0023
1 8	0 1234	-0 1985	-0 0376	0 1610	5 7	0 0010	0 0046	0 0028	-0 0019
1 9	0 0932	-0 1899	-0 0484	0 1415	5 8	0 0013	0 0041	0 0027	-0 0014
					5 9	0 0015	0 0036	0 0026	-0 0010
2 0	0 0667	-0 1794	-0 0563	0 1230	6 0	0 0017	0 0031	0 0024	-0 0007
2 1	0 0439	-0 1675	-0 0618	0 1057	6 1	0 0019	0 0026	0 0022	-0 0004
2 2	0 0244	-0 1548	-0 0652	0 0895	6 2	0 0019	0 0022	0 0020	-0 0002
2 3	0 0080	-0 1416	-0 0688	0 0748	6 3	0 0019	0 0018	0 0018	-0 0001
2 4	-0 0056	-0 1282	-0 0669	0 0613	6 4	0 0018	0 0015	0 0017	0 0003
2 5	-0 0166	-0 1149	-0 0658	0 0492	6 5	0 0018	0 0012	0 0015	0 0004
2 6	-0 0254	-0 1019	-0 0636	0 0383	6 6	0 0017	0 0009	0 0013	0 0005
2 7	-0 0320	-0 0895	-0 0608	0 0287	6 7	0 0016	0 0006	0 0011	0 0006
2 8	-0 0369	-0 0777	-0 0573	0 0204	6 8	0 0015	0 0004	0 0010	0 0006
2 9	-0 0403	-0 0666	-0 0534	0 0132	6 9	0 0014	0 0002	0 0008	0 0006
					7 0	0 0013	0 0001	0 0007	0 0006
3 0	-0 0423	-0 0563	-0 0493	0 0071					
3 1	-0 0431	-0 0469	-0 0450	0 0019					
3 2	-0 0431	-0 0383	-0 0407	-0 0024					
3 3	-0 0422	-0 0300	-0 0364	-0 0058					
3 4	-0 0408	-0 0237	-0 0323	-0 0085					
3 5	-0 0389	-0 0177	-0 0283	-0 0106					
3 6	-0 0366	-0 0124	-0 0245	-0 0121					
3 7	-0 0341	-0 0079	-0 0210	-0 0131					
3 8	-0 0314	-0 0040	-0 0177	-0 0137					
3 9	-0 0286	-0 0008	-0 0147	-0 0140					

Tab. 1

Foi assumido na discussão que o comprimento do casco é grande. Se não for esse o caso, a flexão em uma extremidade não pode ser considerada como independente das condições do outro lado, e um recurso deve ser fornecido para uma solução geral, como a eq.5, a qual contém 4 constantes de integração. A solução particular da eq.4 para o caso da carga uniforme $Z=-p$ é $-p/4.\beta^4 D=-p.a/E.h$. A solução geral 5 pode então ser apresentada da seguinte forma pela introdução de funções hiperbólicas no lugar de funções exponenciais:

$$w = -\frac{p.a^2}{E.h} + C1.\sin \beta x.\sinh \beta x + C2.\sin \beta x.\cosh \beta x + C3.\cos \beta x.\sinh \beta x + C4.\cos \beta x.\cosh \beta x \quad \text{eq.e}$$

Se a origem das coordenadas for tomada no meio do cilindro, como mostrado na fig.7b, a eq.e deve ser uma função de x . Assim:

$$C2 = C3 = 0 \quad \text{eq.f}$$

As constantes $C1$ e $C4$ devem ser selecionadas para satisfazer as condições nas extremidades. Se as extremidades forem simplesmente suportadas, a deflexão e o momento fletor M_x devem se anular nos extremos, e assim obtemos:

$$w(x=1/2) = 0 \quad \frac{d^2 w}{dx^2}(x=1/2) = 0 \quad \text{eq.g}$$

Substituindo a eq. e nessas relações e lembrando que $C_2=C_3=0$, podemos concluir:

$$\begin{aligned} \frac{-p.a + C_1 \sin \alpha \sinh \alpha + C_4 \cos \alpha \cosh \alpha}{E.h} &= 0 \\ C_1 \cos \alpha \cosh \alpha - C_4 \sin \alpha \sinh \alpha &= 0 \end{aligned} \quad \text{eq. h}$$

onde, por motivos de simplicidade:

$$\frac{\beta \cdot l}{2} = \alpha \quad \text{eq. i}$$

Dessas equações obtemos:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{p.a^2}{E.h} \frac{\sin \alpha \sinh \alpha}{\sin^2 \alpha \sinh^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cosh^2 \alpha} = \frac{p.a^2 \cdot 2 \sin \alpha \sinh \alpha}{E.h \cos 2\alpha + \cosh 2\alpha} \\ C_2 &= \frac{p.a^2}{E.h} \frac{\cos \alpha \cosh \alpha}{\sin^2 \alpha \sinh^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cosh^2 \alpha} = \frac{p.a^2 \cdot 2 \cos \alpha \cosh \alpha}{E.h \cos 2\alpha + \cosh 2\alpha} \end{aligned} \quad \text{eq. j}$$

Substituindo os valores j e f das constantes na expressão e, observando a eq. b:

$$\frac{E.h}{a^2} = 4 \cdot D \cdot \beta^4 = \frac{64 \cdot \alpha^4 \cdot D}{l^4} \quad \text{eq. k}$$

Nós obtemos:

$$w = -\frac{p \cdot l^4}{64 \cdot D \cdot d^4} \left[\frac{1 - 2 \cdot \sin \alpha \cdot \sinh \alpha \cdot \sin \beta x \cdot \sinh \beta x}{\cos 2\alpha + \cosh 2\alpha} - \frac{2 \cdot \cos \alpha \cdot \cosh \alpha \cdot \cos \beta x \cdot \cosh \beta x}{\cos 2\alpha + \cosh 2\alpha} \right] \quad \text{eq.1}$$

Em cada caso particular, se as dimensões do casco são conhecidas, o ângulo α , de pequeno valor, pode ser calculado por meio da eq.1 e eq.3. Pela substituição desse valor na eq.1 a deflexão no casco em qualquer ponto pode ser calculada.

Para o meio do casco, substituindo $x=0$ na expressão 1, obtemos:

$$w(x=0) = -\frac{p \cdot l^4}{64 \cdot D \cdot d^4} \left[\frac{1 - 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cosh \alpha}{\cos 2\alpha + \cosh 2\alpha} \right] \quad \text{eq.m}$$

Quando o casco é longo, α torna-se grande, o segundo termo no parênteses da eq.m torna-se pequeno, e a deflexão se aproxima do valor d calculado para o caso das extremidades livres. Isso indica que no caso de cascos compridos o efeito das extremidades apoiadas sobre a deflexão no meio é desprezível. Considerando o outro caso extremo, onde α é muito pequeno, podemos exprimi-la pela expansão em funções trigonométricas hiperbólicas em série de potências que a expressão dentro dos parênteses na eq.m se aproxima do valor $5 \cdot \alpha^4 / 6$ e que a deflexão l se aproxima daquela para um suporte uniformemente carregado e simplesmente suportado de comprimento l e rigidez a flexão D .

Diferenciando a eq.1 duas vezes e multiplicando-a por D, o momento fletor calculado é:

$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{p \cdot l^2}{4 \cdot d^2} \left[\frac{\sin \alpha \cdot \sinh \alpha \cdot \cosh \beta x \cdot \cos \beta x}{\cos 2\alpha + \cosh 2\alpha} - \frac{\cos \alpha \cdot \cosh \alpha \cdot \sin \beta x \cdot \sinh \beta x}{\cos 2\alpha + \cosh 2\alpha} \right] \quad \text{eq.n}$$

No meio do casco o momento é:

$$M_x(x=0) = -\frac{p \cdot l^2}{4 \cdot d^2} \frac{\sin \alpha \cdot \sinh \alpha}{\cos 2\alpha + \cosh 2\alpha} \quad \text{eq.o}$$

Para grandes valores de α , isto é, para cascos compridos, esse momento torna-se muito pequeno e o meio da porção, para fins práticos, sofre a ação meramente da tensão circunferencial $p \cdot a/h$.

O caso do cilindro com as extremidades construídas internamente, ou seja, o da fig.7a, pode ser tratado de uma forma similar. Indo diretamente ao resultado final, podemos concluir que o momento fletor M_0 atuante ao longo das extremidades é:

$$M_0 = \frac{p}{2 \cdot \beta^2} \frac{\sinh 2\alpha - \sin 2\alpha}{\sinh 2\alpha + \sin 2\alpha} = \frac{p}{2 \cdot \beta^2} \cdot X_2(2\alpha) \quad \text{eq.16}$$

onde

$$X_2(2\alpha) = \frac{\sinh 2\alpha - \sin 2\alpha}{\sinh 2\alpha + \sin 2\alpha}$$

No caso de cascos compridos, δ torna-se grande, o fator $X_2(2\alpha)$ na eq.16 se aproxima de 1, e o valor do momento se aproxima daquele dado pela primeira das eq.15. Para cascos mais curtos o valor do fator $X_2(2\alpha)$ na eq.16 pode ser obtido da tab.2:

2α	$X_1(2\alpha)$	$X_2(2\alpha)$	$X_3(2\alpha)$
0.2	5.000	0.0068	0.100
0.4	2.502	0.0268	0.200
0.6	1.674	0.0601	0.300
0.8	1.267	0.1065	0.400
1.0	1.033	0.1670	0.500
1.2	0.860	0.2470	0.596
1.4	0.803	0.3170	0.689
1.6	0.755	0.4080	0.775
1.8	0.735	0.5050	0.855
2.0	0.738	0.6000	0.925
2.5	0.802	0.8220	1.015
3.0	0.893	0.9770	1.099
3.5	0.966	1.0500	1.085
4.0	1.005	1.0580	1.050
4.5	1.017	1.0400	1.027
5.0	1.017	1.0300	1.008

tab.2

Vamos considerar agora o caso da flexão de um casco cilíndrico devido a forças e momentos distribuídos ao longo das extremidades. Na seção precedente esse problema foi discutido assumindo que o casco fosse longo e que cada extremidade poderia ser tratada independentemente. No caso de cascos curtos ambas as extremidades devem ser consideradas simultaneamente pelo uso da eq. e com 4 constantes de integração. Procedendo como no caso anterior, os seguintes resultados podem ser obtidos. Para o caso da flexão devido as forças constantes uniformemente distribuídas Q_0 como mostra a fig.8a a deflexão e a inclinação nas extremidades são:

$$w(x=0, x=1) = -\frac{2 \cdot Q_0 \cdot \beta \cdot a^2}{E \cdot h} \frac{\cosh 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sinh 2\alpha + \sin 2\alpha} - \frac{2 \cdot Q_0 \cdot \beta \cdot a^2}{E \cdot h} X_1(2\alpha)$$

$$\frac{dw}{dx}(x=0, x=1) = +\frac{2 \cdot Q_0 \cdot \beta^2 \cdot a^2}{E \cdot h} \frac{\sinh 2\alpha - \sin 2\alpha}{\sinh 2\alpha + \sin 2\alpha} - \frac{2 \cdot Q_0 \cdot \beta^2 \cdot a^2}{E \cdot h} X_2(2\alpha)$$

eq.17

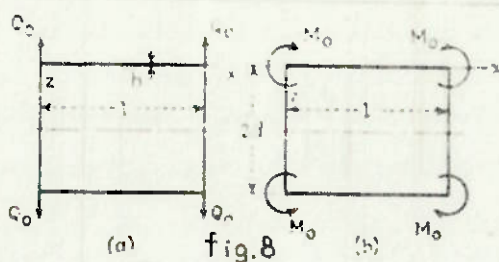
No caso da flexão devido ao momento M_0 , como mostrado na fig.8b, obtemos:

$$w(x=0, x=1) = -\frac{2 \cdot M_0 \cdot \beta^2 \cdot a^2}{E \cdot h} \frac{\sinh 2\alpha - \sin 2\alpha}{\sinh 2\alpha + \sin 2\alpha} - \frac{2 \cdot M_0 \cdot \beta^2 \cdot a^2}{E \cdot h} X_2(2\alpha)$$

$$\frac{dw}{dx}(x=0, x=1) = +\frac{4 \cdot M_0 \cdot \beta^3 \cdot a^2}{E \cdot h} \frac{\cosh 2\alpha - \cos 2\alpha}{\sinh 2\alpha + \sin 2\alpha} - \frac{4 \cdot M_0 \cdot \beta^3 \cdot a^2}{E \cdot h} X_3(2\alpha)$$

eq.18

No caso de cascos compridos, os fatores X_1 , X_2 e X_3 nas eq.17 e 18 são limitados a unidade, e os resultados coincidem com aqueles dados pelas eq.7 e 8.



Para simplificar os cálculos para cascos curtos, os valores das funções X_1 , X_2 e X_3 são fornecidos pela tab.2. Utilizando as eq.17 e 18, as tensões em um tubo longo reforçado por anéis equidistantes (fig.9) e submetido a ação de pressão interna uniforme p podem ser prontamente discutidas.

Vamos assumir primeiramente que não há anéis. Então, sob a ação de pressão interna, a tensão circunferencial $\sigma_t = p.a/h$ será produzida, e o raio do tubo irá crescer para o valor:

$$\delta = \frac{p \cdot a^2}{E \cdot h}$$

Agora, considerando os anéis e assumindo que eles são absolutamente rígidos, podemos concluir que forças de reação serão produzidas entre cada anel e o tubo. A magnitude das forças por unidade de comprimento da circunferência do tubo será chamada de P . A magnitude de P irá ser determinada pela condição de que as forças P produzam uma deflexão no tubo sob o anel igual a expansão δ criada pela pressão interna p . Calculando essa deflexão observamos que a porção do tubo entre dois anéis adjacentes pode ser considerada como o casco mostrado na fig.18a e b. Nesse caso $Q_0 = -P/2$, e a magnitude do momento fletor M_0 sob o anel é determinada pela condição que $dw/dx=0$ naquele ponto.

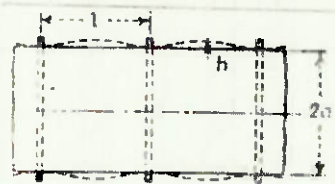


fig.9

Assim através das eq.17 e 18:

$$\frac{-P \cdot \beta \cdot a^2 \cdot X_2(2\alpha)}{E \cdot h} + \frac{4 \cdot M_0 \cdot \beta^3 \cdot a^2 \cdot X_3(2\alpha)}{E \cdot h} = 0$$

Através da qual:

$$M_0 = \frac{P \cdot X_2(2\alpha)}{4 \cdot \beta \cdot X_3(2\alpha)}$$

eq. p

Se o espaçamento entre os anéis for grande, o valor:

$$2.\alpha = \beta.l = \frac{1}{\sqrt{a.h}} \cdot 3\sqrt[4]{(1-\nu^2)}$$

também é grande, as funções $X_2(2\alpha)$ e $X_3(2\alpha)$ tendem a unidade, e o momento M_0 tende ao valor da eq.14. Para o cálculo da força P através da eq.p as expressões para a deflexão dadas nas eq.17 e 18 devem ser usadas. Essas expressões fornecem:

$$\frac{P.\beta.a^2.X_1(2\alpha)}{E.h} - \frac{P.\beta.a^2.X_2^2(2\alpha)}{2.E.h.X_3(2\alpha)} = \delta = \frac{p.a^2}{E.h}$$

ou

$$P.\beta.\left[X_1(2\alpha) - \frac{1}{2} \frac{X_2^2(2\alpha)}{X_3(2\alpha)}\right] = \frac{\delta.E.h}{a^2} = p$$

eq.19

Para grandes valores de $2.\alpha$ a eq.19 se reduz a:

$$\frac{P.\beta.a^2}{2.E.h} = \delta$$

que coincide com a eq.13. Quando $2.\alpha$ não é grande, o valor das forças de reação P é calculado pela eq.19 através do uso da tab.2. Resolvendo-se a eq.19 para P e substituindo essa expressão na eq.p, obtemos:

$$M_0 = \frac{p}{2.\beta^2} . X_2(2\alpha)$$

eq.20

Essas equações coincidem com a eq.16 obtida anteriormente para o caso do casco com as extremidades construídas internamente.

Para compreender a extensão dos anéis observamos que as forças de reação P produzem no anel a força de tração P.a e que o incremento correspondente ao raio interno é:

$$\delta l = \frac{P \cdot a^2}{A \cdot E}$$

onde A é a área da secção transversal do anel. Para estimarmos essa extensão, substituímos $\delta - \delta l$ por δ na eq.19 e obtemos:

$$P \cdot \beta \cdot \left[X_1(2\alpha) - \frac{1}{2} \frac{X_2(2\alpha)}{X_3(2\alpha)} \right] = p - \frac{P \cdot h}{A} \quad \text{eq.21}$$

Através dessa equação, o valor P pode ser imediatamente obtido pelo uso da tab.2 e o momento calculado pela substituição de $p - (P \cdot h/A)$ por p na eq.20.

Se a pressão p atua não somente no casco cilíndrico mas também nas extremidades, as forças longitudinais:

$$N_x = \frac{p \cdot a}{2}$$

são produzidas no casco.

A extensão do raio do cilindro então será:

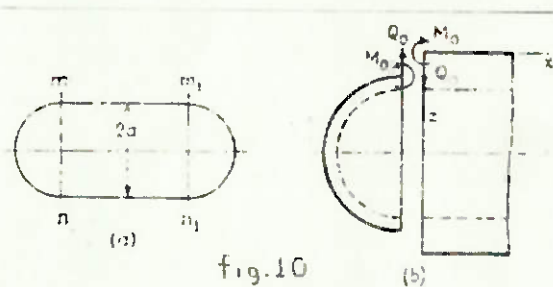
$$\delta' = \frac{p \cdot a^2}{E \cdot h} \left[\frac{1-\nu}{2} \right]$$

e o valor $p \cdot (1-\nu/2)$ deve ser substituído por p nas eq.20 e 21.

As eq.21 e 19 podem ser também utilizadas no caso da pressão externa uniforme caso a tensão compressiva no anel e no casco forem muito maiores que a tensão crítica na qual a torção pode ocorrer. Esse caso é de importância prática no projeto de submarinos e tem sido discutido por vários pesquisadores.

1.3- Vasos de Pressão

O método ilustrado pelo exemplo do artigo precedente pode também ser aplicado na análise da tensão em vasos cilíndricos submetidos a ação da pressão interna. Na discussão da teoria da membrana comumente é indicado que ela não é válida na representação das tensões nas porções do casco fechadas nas extremidades, desde que as condições nas extremidades não são satisfeitas pela consideração da tensão da membrana. A condição similar na qual a teoria da membrana não é adequada é achada em vasos de pressão cilíndricos nas juntas entre a porção cilíndrica e as extremidades do vaso. Nessas juntas as tensões da membrana são usualmente acompanhadas pelas tensões de flexão as quais são distribuídas simetricamente em relação ao eixo do cilindro. Essas tensões locais podem ser calculadas pelo uso da eq.6.



Vamos começar com o caso simples do vaso cilíndrico com extremidades hemisféricas como mostra a fig.10. A uma distância suficiente das juntas mn e mnl a teoria da membrana tem precisão suficiente e tem na porção cilíndrica da raio a:

$$N_x = \frac{p \cdot a}{2} \quad N_t = p \cdot a \quad \text{eq.a}$$

onde p denota a pressão interna.

Para as extremidades esféricas essa teoria fornece uma força uniforme de tração:

$$N = \frac{p \cdot a}{2} \quad \text{eq.b}$$

A extensão do raio do casco cilíndrico sobre a ação da força a é:

$$\delta l = \frac{p \cdot a^2}{E \cdot h} \cdot (1 - \nu/2) \quad \text{eq.c}$$

e a extensão do raio das extremidades esféricas é:

$$\delta 2 = \frac{p \cdot a^2}{2 \cdot E \cdot h} \cdot (1 - \nu) \quad \text{eq.d}$$

Comparando as eq.c e d, pode-se concluir que se considerarmos somente as tensões da membrana nós obtemos a descontinuidade das juntas como representado na fig.10b. Isso indica que na junta devem estar agindo forças de cisalhamento Q_0 e momentos fletores M_0 uniformemente distribuídos ao longo da circunferência e tais magnitudes podem eliminar essa descontinuidade. As tensões produzidas por essas forças são as vezes chamadas tensões descontínuas.

No cálculo dos valores Q_0 e M_0 assumimos que a flexão é uma característica local e portanto a eq.6 pode ser aplicada com suficiente precisão no cálculo da flexão da porção cilíndrica. A investigação da flexão nas extremidades esféricas representa mais um problema complicado o qual será detalhadamente discutido no capítulo 2. Aqui será apresentada uma solução aproximada do problema através da consideração de que a flexão ocorre somente na zona esférica do casco fechada pela junta e que essa zona pode ser tratada como uma porção de um casco cilíndrico longo de raio a . Se as espessuras das porções cilíndricas e esféricas do vaso forem as mesmas, as forças Q_0 produzirão iguais rotações das extremidades de ambas as porções na junta com mostra a fig.10b. Isso indica que M_0 desaparece e que Q_0 isoladamente é suficiente para eliminar a descontinuidade.

A magnitude de Q_0 é então determinada através da condição de que a soma dos valores numéricos das deflexões das extremidades das duas partes deve ser igual a diferença $\delta_1 - \delta_2$ da expansão radial fornecida pela teoria da membrana. Utilizando a eq.7 para as deflexões, obtemos:

$$\frac{Q_0}{\beta^3 \cdot D} = \delta_1 - \delta_2 = \frac{p \cdot a^2}{2 \cdot E \cdot h}$$

através da qual, pelo uso da notação 1.3:

$$Q_0 = \frac{p \cdot a^2 \cdot \beta^3 \cdot D}{2 \cdot E \cdot h} = \frac{p}{8 \cdot \beta} \quad \text{eq. e}$$

Tendo obtido esse valor para a força Q_0 , a deflexão e o momento fletor M_x podem ser calculados em qualquer ponto pelo uso das eq.10 as quais fornecem:

$$w = \frac{Q_0}{2 \cdot \beta^3 \cdot D} \cdot \Theta(\beta x)$$

$$M_x = -D \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{Q_0}{\beta} \cdot \mathcal{J}(\beta x)$$

Substituindo na eq.e para Q_0 a eq.3 por β na fórmula para M_x , obtemos:

$$M_x = -\frac{a \cdot h \cdot p}{8 \cdot \sqrt{3} \cdot (1 - \nu^2)^{1/2}} \cdot \mathcal{J}(\beta x) \quad \text{eq. f}$$

Esse momento atinge o máximo valor numérico a uma distância $x = \pi/4.\beta$, em qualquer ponto a derivada do momento é zero, como pode ser visto na quarta expressão da eq.10.

Combinando a máxima tensão de flexão produzida por M_x com a tensão da membrana, concluimos que:

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{a.p}{2.h} + \frac{3.a.p}{4.h.\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot J\left[\frac{\pi}{4}\right] = 1.293 \cdot \frac{a.p}{2.h} \quad \text{eq.9}$$

Essa tensão, a qual atua na superfície externa do casco cilíndrico é aproximadamente 30 por cento maior que a tensão da membrana atuando na direção axial. No cálculo da tensão na direção circunferencial em adição a tensão da membrana $p.a/h$, a tensão circunferencial causada pela deflexão w assim como a tensão de flexão produzida pelo momento $M = \nu.M_x$ devem ser consideradas. Dessa forma obtemos na superfície externa do casco cilíndrico:

$$\sigma_t = \frac{a.p}{h} - \frac{E.w}{a} - \frac{6.\nu.M_x}{h^2} = \frac{a.p}{h} \left[1 - \frac{1}{4} \theta(\beta x) + \frac{3.\nu}{4.\sqrt{3.(1-\nu^2)}} \cdot J(\beta x) \right]$$

Assumindo $\nu=0.3$ e usando a tab.1, obtemos:

$$(\sigma_t)_{\max} = 1.032 \cdot \frac{a.p}{h} \quad \beta x = 1.85 \quad \text{eq.h}$$

Desde que a tensão da membrana seja menor nas extremidades em relação ao cilindro, a tensão máxima nas extremidades esféricas é sempre menor que a tensão calculada como na eq.h. Assim a última tensão é o fator determinante no projeto de um vaso.

O mesmo método de cálculo de tensões descontínuas pode ser aplicado no caso das extremidades tendo a forma de um elipsóide de revolução. Na região da junta mn a qual representa o equador do elipsóide como mostra a fig.11, as tensões na direção do meridiano e na direção equatorial são, respectivamente:

$$\sigma_{\phi} = \frac{p \cdot a}{2 \cdot h} \quad \sigma_{\theta} = \frac{p \cdot a}{h} \cdot \left[1 - \frac{a^2}{2 \cdot b^2} \right] \quad \text{eq. i}$$

A extensão do raio do equador é:

$$\delta'2 = \frac{a}{E} \cdot (\sigma_{\theta} - \nu \cdot \sigma_{\phi}) = \frac{p \cdot a}{E \cdot h} \cdot \left[1 - \frac{a^2}{2 \cdot b^2} - \nu \right]$$

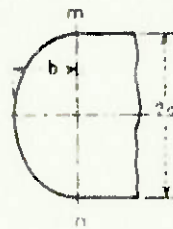


fig 11

Substituindo esse valor por δ_2 no cálculo anterior da força de cisalhamento Q_0 , obtemos:

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{p \cdot a^2}{E \cdot h} \cdot \frac{a^2}{2 \cdot b^2}$$

e, ao invés da eq. e, obtemos:

$$Q_0 = \frac{p}{8 \cdot \beta} \cdot \frac{a^2}{b}$$

Aparentemente os esforços de cisalhamento Q_0 no caso de extremidades elipsoidais são maiores que no caso de extremidades hemisféricas na proporção a/b . A tensão de descontinuidade irá evidentemente crescer na mesma proporção. Por exemplo, assumindo $a/b=2$, obtemos, das eq. g e h:

$$(\sigma_x)_{\text{máx}} = \frac{a \cdot p}{2 \cdot h} + \frac{3 \cdot a \cdot p}{h \cdot \sqrt{3} \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \int_0^{\pi/4} \left[\frac{\pi}{4} \right] = 2.172 \cdot \frac{a \cdot p}{2 \cdot h}$$

$$(\sigma_t)_{\text{máx}} = 1.128 \cdot \frac{a \cdot p}{h}$$

Novamente, $(\sigma_t)_{\text{máx}}$ representa o maior valor de tensão e conseqüentemente o fator determinante no projeto.

2- CASCO COM A FORMA DE UMA SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO E CARREGADO SIMETRICAMENTE EM RELAÇÃO AO SEU EIXO

2.1- Equações de equilíbrio

Vamos considerar as condições de equilíbrio de um elemento do casco com dois meridianos adjacentes planos e duas secções perpendiculares aos meridianos como mostra a fig.1. Deve-se concluir através das condições de simetria que somente esforços normais irão agir nos lados do elemento recaindo nos planos meridianos. Os esforços podem ser reduzidos para a força resultante $N_\theta \cdot r_1 \cdot d\theta$ e o momento resultante $M_\theta \cdot r_1 \cdot d\theta$, N_θ e M_θ sendo independentes do ângulo θ o qual define a posição dos meridianos. O lado do elemento perpendicular aos meridianos o qual é definido pelo ângulo ϕ como mostra a fig.1 é considerado sobre os esforços normais os quais resultam da força $N_\phi \cdot r_2 \cdot \sin \phi \cdot d\theta$ e do momento $M_\phi \cdot r_2 \cdot \sin \phi \cdot d\theta$ e pelas forças de cisalhamento as quais se reduzem as forças $Q_\phi \cdot r_2 \cdot \sin \phi \cdot d\theta$ normais ao casco. A carga externa atuando sobre o elemento pode ser decomposta, como antes, em duas componentes $Y \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \sin \phi \cdot d\phi \cdot d\theta$ e $Z \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \sin \phi \cdot d\phi \cdot d\theta$ tangentes aos meridianos e normais ao casco, respectivamente. Assumindo que as forças da membrana N_θ e N_ϕ não se aproximam dos seus valores críticos, podemos desprezar a mudança de curvatura derivando as equações de equilíbrio.

Na eq.f, obtida pela projeção das forças tangencialmente em relação ao meridiano, o termo $-Q_{\varphi}.r_0$ deve ser adicionado ao lado direito. Também, na eq.j, a qual foi obtida pela projeção das forças em relação a normal do casco, um termo adicional $d(Q_{\varphi}.r_0)/d\varphi$ deve ser adicionado ao lado direito. A terceira equação é obtida pela consideração do equilíbrio dos momentos com respeito a tangente do círculo paralelo de todas as forças atuantes no elemento. Isso fornece:

$$\left[\frac{M_{\varphi} + dM_{\varphi}.d\varphi}{d} \right] \cdot \left[\frac{r_0 + dr_0.d\varphi}{d} \right] \cdot d\theta - M_{\varphi}.r_0.d\theta - M_{\theta}.r_1.\cos \varphi.d\varphi.d\theta - Q_{\varphi}.r_2.\sin \varphi.r_1.d\varphi.d\theta = 0$$

Depois da simplificação, essa equação nos fornece o seguinte sistema de 3 equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \cdot (N_{\varphi}.r_0) - N_{\theta}.r_1.\cos \varphi - r_0.Q_{\varphi} + r_0.r_1.Y &= 0 \\ N_{\varphi}.r_0 + N_{\theta}.r_1.\sin \varphi + \frac{d}{d\varphi} \cdot (Q_{\varphi}.r_0) + Z.r_1.r_2 &= 0 \\ \frac{d}{d\varphi} \cdot (M_{\varphi}.r_0) - M_{\theta}.r_1.\cos \varphi - Q_{\varphi}.r_1.r_0 &= 0 \end{aligned} \quad \text{eq.1}$$

fig.1



Nessas 3 equações de equilíbrio existem 5 parâmetros desconhecidos, 3 forças resultantes N_φ, N_θ e Q_φ e 2 momentos resultantes M_θ e M_φ . O número de incógnitas pode ser reduzido para 3 se expressarmos as forças de membrana N_φ e N_θ e os momentos M_φ e M_θ nos termos das componentes v e w do deslocamento. Na discussão da deformação produzida pelos esforços da membrana, obtemos através das componentes de tensão da superfície média as expressões:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{dv-w}{d\varphi} \quad \varepsilon_\theta = \frac{v}{r_2} \cdot \cot \varphi - \frac{w}{r_2}$$

Através das quais, pelo uso da lei de Hooke, obtemos:

$$N = \frac{E \cdot h}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1}{r_1} \cdot \left[\frac{dv-w}{d} \right] + \frac{\nu}{r_2} \cdot (v \cdot \cot \varphi - w) \right\}$$

$$N = \frac{E \cdot h}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1}{r_2} \cdot (v \cdot \cot \varphi - w) + \frac{\nu}{r_1} \cdot \left[\frac{dv-w}{d} \right] \right\}$$

eq. 2

Para considerarmos as expressões para os momentos M_φ e M_θ devemos considerar as mudanças de curvatura do elemento do casco mostrado na fig. 1. Considerando os lados superior e inferior do elemento, verificamos que o ângulo inicial entre esses 2 lados é $d\varphi$. Devido ao deslocamento v ao longo do meridiano, o lado superior do elemento gira em relação ao plano perpendicular do meridiano com o valor v/r_1 . Como consequência do deslocamento w , o mesmo lado anterior gira em relação ao mesmo eixo com o valor $dw/(r_1 \cdot d\varphi)$.

Assim a rotação total do lado superior do elemento será:

$$\frac{v + dw}{r_1} \cdot \frac{d}{d\phi} \cdot \left[\frac{v + dw}{r_1} \right] \cdot d\phi \quad \text{eq.a}$$

Para o lado inferior do elemento a rotação será:

$$\frac{v + dw}{r_1} \cdot \frac{d}{d\phi} \cdot \left[\frac{v + dw}{r_1} \right] \cdot d\phi$$

Assim a mudança da curvatura do meridiano será:

$$\Delta \kappa = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{d}{d\phi} \cdot \left[\frac{v + dw}{r_1} \right] \quad \text{eq.b}$$

Para estimarmos a mudança de curvatura no plano perpendicular do meridiano, observamos que devido a simetria da deformação cada um dos lados laterais do elemento do casco como mostra a fig.2 gira em relação aos seus planos meridianos com o ângulo dado pela eq.a. Desde que a normal do lado direito do elemento faz um ângulo de $(\pi/2) - \phi$ com a tangente ao eixo y, a rotação do lado direito em relação ao seu próprio plano tem a componente com relação ao eixo y igual a:

$$-\left[\frac{v + dw}{r_1} \right] \cdot \cos \phi \cdot d\theta$$

Isso resulta numa mudança de curvatura que vale:

$$X = \left[\frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 \cdot d\phi} \right] \cdot \frac{\cos \phi}{r_0} = \left[\frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 \cdot d\phi} \right] \cdot \frac{\cot \phi}{r_2} \quad \text{eq. c}$$

Utilizando as eq. b e c, obtemos:

$$M_\phi = -D \cdot \left\{ \frac{1}{r_1} \cdot \frac{d}{d\phi} \cdot \left[\frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 \cdot d\phi} \right] + \frac{v}{r_2} \cdot \left[\frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 \cdot d\phi} \right] \cdot \cot \phi \right\} \quad \text{eq. 3}$$

$$M_\theta = -D \cdot \left\{ \left[\frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 \cdot d\phi} \right] \cdot \frac{\cot \phi}{r_2} + \frac{v}{r_1} \cdot \frac{d}{d\phi} \cdot \left[\frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 \cdot d\phi} \right] \right\}$$

Substituindo as eq. 2 e 3 nas eq. 1, obtemos 3 equações com 3 incógnitas v , w e Q_ϕ .

Podemos também usar a eq. 3 para estabelecer uma conclusão importante sem considerarmos a validade da teoria da membrana. As equações do cálculo dos deslocamentos v e w foram estabelecidas. Pela substituição dos deslocamentos dados pelas 3 equações na eq. 3, os momentos fletores e tensões fletoras podem ser calculados. Esses esforços foram desprezados na teoria da membrana. Para compararmos essas magnitudes com aquelas da teoria da membrana, a conclusão pode ser tirada observando a precisão da teoria da membrana.

Vamos admitir o caso particular de um casco esférico sob a ação de seu peso próprio. Os deslocamentos são dados pela teoria da membrana como se segue:

$$v = \frac{a \cdot q \cdot (1+\nu)}{E \cdot h} \cdot \left[\frac{1}{1+\cos \varphi} - \frac{1}{1+\cos \varphi} + \log \frac{1+\cos \varphi}{1+\cos \varphi} \right] \sin \varphi$$

$$w = v \cdot \cot \varphi - \frac{a \cdot q}{E \cdot h} \cdot \left[\frac{1+\nu}{1+\cos \varphi} - \cos \varphi \right]$$

eq.d

Substituindo essas expressões na eq.3 para os momentos fletores, obtemos:

$$M_{\theta} = M_{\varphi} = \frac{q \cdot h^2 \cdot 2+\nu \cdot \cos \varphi}{12 \cdot 1-\nu}$$

eq.e

A correspondente tensão de flexão sobre a superfície do casco é numericamente igual a:

$$\frac{q \cdot 2+\nu \cdot \cos \varphi}{2 \cdot 1-\nu}$$

Admitindo a razão dessa tensão em relação a tensão compressiva dada pela teoria da membrana, obtemos:

$$\frac{\frac{q \cdot 2+\nu \cdot \cos \varphi}{2 \cdot 1-\nu}}{\frac{a \cdot q}{h \cdot (1+\cos \varphi)}} = \frac{2+\nu}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \frac{h \cdot (1+\cos \varphi) \cdot \cos \varphi}{a}$$

O valor máximo dessa razão ocorre no topo do casco, ou seja, onde $\psi=0$ e tem a magnitude, para $\nu=0.3$, de:

$$3.29 \frac{h}{a}$$

eq.f

Pode se notar que no caso de um casco fino de razão dada pela eq.f de tensão de flexão para tensão da membrana pequena, a teoria da membrana nos fornece resultados satisfatórios, se provida da condição de que os suportes são tais que o casco pode se expandir livremente. Substituindo a eq.e para os momentos fletores na eq.1, maiores aproximações em relação as forças da membrana N_{ϕ} e N_{θ} podem ser obtidas.

Através dessa discussão conclui-se que no cálculo de tensões em cascos simetricamente carregados podemos assumir, como primeira aproximação, a solução dada pela teoria da membrana e calcular as correções através da eq.1. Esses valores corrigidos de tensão são precisos o suficiente nas extremidades do casco se eles forem de expansão livre. Se as extremidades não forem livres, esforços adicionais devem ser então aplicados ao longo da extremidade para satisfazer as condições de contorno. O cálculo das tensões produzidas por essas últimas forças será discutido no próximo capítulo.

2.2- Redução das Equações de Equilíbrio para 2 Equações Diferenciais de Segunda Ordem

Através da discussão do capítulo anterior, pode se notar que através do uso das eq.2 e 3 podemos obter através da eq.1 três equações com três incógnitas v , w e $Q\varphi$. Pelo uso da terceira dessas equações a força de cisalhamento $Q\varphi$ pode ser imediatamente eliminada, e as 3 equações reduzidas a 2 equações com 2 incógnitas v e w . As equações resultantes são usadas como primeira investigação da flexão dos cascos. Simplificações consideráveis das equações podem ser obtidas pela introdução de novas variáveis. Como a primeira dessas novas variáveis devemos considerar o ângulo de rotação da tangente para o meridiano. Denotando esse ângulo como V , obtemos da eq.a do capítulo anterior:

$$V = \frac{1}{r_1} \cdot \left[v + \frac{dw}{d\varphi} \right] \quad \text{eq.a}$$

Como segunda variável consideramos o valor:

$$U = r_2 \cdot Q\varphi \quad \text{eq.b}$$

Para simplificar a transformação das equações para as novas variáveis podemos substituir a primeira das eq.1 por uma similar, a qual pode ser obtida pela consideração do equilíbrio da porção do casco sobre o círculo paralelo definido pelo ângulo φ conforme mostra a fig.1. Assumindo que não há carga aplicada no casco, essa equação nos fornece:

$$2.\pi.r_0.N_\varphi.\sin \varphi + 2.\pi.r_0.Q_\varphi.\cos \varphi = 0$$

através da qual:

$$N_\varphi = -Q_\varphi.\cot \varphi = -\frac{1}{r_2}.U.\cot \varphi \quad \text{eq.c}$$

Substituindo na segunda das eq.1, concluímos que, para $Z=0$:

$$r_1.N_\theta.\sin \varphi = -N_\varphi.r_0 - \frac{d}{d\varphi}(Q_\varphi.r_0)$$

e, observando que $r_0 = r_2.\sin \varphi$, obtemos:

$$N_\theta = -\frac{1}{r_1}.\frac{d}{d\varphi}(Q_\varphi.r_2) = -\frac{1}{r_1}.\frac{dU}{d\varphi} \quad \text{eq.d}$$

Assim as forças da membrana N_φ e N_θ são ambas representadas nos termos do valor U , o qual é, como podemos ver na eq.b, dependente da força de cisalhamento Q_φ .

Para estabelecer a primeira equação conectando V e U utilizamos a eq.2 através da qual obtemos imediatamente:

$$\frac{dv-w}{d\phi} = \frac{r_1}{E.h} \cdot (N_\phi - v \cdot N_\theta) \quad \text{eq.e}$$

$$v \cdot \cot \phi - w = \frac{r_2}{E.h} \cdot (N_\theta - v \cdot N_\phi) \quad \text{eq.f}$$

Eliminando w dessas equações, concluímos:

$$\frac{dv - v \cdot \cot \phi}{d\phi} = \frac{1}{E.h} \cdot ((r_1 + v \cdot r_2) \cdot N_\phi - (r_2 + v \cdot r_1) \cdot N_\theta) \quad \text{eq.g}$$

Diferenciando a eq.f obtemos:

$$\frac{dv}{d\phi} \cdot \cot \phi - \frac{v}{\sin^2 \phi} - \frac{dw}{d\phi} = \frac{d}{d\phi} \left[\frac{r_2}{E.h} \cdot (N_\theta - v \cdot N_\phi) \right] \quad \text{eq.h}$$

A derivada $dv/d\phi$ pode ser imediatamente eliminada através das eq.g e h para obter:

$$\frac{v + dw}{d\phi} = \frac{r_1 \cdot v}{E.h} \cdot \cot \phi \cdot ((r_1 + v \cdot r_2) \cdot N_\phi - (r_2 + v \cdot r_1) \cdot N_\theta) - \frac{d}{d\phi} \left[\frac{r_2}{E.h} \cdot (N_\theta - v \cdot N_\phi) \right]$$

Substituindo as eq.c e d com as variáveis N_φ e N_θ , finalmente obtemos as seguintes equações em função de U e V:

$$\frac{r_2}{r_1} \frac{d^2 U + 1}{d\varphi^2} \frac{1}{r_1} \cdot \left\{ \frac{d}{d\varphi} \cdot \left[\frac{r_2}{r_1} \right] + \frac{r_2}{r_1} \cdot \cot \varphi - \frac{r_2}{r_1 \cdot h} \cdot \frac{dh}{d\varphi} \right\} \cdot \frac{dU}{d\varphi} - \frac{1}{r_1} \cdot \left\{ \frac{r_1}{r_2} \cdot \cot \varphi - v - \frac{v}{h} \cdot \frac{dh}{d\varphi} \cdot \cot \varphi \right\} \cdot U = E \cdot h \cdot v \quad \text{eq.4}$$

A segunda equação para U e V é obtida pela substituição das eq.3 para M_φ e M_θ na terceira das eq.1 e utilizando as eq.a e b. Desse modo, concluímos:

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} \frac{d^2 V + 1}{d\varphi^2} \frac{1}{r_1} \cdot \left\{ \frac{d}{d\varphi} \cdot \left[\frac{r_2}{r_1} \right] + \frac{r_2}{r_1} \cdot \cot \varphi + 3 \cdot \frac{r_2}{r_1 \cdot h} \cdot \frac{dh}{d\varphi} \right\} \cdot \frac{dV}{d\varphi} - \frac{1}{r_1} \cdot \left\{ v - 3 \cdot \frac{v}{h} \cdot \cot \varphi \cdot \frac{dh}{d\varphi} + \frac{r_1}{r_2} \cdot \cot \varphi \right\} \cdot V = -\frac{U}{D} \quad \text{eq.5}$$

Assim o problema da flexão de um casco com a forma de uma superfície de revolução pelas forças e momentos uniformemente distribuídos ao longo do círculo paralelo representando a extremidade é reduzido a integração das eq.4 e 5 de segunda ordem.

Se a espessura do casco for constante, os termos contendo $dh/d\phi$ como fator desaparecem, e as derivadas das incógnitas U e V em ambas as equações possuem os mesmos coeficientes. Pela introdução da notação:

$$L(\dots) = \frac{r_2}{r_1} \frac{d^2(\dots)}{d\phi^2} + \frac{1}{r_1} \left\{ \frac{d}{d\phi} \left[\frac{r_2}{r_1} \right] + \frac{r_2 \cdot \cot \phi}{r_1} \right\} \frac{d(\dots)}{d\phi} - \frac{r_1 \cdot \cot^2 \phi (\dots)}{r_2 \cdot r_1} \quad \text{eq.1}$$

as equações podem ser representadas na seguinte forma simplificada:

$$L(U) + \frac{v}{r_1} \cdot U = E \cdot h \cdot V$$

$$L(V) - \frac{v}{r_1} \cdot V = -\frac{U}{V}$$

eq.6

Para esse sistema de 2 equações diferenciais simultâneas de segunda ordem podemos imediatamente obter para cada incógnita uma equação de quarta ordem. Para realizar tal procedimento, perfazemos sobre a primeira das eq.6 a operação indicada pelo símbolo $L(\dots)$, o qual fornece:

$$LL(U) = v \cdot L \left[\frac{U}{r_1} \right] = E \cdot h \cdot L(V)$$

Substituindo na segunda das eq.6:

$$L(V) - \frac{v}{r_1} \cdot \frac{V-U}{D} = \frac{v}{r_1 \cdot E \cdot h} \cdot \left[L(U) + \frac{v}{r_1} \cdot U \right] - \frac{U}{D}$$

obtemos:

$$L(U) + v \cdot L\left[\frac{U}{r_1}\right] - \frac{v}{r_1} \cdot L(U) - \frac{v^2}{r_1^2} \cdot U = -\frac{E \cdot h \cdot U}{D} \quad \text{eq.7}$$

Da mesma forma podemos também deduzir a segunda equação:

$$L(V) - v \cdot L\left[\frac{V}{r_1}\right] + \frac{v}{r_1} \cdot L(V) - \frac{v^2}{r_1^2} \cdot V = -\frac{E \cdot h \cdot V}{D} \quad \text{eq.8}$$

Se o raio de curvatura r_1 for constante, como no caso de um casco cônico ou esférico ou de um anel de casco, simplificações posteriores das eq.7 e 8 são possíveis. Então nesse caso:

$$L\left[\frac{U}{r_1}\right] = \frac{1}{r_1} \cdot L(U)$$

pelo uso da notação:

$$\mu^4 = \frac{E \cdot h - v^2}{D \cdot r_1^2} \quad \text{eq.9}$$

ambas as equações podem ser reduzidas para a forma:

$$L(L(U) + \mu^4 U) = 0 \quad \text{eq.9}$$

a qual pode ser escrita de uma das seguintes formas:

$$L(L(U) + i \cdot \mu^2 U) - i \cdot \mu^2 (L(U) + i \cdot \mu^2 U) = 0$$

ou

$$L(L(U) - i \cdot \mu^2 U) + i \cdot \mu^2 (L(U) - i \cdot \mu^2 U) = 0$$

Essas equações indicam que as soluções das equações de segunda ordem são:

$$L(U) + i \cdot \mu^2 U = 0 \quad \text{eq.10}$$

são também soluções da eq.9. Pode-se notar que a solução completa da eq.9 pode ser obtida através da solução de uma das alternativas da eq.10. A aplicação da eq.10 para casos particulares será discutida nos próximos capítulos.

2.3- Cascos Esféricos com Espessura Constante

No caso do casco esférico com espessura constante $r_1=r_2=a$, a eq.i do capítulo anterior fica:

$$L(\dots) = \frac{1}{a} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} (\dots) + \cos \varphi \cdot \frac{d}{d\varphi} (\dots) - \cot^2 \varphi (\dots) \right] \quad \text{eq.a}$$

Considerando o valor $a \cdot Q_\varphi$, ao invés de U , como uma das incógnitas em discussões futuras e introduzindo, ao invés da constante μ , uma nova constante ρ definida pela equação:

$$\rho^2 = \frac{a \cdot \mu^2}{2} \sqrt{\frac{3 \cdot a^2 (1 - \nu^2) - \nu^2}{h^2}} \quad \text{eq.b}$$

podemos representar a primeira das eq.10 da seguinte forma:

$$\frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} + \cot \varphi \cdot \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} - \cot^2 \varphi \cdot Q_\varphi + 2 \cdot 1 \cdot \rho^2 Q_\varphi = 0 \quad \text{eq.11}$$

Uma futura simplificação pode ser obtida pela introdução de novas variáveis:

$$x = \sin^2 \varphi$$

$$z = \frac{Q_\varphi}{\sin \varphi}$$

eq.c

Com essas variáveis a eq.11 transforma-se em:

$$x \cdot (x-1) \cdot \frac{d^2 z}{dx^2} + \left[\frac{5 \cdot x - 2}{2} \right] \cdot \frac{dz}{dx} + 1 - \frac{2 \cdot i \cdot \rho^2}{4} \cdot z = 0 \quad \text{eq.d}$$

Essa equação pertence a um tipo conhecido de equação diferencial de segunda ordem a qual tem a seguinte forma:

$$x \cdot (1-x) \cdot y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1) \cdot x) \cdot y' - \alpha \cdot \beta \cdot y = 0 \quad \text{eq.e}$$

As eq.d e e coincidem se considerarmos:

$$\gamma = 2 \quad = \frac{3 + \sqrt{5 + 8 \cdot i \cdot \rho^2}}{4} \quad = \frac{3 - \sqrt{5 + 8 \cdot i \cdot \rho^2}}{4} \quad \text{eq.f}$$

A solução da eq.e pode ser expressa na forma de uma série de potências:

$$y = A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2 + A_3 \cdot x^3 + \dots \quad \text{eq.g}$$

Substituindo essa série na eq.c e igualando os coeficientes para cada potência de x para 0, obtemos a seguinte relação entre os coeficientes:

$$A_1 = \frac{d \cdot \beta \cdot A_0}{1 \cdot \gamma} \quad A_2 = \frac{(d+1) \cdot (\beta+1) \cdot A_1}{2 \cdot (\gamma+1)}$$

.....

$$A_n = A_{n-1} \cdot \frac{(d+n-1) \cdot (\beta+n-1)}{n \cdot (\gamma+n-1)}$$

.....

Com essas relações, a eq.g transforma-se em:

$$y = A_0 \cdot \left[1 + \frac{d \cdot \beta \cdot x}{1 \cdot \gamma} + \frac{d \cdot (d+1) \cdot \beta \cdot (\beta+1) \cdot x^2}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot (\gamma+1)} + \frac{d \cdot (d+1) \cdot (d+2) \cdot \beta \cdot (\beta+1) \cdot (\beta+2) \cdot x^3 + \dots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma \cdot (\gamma+1) \cdot (\gamma+2)} \right] \quad \text{eq.h}$$

Essa relação é então chamada série hipergeométrica. Ela converge para todos os valores de x menores que a unidade e pode ser usada para representar uma das integrais da eq.d. Substituindo os valores d, β e γ pelos valores dados pela eq.f obtemos:

$$\delta^2 = 5 + 8 \cdot i \cdot \rho^2 = 5 + 4 \cdot i \cdot \sqrt{\frac{12 \cdot a^2 \cdot (1 - v^2)}{h^2} - v^2} \quad \text{eq.i}$$

obtemos como na solução da eq.d:

$$z_1 = A_0 \cdot \left[1 + \frac{3^2 \delta^2}{16 \cdot 1 \cdot 2} \cdot x + \frac{(3^2 \delta^2) \cdot (7^2 \delta^2)}{16^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^2 + \dots \right] \quad \text{eq.j}$$

a qual contém uma constante arbitrária A_0 .

A derivação da segunda integral da eq.d é mais complicada. Essa integral pode ser escrita da seguinte forma:

$$z_2 = z_1 \cdot \log \frac{x+1}{x} \cdot \varphi(x) \quad \text{eq.k}$$

onde $\varphi(x)$ é a série de potências convergente para $|x| < 1$. A segunda solução tende para infinito para $x=0$, ou seja, no topo da esfera como mostra a fig.1, e não deve ser considerada nos casos em que não há buraco no topo da esfera.

Se limitarmos nossa investigação para esses últimos casos, precisamos considerar somente a eq.j. Substituindo por δ^2 o valor da eq.i e dividindo as séries da eq.j em suas partes reais e imaginárias, obtemos:

$$z_1 = S_1 + i \cdot S_2 \quad \text{eq.l}$$

onde S_1 e S_2 são séries de potência convergentes para $|x| < 1$.

A solução correspondente para a primeira das eq.10 é então:

$$U_1 = a.z_1 \sin \varphi = I_1 + i.I_2 \quad \text{eq.m}$$

onde I_1 e I_2 são 2 séries imediatamente obtidas das séries S_1 e S_2 .

A integral necessária da segunda das eq.10 pode ser representada pelas mesmas séries I_1 e I_2 . Assim, para o caso do casco esférico sem buracos no topo, a solução geral da equação diferencial 9, a qual é de quarta ordem, pode ser representada na forma:

$$U = a.Q\varphi = A.I_1 + B.I_2 \quad \text{eq.n}$$

onde A e B são constantes a serem determinadas das 2 condições ao longo da extremidade do casco esférico.

Considerando a eq.n em função de U , podemos rapidamente deduzir a segunda incógnita V . Começando pela substituição da eq.m na primeira das eq.10 a qual fornece:

$$L(I_1 + i.I_2) = -i.\mu^2 (I_1 + i.I_2)$$

Desde que: $L(I_1) = \mu^2 I_2$ $L(I_2) = -\mu^2 I_1$ eq.o

Substituindo a eq.n na primeira das eq.6 e aplicando a eq.o, obtemos:

$$E.h.a.V = a.L(U) + v.U = (A.v - B.a.\mu^2).I1 + (A.a.\mu^2 + B.v).I2 \quad \text{eq.p}$$

Nota-se que a segunda incógnita V também é representada pelas séries I1 e I2.

Considerando as expressões em função de U e V, podemos obter todas as forças, momentos e deslocamentos. As forças N_ϕ e N_θ são deduzidas das eq.c e d do capítulo precedente. Os momentos fletores M_ϕ e M_θ são obtidos da eq.3. Observando que no caso do casco esférico $r1=r2=a$ e utilizando a eq.a, obtemos:

$$\begin{aligned} M_\phi &= -\frac{D}{a} \left[\frac{dV + v \cdot \cot \phi \cdot V}{d\phi} \right] \\ M_\theta &= -\frac{D}{a} \left[v \cdot \frac{dV}{d\phi} + \cot \phi \cdot V \right] \end{aligned} \quad \text{eq.q}$$

Calculando as componentes v e w do deslocamento utilizamos as expressões para a tensão na superfície média:

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{E.h} \cdot (N_\phi - v.N_\theta) \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E.h} \cdot (N_\theta - v.N_\phi)$$

Substituindo as variáveis N_ϕ e N_θ por U e V, obtemos as expressões ε_ϕ e ε_θ as quais podem ser usadas no cálculo de v e w.

A expressão para o deslocamento em função de U e V é prontamente obtida se observarmos que δ representa o incremento no raio r_0 do círculo paralelo. Assim:

$$\delta = a \cdot \sin \varphi \cdot \xi_0 = \frac{a \cdot \sin \varphi}{E \cdot h} \cdot (N_0 - v \cdot N_\varphi) = -\frac{\sin \varphi}{E \cdot h} \cdot \left[\frac{dU}{d\varphi} - v \cdot U \cdot \cot \varphi \right] \quad \text{eq. r}$$

Assim todos os valores que definem a flexão de um casco esférico pelas forças e binários uniformemente distribuídos ao longo da extremidade podem ser representados em função das 2 séries I1 e I2.

A facilidade com que essa aplicação prática pode ser feita na análise depende da rapidez de convergência das séries I1 e I2. Essa convergência depende principalmente da magnitude do valor:

$$\rho = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot a^2 \cdot (1 - v^2) - v^2}{h^2}} \quad \text{eq. s}$$

o qual, se v é desprezado em relação a unidade, torna-se:

$$\rho = \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{\frac{a}{h}}$$

Os cálculos mostram que para $\rho < 10$ a convergência das séries é satisfatória, e todos os valores necessários podem ser deduzidos sem muita dificuldade para várias condições de extremidade.

2.4- Métodos Aproximados de Análise de Tensões em Cascos Esféricos

No capítulo precedente já foi indicado que a aplicação de soluções rigorosas para o cálculo de tensões em cascos esféricos depende da rapidez de convergência das séries utilizadas na solução. A convergência torna-se mais lenta, e mais termos das séries devem ser calculados, assim que a razão a/h aumenta, ou seja, assim que a espessura do casco torna-se menor em comparação com o seu raio. Tais métodos aproximados de solução para cascos tem sido desenvolvidos com uma precisão muito boa para grandes valores de a/h .

Um dos métodos aproximados para a solução do problema é o método da integração assintótica. Começando com a eq.9 e introduzindo, ao invés da força de cisalhamento Q_ϕ , o valor:

$$z = Q_\phi \cdot \sqrt{\sin \phi} \tag{eq.a}$$

obtemos a equação:

$$z^{IV} + a_2 \cdot z'' + a_1 \cdot z' + (\beta^4 + a_0) \cdot z = 0 \tag{eq.b}$$

na qual:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= -\frac{63}{16 \cdot \sin^4 \varphi} + \frac{9}{8 \cdot \sin^2 \varphi} + \frac{9}{16} & a_1 &= \frac{3 \cdot \cos \varphi}{\sin^3 \varphi} \\
 a_2 &= -\frac{3}{2 \cdot \sin^2 \varphi} + \frac{5}{2} & & 4\beta^4 (1-\nu^2) \cdot \left[1 + \frac{12 \cdot a^2}{h^2} \right]
 \end{aligned}$$

eq. c

Pode ser notado que para cascos finos, nos quais a/h tem um valor grande, $4 \cdot \beta^4$ é muito grande em comparação com os coeficientes a_0, a_1 e a_2 , se o ângulo φ não for pequeno. A partir de nossas futuras discussões nós deveremos estar interessados nas tensões perto da extremidade onde $\varphi = d$ como mostra a fig. 2 e se d não for pequeno, podemos desprezar os termos com os coeficientes a_0, a_1 e a_2 da eq. b. Desse modo obtemos a equação:

$$z^{iv} + 4 \cdot \beta^4 \cdot z = 0$$

eq. d

Utilizando a solução geral da eq. d junto com a eq. a, obtemos:

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} \cdot (e^{\beta \varphi} \cdot (C_1 \cdot \cos \beta \varphi + C_2 \cdot \sin \beta \varphi) \\
 &+ e^{-\beta \varphi} \cdot (C_3 \cdot \cos \beta \varphi + C_4 \cdot \sin \beta \varphi))
 \end{aligned}$$

eq. e

Através da investigação anterior da flexão de cascos cilíndricos já sabemos que a tensão de flexão produzida pelas forças uniformemente distribuídas ao longo da extremidade decresce rapidamente assim que a distância da extremidade aumenta. Existe também uma condição similar para o caso de cascos esféricos finos. Observando que os 2 primeiros termos da eq.e decrescem enquanto os 2 segundos crescem assim que o ângulo ϕ diminui, concluímos que no caso da esfera sem buracos no topo é permitido somente o uso dos primeiro 2 termos da eq.e e então assumimos:

$$Q = \frac{e^{\beta\phi}}{\sqrt{\sin\phi}} \cdot (C1 \cdot \cos \beta\phi + C2 \cdot \sin \beta\phi) \quad \text{eq.f}$$

Tendo essa expressão para Q , e utilizando as eq.b, c e d do capítulo 2.2 e as eq.p, q e r do capítulo 2.3, todos os valores que definem a flexão do casco podem ser calculados, e as constantes $C1$ e $C2$ podem ser determinadas através das condições da extremidade. Esse método pode ser aplicado sem nenhuma dificuldade para casos particulares e fornece boa precisão para cascos finos.

Ao invés de trabalharmos com a equação diferencial 9 de quarta ordem, podemos admitir, como base de investigação aproximada do momento de um casco esférico, as 2 eq.6. Em nosso caso essas equações podem ser escritas como se segue:

$$\frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} + \cot \varphi \cdot \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} - (\cot^2 \varphi - \nu) \cdot Q_\varphi = E \cdot h \cdot V$$

$$\frac{d^2 V}{d\varphi^2} + \cot \varphi \cdot \frac{dV}{d\varphi} - (\cot^2 \varphi + \nu) \cdot V = -\frac{a^2 \cdot Q_\varphi}{D}$$

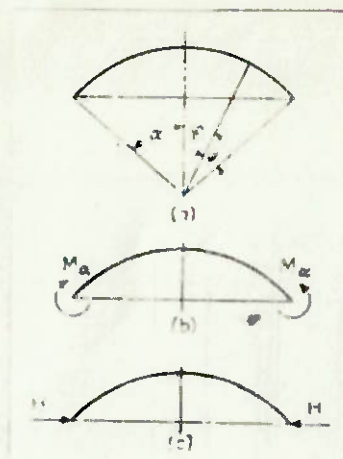
eq.9

onde Q_φ é a força de cisalhamento e V é a rotação da tangente em relação ao meridiano como definido pela eq.a do capítulo 2.2. Nesse caso de cascos muito finos, se o ângulo φ não for pequeno, os valores Q_φ e V decrescem rapidamente assim que a distância da extremidade cresce e tem a mesma característica oscilatória que possui a eq.f. Desde que β seja grande no caso de cascos finos, a derivada da eq.f é grande em comparação com a função em si, e a segunda derivada é grande em comparação com a primeira. Isso indica que uma aproximação satisfatória pode ser obtida desprezando os termos contidos nas funções Q_φ e V e suas primeiras derivadas no lado esquerdo da eq.9. Nesse caso a eq.9 pode ser substituída pelo sistema de equações:

$$\frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} = E \cdot h \cdot V$$

$$\frac{d^2 V}{d\varphi^2} = -\frac{a^2 \cdot Q_\varphi}{D}$$

eq.h



tab.5

pela eliminação de V dessas equações, obtemos:

$$\frac{d^4 Q_\phi}{d\phi^4} + 4 \cdot \lambda^4 \cdot Q_\phi = 0 \quad \text{eq. i}$$

onde: $\lambda^4 = 3 \cdot (1 - \nu^2) \cdot \left[\frac{a}{h} \right]^2 \quad \text{eq. j}$

A solução geral dessa equação é:

$$Q_\phi = C1 \cdot e^{\lambda\phi} \cdot \cos \lambda\phi + C2 \cdot e^{\lambda\phi} \cdot \sin \lambda\phi + C3 \cdot e^{-\lambda\phi} \cdot \cos \lambda\phi + C4 \cdot e^{-\lambda\phi} \cdot \sin \lambda\phi \quad \text{eq. k}$$

Considerando o caso no qual não há buracos no topo como mostra a fig.5 e o casco não dobra devido as forças e momentos uniformemente distribuídos ao longo da extremidade, devemos considerar na solução geral dada pela eq.k somente os primeiros 2 termos, os quais decrescem assim que o ângulo ϕ diminui.

Portanto:

$$Q_\phi = C1 \cdot e^{\lambda\phi} \cdot \cos \lambda\phi + C2 \cdot e^{\lambda\phi} \cdot \sin \lambda\phi \quad \text{eq. l}$$

As 2 constantes C1 e C2 devem ser determinadas para cada caso particular através das condições da extremidade ($\varphi=d$). Na discussão das condições da extremidade é vantajosa a introdução do ângulo $\psi=d-\varphi$ como mostra a fig.5. Substituindo $d-\psi$ por φ na eq.1 e utilizando novas constantes C e γ , podemos representar a eq.1 da seguinte forma:

$$Q_{\varphi} = C \cdot e^{-\lambda \psi} \sin (\lambda \psi + \gamma) \quad \text{eq.m}$$

Agora, empregando as eq.b, c e d do capítulo 2.2, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} N &= -Q_{\varphi} \cdot \cot \varphi = -\cot (d-\psi) \cdot C_1 \cdot e^{-\lambda \psi} \sin (\lambda \psi + \gamma) \\ N &= -\frac{dQ_{\varphi}}{d\varphi} = -\lambda \cdot \sqrt{2} \cdot C \cdot e^{-\lambda \psi} \sin \left[\lambda \psi + \gamma - \frac{\pi}{4} \right] \end{aligned} \quad \text{eq.12}$$

Através da primeira das eq.h obtemos a expressão para o ângulo de rotação:

$$V = \frac{1}{E \cdot h} \cdot \frac{d^2 Q_{\varphi}}{d\varphi^2} = \frac{-2 \cdot \lambda^2 \cdot C \cdot e^{-\lambda \psi} \cos (\lambda \psi + \gamma)}{E \cdot h} \quad \text{eq.13}$$

Os momentos fletores podem ser determinados através da eq.q do artigo precedente. Desprezando os termos que contenham V nessas equações, concluimos que:

$$\begin{aligned} M_{\varphi} &= -D \cdot \frac{dV}{d\varphi} = \frac{a}{\lambda \cdot \sqrt{2}} \cdot C \cdot e^{-\lambda \psi} \sin \left[\lambda \psi + \gamma + \frac{\pi}{4} \right] \\ M_0 &= V \cdot M_{\varphi} = \frac{a}{\lambda \cdot \sqrt{2}} \cdot C \cdot e^{-\lambda \psi} \sin \left[\lambda \psi + \gamma + \frac{\pi}{4} \right] \end{aligned} \quad \text{eq.14}$$

Finalmente, através da eq. r do artigo precedente concluímos que a componente horizontal do deslocamento vale:

$$\delta = -\frac{\sin \psi}{E \cdot h} \cdot \frac{dU}{d\psi} = -\frac{a}{E \cdot h} \cdot \sin(\alpha - \psi) \cdot \lambda \cdot \sqrt{2} \cdot C \cdot e^{-\lambda \psi} \cdot \sin \left[\lambda \psi + \gamma - \frac{\pi}{4} \right] \quad \text{eq. 15}$$

Com a ajuda das eq. 12 e 15 vários casos particulares podem ser imediatamente tratados.

Vamos admitir o exemplo do caso mostrado na fig. 5. As condições de contorno são:

$$M_{\psi}(\psi=d) = M_d \quad N_{\psi}(\psi=d) = 0 \quad \text{eq. n}$$

Pela substituição de $\psi=0$ na primeira das eq. 12, pode-se concluir que a segunda das condições de contorno é satisfeita considerando a constante γ igual a zero. Substituindo $\gamma=0$ e $\psi=0$ na primeira das eq. 14, concluímos que para satisfazer a eq. n devemos ter:

$$M_d = \frac{a}{2 \cdot \lambda} \cdot C$$

a qual nos fornece:

$$C = \frac{M_d \cdot 2 \cdot \lambda}{a}$$

Substituindo os valores assim determinados para as constantes γ e C nas eq.13 e 15 e admitindo $\psi=0$, obtemos a rotação e o deslocamento horizontal da extremidade como se segue:

$$V(\psi=0) = \frac{-4 \cdot \lambda^3 \cdot M_d}{E \cdot a \cdot h} \quad \delta(\psi=0) = \frac{2 \cdot \lambda^2 \cdot \sin \alpha \cdot M_d}{E \cdot h} \quad \text{eq.16}$$

No caso representado na fig.6, as condições de contorno são:

$$M_\varphi(\varphi=\alpha) = 0 \quad N_\varphi(\varphi=\alpha) = -H \cdot \cos \alpha \quad \text{eq.o}$$

Para satisfazer a primeira dessas equações, devemos considerar $\gamma = -\pi/4$. Para satisfazer a segunda condição de contorno, utilizamos a primeira das eq.12 a qual nos fornece:

$$-H \cdot \cos d = C \cdot \cot d \cdot \sin \frac{\pi}{4}$$

através da qual determinamos:

$$C = \frac{-2 \cdot H \cdot \sin d}{\sqrt{2}}$$

Substituindo os valores das constantes γ e C nas eq.13 e 15, concluímos que:

$$V(\psi=0) = \frac{2 \cdot \lambda^2 \cdot \sin d \cdot H}{E \cdot h} \quad \delta(\psi=0) = -\frac{2 \cdot a \cdot \lambda \cdot \sin^2 d \cdot H}{E \cdot h} \quad \text{eq.17}$$

Pode-se notar que o coeficiente de M_a na segunda das eq.16 é o mesmo coeficiente de H na primeira das eq.17. Isso deveria ser imediatamente concluído do teorema da reciprocidade.