

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

PAULO RICARDO ARANTES GILZ

**MÉTODO DE PLANIFICAÇÃO E OTIMIZAÇÃO DE
TRAJETÓRIAS NÃO OSCILANTES PARA O
MOVIMENTO LONGITUDINAL DE TRENS**

São Paulo
2014

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

PAULO RICARDO ARANTES GILZ

**MÉTODO DE PLANIFICAÇÃO E OTIMIZAÇÃO DE
TRAJETÓRIAS NÃO OSCILANTES PARA O
MOVIMENTO LONGITUDINAL DE TRENS**

Texto apresentado à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo como requisito para a conclusão do curso de graduação em Engenharia Mecânica, junto ao Departamento de Engenharia Mecânica (PME).

Área de Concentração:

Engenharia Mecânica

Orientador:

Prof. Dr. Roberto Spinola Barbosa

São Paulo
2014

Arantes Gilz, Paulo Ricardo

Método de planificação e otimização de trajetórias não oscilantes para o movimento longitudinal de trens/ P. R. Arantes Gilz. São Paulo, 2014.

54 p.

Monografia (Graduação em Engenharia Mecânica) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica (PME).

1. Trens (Controle) 2. Vibrações 3. Planificação de trajetórias
I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica (PME). II. t.

Dedico este trabalho aos meus pais, Paulo e Silvia, e à minha irmã Bianca, que depositaram sua confiança em mim e me incentivaram durante toda minha formação.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Roberto Spinola Barbosa, por ter me guiado durante minha formação e pela ajuda e participação na elaboração deste trabalho.

A todos os docentes e funcionários da Escola Politécnica da Universidade, em particular ao Departamento de Engenharia Mecânica, que por meio de seus esforços me proporcionaram a oportunidade de aprender e me formar como engenheiro.

Um enorme obrigado aos meus pais e à minha irmã que sempre estiveram ao meu lado para me apoiar, se esforçando e batalhando pela minha educação.

Aos meus amigos, que tornaram mais alegres os momentos de descontração e mais fácil de suportar a longa jornada trilhada.

À minha eterna companheira, Camila, pelo carinho e afeto, que foram as fontes de minha motivação.

RESUMO

Choques entre vagões durante o deslocamento de uma locomotiva é um exemplo de como vibrações podem fazer com que sistemas mecânicos operem de maneira indesejada. Neste trabalho, métodos de planificação de trajetórias visando a eliminação de oscilações para sistemas compostos por um número finito de modos vibrantes são apresentados. Em um primeiro momento, são determinadas as condições de controlabilidade dos sistemas em estudo. Em seguida, propõe-se um algoritmo de planificação de trajetórias e se adicionam etapas de otimização com o intuito de reduzir o consumo do controle e a magnitude das oscilações. Por fim, simulações numéricas e experimentos são conduzidos a fim de verificar a exequibilidade e eficiência dos métodos propostos.

ABSTRACT

Shocks between wagons during the displacement of a locomotive are an example of how vibrations can make mechanical systems cease to function optimally. In this report, trajectory planning methods aiming the elimination of oscillations for systems composed by a finite number of vibrational modes are presented. Firstly, conditions guaranteeing the studied systems controllability are determined. Then, a trajectory planning algorithm is proposed and optimization steps are added in order to reduce the consumption and the magnitude of oscillations. Finally, numerical simulations and experiments are conducted in order to assess the proposed methods practicability and efficiency.

SUMÁRIO

Lista de Figuras

1	Introdução	8
1.1	Definição do problema	8
1.2	Objetivos	11
1.3	Organização do trabalho e metodologia	11
2	Sistemas compostos de um número finito de modos vibrantes fisicamente desacoplados	13
2.1	Um pêndulo amortecido	13
2.1.1	Modelo	13
2.1.2	Controlabilidade	16
2.1.3	Planificação de trajetórias	17
2.2	Vários pêndulos paralelos amortecidos	18
2.2.1	Modelo	18
2.2.2	Controlabilidade	19
2.2.3	Planification de trajectoires	19
2.3	Caso geral de n sistemas massa-mola-amortecedor	23
2.3.1	Modelo	23
2.3.2	Controlabilidade	24

2.3.3	Comentários	29
2.4	Experiências e Resultados	30
2.5	Conclusões	31
3	Sistemas compostos de um número finito de modos vibrantes fisicamente acoplados - dinâmica longitudinal de trens	33
3.1	Modelo	33
3.2	Desenvolvimento	35
3.2.1	Controlabilidade	36
3.2.2	Método de planificação proposto	38
3.3	Exemplo numérico e Resultados	43
3.4	Conclusões	48
4	Conclusões	49
	Apêndice A - Matriz A	51
	Referências	53

LISTA DE FIGURAS

1	Caminhão tanque	8
2	Turbina eólica flutuante	9
3	Grua portuária	9
4	Satélite	9
5	Locomotiva	10
6	Sistema pêndulo-carro.	14
7	Sistema n-pêndulos-carro.	18
8	Hastes formando o sistemas a vários modos vibrantes.	30
9	Análise do decaimento logarítmico da amplitude das oscilações de uma haste.	31
10	Diferença entre trajetória idealizada e trajetória executada.	32
11	Modelo adotado para movimento longitudinal do trem.	33
12	Diagrama de blocos ilustrando o design de uma lei de controle para o seguimento da trajetória de referência planejada com rejeição de distúrbios.	36
13	Função $f(t)$	39
14	Detalhe da evolução de $f(t)$ entre $t = 0$ e $t = T_{int}$	39
15	Deslocamentos e velocidades dos vagões.	45
16	Força planejada.	46
17	Potência necessária e forças internas entre vagões consecutivos.	47

1 INTRODUÇÃO

1.1 Definição do problema

Um problema recorrente em diversos campos da engenharia (industrial, civil, aeroespacial, militar, etc) é a presença de vibrações em sistemas mecânicos. Quando estas vibrações atingem determinadas frequências e amplitudes, ou duram muito tempo, podem ocasionar a disfunção ou até mesmo a deterioração dos equipamentos pelos quais estes sistemas são formados (THOMSON, 1973).

O foco deste trabalho será o estudo de sistemas mecânicos compostos por um número finito de modos vibrantes excitados por entradas externas. Alguns exemplos que ilustram este tipo de sistemas são:

- o transporte de um determinado fluido por um caminhão-tanque (Figura 1);



Figura 1: Caminhão tanque (fonte: <commons.wikimedia.org>)

- uma turbina eólica flutuante que sofre oscilações causadas pela interação

fluido-estrutura (Figura 2);



Figura 2: Turbina eólica flutuante (fonte: <en.wikipedia.org>)

- uma grua portuária que deve depositar um contêiner sobre o convés de um navio sem que o primeiro se choque com outros objetos ali presentes (Figura 3);



Figura 3: Grua portuária (fonte: <en.wikipedia.org>)

- um satélite que deve se movimentar de forma que seus painéis solares não sofram vibrações excessivas (Figura 4);



Figura 4: Satélite (fonte: <pixabay.com>)

- o deslocamento de uma composição de vagões (Figura 5).



Figura 5: Locomotiva (fonte: <en.wikipedia.org>)

Para os sistemas citados anteriormente, oscilações residuais de fim de curso devem ser evitadas a fim de impedir que choques ou forças excessivas provoquem o mau funcionamento do equipamento.

Os métodos comumente apresentados na literatura (PETIT; ROUCHON, 2013; ZANDI, 2011; FRIEDLAND, 2005; LAROCHE, 2004-2005; MARTIN, 1999) para a planificação de trajetórias de sistemas não levam em conta a eliminação de oscilações residuais, sendo dedicados principalmente a:

- estabilizar o sistema em torno de uma trajetória pré-definida - por exemplo, o método das saídas de Brunovský apresentado por Petit e Rouchon (2013)
- conduzir o sistema de um ponto inicial a um ponto final - por exemplo, o método da equação de Riccati para o problema de controle entre dois pontos apresentado por Petit e Rouchon (2013)

O trabalho desenvolvido por Gilz (2013) fornece um primeiro método para a planificação de trajetórias sem vibrações residuais ao final do percurso de sistemas a modos não acoplados. Um resumo deste método será apresentado neste trabalho e servirá como base para o desenvolvimento da estratégia de planificação para sistemas a modos vibrantes acoplados.

1.2 Objetivos

O objetivo deste trabalho é de propor dois métodos de planificação de trajetórias para sistemas caracterizados por um número finito de modos vibrantes:

- um primeiro método voltado para o caso de sistemas a modos não acoplados;
- um segundo método para sistemas a modos acoplados.

Em ambos os casos, a trajetória resultante deve deslocar o sistema entre dois pontos estacionários dados, de forma a não provocar vibrações residuais ao fim do percurso.

1.3 Organização do trabalho e metodologia

Em um primeiro momento, será apresentado um método de planificação de trajetórias que pode ser aplicado a sistemas contendo modos vibrantes fisicamente não acoplados, que neste trabalho serão representados de maneira genérica por um conjunto de pêndulos amortecidos movimentados por um carro motorizado.

Para este primeiro método, resultados obtidos por meio de experiências práticas baseadas no deslocamento de estruturas compostas por um número finito de graus de liberdade sobre um carro motorizado serão utilizados para o estudo da exequibilidade e do funcionamento da estratégia proposta.

Em seguida, baseando-se nos primeiros desenvolvimentos realizados para sistemas contendo modos desacoplados, um método específico será proposto para a planificação de trajetórias para o movimento longitudinal de trens, permitindo a determinação de um percurso a ser realizado de forma a transferir o conjunto de vagões que compõe o trem de uma posição a outra em tempo finito sem que existam vibrações remanescentes entre vagões após a realização deste deslocamento.

Por fim, simulações numéricas do comportamento da dinâmica longitudinal dos

vagões sob influência de trajetórias geradas a partir da estratégia proposta serão apresentadas e permitirão a análise do desempenho da técnica em questão.

2 SISTEMAS COMPOSTOS DE UM NÚMERO FINITO DE MODOS VIBRANTES FISICAMENTE DESACOPLADOS

Neste capítulo será apresentado um método de planificação de trajetórias para sistemas mecânicos possuindo modos vibrantes fisicamente desacoplados, como por exemplo os painéis solares de satélites. O modelo adotado para representar estes sistemas será um conjunto de pêndulos amortecidos deslocados por um carro motorizado. Ao final do capítulo, resultados obtidos por meio da implementação da estratégia desenvolvida em experimentos práticos serão apresentados a fim de verificar o desempenho e a funcionalidade da mesma.

2.1 Um pêndulo amortecido

O equacionamento matemático da dinâmica de um único pêndulo será realizado primeiramente para que em seguida uma generalização do método para vários pêndulos seja realizada.

2.1.1 Modelo

O sistema descrito na Figura 6 consiste em um pêndulo amortecido ligado a um carro motorizado que se move sobre um trilho (massa $m > 0$, comprimento $l > 0$, $\|\vec{g}\| \neq 0$). Deseja-se movimentar o sistema, em tempo finito $T > 0$, até a posição $x(T) = X_T \neq 0$ partindo de $x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0$ e $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = \ddot{\theta}(0) = 0$ de modo

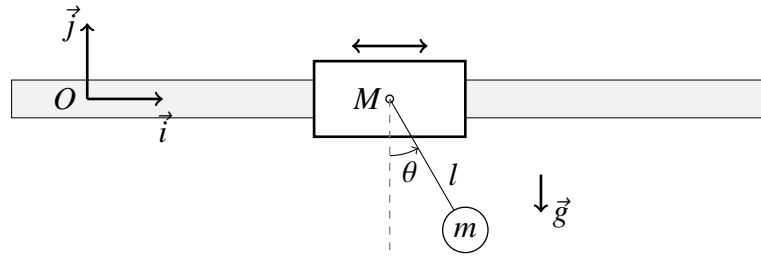


Figura 6: Sistema pêndulo-carro.

que $x(t \geq T) = X_T$ e $\theta(t \geq T) = 0$. Primeiramente, são estabelecidas as equações que descrevem o comportamento do sistema:

A posição do centro de massa do pêndulo em relação a um referencial (O, \vec{i}, \vec{j}) absoluto é dada por ($\vec{x} = \vec{OM}$ é a posição do ponto M no referencial absoluto):

$$\vec{p} = \vec{x} - l \cos \theta \vec{j} + l \sin \theta \vec{i} \quad (2.1)$$

A velocidade é dada por:

$$\vec{v} = \dot{\vec{x}} + l \sin \theta \dot{\theta} \vec{j} + l \cos \theta \dot{\theta} \vec{i} \quad (2.2)$$

A energia cinética é dada por:

$$E_c = \frac{m}{2} \|\vec{v}\|^2 = \frac{m}{2} [(\dot{x} + l \cos \theta \dot{\theta})^2 + (l \sin \theta \dot{\theta})^2] = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + ml \dot{x} \cos \theta \dot{\theta} + \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}^2 \quad (2.3)$$

A energia potencial (a menos de uma constante aditiva) é dada por:

$$E_p = mlg(1 - \cos \theta) \quad (2.4)$$

A lagrangiana é definida por:

$$\mathcal{L} = E_c - E_p \quad (2.5)$$

Adiciona-se ao modelo um potencial de dissipação dado por:

$$\mathcal{D} = \frac{c}{2} \dot{\theta}^2, \quad c \geq 0 \quad (2.6)$$

Formam-se em seguida as equações de Euler-Lagrange (2.7) para as duas coordenadas generalizadas, $q = x$ e $q = \theta$.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} = F_q \quad (2.7)$$

E obtém-se:

$$m\ddot{x} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + ml \cos \theta \ddot{\theta} = F \quad (2.8)$$

$$ml^2 \ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta + mlg \sin \theta + c\dot{\theta} = 0 \quad (2.9)$$

Linearizando-se a equação (2.9) em torno do ponto de equilíbrio estável do sistema (hipótese de pequenos ângulos, aproximação de primeira ordem) obtém-se:

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{ml^2} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = -\frac{\ddot{x}}{l} \quad (2.10)$$

O sistema é suposto estar em repouso ao início e ao fim do trajeto percorrido e deve permanecer assim para $t > T$. Essas condições se exprimem de maneira equivalente como:

$$\left[\ddot{x}(0), \ddot{\theta}(0), \dot{x}(0), \dot{\theta}(0), x(0), \theta(0) \right] = [0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

e

$$\left[\ddot{x}(T), \ddot{\theta}(T), \dot{x}(T), \dot{\theta}(T), x(T), \theta(T) \right] = [0, 0, 0, 0, X_T, 0]$$

De fato, sob a hipótese que (2.10) seja satisfeita, para t fixo, impor $\left[\ddot{x}(t), \ddot{\theta}(t), \dot{x}(t), \dot{\theta}(t) \right] = [0, 0, 0, 0]$ é equivalente a impor $\left[\ddot{x}(t), \ddot{\theta}(t), \dot{\theta}(t) \right] = [0, 0, 0]$ ou $\left[\ddot{\theta}(t), \dot{\theta}(t), \theta(t) \right] = [0, 0, 0]$. Assim, obtêm-se as seguintes condições:

$$\begin{array}{cccccc} x(0) = 0 & \dot{x}(0) = 0 & \theta(0) = 0 & \dot{\theta}(0) = 0 & \ddot{\theta}(0) = 0 & \\ x(T) = X_T & \dot{x}(T) = 0 & \theta(T) = 0 & \dot{\theta}(T) = 0 & \ddot{\theta}(T) = 0 & \end{array} \quad (2.11)$$

e a força F deve ser nula para $t = 0$ e $t = T$.

Integrando-se a equação linear (2.10) e utilizando (2.11), obtém-se:

$$\int_0^T \ddot{\theta}(t)dt + \frac{c}{ml^2} \int_0^T \dot{\theta}(t)dt + \frac{g}{l} \int_0^T \theta(t)dt = -\frac{1}{l} \int_0^T \ddot{x}(t)dt \Rightarrow \int_0^T \theta(t)dt = 0 \quad (2.12)$$

Integrando-se duas vezes a equação (2.10) e utilizando (2.11), obtém-se:

$$\int_0^T \int_0^t \ddot{\theta}(s)dsdt + \frac{c}{ml^2} \int_0^T \int_0^t \dot{\theta}(s)dsdt + \frac{g}{l} \int_0^T \int_0^t \theta(s)dsdt = -\frac{1}{l} \int_0^T \int_0^t \ddot{x}(s)dsdt \quad (2.13)$$

O que resulta em:

$$\int_0^T \int_0^t \theta(s)dsdt = -\frac{X_T}{g} \quad (2.14)$$

Assim, chega-se a 8 restrições sobre $\theta(t)$:

$\int_0^T \theta dt = 0$	$\theta(0) = 0$	$\dot{\theta}(0) = 0$	$\ddot{\theta}(0) = 0$	(2.15)
$\int_0^T \int_0^s \theta dsdt = -\frac{X_T}{g}$	$\theta(T) = 0$	$\dot{\theta}(T) = 0$	$\ddot{\theta}(T) = 0$	

2.1.2 Controlabilidade

Proposição 1. *Considera-se um sistema cuja dinâmica seja descrita por (2.10). Toda trajetória $[0, T] \ni t \mapsto \theta(t) \in C^2([0, T])$ que satisfaça (2.15) é uma trajetória entre dois estados estacionários que provoca um deslocamento $x(T) = X_T$, qualquer que seja a equação representando a dinâmica do estado (x, \dot{x}) .*

Demonstração. Na prática, deseja-se poder escolher os valores finais das variáveis x , \dot{x} , \ddot{x} , θ e $\dot{\theta}$. A dinâmica da posição é equivalente, a menos de uma realimentação por estado, a $x^{(3)} = u$. Utilizando-se de uma representação sob forma de espaço de estados,

obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l} & -\frac{g}{l} & -\frac{c}{m l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Calculando o determinante da matriz de controlabilidade, obtém-se:

$$\det[C] = \det[B, AB, A^2B, A^3B, A^4B] = \frac{g^2}{l^4} \neq 0 \quad (2.17)$$

Como a matriz C possui posto pleno, o sistema é controlável, e assim sendo, a partir de quaisquer condições iniciais, existe uma lei horária $[0, T] \ni t \mapsto u(t)$ que leva o sistema a um estado alvo desejado qualquer em tempo finito $T > 0$ (PETIT; ROUCHON, 2013).

□

2.1.3 Planificação de trajetórias

As restrições apresentadas em (2.15) se resumem a oito condições sobre as integrais, os valores e as derivadas de uma função em alguns pontos. Para satisfazer essas condições, pode-se utilizar um polinômio do sétimo grau:

$$\theta(t) = \sum_{i=0}^7 a_i t^i \quad (2.18)$$

cujos coeficientes $(a_i)_{0 \leq i \leq 7}$ são determinados por meio da resolução do sistema de equações (2.19).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & T & T^2 & T^3 & T^4 & T^5 & T^6 & T^7 \\ 0 & 1 & 2T & 3T^2 & 4T^3 & 5T^4 & 6T^5 & 7T^6 \\ 0 & 0 & 2 & 6T & 12T^2 & 20T^3 & 30T^4 & 42T^5 \\ T & \frac{T^2}{2} & \frac{T^3}{3} & \frac{T^4}{4} & \frac{T^5}{5} & \frac{T^6}{6} & \frac{T^7}{7} & \frac{T^8}{8} \\ \frac{T^2}{2} & \frac{T^3}{6} & \frac{T^4}{12} & \frac{T^5}{20} & \frac{T^6}{30} & \frac{T^7}{42} & \frac{T^8}{56} & \frac{T^9}{72} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{X_T}{g} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

2.2 Vários pêndulos paralelos amortecidos

2.2.1 Modelo

A Figura 7 mostra o sistema que se deseja estudar. Admite-se que não haja interação entre os pêndulos, que eles estão sob efeito da gravidade e que

$$\forall (1 \leq i \leq n), m_i > 0, l_i > 0, c_i \geq 0$$

Aplicando a equação de Euler-Lagrange a cada uma das coordenadas generalizadas $(\theta_i)_{1 \leq i \leq n}$ e linearizando as equações obtidas em torno dos pontos de equilíbrio estável, obtêm-se as n equações (2.20) ¹.

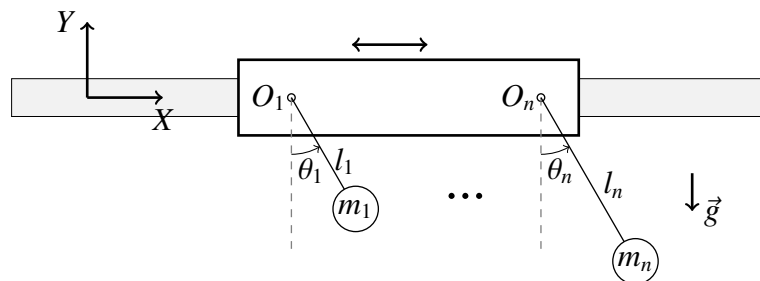


Figura 7: Sistema n-pêndulos-carro.

¹Neste caso x descreve o deslocamento de um ponto qualquer pertencente ao carro que é considerado um corpo rígido.

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + \frac{c_1}{m_1 l_1^2} \dot{\theta}_1 + \frac{g}{l_1} \theta_1 &= -\frac{\ddot{x}}{l_1} \\ &\vdots \\ \ddot{\theta}_n + \frac{c_n}{m_n l_n^2} \dot{\theta}_n + \frac{g}{l_n} \theta_n &= -\frac{\ddot{x}}{l_n} \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

2.2.2 Controlabilidade

Na seção seguinte (2.2.3), mostram-se as condições que os parâmetros físicos dos pêndulos devem respeitar para garantir que a controlabilidade do sistema. Um estudo mais amplo de sistemas desse tipo será feito em (2.3.2).

2.2.3 Planification de trajectoires

Como anteriormente, para cada i , existem 8 restrições sobre os valores das derivadas e das integrais de $\theta_i(t)$. Além disso, as $n - 1$ relações seguintes devem ser verificadas:

$$\left. \begin{aligned} l_1 \ddot{\theta}_1 + \frac{c_1}{m_1 l_1} \dot{\theta}_1 + g \theta_1 - \left(l_2 \ddot{\theta}_2 + \frac{c_2}{m_2 l_2} \dot{\theta}_2 + g \theta_2 \right) &= 0 \\ &\vdots \\ l_n \ddot{\theta}_n + \frac{c_n}{m_n l_n} \dot{\theta}_n + g \theta_n - \left(l_1 \ddot{\theta}_1 + \frac{c_1}{m_1 l_1} \dot{\theta}_1 + g \theta_1 \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Assim, a fim de utilizar um polinômio para cada $\theta_i(t)$, determina-se o grau necessário para atender as restrições impostas:

- Para cada modo deve-se ter ao menos um polinômio do sétimo grau para poder atender as oito restrições indicadas em (2.15);
- Isso produz $8n$ equações a serem respeitadas segundo (2.20) e $8(n - 1)$ outras equações segundo (2.21);
- Cada vez que se aumenta de p o grau de cada polinômio, o número total de

variáveis a serem determinadas se torna $n(8 + p)$ e o número de equações se torna $8n + 8(n - 1) + p(n - 1)$;

- O número de variáveis deve ser pelo menos igual ao número de equações para que os coeficientes possam ser determinados. Admitindo-se a igualdade, obtém-se $p = 8n - 8$ e o número de variáveis relacionadas a cada polinômio é $8 + p = 8n$.

Define-se para cada modo $1 \leq i \leq n$, $\alpha_i = \frac{c_i}{m_i l_i}$, $(a_j^i)_{1 \leq j \leq 8n}$ os coeficientes do polinômio que define $\theta_i(t)$ e as matrizes:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & T & T^2 & T^3 & T^4 & T^5 & \dots & T^{8n-1} \\ 0 & 1 & 2T & 3T^2 & 4T^3 & 5T^4 & \dots & (8n-1)T^{8n-2} \\ 0 & 0 & 2 & 6T & 12T^2 & 20T^3 & \dots & (8n-1)(8n-2)^{8n-3} \\ T & \frac{T^2}{2} & \frac{T^3}{3} & \frac{T^4}{4} & \frac{T^5}{5} & \frac{T^6}{6} & \dots & \frac{T^{8n}}{8n} \\ \frac{T^2}{2} & \frac{T^3}{6} & \frac{T^4}{12} & \frac{T^5}{20} & \frac{T^6}{30} & \frac{T^7}{42} & \dots & \frac{T^{8n+1}}{8n(8n+1)} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} g & \alpha_i & 2l_i & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & g & 2\alpha_i & 6l_i & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & g & 3\alpha_i & 12l_i & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & g & (8n-2)\alpha_i & \frac{(8n-1)!}{(8n-3)!} l_i \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & g & (8n-1)\alpha_i \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & g \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$D = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\frac{x_T}{g} \right]^T \quad (2.24)$$

$$c^i = \left[a_1^i \ \dots \ a_{8n}^i \right]^T \quad (2.25)$$

e se escreve o sistema de equações referente aos coeficientes dos polinômios:

$$\begin{bmatrix} P & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & P & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & \\ 0 & \dots & 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & P & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & P \\ \hline Q_1 & -Q_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ Q_1 & 0 & -Q_3 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ Q_1 & 0 & \dots & 0 & -Q_{n-1} & 0 \\ Q_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -Q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c^{n-2} \\ c^{n-1} \\ c^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \\ D \\ \vdots \\ \vdots \\ D \\ D \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

A parte superior do sistema (2.26) (acima da linha horizontal) representa as condições impostas por (2.15) para cada modo. A parte inferior, as condições impostas pelo sistema de equações (2.20) sobre os coeficientes dos polinômios. Uma vez determinados estes coeficientes, utilizam-se as equações (2.20) e as condições iniciais para determinar $x^*(t)$ solução do problema.

Deve-se remarcar que se ao menos dois modos do sistema tiverem parâmetros l e α iguais, a resolução de (2.26) é comprometida porque o determinante da matriz do sistema linear (2.26) se torna nulo. Para este caso, suponha-se que os modos r e s

sejam iguais. Assim, pode-se manipular o determinante como se mostra em (2.27).

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccccc}
 0 & \dots & P & 0 & \dots & 0 \\
 & & \vdots & \vdots & & \\
 0 & \dots & 0 & P & \dots & 0 \\
 \hline
 Q_1 & \dots & Q_r & 0 & \dots & 0 \\
 & & \vdots & \vdots & & \\
 Q_1 & \dots & 0 & Q_s & \dots & 0
 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{c}
 (a) \left[\begin{array}{cccccc}
 0 & \dots & P & -P & \dots & 0 \\
 & & \vdots & \vdots & & \\
 (c) \left[\begin{array}{cccccc}
 0 & \dots & 0 & P & \dots & 0 \\
 \hline
 (d) \left[\begin{array}{cccccc}
 0 & \dots & Q_r & -Q_s & \dots & 0 \\
 & & \vdots & \vdots & & \\
 (f) \left[\begin{array}{cccccc}
 Q_1 & \dots & 0 & Q_s & \dots & 0
 \end{array} \right]
 \end{array} \right]
 \end{array} \right]
 \end{array} \quad (2.27)$$

Observando-se as primeiras linhas que compõem (a) e (d), tem-se:

$$\left[\begin{array}{cccccccc}
 \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 & 2 & \dots \\
 \hline
 \dots & g & \alpha_r & 2l_r & \dots & g & \alpha_s & 2l_s & \dots
 \end{array} \right] \quad (2.28)$$

Como os modos r e s possuem os mesmos parâmetros, as linhas representadas em (2.28) se tornam linearmente dependentes (constata-se facilmente que a quarta linha é uma combinação linear das três primeiras linhas) e, assim, o determinante da matriz é nulo. A eliminação das repetições dos modos que possuem os mesmos parâmetros permite a resolução do sistema de equações e a determinação de uma trajetória respeitando as restrições impostas no caso em que estes modos repetidos partem de condições iniciais idênticas. No entanto, se os modos repetidos apresentam condições iniciais distintas, não é possível que os mesmos sejam transferidos, em um dado tempo finito T arbitrário, a um mesmo estado final.

2.3 Caso geral de n sistemas massa-mola-amortecedor

2.3.1 Modelo

O caso de n pêndulos paralelos pode ser visto como um caso particular de um sistema composto por n subsistemas do tipo massa-mola-amortecedor independentes² para os quais os termos forçantes de cada subsistemas são equivalentes.

Matematicamente:

$$\left. \begin{aligned} m_1\ddot{\theta}_1(t) + c_1\dot{\theta}_1(t) + k_1\theta_1(t) &= a(t) \\ &\vdots \\ m_n\ddot{\theta}_n(t) + c_n\dot{\theta}_n(t) + k_n\theta_n(t) &= a(t) \\ \forall(1 \leq i \leq n), m_i > 0, k_i > 0, c_i \geq 0 \\ &\text{et} \\ \ddot{p}(t) &= a(t), \dot{a}(t) = u(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

onde m_i , c_i e k_i são respectivamente a massa, o coeficiente de dissipação e o coeficiente de rigidez do modo i , $p(t)$ é o deslocamento do carro, $\dot{p}(t)$ é a velocidade de deslocamento do carro, $a(t)$ é a aceleração do carro, $\theta_i(t)$ o deslocamento angular do modo i e $\dot{\theta}_i(t)$ a velocidade angular do modo i . O estado do sistema (2.29) pode ser dado por:

$$x(t) = [p(t), \dot{p}(t), a(t), \theta_1(t), \dot{\theta}_1(t), \dots, \theta_n(t), \dot{\theta}_n(t)]^T \quad (2.30)$$

e o problema se resume a determinar uma lei horária $[0, T] \in t \rightarrow u(t)$ que transfira o sistema do repouso, $x(0) = [0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0]^T$, a $x(T) = [p_T, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0]^T$.

²Os subsistemas não possuem influência uns sobre os outros.

2.3.2 Controlabilidade

Escrevem-se as equações do sistema sob a forma de espaço de estados linear a fim de realizar o estudo de sua controlabilidade:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \ddot{p} \\ \dot{a} \\ \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \\ \ddot{\theta}_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_1} & -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{c_1}{m_1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_n} & 0 & 0 & \dots & -\frac{k_n}{m_n} & -\frac{c_n}{m_n} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} p \\ \dot{p} \\ a \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \theta_n \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_B u \quad (2.31)$$

Primeiramente, estuda-se a controlabilidade do seguinte sub-sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \\ \ddot{\theta}_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{c_1}{m_1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \frac{1}{m_n} & 0 & 0 & \dots & -\frac{k_n}{m_n} & -\frac{c_n}{m_n} \end{bmatrix}}_{A_{ss}} \begin{bmatrix} a \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \theta_n \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_{ss}} u \quad (2.32)$$

Definem-se $\forall (1 \leq i \leq n)$ os complexos:

$$\lambda_i^+ = -\frac{c_i}{2m_i} + \sqrt{\left(\frac{c_i}{2m_i}\right)^2 - \frac{k_i}{m_i}} \quad (2.33)$$

$$\lambda_i^- = -\frac{c_i}{2m_i} - \sqrt{\left(\frac{c_i}{2m_i}\right)^2 - \frac{k_i}{m_i}}$$

e $Z_{ss} = PX_{ss}$ (P inversível) a mudança de variável tal que $D = PA_{ss}P^{-1}$ é uma matriz diagonal, tendo todos seus termos diagonais distintos, por hipótese:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1^+ & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^- & \ddots & & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & & \ddots & \lambda_n^+ & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n^- \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Reescreve-se o sistema em se aplicando a mudança $Z_{ss} = PX_{ss}$:

$$\dot{Z}_{ss} = DZ_{ss} + PB_{ss}u \quad (2.35)$$

Mostra-se sem dificuldades que a matriz PB_{ss} é dada por:

$$PB_{ss} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_n} \\ \frac{1}{\sqrt{c_1^2 - 4k_1m_1}} \\ -\frac{1}{\sqrt{c_1^2 - 4k_1m_1}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{c_n^2 - 4k_nm_n}} \\ -\frac{1}{\sqrt{c_n^2 - 4k_nm_n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ -\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ -\alpha_n \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Admite-se que $\forall(1 \leq i \leq n), c_i^2 - 4k_im_i \neq 0$ e faz-se o estudo da controlabilidade

do sistema analisando-se sua matriz de controlabilidade:

$$C_{Z_{ss}} = [PB_{ss}, DPB_{ss}, \dots, D^{2n}PB_{ss}]$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_1 \lambda_1^+ & \dots & \alpha_1 (\lambda_1^+)^{2n} \\ -\alpha_1 & -\alpha_1 \lambda_1^- & \dots & -\alpha_1 (\lambda_1^-)^{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n \lambda_n^+ & \dots & \alpha_n (\lambda_n^+)^{2n} \\ -\alpha_n & -\alpha_n \lambda_n^- & \dots & -\alpha_n (\lambda_n^-)^{2n} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Calcula-se o determinante de $C_{Z_{ss}}$ desenvolvendo-o pela primeira linha:

$$\det [C_{Z_{ss}}] = \det \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_1 \lambda_1^+ & \dots & \alpha_1 (\lambda_1^+)^{2n} \\ -\alpha_1 & -\alpha_1 \lambda_1^- & \dots & -\alpha_1 (\lambda_1^-)^{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n \lambda_n^+ & \dots & \alpha_n (\lambda_n^+)^{2n} \\ -\alpha_n & -\alpha_n \lambda_n^- & \dots & -\alpha_n (\lambda_n^-)^{2n} \end{bmatrix} \propto \det \begin{bmatrix} \lambda_1^+ & (\lambda_1^+)^2 & \dots & (\lambda_1^+)^{2n} \\ \lambda_1^- & (\lambda_1^-)^2 & \dots & (\lambda_1^-)^{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n^+ & (\lambda_n^+)^2 & \dots & (\lambda_n^+)^{2n} \\ \lambda_n^- & (\lambda_n^-)^2 & \dots & (\lambda_n^-)^{2n} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Utilizando a hipótese de que **todos os valores próprios são diferentes entre si e**

sabendo-se que $\lambda_i^+ \neq 0$ et $\lambda_i^- \neq 0$ (pois todos $k_i \neq 0$), obtém-se:

$$\det [C_{z_{ss}}] \propto \det \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1^+ & \dots & (\lambda_1^+)^{2n-1} \\ 1 & \lambda_1^- & \dots & (\lambda_1^-)^{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n^+ & \dots & (\lambda_n^+)^{2n-1} \\ 1 & \lambda_n^- & \dots & (\lambda_n^-)^{2n-1} \end{bmatrix}}_{\text{Déterminant de Vandermonde}} \neq 0 \quad (2.39)$$

Deduz-se disso que o sistema (A_{ss}, B_{ss}) é controlável. Isto posto, continua-se a análise do sistema completo (A, B) . Primeiramente, remarca-se que o sistema pode ser escrito da seguinte forma:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} E & F \\ 0 & A_{ss} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ B_{ss} \end{bmatrix} u \quad (2.40)$$

onde $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$.

Define-se a matriz $\bar{P} = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$ (invertível) e a mudança de variável $Z = \bar{P}X$ e,

assim, obtém-se:

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} E & FP^{-1} \\ 0 & D \end{bmatrix} Z + \begin{bmatrix} 0 \\ PB_{ss} \end{bmatrix} u \quad (2.41)$$

Faz-se o estudo da matriz de controlabilidade do novo sistema:

$$C_Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_1 \lambda_1^+ & \alpha_1 (\lambda_1^+)^2 & \alpha_1 (\lambda_1^+)^3 & \dots & \alpha_1 (\lambda_1^+)^{2n+2} \\ -\alpha_1 & -\alpha_1 \lambda_1^- & -\alpha_1 (\lambda_1^-)^2 & -\alpha_1 (\lambda_1^-)^3 & \dots & -\alpha_1 (\lambda_1^-)^{2n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n \lambda_n^+ & \alpha_n (\lambda_n^+)^2 & \alpha_n (\lambda_n^+)^3 & \dots & \alpha_n (\lambda_n^+)^{2n+2} \\ -\alpha_n & -\alpha_n \lambda_n^- & -\alpha_n (\lambda_n^-)^2 & -\alpha_n (\lambda_n^-)^3 & \dots & -\alpha_n (\lambda_n^-)^{2n+2} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Calculando-se o determinante de C_Z , obtém-se:

$$\det[C_Z] \propto \det \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1^+ & \dots & (\lambda_1^+)^{2n-1} \\ 1 & \lambda_1^- & \dots & (\lambda_1^-)^{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n^+ & \dots & (\lambda_n^+)^{2n-1} \\ 1 & \lambda_n^- & \dots & (\lambda_n^-)^{2n-1} \end{bmatrix}}_{\text{Déterminant de Vandermonde}} \neq 0 \quad (2.43)$$

Prova-se, desta forma, a controlabilidade do sistema (2.40), o que indica a possibilidade de transferi-lo de um estado inicial a um outro estado arbitrário $x = [p, \dot{p}, a, \theta_1, \dot{\theta}_1, \dots, \theta_n, \dot{\theta}_n]^T$ em tempo finito $T > 0$. Este resultado assegura a possibilidade da criação de uma estratégia de planificação de trajetórias.

Proposição 2. *Seja o sistema (2.29) de n pêndulos amortecidos fixados sobre um carro motorizado. Sob a hipótese que os modos próprios $\lambda_i^- \neq \lambda_i^+$ são todos distintos, o sistema é comandável (do contrário, ele não o é).*

2.3.3 Comentários

As condições necessárias e suficientes para que o sistema seja controlável são:

1. O sistema deve ter parâmetros de inércia e rigidez estritamente positivos, isto é,

$$\forall(1 \leq i \leq n), m_i > 0, k_i > 0$$

(o que não passa de uma formalidade do modelo matemático, uma vez que isto se verifica naturalmente para sistemas físicos reais)

2. Os valores próprios do sistema não se repetem:

$$\forall(1 \leq i, j \leq n), i \neq j, \lambda_i^+ \neq \lambda_j^+, \lambda_i^- \neq \lambda_j^-, \lambda_i^+ \neq \lambda_j^-$$

De fato, n repetições de uma mesma frequência amortecida representa a resolução do problema para n sub-sistemas similares (por exemplo, se o problema é resolvido para um único pêndulo e um outro pêndulo de mesma frequência amortecida é adicionado, ambos partindo de uma mesma condição inicial, a trajetória planejada para o primeiro pêndulo terá os mesmos efeitos sobre o segundo. No entanto, se os pêndulos partem de condições iniciais diferentes, não é possível transferi-los ao mesmo tempo a um mesmo estado - o que não é necessário para o problema que se quer resolver, uma vez que todos os pêndulos supostamente partem de um mesmo estado).

Assim, para todo sistema do tipo (2.29) partindo do repouso, o mesmo método empregado para o caso de n pêndulos pode ser aplicado para determinar uma trajetória que leve o sistema de $p(0) = 0$ a uma posição $p(T) = p_T$ desejada em tempo finito $T > 0$, sem oscilações residuais para $t > T$. Além disso, se não existem frequências amortecidas repetidas, partindo de qualquer condição inicial, o sistema pode ser conduzido a um estado qualquer em tempo finito.

2.4 Experiências e Resultados

Experiências foram conduzidas com o objetivo de verificar a aplicabilidade e o bom funcionamento do método proposto para evitar oscilações ao fim do deslocamento de estruturas compostas por um número finito de modos vibrantes. Para tanto, hastes cilíndricas em latão, placas de madeira, pequenos pedaços de plástico e cola epóxi foram utilizados para produzir sistemas mecânicos que seriam acoplados a um carro motorizado se deslocando sobre um trilho (Gilz (2013) dá mais detalhes sobre as especificações dos materiais utilizados e a montagem).

Cinco hastes de comprimentos diferentes foram empregadas respectivamente na composição de cada um dos modos vibrantes presentes nos sistemas mecânicos criados para a realização dos experimentos. A Figure 8 apresenta as hastes produzidas e o sistema após a montagem.



Figura 8: Hastes formando o sistemas a vários modos vibrantes.

Para identificar os parâmetros físicos de cada haste, algumas moedas (de massa conhecida) foram presas à ponta dos perfilados em latão e o deslocamento provocado pelo peso dessas moedas foi medido (imagem por imagem). Em seguida, para determinar o coeficiente de amortecimento equivalente e a massa equivalente de cada haste, utilizou-se uma câmera de alta velocidade de captura de imagens (1000 imagens

por segundo) para analisar o decaimento logarítmico da amplitude das oscilações de cada haste (Figura 9).

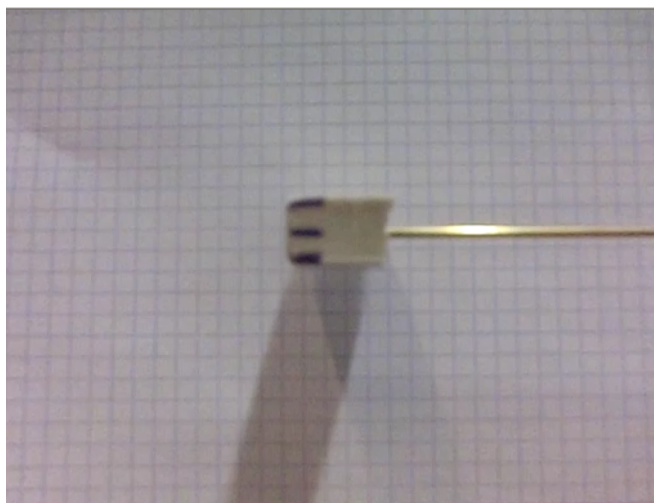


Figura 9: Análise do decaimento logarítmico da amplitude das oscilações de uma haste.

Segundo os desenvolvimentos teóricos, um código Matlab[®] foi desenvolvido para determinar a lei de comando que não provocaria oscilações ao fim do movimento e para simular o comportamento do sistema composto por um número qualquer de hastes. Simulações foram realizadas para números de hastes indo de 1 a 5. Em seguida, passou-se à verificação prática por meio do uso do carro motorizado para o deslocamento das hastes segundo a trajetória produzida pelo código criado. Os vídeos disponíveis em (PETIT; GILZ, 2013a; PETIT; GILZ, 2013b; PETIT; GILZ, 2013c; PETIT; GILZ, 2013d; PETIT; GILZ, 2013e) apresentam as respostas de cinco sistemas (1, 2, 3, 4 e 5 hastes) deslocados com a implementação do método: quando os sistemas se deslocam para a direita, seguem a trajetória planejada; quando os sistemas se deslocam para a esquerda, seguem uma trajetória qualquer.

2.5 Conclusões

Observando-se os vídeos contendo os resultados dos experimentos práticos, pode-se remarcar que as oscilações residuais constatadas ao fim do percurso da trajetória planejada eram inferiores às amplitudes referentes às oscilações constatadas

para trajetórias arbitrárias.

A existência dessas oscilações residuais foi devida principalmente ao fato de que o trilho responsável pelo acionamento do carro motorizado não era capaz de executar com perfeição os movimentos solicitados, uma vez que a trajetória era dividida em 32 sub-trajetórias de aceleração constante, havendo assim uma diferença entre a trajetória efetivamente realizada e aquela idealizada para a solução do problema (Figura 10).

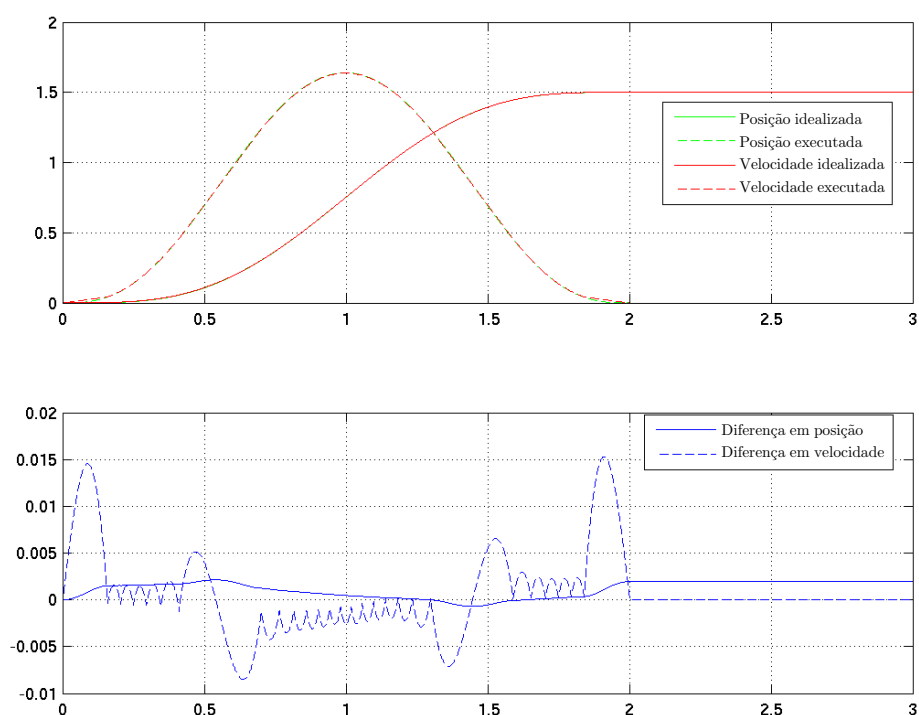


Figura 10: Diferença entre trajetória idealizada e trajetória executada.

No entanto, mesmo em se utilizando uma trajetória um pouco diferente da que fora planejada, as oscilações residuais constatadas para estas trajetórias foram visivelmente inferiores às oscilações provocadas por movimentos arbitrários, o que indica a aplicabilidade e eficiência do método proposto.

3 SISTEMAS COMPOSTOS DE UM NÚMERO FINITO DE MODOS VIBRANTES FISICAMENTE ACOPLADOS - DINÂMICA LONGITUDINAL DE TRENS

Neste capítulo será apresentado um método de planificação de trajetórias para sistemas mecânicos possuindo modos vibrantes fisicamente acoplados, fazendo-se uma aplicação particular deste método ao movimento longitudinal de trens. As duas últimas seções deste capítulo apresentam resultados obtidos por meio da implementação da estratégia desenvolvida em simulações numéricas e conclusões sobre o desempenho e a funcionalidade da mesma.

3.1 Modelo

Na literatura, é possível encontrar modelos bem compreensivos para o movimento longitudinal de trens, entre eles os presentes em (IWNICKI, 2006; BARBOSA, 1993; TODESCO, 2011; GAO et al., 2013).

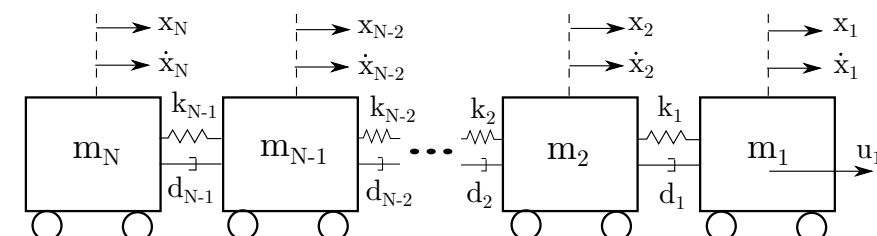


Figura 11: Modelo adotado para movimento longitudinal do trem.

Em geral, para a dinâmica longitudinal, são considerados os seguintes esforços

atuantes sobre um vagão qualquer (a interação com um dos vizinhos deve ser desconsideradas no caso de um vagão da extremidade):

$$\begin{aligned} \sum F_i = & u_i + k_i(x_{i+1} - x_i) + k_{i-1}(x_{i-1} - x_i) + d_i(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) + d_{i-1}(\dot{x}_{i-1} - \dot{x}_i) \\ & -(c_{oi} + c_{vi}\dot{x}_i + c_{ai}\dot{x}_i^2)m_i - g \sin(\theta_i)m_i - gm_iCR_i^{-1} \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde:

- u_i é a força motriz do vagão i ;
- $k_i(x_{i+1} - x_i)$ e $k_{i-1}(x_{i-1} - x_i)$ são forças elásticas respectivamente caracterizadas pelos coeficientes de mola k_i e k_{i-1} e pelos deslocamentos relativos entre vagões vizinhos;
- $d_i(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i)$ e $d_{i-1}(\dot{x}_{i-1} - \dot{x}_i)$ são forças dissipativas respectivamente caracterizadas pelos coeficientes de dissipação d_i e d_{i-1} e pelas velocidades relativas entre vagões vizinhos;
- $(c_{oi} + c_{vi}\dot{x}_i)m_i$ é a força de resistência ao rolamento caracterizada pelos coeficientes c_{oi} e c_{vi} , \dot{x}_i velocidade do vagão i e m_i massa do vagão i ;
- $(c_{ai}\dot{x}_i^2)m_i$ é a força de resistência aerodinâmica caracterizada pelo coeficiente c_{ai} , \dot{x}_i velocidade do vagão i e m_i massa do vagão i ;
- $g \sin(\theta_i)m_i$ é a força de resistência devida à inclinação, caracterizada pela aceleração da gravidade g , pela inclinação local θ_i e por m_i massa do vagão i ;
- $gm_iCR_i^{-1}$ é a força de resistência devida à curvatura da via, caracterizada pela distância entre centros dos truques C , pelo raio da via local R_i , pela aceleração da gravidade g e pela massa do vagão i , m_i ;

As seguintes hipóteses simplificadoras serão adotadas:

1. Será adotado um modelo unidimensional, logo não serão consideradas inclinações do terreno;
2. O percurso será retilíneo, não havendo curvatura da via;
3. As resistências ao rolamento e aerodinâmica serão modeladas como perturbações externas e não farão parte da dinâmica intrínseca ao trem;
4. Apenas o primeiro vagão será motorizado.

Sendo assim, para um conjunto de N vagões, a soma de forças na direção longitudinal será dada por:

$$\begin{aligned}\sum F_1 &= m_1 \ddot{x}_1 = u_1 + k_1(x_2 - x_1) + d_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ \sum F_i &= m_i \ddot{x}_i = k_i(x_{i+1} - x_i) + k_{i-1}(x_{i-1} - x_i) + d_i(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) + d_{i-1}(\dot{x}_{i-1} - \dot{x}_i), \quad 1 < i < N \\ \sum F_N &= m_N \ddot{x}_N = k_{N-1}(x_{N-1} - x_N) + d_{N-1}(\dot{x}_{N-1} - \dot{x}_N)\end{aligned}\tag{3.2}$$

3.2 Desenvolvimento

O problema que se deseja resolver se enuncia da seguinte maneira:

Problema 1. Considerando-se o modelo (3.2) para a dinâmica longitudinal do trem, determinar uma trajetória nominal para um conjunto de N vagões partindo do repouso de forma que, ao final de um tempo T , o mesmo seja deslocado de uma distância P e esteja em repouso, sem oscilações residuais.

O termo *trajetória nominal* é empregado pois se deseja estabelecer uma trajetória que satisfaça o Problema 1 enunciado anteriormente considerando-se a dinâmica simplificada do movimento longitudinal dos trens sob as hipóteses adotadas. Sendo assim, para garantir o seguimento da trajetória de referência produzida, perturbações ou dinâmicas não incluídas no modelo em questão devem ser rejeitadas por meio da aplicação de uma lei de controle em malha fechada, como indicado na Figura 12.

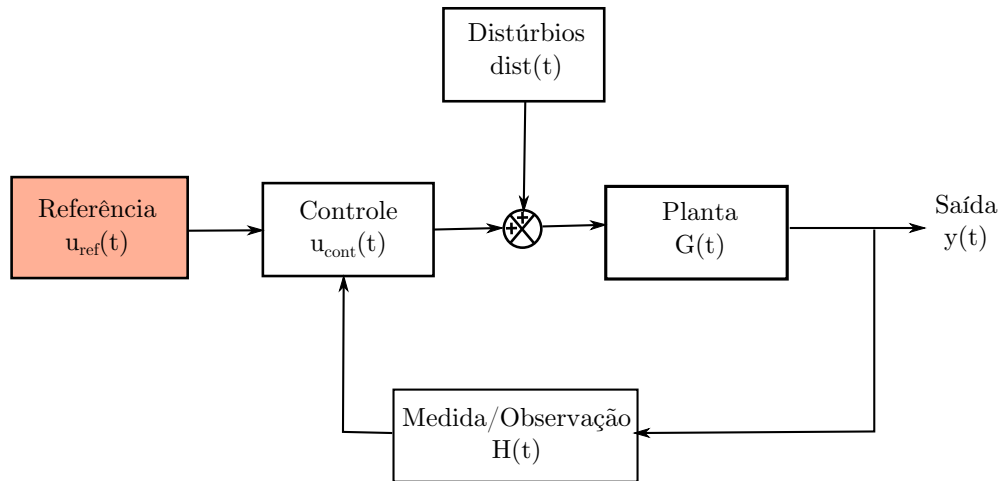


Figura 12: Diagrama de blocos ilustrando o design de uma lei de controle para o seguimento da trajetória de referência planejada com rejeição de distúrbios.

Para que se possa dar continuidade ao desenvolvimento de um método para a planificação de trajetórias do sistema, deve-se primeiramente analisar as condições que permitem a transferência do sistema entre dois estados distintos em tempo finito, isto é, verificar os requisitos de controlabilidade do modelo estudado.

3.2.1 Controlabilidade

Definindo o estado $X(t) = [x_1(t) \ \dot{x}_1(t) \ \dots \ x_N(t) \ \dot{x}_N(t)]'$, são obtidas as condições inicial $X(0) = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]'$ e final $X(T) = [P_T \ V_T \ \dots \ P_T \ V_T]'$, onde P_T e V_T são respectivamente os deslocamentos e velocidades finais dos vagões. Utilizando uma representação em forma de espaço de estados, é possível escrever o sistema de equações (3.2) como:

$$\dot{X}(t) = A X(t) + B u_1(t) \quad (3.3)$$

onde A é a matriz $2N \times 2N$ que descreve a dinâmica do sistema, dada em função dos coeficientes k_i , d_i e m_i (ver Anexo A) e $B = [0 \ \frac{1}{m_1} \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]'$ é o vetor coluna que possui a segunda entrada igual a $\frac{1}{m_1}$ e as outras nulas.

A matriz de controlabilidade do sistema é dada por:

$$C = [B, AB, A^2B, \dots, A^{2N-1}B] \quad (3.4)$$

e o sistema é dito controlável se o posto desta matriz for $2N$ (isto é, se seu determinante não for nulo).

Por meio de cálculo simbólico, pode-se mostrar que quando o sistema é não-amortecido (isto é, $d_i = 0, \forall i$) o determinante de C vale:

$$\det[C] = (-1)^n \frac{\prod_1^{n-1} k_i^{2n-2i}}{\prod_1^n m_i^{2n-2(i-1)}} \neq 0 \quad (3.5)$$

e, como o determinante nunca é nulo para esta configuração, a controlabilidade fica garantida.

Quando o sistema é amortecido, pode-se verificar também por meio de cálculo simbólico que a controlabilidade não depende dos valores próprios do sistema (diferentemente do caso de sistemas cujos modos vibrantes são desacoplados), mas de outras relações algébricas entre os parâmetros físicos do mesmo. Constata-se ainda que, quando estas relações são satisfeitas, os valores admitidos pelos parâmetros do sistema são destoantes dos que normalmente são empregados nos modelos físicos reais. Por exemplo, quando $N = 3$, demonstra-se que o sistema é controlável se a seguinte inequação for válida:

$$k_1^2 m_2 m_3 + d_1(m_2 + m_3)(d_1 k_2 - d_2 k_1) \neq 0 \quad (3.6)$$

Assim, analisando a ordem de grandeza dos termos da inequação (3.6), obtém-se:

$$o(k_1^2 m_2^2) - o(d_1^2 k_1 m_2) \neq 0 \Rightarrow o(k_1 m_2) \neq o(d_1^2) \quad (3.7)$$

Uma configuração que não respeite a inequação (3.7) é muito incomum para sistemas físicos com modos vibrantes acoplados, uma vez que os coeficientes de dissipação geralmente assumem valores muito baixos em relação aos parâmetros de inércia e rigidez (segundo Barbosa (1993), os coeficientes de dissipação são da ordem de 10^4 N.s/m , enquanto que as massas e os coeficientes elásticos são da ordem de 10^5 kg e 10^7 N/m respectivamente). Isto indica que a inequação (3.7) é geralmente

respeitada e que configurações comumente encontradas para os trens resultam em sistemas dinâmicos controláveis.

No caso em que as condições de controlabilidade são respeitadas, é possível encontrar uma lei horária capaz de transferir o sistema em tempo finito entre dois estados distintos. Essa conclusão permite que se possa dar continuidade ao desenvolvimento de um método para planificação de trajetórias para o sistema estudado, uma vez que existe ao menos uma lei horária satisfazendo as restrições que devem ser impostas para a resolução do Problema 1.

3.2.2 Método de planificação proposto

O método de planificação que será desenvolvido a seguir será baseado na representação da evolução temporal dos estados por meio da matriz de transição de estados do sistema. Nesta representação, a convolução entre a matriz de transição e a força atuante sobre o primeiro vagão será associada a constantes numéricas. Estas constantes farão parte da descrição do perfil da entrada do sistema, que permitirá posteriormente a determinação da trajetória que soluciona o Problema 1 enunciado anteriormente.

Primeiramente, define-se a matriz de transição: $\Phi(t_0, t_1) = \exp(A(t_1 - t_0))$. Para qualquer tempo t , o estado do sistema pode ser determinado com auxílio desta matriz:

$$X(t) = \Phi(t, 0)X(0) + \int_0^t \Phi(t, \tau) B u_1(\tau) d\tau \quad (3.8)$$

A partir da equação (3.8), pode-se estabelecer a estratégia de planificação seguinte:

- A força motriz u_1 será descrita da seguinte forma:

$$u_1(t) = f(t) \left(a_0 + a_1 \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) + a_2 \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) + a_3 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + a_4 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \dots \right) \quad (3.9)$$

onde $f(t)$ é a função apresentada na Figura 14

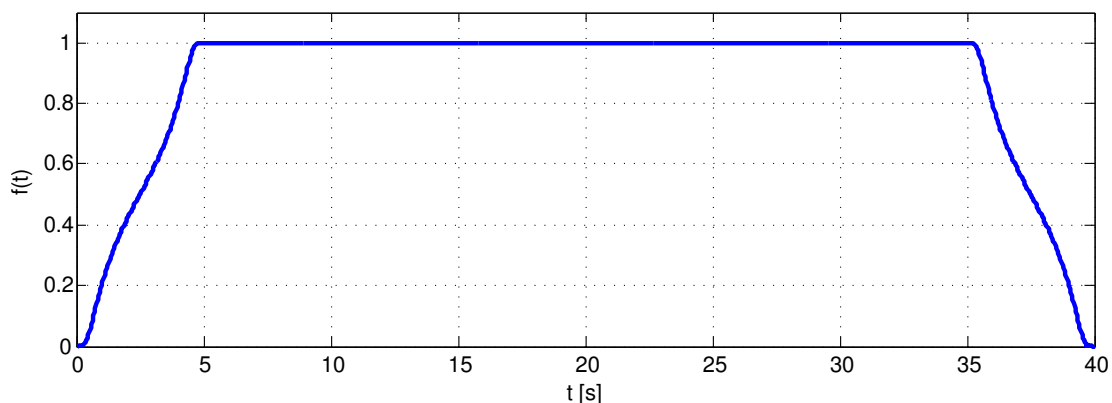


Figura 13: Função $f(t)$.

A ideia é representar $u_1(t)$ como uma série de Fourier truncada multiplicada por uma função contínua $f(t)$, que é nula e possui derivadas de todas as ordens nulas para os tempos iniciais e finais $t = 0$ e $t = T$ (o que evita a presença de oscilações após a realização da trajetória desejada) e que vale 1 para tempos entre $t = T_{int}$ e $t = T - T_{int}$ (na Figura 14, por exemplo, $T = 40$ e $T_{int} = 5$).

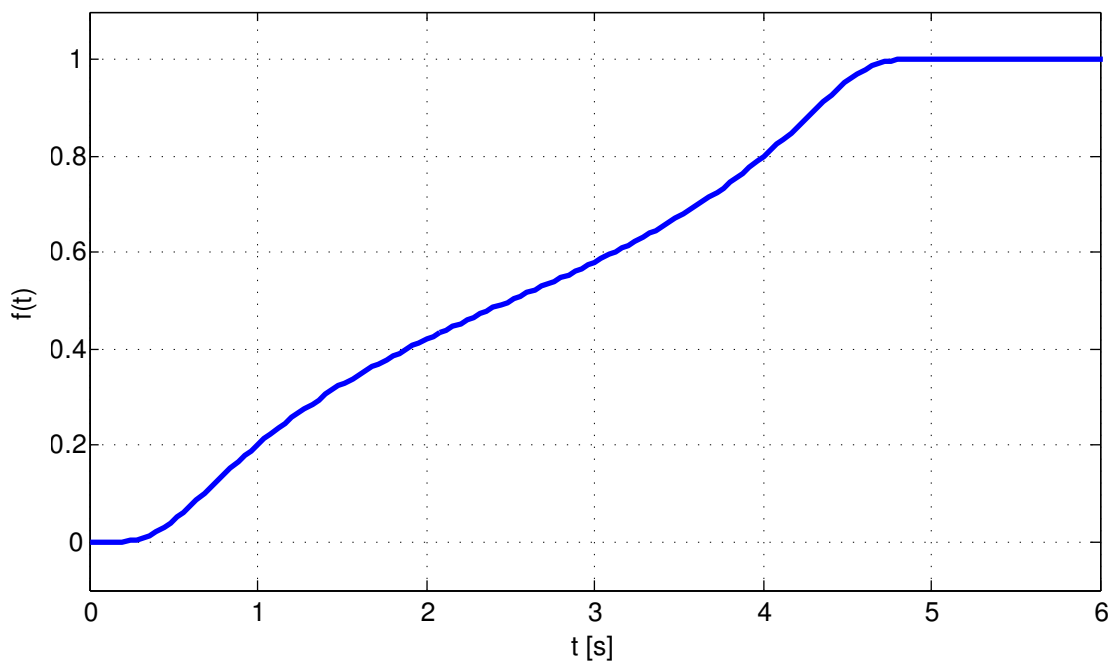


Figura 14: Detalhe da evolução de $f(t)$ entre $t = 0$ e $t = T_{int}$.

- Esta representação de $u_i(t)$ pode ser reformulada, obtendo-se:

$$u_1(t) = a_0 \tilde{f}_0(t) + a_1 \tilde{f}_1(t) + a_2 \tilde{f}_2(t) + a_3 \tilde{f}_3(t) + a_4 \tilde{f}_4(t) + \dots \quad (3.10)$$

onde $\tilde{f}_0(t) = f(t)$, $\tilde{f}_1(t) = f(t) \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)$, $\tilde{f}_2(t) = f(t) \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)$, $\tilde{f}_3(t) = f(t) \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ e $\tilde{f}_4(t) = f(t) \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$. Com esta outra representação de $u_i(t)$, o termo de convolução $\int_0^T \Phi(T, \tau) B u_1(\tau) d\tau$ da equação (3.8) pode ser decomposto da seguinte maneira:

$$\int_0^T \Phi(T, \tau) B u_1(\tau) d\tau = \sum_{i=0}^{M-1} a_i \int_0^T \Phi(T, \tau) B \tilde{f}_i(\tau) d\tau \quad (3.11)$$

e a equação (3.8) pode ser reescrita como segue:

$$X(T) - \Phi(T, 0)X(0) = Q_{(2N) \times (M)} a \quad (3.12)$$

onde $a = [a_0, a_2, \dots, a_{M-1}]'$ e cada coluna i da matriz Q é dada por:

$$Q(i) = \int_0^T \Phi(T, \tau) B \tilde{f}_i(\tau) d\tau$$

- A partir do cálculo da matriz Q , resolve-se o sistema de equações lineares (3.12) e se determinam os coeficientes que descrevem $u_1(t)$, solução do problema de planificação.
- Se o sistema de equações (3.12) possuir um número de variáveis maior do que o número de equações, infinitas soluções são possíveis. Esta condição pode ser alcançada em se utilizando um número de termos na série de Fourier que descreve $u_1(t)$ maior do que duas vezes o número de vagões ($M \geq 2N$). Neste caso, é possível definir uma função objetivo a ser minimizada em função dos parâmetros $a_0 \dots a_{M-1}$ que caracterizam $u_1(t)$.
- Com o intuito de minimizar o consumo de energia provocado pela força aplicada no deslocamento dos vagões, uma etapa de minimização da integral do quadrado de $u_1(t)$ entre $t = 0$ e $t = T$ será adicionada. A descrição dessa função por meio

dos coeficientes $a_0 \dots a_{M-1}$ pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \int_0^T u_1(t)^2 dt &= \int_0^T (a_0 \tilde{f}_0(t) + \dots + a_{M-1} \tilde{f}_{M-1}(t)) \cdot (a_0 \tilde{f}_0(t) + \dots + a_{M-1} \tilde{f}_{M-1}(t)) dt = \\ &= \int_0^T \left([a_0 \dots a_{M-1}] \cdot [\tilde{f}_0(t) \dots \tilde{f}_{M-1}(t)]' \right) \cdot \left([\tilde{f}_0(t) \dots \tilde{f}_{M-1}(t)] \cdot [a_0 \dots a_{M-1}]' \right) dt = \\ &= a' \cdot \left(\int_0^T [\tilde{f}_0(t) \dots \tilde{f}_{M-1}(t)]' \cdot [\tilde{f}_0(t) \dots \tilde{f}_{M-1}(t)] dt \right) \cdot a \end{aligned} \quad (3.13)$$

Definindo-se a matriz definida positiva R :

$$R = \int_0^T [\tilde{f}_0(t) \dots \tilde{f}_{M-1}(t)]' \cdot [\tilde{f}_0(t) \dots \tilde{f}_{M-1}(t)] dt \quad (3.14)$$

pode-se reescrever (3.13) como:

$$\int_0^T u_1(t)^2 dt = a' \cdot R \cdot a \quad (3.15)$$

Assim, para se determinar uma solução do problema de planificação de trajetórias que minimize o critério $\int_0^T u_1(t)^2 dt$, deve-se resolver:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_a a' \cdot R \cdot a \\ Q a = X(T) - \Phi(T, 0)X(0) \end{array} \right. \quad (3.16)$$

- Em seguida, define-se um critério de minimização da magnitude dos choques entre vagões. Para tanto, a maneira como o sistema é representado sob forma de espaço de estados será alterado, de forma que se possa analisar os deslocamentos e velocidades relativas entre vagões. Isto é feito da seguinte maneira:

Seja

$$\dot{\tilde{X}}(t) = \tilde{A} \tilde{X}(t) + \tilde{B} u_1 \quad (3.17)$$

o sistema dinâmico equivalente à (3.3) cujo estado é dado por

$$\tilde{X} = [X_1, \dot{X}_1, X_1 - X_2, \dot{X}_1 - \dot{X}_2, \dots, X_{N-1} - X_N, \dot{X}_{N-1} - \dot{X}_N]' \quad (3.18)$$

e seja $\tilde{I}_{2N \times 2N}$ uma matriz com a mesma estrutura da matriz identidade de tamanho

$2N$ com as duas primeiras entradas da diagonal principal nulas. Com isto, é possível definir um critério a ser minimizado a fim de reduzir a magnitude dos choques, dado por $\int_0^T (\tilde{I} \tilde{X}(t))' \cdot (\tilde{I} \tilde{X}(t)) dt$. Este critério pode ser dado em função dos parâmetros $a_0 \dots a_M$ por meio dos seguintes desenvolvimentos:

Utilizando-se a expressão (3.8), pode-se reformular o critério:

$$\int_0^T (\tilde{X}'(t) \tilde{I}) \cdot (\tilde{I} \tilde{X}(t)) dt = \int_0^T \left((\tilde{\Phi}(t, 0) \tilde{X}(0) + \int_0^t \tilde{\Phi}(t, \tau) \tilde{B} u_1(\tau) d\tau)' \tilde{I} \right) \cdot \left(\tilde{I} \left(\tilde{\Phi}(t, 0) \tilde{X}(0) + \int_0^t \tilde{\Phi}(t, \tau) \tilde{B} u_1(\tau) d\tau \right) \right) dt \quad (3.19)$$

como $\tilde{X}(0) = 0_{2n \times 1}$, a expressão anteriormente obtida pode ser simplificada:

$$\begin{aligned} \int_0^T (\tilde{X}'(t) \tilde{I}) \cdot (\tilde{I} \tilde{X}(t)) dt &= \int_0^T \left(\left(\int_0^t \tilde{\Phi}(t, \tau) \tilde{B} u_1(\tau) d\tau \right)' \tilde{I} \right) \cdot \left(\tilde{I} \left(\int_0^t \tilde{\Phi}(t, \tau) \tilde{B} u_1(\tau) d\tau \right) \right) dt = \\ &= \int_0^T \left(\int_0^t u_1(\tau) \tilde{B}' \tilde{\Phi}(t, \tau)' d\tau \right) \cdot \tilde{I} \cdot \left(\int_0^t \tilde{\Phi}(t, \tau) \tilde{B} u_1(\tau) d\tau \right) dt = \\ &= \int_0^T \left(\int_0^t a' \begin{bmatrix} \tilde{f}_0(\tau) & \dots & \tilde{f}_{M-1}(\tau) \end{bmatrix}' \tilde{B}' \tilde{\Phi}(t, \tau)' d\tau \right) \cdot \tilde{I} \cdot \left(\int_0^t \tilde{\Phi}(t, \tau) \tilde{B} \begin{bmatrix} \tilde{f}_0(\tau) & \dots & \tilde{f}_{M-1}(\tau) \end{bmatrix} a d\tau \right) dt = \\ &= a' \int_0^T \left(\int_0^t \begin{bmatrix} \tilde{f}_0(\tau) & \dots & \tilde{f}_{M-1}(\tau) \end{bmatrix}' \tilde{B}' \tilde{\Phi}(t, \tau)' d\tau \right) \cdot \tilde{I} \cdot \left(\int_0^t \tilde{\Phi}(t, \tau) \tilde{B} \begin{bmatrix} \tilde{f}_0(\tau) & \dots & \tilde{f}_{M-1}(\tau) \end{bmatrix} d\tau \right) dt \cdot a \\ &= \int_0^T (\tilde{X}'(t) \tilde{I}) \cdot (\tilde{I} \tilde{X}(t)) dt = a' \cdot S \cdot a \end{aligned} \quad (3.20)$$

Definindo-se a matriz definida positiva S :

$$S = \int_0^T \left(\int_0^t \begin{bmatrix} \tilde{f}_0(\tau) & \dots & \tilde{f}_{M-1}(\tau) \end{bmatrix}' \tilde{B}' \tilde{\Phi}(t, \tau)' d\tau \right) \cdot \tilde{I} \cdot \left(\int_0^t \tilde{\Phi}(t, \tau) \tilde{B} \begin{bmatrix} \tilde{f}_0(\tau) & \dots & \tilde{f}_{M-1}(\tau) \end{bmatrix} d\tau \right) dt \quad (3.21)$$

pode-se escrever um novo critério de minimização levando em conta a redução do consumo de energia referente ao controle e a diminuição da magnitude dos choques:

$$\begin{cases} \min_a a' \cdot (R + \alpha S) \cdot a \\ Q a = X(T) - \Phi(T, 0)X(0) \end{cases} \quad (3.22)$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}^+$ é uma constante usada para ajustar o peso entre os critérios a serem minimizados.

- Por fim, deve-se levar em conta que o modelo adotado considera $u_1(t)$ como uma força de tração. Isto implica esta função devem ser sempre maior ou igual a

zero. Uma maneira de obrigar a função a ser não-negativa é impor que seu valor calculado em alguns instantes $t_{1 \leq i \leq p}$ deve ser maior ou igual a zero. Sendo assim, para cada t_i , uma restrição é imposta:

$$u_1(t_i) = [\tilde{f}_0(t_i) \dots \tilde{f}_{M-1}(t_i)] \cdot a' \geq 0, \quad \forall 1 \leq i \leq p \quad (3.23)$$

Definindo-se a matriz U dada por:

$$U_{p \times M} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_0(t_1) & \dots & \tilde{f}_{M-1}(t_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{f}_0(t_p) & \dots & \tilde{f}_{M-1}(t_p) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Com isto é possível escrever a forma final do problema de planificação de trajetórias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_a a \cdot (R + \alpha S) \cdot a' \\ Q a = X(T) - \Phi(T, 0)X(0) \\ U a \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.25)$$

3.3 Exemplo numérico e Resultados

Para ilustrar a aplicação e estudar as propriedades método proposto, um exemplo numérico é apresentado e resolvido a seguir. Os parâmetros utilizados para este exemplo (número de vagões, massas, coeficientes elásticos e dissipativos) foram baseados nos valores apresentados por Barbosa (1993):

- $N = 10$ (dez vagões);
- $t_1 = 0$ e $T = t_{2N+1} = 120$ [s];
- Posição inicial: 0; Posição final: 150 [m];
- Velocidade inicial: 0; Velocidade final: 18 [km/h];

- $m_1 = 108000$, $m_2 = 110670$, $m_3 = 113330$, $m_4 = 116000$, $m_5 = 118670$,
 $m_6 = 121330$, $m_7 = 124000$, $m_8 = 126670$, $m_9 = 129330$, $m_{10} = 132000$ [kg];
- $k_1 = 1.2600$, $k_2 = 1.2075$, $k_3 = 1.1550$, $k_4 = 1.1025$, $k_5 = 1.0500$
 $k_6 = 0.9975$, $k_7 = 0.9450$, $k_8 = 0.8925$, $k_9 = 0.8400$ [$\times 10^7$ N/m];
- $d_1 = 72000$, $d_2 = 74000$, $d_3 = 76000$, $d_4 = 78000$, $d_5 = 80000$,
 $d_6 = 82000$, $d_7 = 84000$, $d_8 = 86000$, $d_9 = 88000$ [N.s/m];
- M (número de termos na série de Fourier): 60.

Códigos *MATLAB* foram desenvolvidos para a simulação deste cenário. Os deslocamentos, velocidades, potência necessária e forças internas entre vagões são apresentadas nas Figuras 15, 16 e 17.

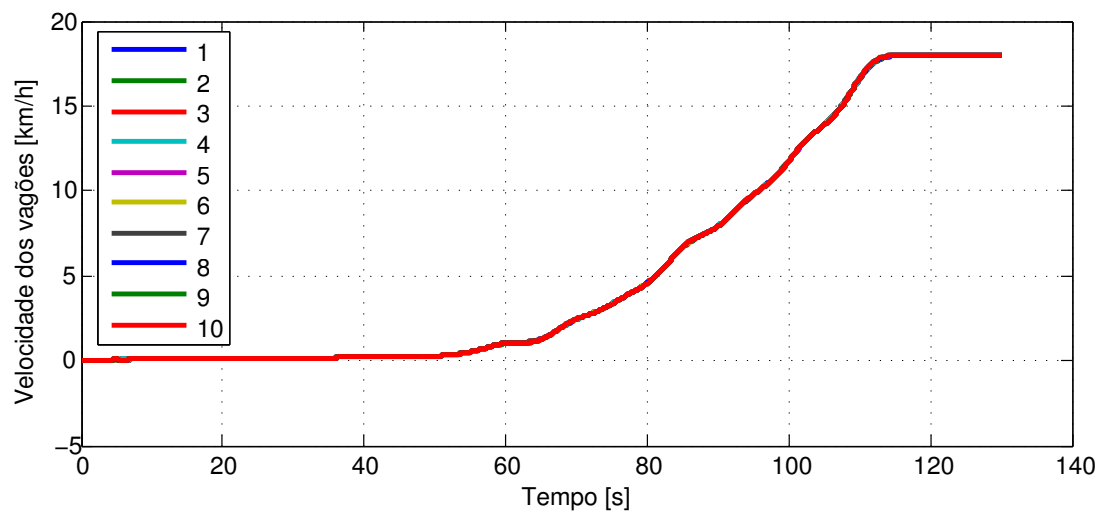
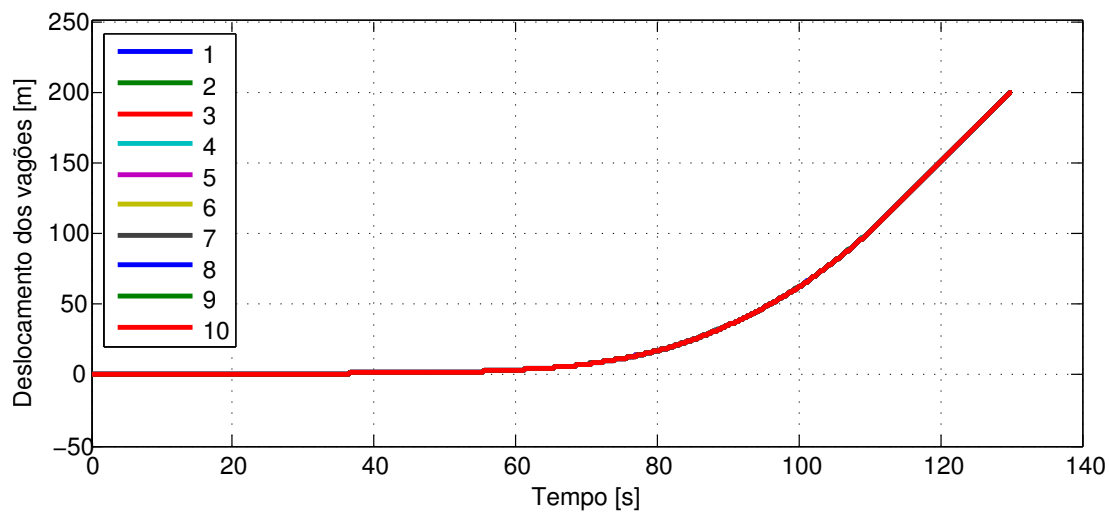


Figura 15: Deslocamentos e velocidades dos vagões.

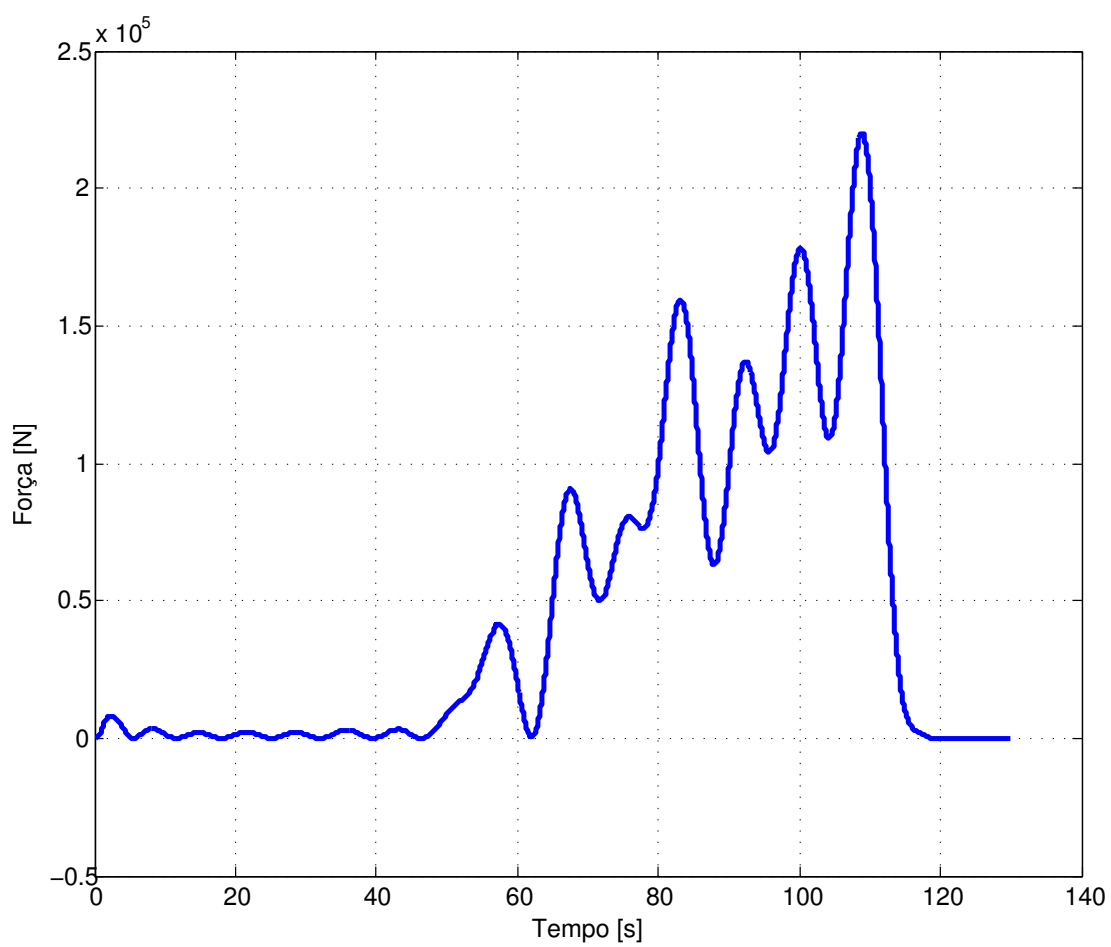


Figura 16: Força planejada.

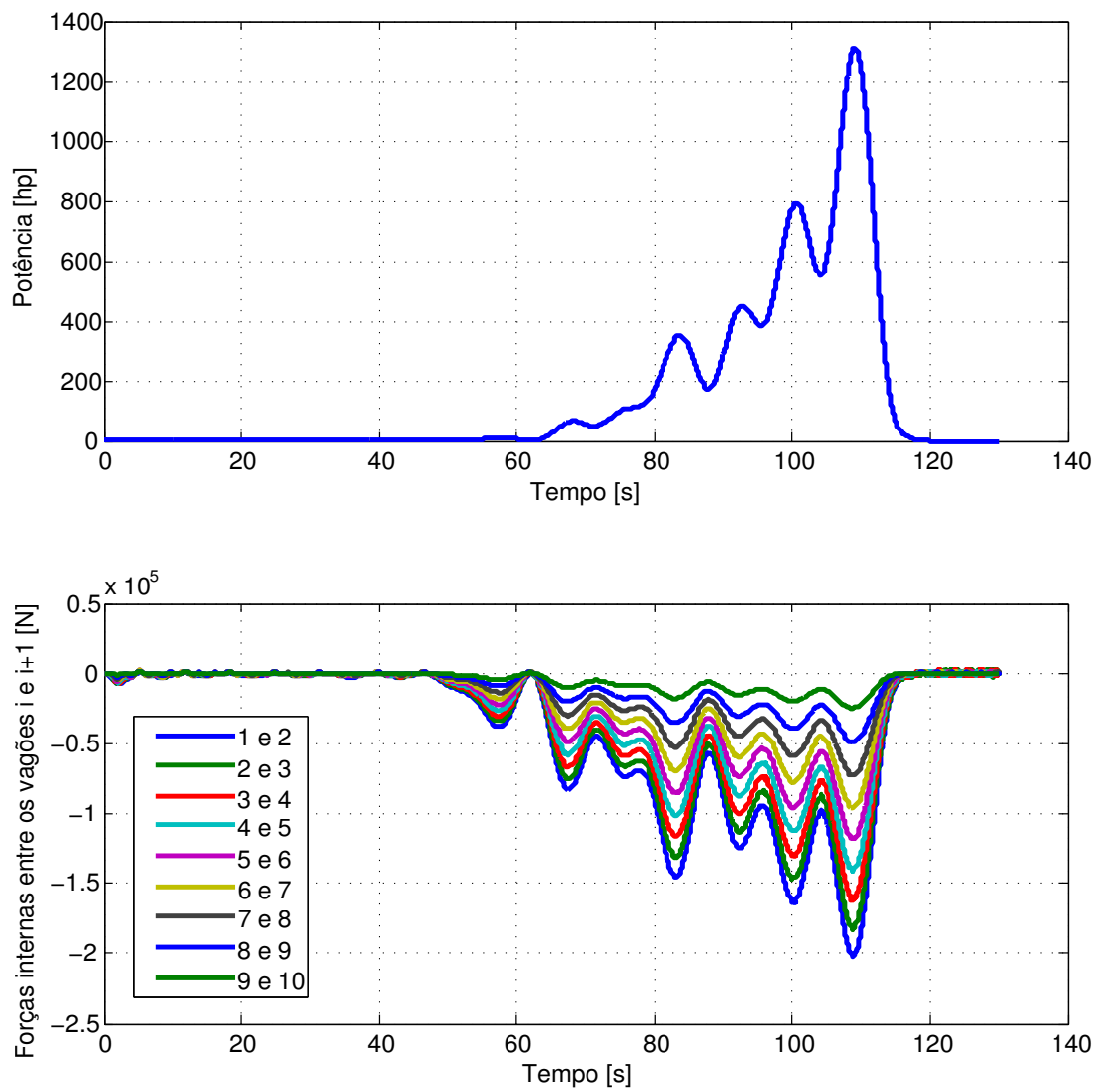


Figura 17: Potência necessária e forças internas entre vagões consecutivos.

3.4 Conclusões

Observando-se a Figura 15, verifica-se que o sistema partiu do repouso até a posição e velocidade desejadas dentro do tempo solicitado (todos os vagões deslocaram-se de 150 m e atingiram 18 km/h em um intervalo de 120 s). Além disso, não são constatadas oscilações residuais, tanto para o gráfico do deslocamento, quanto para o gráfico da velocidade. Conclui-se, assim, que o método permite a resolução do problema enunciado em 1.

As Figuras 16 e 17 mostram que a força e a potência obtidas apresentam variações rápidas entre os valores máximos e mínimos, o que é causado pelo fato de que a condição de não-negatividade da força motriz é imposta de maneira discreta. Isto sugere um estudo mais aprofundado de como impor esta condição de maneira contínua, com o intuito de obter perfis de força e potência mais lisos, com picos e vales mais suaves.

4 CONCLUSÕES

Este trabalho é destinado ao desenvolvimento de estratégias de planificações de trajetórias evitando oscilações residuais para sistemas compostos por um número finito de modos vibrantes. O objetivo principal é de obter métodos de planificação capazes de satisfazer as restrições impostas, tanto no caso em que os modos dos sistemas são acoplados, quanto no caso em que eles são não-acoplados.

No capítulo 2, apresenta-se um resumo dos desenvolvimentos realizados por Gilz (2013), indicando como é possível obter um método de planificação para sistemas a modos não acoplados por meio da utilização de polinômios. A estratégia obtida é testada de maneira prática em se utilizando um carro motorizado para deslocar estruturas vibrantes sobre um trilho. Os vídeos resultantes das experiências práticas permitem concluir que, mesmo na presença de imprecisões no seguimento da trajetória planificada em função da limitação dos atuadores utilizados, o método proposto foi eficiente na redução de oscilações de fim curso (quando comparado ao deslocamento sem planificação).

O capítulo 3 é dedicado aos sistemas compostos de modos vibrantes acoplados e um estudo particular é realizado para o caso do movimento longitudinal de trens. Um método baseado na descrição da entrada do sistema como uma série de Fourier truncada permite transformar a equação que associa a convolução da matriz de transição do sistema ao estado final em um sistema linear de equações, fornecendo uma maneira de determinar os parâmetros que constituem a trajetória planificada.

Testes realizados em um programa de computação numérica mostram que as trajetórias determinadas a partir do método desenvolvido permitem o atendimento das restrições impostas, evitando oscilações de fim de curso para todos os modos do sistema.

Para ambos os casos puderam-se estabelecer métodos de planificação diretos, de fácil implementação computacional e baixo custo numérico, capazes de atender os requisitos de deslocamento e velocidade em tempo finito e evitamento de oscilações residuais. Além disso, para o caso de modos acoplados, uma etapa de otimização permitiu a diminuição do consumo de energia engendrado pela força motriz atuante sobre o primeiro vagão e a redução da magnitude das oscilações durante o percurso da trajetória planificada. Foi possível também incluir um conjunto de restrições que permitiram a imposição da força motriz como sendo uma força apenas de tração, não havendo dispensa de energia com a frenagem dos vagões.

APÊNDICE A - MATRIZ A

Para o sistema 3.3 apresentado no capítulo 3:

$$\dot{X}(t) = A X(t) + B u_1(t)$$

- $X(t)$ é o estado formado pelos deslocamentos e velocidades de cada vagão:

$$X(t) = [x_1(t) \ \dot{x}_1(t) \ \dots \ x_N(t) \ \dot{x}_N(t)]'$$

- $u_1(t)$ é a força motriz do primeiro vagão;
- B é o vetor coluna que possui a segunda entrada igual a $\frac{1}{m_1}$ e as outras entradas nulas:

$$B = [0 \ \frac{1}{m_1} \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]'$$

- A é a matriz $2N \times 2N$ que descreve a dinâmica do sistema 3.3, dada em função dos coeficientes k_i , d_i e m_i . Sua estrutura é apresentada com maiores detalhes na página seguinte:

REFERÊNCIAS

- BARBOSA, R. *Estudo da Dinâmica Longitudinal do Trem*. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1993.
- FRIEDLAND, B. *Control System Design: An introduction to state-space methods*. New York, USA: Dover Books, 2005.
- GAO, K. et al. Decentralized control of heavy-haul trains with input constraints and communication delays. *Control Engineering Practice*, Elsevier, v. 21, p. 420–427, 2013.
- GILZ, P. R. A. Projeto de pesquisa: Planificação de trajetórias n’engendrando pas d’oscillation à la fin du mouvement pour des systèmes possédant un nombre fini ou infini de modes de vibration. In: ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE TECHNIQUES AVANCÉES. Palaiseau, FRA, 2013.
- IWNICKI, S. *Handbook of Railway Vehicle Dynamics*. Florida, US: CRC Press, 2006.
- LAROCHE, B. *Commande par platitude*. Palaiseau, FRA: École Nationale Supérieure de Techniques Avancées, 2004–2005.
- MARTIN, P. *Systèmes plats: planification et suivi de trajectoires*. Paris, FRA: École des Mines de Paris - Centre Automatique et Systèmes, 1999.
- PETIT, N.; GILZ, P. R. A. *Rest-to-rest trajectory for 1 flexible rod*. 2013. Disponível em: <<http://www.youtube.com/watch?v=1OheYaERWow>>. Acesso em: 16 de dezembro de 2014.
- _____. *Rest-to-rest trajectory for 2 flexible rods*. 2013. Disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=QRxW_nu9HrM>. Acesso em: 16 de dezembro de 2014.
- _____. *Rest-to-rest trajectory for 3 flexible rods*. 2013. Disponível em: <<http://www.youtube.com/watch?v=2ksJkkqJFpo>>. Acesso em: 16 de dezembro de 2014.
- _____. *Rest-to-rest trajectory for 4 flexible rods*. 2013. Disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=z5wre_jMGhU>. Acesso em: 16 de dezembro de 2014.
- _____. *Rest-to-rest trajectory for 5 flexible rods*. 2013. Disponível em: <<http://www.youtube.com/watch?v=Yy9YZRYmlnk>>. Acesso em: 16 de dezembro de 2014.
- PETIT, N.; ROUCHON, P. *Automatique: dynamique et contrôle des systèmes*. Paris, França: École Nationale Supérieure de Techniques Avancées, 2013.
- THOMSON, W. *Theory of vibrations with applications*. New Jersey, USA: Prentice Hall Inc., 1973.

TODESCO, J. *Otimização do controle da dinâmica longitudinal do trem de carga equipado com um sistema de frenagem eletropneumático*. Tese (Graduação em Engenharia Mecânica) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2011.

ZANDI, M. Flatness based control of a non-ideal *dc/dc* boost converter. *IECON 2011 - 37th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*, Shahid Beheshti Univ., Tehran, Iran, 2011.