

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

RENAN MAGRI

Análise termoelástica da desmontagem da união eixo-cubo com interferência transversal utilizando o Método dos Elementos Finitos

São Carlos – SP

2012

RENAN MAGRI

Análise termoelástica da desmontagem da união eixo-cubo com interferência transversal utilizando o Método dos Elementos Finitos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para graduação em Engenharia Mecatrônica.

Orientador: Prof. Dr. Ernesto Massaroppi Junior

São Carlos – SP

2012

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,  
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS  
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

M212a            Magri, Renan  
                    Análise termoelástica da desmontagem da união  
                    eixo-cubo com interferência transversal utilizando o  
                    Método dos Elementos Finitos / Renan Magri; orientador  
                    Ernesto Massaroppi Júnior. São Carlos, 2012.

                    Monografia (Graduação em Engenharia Mecatrônica) --  
                    Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de  
                    São Paulo, 2012.

                    1. União eixo-cubo. 2. Método dos Elementos  
                    Finitos. 3. Análise termoelástica. 4. Transiente. I.  
                    Título.

## FOLHA DE AVALIAÇÃO

**Nome:** Renan Magri

**Número USP:** 6445028

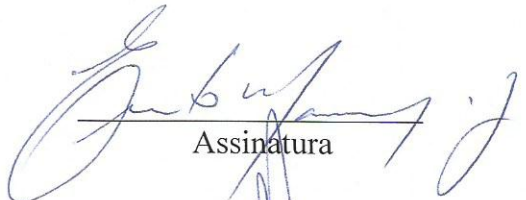
**Título:** Análise termoelástica da desmontagem da união eixo-cubo com interferência transversal utilizando o Método dos Elementos Finitos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para conclusão do curso de Engenharia Mecatrônica

### BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ernesto Massaroppi Junior (Orientador)

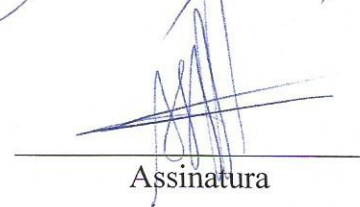
Nota atribuída: 8,5 ( OITO E CINCO )



Assinatura

Prof. Dr. Sérgio Henrique Evangelista

Nota atribuída: 8,5 ( OITO E CINCO )



Assinatura

Dr. Cristiano Bigonha Tibiriçá

Nota atribuída: 8,5 ( OITO E CINCO )



Assinatura

Média: 8,5 ( OITO E CINCO )

Resultado: APROVADO

Data: 06/12/2012

Aos meus pais, irmãs e namorada, com muito carinho, amor e gratidão, por todo o incentivo e incansável apoio dado em todos os momentos da minha vida, mesmo à distância. Obrigado por toda inspiração e ótimos exemplos.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Prof. Dr. Ernesto Massaroppi Junior, meu orientador, agradeço a paciência e a enorme inspiração que foram tão importantes para que este Trabalho de Conclusão de Curso pudesse ser concluído. Agradeço também pela atenção e apoio durante o processo de definição e orientação que contribuíram muito para meu crescimento científico e intelectual.

Ao Prof. Dr. Gherhardt Ribatski, agradeço pelos conselhos e sugestões referentes à área térmica, que foram muito importantes na etapa de análise térmica e especificação das condições necessárias à solução do problema.

Ao Prof. Dr. Daniel Varela Magalhães, que nos anos de convivência e orientação de Iniciação Científica muito me ensinou, contribuindo para meu desenvolvimento acadêmico e interesse pela pesquisa dentro da Universidade.

À Escola de Engenharia de São Carlos pelas condições e estruturas fornecidas para que este Trabalho pudesse ser concluído.

À Universidade de São Paulo pela ótima rede de professores, docentes e benefícios concedidos aos seus alunos.

“Se você quer ser bem sucedido, precisa ter dedicação total, buscar seu último limite e dar o melhor de si mesmo.”

**Ayrton Senna**

## RESUMO

MAGRI, R. **Análise termoelástica da desmontagem da união eixo-cubo com interferência transversal utilizando o Método dos Elementos Finitos.** Orientador: Ernesto Massaroppi Junior. 2012. Monografia (Graduação em Engenharia Mecatrônica). Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. São Carlos. 2012.

As análises termoelásticas das uniões eixo-cubo podem ser aplicadas a diversos tipos de cubos, como por exemplo, engrenagens, rotores, polias e luvas com ajustes interferentes. Conforme a geometria da peça montada no eixo, sua desmontagem pode não ser simples, como acontece com os rotores de bombas centrífugas. Devido à sua geometria complexa e por serem montados com interferência para suportar altos esforços solicitantes, sua desmontagem do eixo deve fornecer as condições necessárias, como calor e carga axial, para que seja possível retirar tal elemento sem riscar ou danificar quaisquer peças envolvidas. Neste trabalho foi utilizado o Método dos Elementos Finitos com auxílio do software ANSYS® para efetuar uma análise termoelástica transiente para se determinar as melhores condições de desmontagem do conjunto do problema proposto. Como resultado das simulações feitas, pôde-se traçar uma curva de temperaturas de aquecimento em função dos tempos de desmontagem, sendo possível se obter as condições para a desmontagem mais rápida do conjunto. Foram mostrados também nesse estudo os gradientes térmicos, deslocamentos nodais e tensões resultantes nas peças durante o processo de desmontagem. Portanto, foi possível determinar as melhores condições para desmontagem do conjunto e mostrar que o aquecimento uniforme das extremidades do disco é a maneira mais eficiente de se aplicar calor nesse processo.

**Palavras Chave:** União eixo-cubo. Método dos Elementos Finitos. Análise termoelástica. Transiente.

## ABSTRACT

MAGRI, R. **Thermoelastic Analysis for Disassembly of Hub and Shaft Interference Fit Connection Using the Finite Element Method.** Orientador: Ernesto Massaroppi Junior. 2012. Monografia (Graduação em Engenharia Mecatrônica). Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. São Carlos. 2012.

Thermoelastic analysis of hub and shaft connections may be applied to many types of hubs, e.g. gears, rotors, pulleys and sleeves with interference fit coupling. According to geometry of the part assembled in the shaft, your disassembling could be complex, such as in centrifugal pumps rotors disassembly. Due to complex geometry involved and interference fit coupling to support high torques and stresses the disassembly should be done carefully, providing the necessary amount of heat and preload to pull such element without scratching or damaging any part involved. The Finite Element Method with ANSYS® Software support was used in this work to perform a transient thermoelastic analysis to determine the best conditions for disassembly the set of the problem. As a result of simulations, it was possible to trace a curve of heating temperatures as a function of disassembly times, it being possible to obtain the conditions for faster disassembly of the set. Have also been shown in this study the thermal gradients involved, nodal displacements and resulting stresses on the parts during the disassembly process. Therefore, it was possible to determine the best conditions for the disassembly of the set and show that uniform heating of the ends of the disc is the more efficient way to apply heat in the process.

**Keywords:** Shaft and hub connection. Finite Element Method. Thermoelastic analysis. Transient.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Engrenagem montada a quente no eixo - ajuste forçado transversal. ....	17
Figura 2 – Danos causados em um eixo pela desmontagem errada do rotor. ....	22
Figura 3 – Geometria do problema proposto.....	22
Figura 4 – Desenho em corte do conjunto girante do problema proposto montado com suas respectivas dimensões. ....	23
Figura 5 – Afastamentos fundamentais entre o eixo e o furo.....	26
Figura 6 – Modos de troca de calor. Adaptado de INCROPERA e DEWITT (2012).....	27
Figura 7 – Elemento finito volumétrico da condução de calor em uma parede plana extensa. Adaptado de ÇENGEL (2009).....	28
Figura 8 – Elemento finito volumétrico da condução de calor unidimensional em um cilindro longo. Adaptado de ÇENGEL (2009).....	30
Figura 9 – Elemento finito volumétrico da condução tridimensional de calor em coordenadas retangulares. Adaptado de ÇENGEL (2009). ....	33
Figura 10 – Elemento finito volumétrico da condução de calor em coordenadas cilíndricas. Adaptado de ÇENGEL (2009). ....	34
Figura 11 – Transferência de calor de uma camada de fluido de espessura $L$ e diferença de temperatura $\Delta T$ . Adaptado de ÇENGEL (2009).....	38
Figura 12 – Desenvolvimento da camada limite hidrodinâmica. Adaptado de ÇENGEL (2009).....	40
Figura 13 – Elemento infinitesimal em coordenadas polares. Adaptado de TIMOSHENKO (1980).....	46
Figura 14 – Tubo submetido a pressões internas e externas. Retirado de PROENÇA (2003).....	48
Figura 15 – Elemento infinitesimal do tubo em coordenadas polares. Retirado de PROENÇA (2003). ....	49
Figura 16 – Elemento infinitesimal em equilíbrio. Retirado de PROENÇA (2003). ....	50
Figura 17 – Rede de elementos finitos no software ANSYS®. ....	59
Figura 18 – Tensões de Von-Mises nodais sendo exibidas no ANSYS® para um análise. ....	61
Figura 19 – Gráfico da deformação em função da rotação. ....	63
Figura 20 – Modelo geométrico utilizado. ....	66
Figura 21 – Modelo construído no ANSYS® para solução do problema proposto. ....	66

Figura 22 – Entradas rampa e degrau, respectivamente. Adaptado de Chapter 16: Convergence of Nonlinear Analysis (2012).....	69
Figura 23 – Comparação dos gradientes térmicos nas peças no tempo 2820 s resultantes utilizando as propriedades de um óleo de motor real, à esquerda, e as propriedades da película modelada, à direita. ....	73
Figura 24 – Comparação dos deslocamentos nodais nas peças no tempo 2820 s resultantes utilizando as propriedades de um óleo de motor real, à esquerda, e as propriedades da película modelada, à direita. ....	73
Figura 25 – Tempos de aquecimento e desmontagem. ....	76
Figura 26 – Gradiente de temperaturas no interior das peças no momento da desmontagem.....	77
Figura 27 – Gradiente de temperaturas na região de interface entre o eixo e o cubo do disco no momento da desmontagem. ....	77
Figura 28 – Deslocamentos nodais no momento da desmontagem. ....	78
Figura 29 – Deslocamentos nodais na região de interface entre o eixo e o cubo do disco no momento da desmontagem. ....	78
Figura 30 – Tensões de Von Mises das peças no momento da desmontagem. ....	79
Figura 31 – Tensões de Von Mises na região de interface entre o eixo e o cubo no momento da desmontagem.....	79
Figura 32 – Folgas radiais calculadas nos nós da interface entre o diâmetro externo do eixo e o diâmetro interno do disco em função do tempo. ....	80

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades físicas do aço A276. Adaptado de ROLLED ALLOYS (2009).....	24
Tabela 2 – Propriedades físicas do aço A890. Adaptado de STEEL FOUNDER’S SOCIETY OF AMERICA (2004). .....	24
Tabela 3 – Ajustes e tolerâncias dos elementos usados na união eixo-cubo.....	26
Tabela 4 – Emissividade de aços inoxidáveis em função da temperatura absoluta. Adaptado de ÇENGEL (2009). .....	45
Tabela 5 – Propriedades da película de óleo modelada na simulação em elementos finitos. Adaptado de ÇENGEL (2009).....	72
Tabela 6 – Comparativo entre as propriedades térmicas de um óleo real e da película modelada no estudo. Adaptado de ÇENGEL (2009).....	72
Tabela 7 – Tempos de Desmontagem Calculados. ....	75

## LISTA DE SÍMBOLOS

$E$	módulo de elasticidade, energia de radiação emitida
$\nu$	coeficiente de Poisson, viscosidade cinemática, deslocamento radial
$\rho$	densidade
$C_p, c$	calor específico
$k$	condutividade térmica
$\alpha$	coeficiente de dilatação térmica linear, difusividade térmica
$U$	interferência
$A$	área
$T$	temperatura
$q'', \dot{q}$	fluxo de calor
$\dot{Q}$	taxa de condução de calor
$t$	tempo
$\dot{E}$	taxa de geração de calor
$\dot{e}$	taxa de geração de calor por unidade de volume
$L$	comprimento
$r$	raio
$m$	massa
$h$	coeficiente de transferência de calor por convecção
$\mu$	viscosidade dinâmica
$V$	velocidade
$Nu$	número de Nusselt
$Ma$	número de Mach
$u$	espessura da camada limite
$Pr$	número de Prandtl
$Re$	número de Reynolds
$Gr$	número de Grashof
$\beta$	coeficiente de expansão volumétrica
$g$	aceleração da gravidade
$Ra$	número de Rayleigh
$\sigma$	constante de Stefan-Boltzmann, tensão normal

$\epsilon$	emissividade
$\theta$	ângulo
$\tau$	tensão cisalhante
$R$	força de massa por unidade de volume na direção radial
$S$	força de massa por unidade de volume na direção tangencial
$P$	pressão
$\epsilon$	deformação
$\gamma$	distorção angular
$\omega$	rotação

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	17
1.1	Contexto.....	17
1.2	Motivação .....	18
1.3	Objetivos.....	18
1.4	Organização .....	19
2	DESCRIÇÃO DO PROBLEMA PROPOSTO .....	21
2.1	Exemplo Real.....	21
2.2	Problema Proposto .....	22
2.3	Geometria .....	23
2.4	Materiais .....	24
2.5	Tolerâncias E Ajustes .....	25
3	TRANSFERÊNCIA DE CALOR .....	27
3.1	Mecanismos De Transferência De Calor.....	27
3.2	Condução .....	27
3.2.1	Equação Da Condução De Calor Unidimensional Da Parede Plana Extensa .....	28
3.2.2	Equação De Condução De Calor Unidimensional Em Um Cilindro Longo .....	30
3.2.3	Equação Geral Tridimensional Da Condução De Calor Em Coordenadas Retangulares.....	32
3.2.4	Equação Geral Tridimensional Da Condução De Calor Em Coordenadas Cilíndricas.....	34
3.2.5	Condições Iniciais E De Contorno .....	35
3.3	Convecção.....	36
3.3.1	Fundamentos Da Convecção .....	36
3.3.2	Lei De Newton Do Resfriamento.....	37
3.3.3	Número De Nusselt .....	38

3.3.4	Classificação Dos Escoamentos.....	39
3.3.5	Camada Limite Hidrodinâmica.....	40
3.3.6	Camada Limite Térmica.....	41
3.3.7	Número De Prandtl.....	41
3.3.8	Número De Reynolds.....	41
3.3.9	Número De Grashof.....	41
3.3.10	Número De Rayleigh.....	42
3.4	Radiação.....	43
3.4.1	Corpo Negro.....	43
3.4.2	Emissividade.....	43
3.4.3	Taxa De Transferência De Calor Por Radiação.....	45
3.5	Considerações Finais.....	45
4	ELASTICIDADE.....	46
4.1	Considerações Iniciais.....	46
4.2	Equações Gerais Em Coordenadas Polares.....	46
4.3	Distribuição de Tensões Simétricas em Relação A Um Eixo.....	47
4.4	Discos Giratórios.....	52
4.5	Considerações Finais.....	54
5	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	55
5.1	Breve Histórico.....	55
5.2	Método De Rayleigh-Ritz.....	55
5.3	Método De Galerkin.....	58
5.4	Método Dos Elementos Finitos.....	59
5.5	Considerações Finais.....	61
6	METODOLOGIA.....	62
6.1	Condição De Desmontagem.....	62
6.2	Discos Giratórios.....	63

6.3	Aquecimento Do Disco .....	64
6.3.1	Mecanismos De Transferência De Calor.....	67
6.3.2	Condução .....	67
6.3.3	Convecção.....	67
6.3.4	Radiação .....	67
6.3.5	Elementos Finitos.....	67
6.3.6	Aplicação Do Carregamento Térmico.....	69
6.3.7	Condições De Contorno.....	70
6.4	Modelagem Da Película De Óleo.....	70
7	RESULTADOS.....	74
8	CONCLUSÕES .....	81
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	83

# 1 INTRODUÇÃO

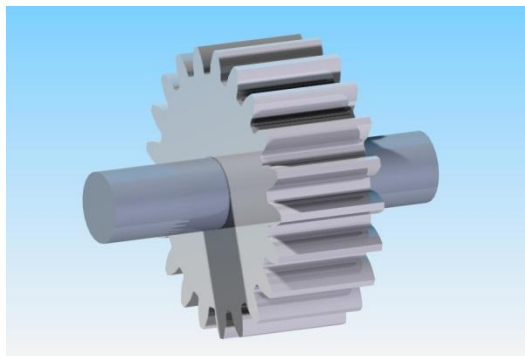
## 1.1 Contexto

O eixo é um elemento rotativo, geralmente com seção transversal circular, utilizado na transmissão de potência ou movimento. Usualmente estão presentes nos eixos, dependendo de sua aplicação, elementos como engrenagens, polias, rotores, volantes e luvas que são acoplados por meio de uma união do cubo do elemento de máquina com o eixo.

Tem-se, para tanto, diversos tipos de uniões eixo-cubo como, por exemplo, as encaixadas, encaixadas sob tensão, por atrito, soldadas por difusão sobre o eixo e soldadas por fusão (NIEMANN, 1971). As tipologias mais comuns são as uniões por atrito e as encaixadas. Nas uniões por atrito utiliza-se o ajuste com interferência ou assento cônico. Nas uniões encaixadas é comum usar-se pino transversal, chaveta plana, ranhuras múltiplas por dentes ou perfil K (NIEMANN, 1971).

Para uso neste trabalho, as uniões eixo-cubo estudadas são as por atrito, mais especificamente, ajustes forçados transversais obtidos pela dilatação térmica do cubo ou pela introdução com contração do eixo por meio de gelo seco ou ar líquido. Os quais são adequados para momentos de torção de sentido alternante e com choques, cubos com montagem sobre o eixo e cubos curtos submetidos a grandes momentos de torção.

A figura 1 ilustra a união do cubo da engrenagem com o eixo, montado utilizando um ajuste interferente.



**Figura 1 – Engrenagem montada a quente no eixo - ajuste forçado transversal.**

Para se efetuar a análise termoelástica da união cubo-eixo, será utilizado o método dos elementos finitos com auxílio do software ANSYS®. A partir dos resultados obtidos será possível verificar a viabilidade e quantificar de maneira mais exata as variáveis reais envolvidas em determinados processos de montagem e desmontagem da união eixo-cubo em aplicações industriais.

## **1.2 Motivação**

Foi identificado um problema real existente na indústria mecânica que causa grandes perdas financeiras. Este problema está relacionado com a desmontagem feita de forma inadequada das uniões eixo-cubo que podem danificar as peças envolvidas, ocasionando gastos com reparos e compras de novas peças. O problema identificado ainda gera outros gastos indiretos à empresa resultantes do pagamento de multas por atraso na entrega de projetos, utilização extra de recursos humanos e perda de tempo.

Na tentativa de solucionar de forma definitiva o desafio encontrado e causar proporcionar grandes benefícios às empresas e instituições com situações semelhantes é que esse Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo.

É de grande valia os trabalhos acadêmicos vinculados à solução de problemas reais existentes na indústria e a riqueza de conhecimento que pode trazer aos envolvidos na tentativa de solucionar tal problema. Pode-se ainda citar as possibilidades de parcerias privadas com a Universidade em tal solução e o desenvolvimento de posteriores estudos e dissertação de Mestrado visto a complexidade do desafio encontrado, o qual envolve áreas do conhecimento como Térmica, Estrutural e Elementos Finitos.

## **1.3 Objetivos**

Este trabalho visa analisar a desmontagem da união eixo-cubo com interferência transversal e determinar quais as condições necessárias para que isso ocorra sem causar danos às peças.

No processo de solução do problema proposto, primeiramente, deve-se verificar as forças de retenção envolvidas na união eixo-cubo e a folga radial necessária para desmontagem do conjunto que não cause danos às peças.

No domínio elástico, um dos objetivos desse trabalho é analisar a possibilidade e viabilidade de desmontagem aplicando uma velocidade angular no conjunto como forma alternativa de solução ao aquecimento do disco para desmontagem da união eixo-cubo.

O objetivo principal é efetuar uma análise termoelástica da desmontagem da união eixo-cubo com interferência transversal utilizando o Método dos Elementos Finitos. A partir dos resultados obtidos na análise será possível determinar as condições necessárias de desmontagem e a viabilidade das mesmas para uso em processos de desmontagem da união eixo-cubo na indústria.

#### **1.4 Organização**

Essa seção trata da forma como esse Trabalho de Conclusão de Curso está estruturado.

No Capítulo 2 é apresentado o problema proposto neste Trabalho. Primeiramente é dado um exemplo real que ocorre com rotores de bombas centrífugas na indústria e, feita essa abordagem, define-se então o problema proposto e suas características, como a geometria, os materiais que compõe as peças e as tolerâncias e ajustes envolvidos.

Os Capítulos 3, 4 e 5 dão uma introdução teórica sobre os conhecimentos necessários para o desenvolvimento de uma solução para o problema proposto. No Capítulo 3 é feita uma introdução à transferência de calor e seus principais mecanismos de transferência envolvidos no processo de desmontagem estudado, tais como condução, convecção e radiação. O Capítulo 4 trata de alguns conceitos envolvidos na Teoria da Elasticidade e que são relevantes para análise do problema dado, como as equações gerais elásticas, discos giratórios e forças envolvidas no ajuste interferente. O Método dos Elementos Finitos é introduzido no Capítulo 5, em que se apresenta um breve histórico e alguns métodos numéricos que precederam o Método dos Elementos Finitos propriamente dito.

O Capítulo 6 trata da metodologia adotada para solução do problema. É definida a condição necessária para desmontagem do conjunto e são discutidas algumas possibilidades de solução, tais como aplicar uma velocidade angular no conjunto ou aquecer o disco. Neste

capítulo também são apresentadas as hipóteses utilizadas na modelagem do sistema, como os carregamentos foram aplicados e quais as condições de contorno envolvidas.

O Capítulo 7 apresenta dados detalhados da solução do problema utilizando-se o ANSYS®. As figuras nesse capítulo apresentam deslocamentos na direção radial, temperatura e tensões nodais traçados em função do tempo.

As conclusões sobre o estudo realizado são dadas no Capítulo 8, que apresenta uma síntese do que foi feito no Trabalho, principais desafios enfrentados, resultados e as conclusões propriamente ditas.

## 2 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA PROPOSTO

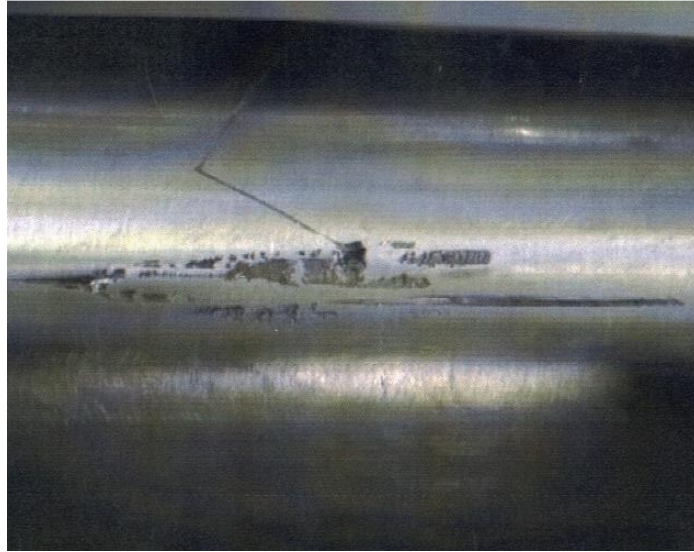
### 2.1 Exemplo Real

Determinadas máquinas ou elementos de máquinas precisam ser desmontados para diversas finalidades diferentes, entre elas: inspeção de elementos após operação ou testes em produtos, reparos, manutenção e reaproveitamento de peças. Na Indústria Metalúrgica / Mecânica, essa desmontagem de elementos de máquina do eixo pode se tornar muito complicada devido às mais diversas geometrias, condições e dimensões das peças.

Um exemplo disso é a desmontagem dos rotores em bombas centrífugas. Uma fábrica de bombas durante o processo de montagem efetua o acoplamento dos rotores no eixo por meio de ajuste forçado transversal obtido pela dilatação térmica do cubo e posterior inserção no eixo ou pela introdução com contração do eixo por meio de gelo seco ou ar líquido. Além disso, podem ser usadas também chavetas planas juntamente com o ajuste transversal, pois o eixo e os cubos estão submetidos a grandes momentos de torção.

Após a montagem da bomba, tem-se a etapa de testes. Nessa fase testa-se a bomba nas condições de funcionamento por um tempo especificado e analisa-se o desempenho alcançado. Quando os testes são finalizados deve-se desmontar as bombas para que estas passem por uma inspeção minuciosa dos elementos internos, incluindo carcaça, mancais, anéis de desgaste, eixos, rotores e difusores.

Uma grande dificuldade que existe nos processos de desmontagem de uniões eixo-cubo com ajuste forçado transversal utilizados atualmente é que não se sabe ao certo a quantidade de calor ou a temperatura mais adequada para uso no processo, ocasionando então, danos ao eixo ou aos rotores. Os danos causados nesses elementos de máquinas impactam não somente no custo final do projeto, mas também atrasam a entrega do produto para o cliente final. A Figura 2 mostra os danos causados em um eixo pela desmontagem errada do conjunto.

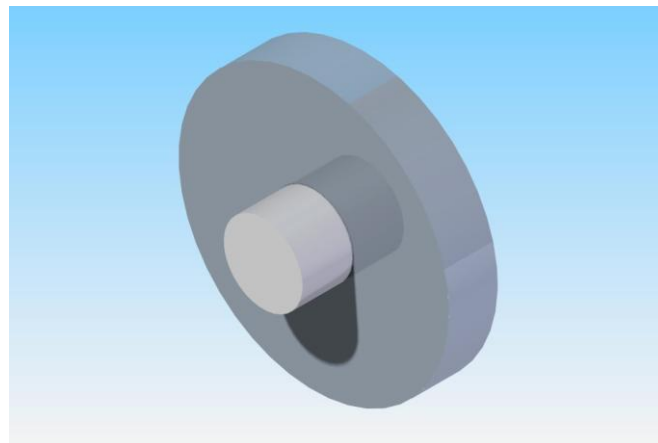


**Figura 2 – Danos causados em um eixo pela desmontagem errada do rotor.**

O processo de desmontagem dos rotores de bombas centrífugas ilustra um caso particular do problema proposto nesse Trabalho de Conclusão de Curso. Para fins didáticos e na tentativa de desenvolver uma metodologia que resolva o problema proposto de uma forma mais genérica, foi adotada uma simplificação das condições reais do problema para aplicar posteriormente para inúmeros casos específicos, incluindo o exemplo citado anteriormente.

## **2.2 Problema Proposto**

O problema proposto consiste na desmontagem da união eixo-cubo por interferência transversal causada pelo aquecimento do cubo e sua posterior inserção no eixo. A Figura 3 ilustra a geometria dos elementos envolvidos.



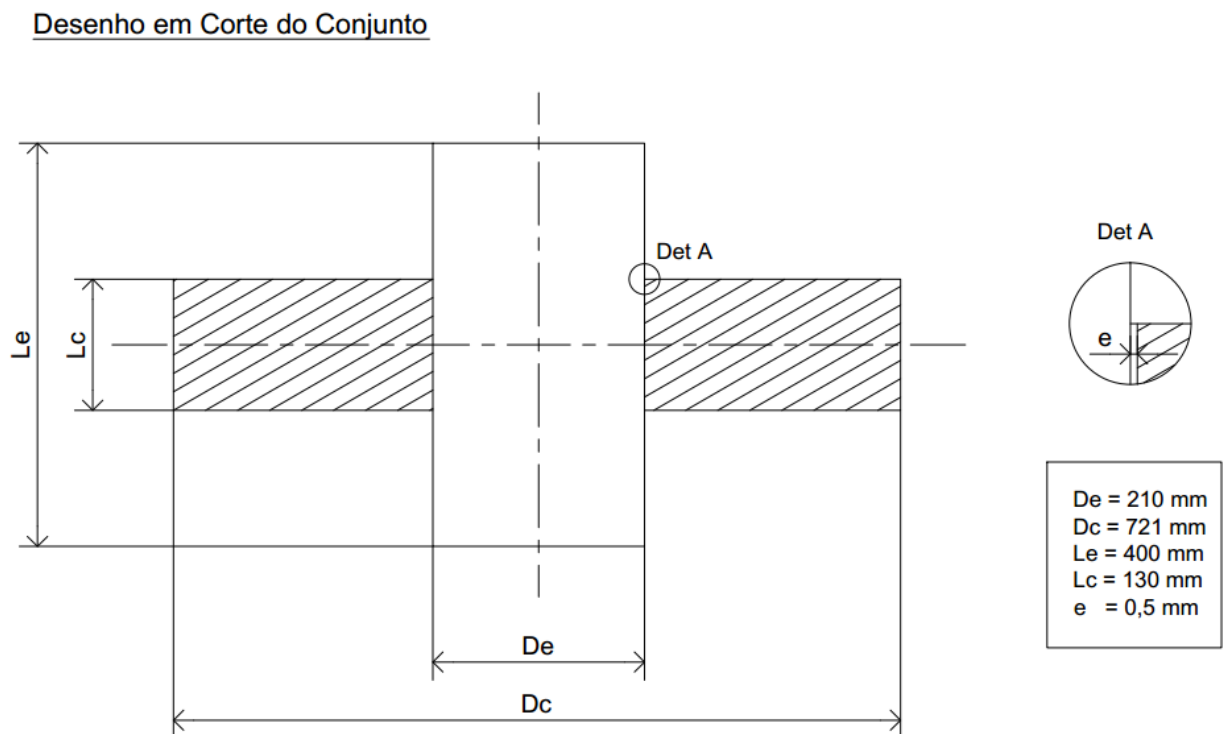
**Figura 3 – Geometria do problema proposto.**

O principal desafio no problema proposto é determinar se é possível desmontar a união eixo-cubo aplicando-se calor nas extremidades do disco. No caso de ser possível, deve-se determinar as condições para que isso ocorra.

Para se efetuar a montagem da união eixo-cubo proposta, primeiramente aquece-se o disco em uma estufa elétrica a uma temperatura de aproximadamente 120 °C. Na região do colo do eixo em que o disco será montado por interferência é aplicado uma graxa lubrificante com a finalidade de reduzir atrito, evitar que a peça fique presa, e impedir a condução térmica do cubo para o eixo e vice-versa. Quando o disco entra em equilíbrio térmico com a estufa e encontra-se a 120 °C deve ser imediatamente montado no eixo que se encontra a temperatura ambiente de 27 °C. Após o resfriamento do conjunto girante montado até a temperatura ambiente tem-se a união eixo-cubo por ajuste forçado transversal.

### 2.3 Geometria

A Figura 4 mostra o desenho em corte do conjunto girante do problema proposto montado com suas respectivas dimensões.



**Figura 4 – Desenho em corte do conjunto girante do problema proposto montado com suas respectivas dimensões.**

## 2.4 Materiais

De acordo com o material dos elementos de máquinas envolvidos na união eixo-cubo, torna-se necessária uma análise em elementos finitos para verificar as condições necessárias para montagem/desmontagem dessa união.

Nesse trabalho serão abordadas peças constituídas por ligas metálicas de aços inoxidáveis super duplex e duplex, como o ASTM A276 e ASTM A890 Grau 3A, materiais extremamente resistentes à corrosão e utilizados em ambientes severos.

O eixo é feito de aço inoxidável super duplex ASTM A276, UNS S32760, sendo as propriedades físicas desse material listadas na Tabela 1.

**Tabela 1 – Propriedades físicas do aço A276. Adaptado de ROLLED ALLOYS (2009).**

Eixo - ASTM A276 S32760 (Para T=300K)			
Propriedade	Símbolo	Valor	Unidade
Módulo de Elasticidade	E	200,00	GPa
Coeficiente de Poisson	$\nu$	0,32	-
Densidade	$\rho$	7840	kg / m <sup>3</sup>
Calor Específico	Cp	482,00	J / kg K
Condutividade Térmica	k	14,40	W / m K
Coeficiente de Dilatação Térmica Linear	$\alpha$	1,28E-05	1 / K

O disco é feito de aço inoxidável duplex ASTM A890 Grade 3A, UNS J93371. As propriedades físicas desse material estão listadas na Tabela 2.

**Tabela 2 – Propriedades físicas do aço A890. Adaptado de STEEL FOUNDER'S SOCIETY OF AMERICA (2004).**

Disco - ASTM A890 Grade 3A J93371 (Para T=300K)			
Propriedade	Símbolo	Valor	Unidade
Módulo de Elasticidade	E	199,95	GPa
Coeficiente de Poisson	$\nu$	0,32	-
Densidade	$\rho$	7750	kg / m <sup>3</sup>
Calor Específico	Cp	460,53	J / kg K
Condutividade Térmica	k	15,23	W / m K
Coeficiente de Dilatação Térmica Linear	$\alpha$	1,13E-05	1 / K

## 2.5 Tolerâncias E Ajustes

Para se garantir a intercambiabilidade entre peças é fundamental que se utilize um processo de fabricação que garanta a confecção das peças com a mesma precisão. Por definição, a precisão consiste no grau de conformidade entre a dimensão real e a nominal do elemento.

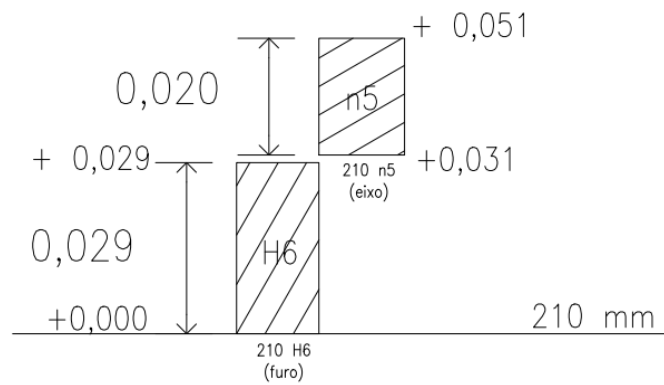
Na fabricação de elementos de máquina a probabilidade de se conseguir uma precisão absoluta nas dimensões das peças, devido ao fato de existirem certas inexatidões nas máquinas, dispositivos e instrumentos de medição utilizados nos processos de fabricação, é praticamente nula. Como consequência, não se consegue obter dimensões que coincidam precisamente com as dimensões nominais nos desenhos das peças. Os elementos fabricados então apresentam um desvio, uma inexatidão nas dimensões em relação à dimensão nominal (ABNT, 1995).

Portanto, para que duas peças sejam intercambiáveis, faz-se necessário a utilização de tolerâncias e ajustes dimensionais que garantam que as dimensões limites das peças estejam todas dentro de um grau de precisão previamente estabelecido.

A união eixo-cubo proposta neste trabalho apresenta as seguintes tolerâncias e ajustes, todas dadas em milímetros:

- Tolerância dimensional do furo:  $\varnothing 210$  H6.
- Tolerância dimensional do eixo:  $\varnothing 210$  n5.
- Ajuste: com interferência.

A Figura 5 a seguir mostra as posições dos afastamentos fundamentais entre o eixo e o furo utilizados neste trabalho (diâmetro nominal = 210 mm).



$$u_{\max} = 0,051 \text{ mm}$$

$$u_{\min} = 0,002 \text{ mm}$$

**Figura 5 – Afastamentos fundamentais entre o eixo e o furo.**

A Tabela 3 abaixo mostra as interferências máxima e mínima da união.

**Tabela 3 – Ajustes e tolerâncias dos elementos usados na união eixo-cubo.**

Medida de Ajuste	Tolerâncias	Interferência Máxima	Interferência Mínima
$\varnothing 210 H6$	0; +0,029	0,051	0,002
$\varnothing 210 n5$	+0,031; +0,051		

\*\*\*Todas as dimensões encontram-se em milímetros.

### 3 TRANSFERÊNCIA DE CALOR

#### 3.1 Mecanismos De Transferência De Calor

O calor pode ser transferido por três diferentes modos: condução, convecção e radiação. Todos os modos de transferência de calor só ocorrem se existir uma diferença de temperatura e essa transferência acontece do corpo com maior temperatura para o de menor temperatura. A Figura 6 ilustra os modos de troca de calor.

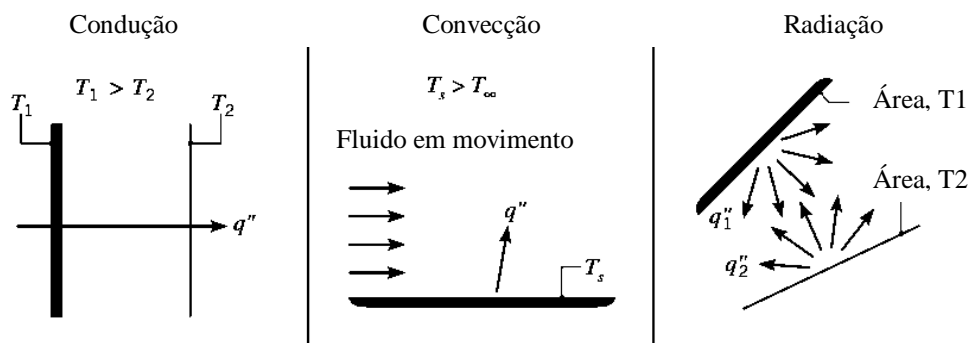


Figura 6 – Modos de troca de calor. Adaptado de INCROPERA e DEWITT (2012).

Neste capítulo serão citados mecanismos de transferência de calor que são relevantes para o desenvolvimento deste trabalho.

#### 3.2 Condução

A Condução é a transferência de energia das partículas mais energéticas de uma substância para as vizinhas menos energéticas como resultado da integração entre elas. A condução pode ocorrer em sólidos, líquidos e gases (ÇENGEL, 2009).

Em líquidos e gases a condução acontece devido às colisões e difusão das moléculas em seus movimentos aleatórios. Nos sólidos é devido à combinação das vibrações das moléculas.

Na transferência de calor os problemas são geralmente classificados como permanentes ou transientes. O termo permanente implica que não há variação em nenhum

ponto no meio ao longo do tempo, enquanto transiente sugere uma variação ao longo do tempo ou dependência do tempo.

A taxa de condução de calor através de um meio depende de alguns fatores como:

- Geometria
- Propriedades do material
- Diferença de temperatura

### 3.2.1 Equação Da Condução De Calor Unidimensional Da Parede Plana Extensa

Considere um elemento fino de espessura  $\Delta x$  em uma parede plana extensa, como mostra a Figura 7. Sendo  $\rho$  a densidade da parede,  $c$  o calor específico e  $A$  a área da parede normal na direção da transferência de calor (ÇENGEL, 2009). O balanço de energia do elemento finito durante um pequeno intervalo de tempo  $\Delta t$  é expresso por meio da Equação 1 abaixo.

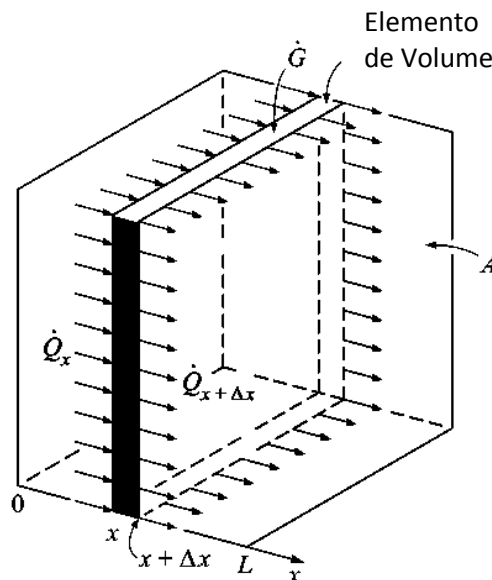


Figura 7 – Elemento finito volumétrico da condução de calor em uma parede plana extensa. Adaptado de ÇENGEL (2009).

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x} + \dot{E}_{ger,elem} = \frac{\Delta E_{elem}}{\Delta t} \quad (1)$$

Em que:

- $\dot{Q}_x$  é a taxa de condução de calor na direção  $x$  [W].
- $\dot{Q}_{x+\Delta x}$  é a taxa de condução de calor em  $x + \Delta x$  [W].
- $\dot{E}_{ger,elem}$  é a taxa de geração de calor dentro do elemento [W].
- $\frac{\Delta E_{elem}}{\Delta t}$  é a taxa de alteração da quantidade de energia do elemento [W].

A alteração da quantidade de energia do elemento e a taxa de calor gerado dentro do elemento são dados pelas equações 2 e 3, respectivamente.

$$\Delta E_{elem} = E_{t+\Delta t} - E_t = mc(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho c A \Delta x (T_{t+\Delta t} - T_t) \quad (2)$$

$$\dot{E}_{ger,elem} = \dot{e}_{ger} V_{elem} = \dot{e}_{ger} A \Delta x \quad (3)$$

Substituindo as Equações 2 e 3 na Equação 3, obtém-se a Equação 4:

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x} + \dot{e}_{ger} A \Delta x = \frac{\rho c A \Delta x (T_{t+\Delta t} - T_t)}{\Delta x} \quad (4)$$

Dividindo a Equação 4 por  $A \Delta x$  e no limite, com  $\Delta x \rightarrow 0$  e  $\Delta t \rightarrow 0$ , tem-se a Equação 5.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{e}_{ger} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5)$$

A condutividade térmica  $k$  de qualquer material depende da temperatura  $T$ , e, portanto, da direção  $x$ , mostrada na Figura 7. Assim pode-se considerar que a condutividade térmica permanece constante em determinado valor médio, possibilitando que a Equação 5 seja simplificada, como mostra a Equação 6.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{e}_{ger}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6)$$

Em que  $\alpha$  é a difusividade térmica do material dada pela Equação 7. Sendo a difusividade térmica uma representação da medida de quão rápido o calor se propaga através de determinado material.

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} \quad (7)$$

Desse modo, as equações diferenciais acima se reduzem às seguintes formas:

- Regime permanente: nesse caso, a parte transiente  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  e tem-se a equação 8:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{e}_{ger}}{k} = 0 \quad (8)$$

- Regime permanente sem geração de calor: a parcela  $\dot{e}_{ger} = 0$  e tem-se a Equação 9:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (9)$$

- Transiente: utiliza-se a Equação 6 dada acima.
- Transiente sem geração de calor: a parcela  $\dot{e}_{ger} = 0$  e então se tem a Equação 10:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (10)$$

### 3.2.2 Equação De Condução De Calor Unidimensional Em Um Cilindro Longo

Inicialmente é preciso considerar um cilindro longo com extensão infinita e a condução de calor ocorre somente na direção radial. Define-se então uma camada fina de espessura  $\Delta r$  de um cilindro longo, como mostra a Figura 8.

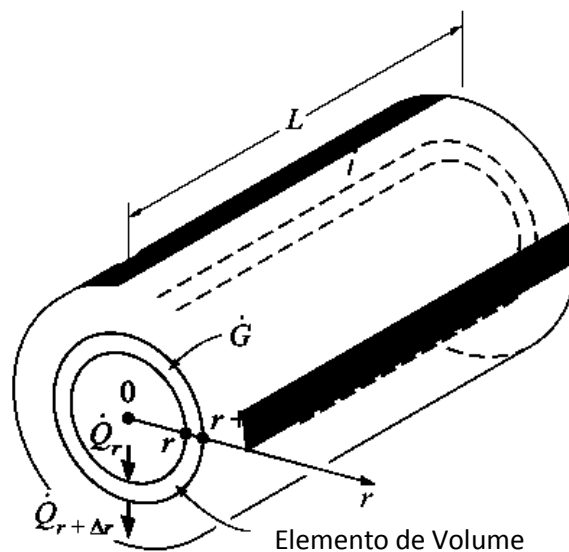


Figura 8 – Elemento finito volumétrico da condução de calor unidimensional em um cilindro longo. Adaptado de ÇENGEL (2009).

Seja  $\rho$  a densidade do cilindro,  $c$  o calor específico e  $L$  o comprimento. A área do cilindro normal na direção da transferência de calor em qualquer ponto é  $A = 2\pi rL$ , sendo  $r$  o raio nesta posição (ÇENGEL, 2009). Efetua-se um balanço de energia nesse elemento finito e obtém-se a seguinte Equação 11:

$$\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r} + \dot{E}_{ger,elem} = \frac{\Delta E_{elem}}{\Delta t} \quad (11)$$

Em que:

- $\dot{Q}_r$  é a taxa de condução de calor em  $r$  [W].
- $\dot{Q}_{r+\Delta r}$  é a taxa de condução de calor em  $r + \Delta r$  [W].
- $\dot{E}_{ger,elem}$  é a taxa de geração de calor dentro do elemento [W].
- $\frac{\Delta E_{elem}}{\Delta t}$  é a taxa de alteração da quantidade de energia do elemento [W].

Com as Equações 12 e 13, respectivamente, pode-se expressar a alteração da quantidade de energia do elemento e a taxa de calor gerado dentro do elemento.

$$\Delta E_{elem} = E_{t+\Delta t} - E_t = mc(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho c A \Delta r (T_{t+\Delta t} - T_t) \quad (12)$$

$$\dot{E}_{ger,elem} = \dot{e}_{ger} V_{elem} = \dot{e}_{ger} A \Delta r \quad (13)$$

Substituindo as Equações 12 e 13 na 11, obtém-se a Equação 14:

$$\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r} + \dot{e}_{ger} A \Delta r = \frac{\rho c A \Delta r (T_{t+\Delta t} - T_t)}{\Delta t} \quad (14)$$

Dividindo a Equação 14 por  $A \Delta r$  e no limite, com  $\Delta r \rightarrow 0$  e  $\Delta t \rightarrow 0$ , fazendo  $A = 2\pi rL$ , obtém-se a Equação 15, que é a equação de condução de calor transiente unidimensional.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{e}_{ger} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (15)$$

Para a hipótese de condutividade térmica considerada constante, reduz-se a Equação 15 na Equação 16:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{e}_{ger}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (16)$$

Em que  $\alpha$  é a difusividade térmica do material, dada pela Equação 7.

Desse modo, as equações diferenciais acima se reduzem às seguintes formas:

- Regime permanente: a parte transiente  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  e tem-se a Equação 17:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{e}_{ger}}{k} = 0 \quad (17)$$

- Regime permanente sem geração de calor: a parcela  $\dot{e}_{ger} = 0$  e então se obtém a Equação 18:

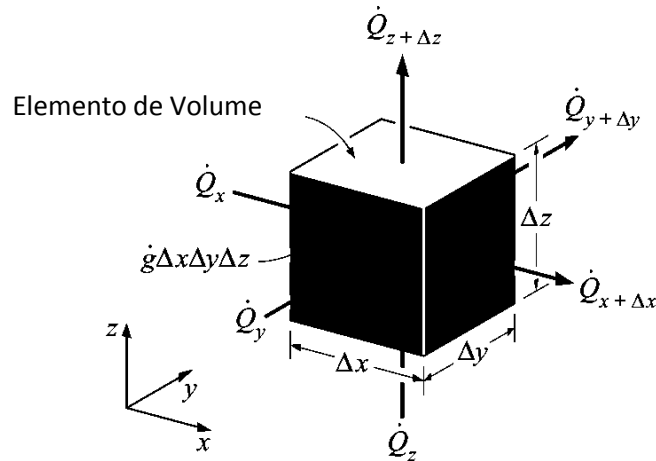
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (18)$$

- Transiente: utiliza-se a Equação 16 dada anteriormente.
- Transiente sem geração de calor: a parcela  $\dot{e}_{ger} = 0$  e então se tem a Equação 19:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (19)$$

### 3.2.3 Equação Geral Tridimensional Da Condução De Calor Em Coordenadas Retangulares

Apesar da maior parte dos problemas práticos de transferência de calor poderem ser aproximados e resolvidos utilizando-se as equações da condução de calor unidirecional, em alguns casos, faz-se necessário considerar a transferência de calor em várias direções, sendo assim, multidimensional (ÇENGEL, 2009).



**Figura 9 – Elemento finito volumétrico da condução tridimensional de calor em coordenadas retangulares. Adaptado de ÇENGEL (2009).**

As equações gerais da condução de calor tridimensional em coordenadas retangulares são deduzidas de maneira análoga às equações de condução de calor unidimensionais.

Para se efetuar o balanço de energia em um elemento infinitesimal de comprimento  $\Delta x$ , largura  $\Delta y$  e altura  $\Delta z$ , conforme mostra a Figura 9, deve-se considerar o volume do elemento infinitesimal  $V_{elem} = \Delta x \Delta y \Delta z$ , as áreas de transferência de calor no elemento para a condução de calor nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  são  $A_x = \Delta y \Delta z$ ,  $A_y = \Delta x \Delta z$  e  $A_z = \Delta x \Delta y$ , respectivamente, e tomando o limite com  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  e  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtém-se a Equação 20, que representa a equação transiente geral em coordenadas retangulares:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{e}_{ger} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (20)$$

Adotando-se uma condutividade térmica constante, a Equação 20 é reduzida para a Equação 21, em que  $\alpha$  é a difusividade térmica do material:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{e}_{ger}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (21)$$

As equações diferenciais dadas se reduzem então às seguintes formas:

- Regime permanente: também chamada de equação de Poisson, dada pela Equação 22.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{e}_{ger}}{k} = 0 \quad (22)$$

- Regime Permanente sem geração de calor: também chamada de equação de Laplace, dada pela Equação 23.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (23)$$

- Transiente: equação de Fourier-Biot, dada anteriormente pela Equação 21.
- Transiente sem geração de calor: equação de difusão, dada pela Equação 24.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (24)$$

### 3.2.4 Equação Geral Tridimensional Da Condução De Calor Em Coordenadas Cilíndricas

A equação geral da condução de calor em coordenadas cilíndricas é obtida por meio do balanço de energia de um elemento volumétrico infinitesimal em coordenadas cilíndricas (ÇENGEL, 2009), como mostra a Figura 10.

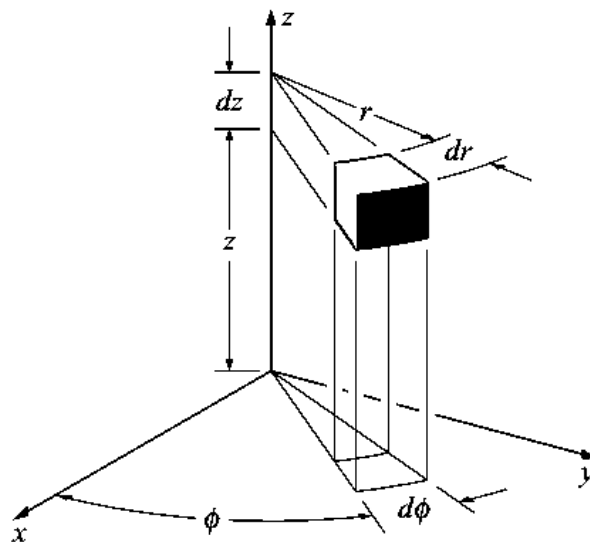


Figura 10 – Elemento finito volumétrico da condução de calor em coordenadas cilíndricas. Adaptado de ÇENGEL (2009).

A equação geral da condução de calor em coordenadas cilíndricas é dada pela Equação 25.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{e}_{ger} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (25)$$

### 3.2.5 Condições Iniciais E De Contorno

As expressões matemáticas das condições térmicas nas fronteiras são chamadas de condições de contorno. Para se resolver essas equações diferenciais é necessário especificar algumas condições para que, forçando a solução a satisfazer estas condições em pontos específicos, obtenham-se valores únicos para as constantes e, portanto, uma solução única (ÇENGEL, 2009).

Desse modo, para descrever completamente o problema de transferência de calor, devem ser fornecidas duas condições de contorno para cada direção do sistema de coordenadas na qual a transferência de calor é significativa. Assim, para problemas de condução térmica unidirecionais, é preciso especificar duas condições de contorno. Para problemas bidirecionais, quatro, e para problemas tridimensionais, seis condições de contorno.

A temperatura de superfícies expostas geralmente podem ser medidas de maneira simples e direta, sendo assim, uma forma muito fácil de especificar condições térmicas de contorno para uma superfície é medir sua temperatura.

Outra forma de se especificar condições de contorno é conhecendo o fluxo de calor que atravessa a superfície, sendo possível utilizar esse valor como condição de contorno. O fluxo de calor é expresso pela Lei de Fourier, dado pela Equação 26.

$$\dot{q} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (26)$$

Em que o sinal do fluxo de calor é determinado por inspeção: positivo se o fluxo de calor está no sentido positivo do eixo da coordenada e negativo se está no sentido oposto.

No caso de fronteiras isoladas termicamente, a transferência de calor ainda continua a acontecer, entretanto, o isolamento reduz drasticamente essa transferência. Sendo assim, pode-se considerar como nula a transferência de calor por uma superfície bem isolada já que o isolamento reduz a transferência de calor para níveis insignificantes. Portanto, uma superfície bem isolada pode ser modelada como uma superfície com fluxo de calor nulo.

### 3.3 Convecção

#### 3.3.1 Fundamentos Da Convecção

Condução e convecção são semelhantes no aspecto de ambos requererem a presença de um meio físico para se propagar. No entanto, são diferentes, uma vez que a convecção exige a presença de movimentação de fluido.

A transferência de calor através de um sólido é sempre por condução já que suas moléculas permanecem em posições relativamente fixas. A transferência de calor através de um fluido é por convecção na presença de movimento da massa de um fluido e por condução em sua ausência.

O fenômeno de convecção envolve não apenas movimento do fluido, mas também, condução. Considere a transferência de calor permanente por meio de um fluido contido entre duas placas paralelas mantidas em diferentes temperaturas. As temperaturas do fluido e das placas são as mesmas nos pontos de contato devido à condição de não deslizamento que garante a continuidade da temperatura.

Assumindo que nas proximidades da placa o fluido não está em movimento, a energia das moléculas mais quentes da placa é transferida para as moléculas adjacentes do fluido mais frio. Esta energia é então transferida para a próxima camada adjacente do fluido mais frio e assim por diante, caracterizando o fenômeno da condução no fluido.

No entanto, quando as moléculas do fluido se aquecem, algumas propriedades físicas se alteram, como por exemplo, a densidade. Quando um fluido aumenta sua temperatura, sua densidade tende a diminuir se forem mantidas todas as condições iniciais anteriores. Com a diminuição da densidade do fluido, essa massa passa a sofrer com a ação de um empuxo resultante pela diferença de densidades dos fluidos, fazendo com que massas de fluidos mais quentes subam e as massas de fluidos mais frios desçam. Esse movimento das massas de fluidos decorrentes das suas variações caracteriza o fenômeno da convecção térmica.

Na situação descrita acima, o movimento das massas de fluidos acaba aumentando a troca de calor devido ao fato das moléculas quentes que estavam em contato com a superfície quente subirem e novas moléculas frias entrarem em contato com essa mesma superfície quente, acelerando assim o processo de troca de calor aumentando então a convecção térmica.

### 3.3.2 Lei De Newton Do Resfriamento

Apesar da complexidade da convecção, pode-se observar que a taxa de transferência de calor por convecção é proporcional à diferença de temperatura e é dada pela Equação 27:

$$\dot{q}_{conv} = h(T_S - T_\infty) \quad (27)$$

Ou então, pode-se utilizar a Equação 28:

$$\dot{Q}_{conv} = hA_S(T_S - T_\infty) \quad (28)$$

Em que:

- $\dot{q}_{conv}$  é a taxa de transferência de calor por convecção por unidade de área [ $W/m^2$ ].
- $\dot{Q}_{conv}$  é a taxa de transferência de calor por convecção [ $W$ ].
- $h$  é a taxa de transferência de calor entre uma superfície sólida e um fluido por unidade de área e por unidade de diferença de temperatura [ $W/m^2\text{°C}$ ].
- $T_S$  é a temperatura da superfície [ $\text{°C}$ ].
- $T_\infty$  é a temperatura do fluido suficientemente longe da superfície [ $\text{°C}$ ].
- $A_S$  é a área de transferência de calor [ $m^2$ ].

O coeficiente  $h$  de transferência de calor entre uma superfície sólida e um fluido por unidade de área e por diferença de temperatura é difícil de ser determinado, pois depende de muitas variáveis, como:

- Viscosidade dinâmica  $\mu$ .
- Condutividade térmica  $k$ .
- Densidade  $\rho$ .
- Calor específico  $c_p$ .
- Velocidade do fluido  $V$ .
- Geometria da superfície sólida.
- Rugosidade da superfície sólida.
- Tipo de escoamento do fluido.

### 3.3.3 Número De Nusselt

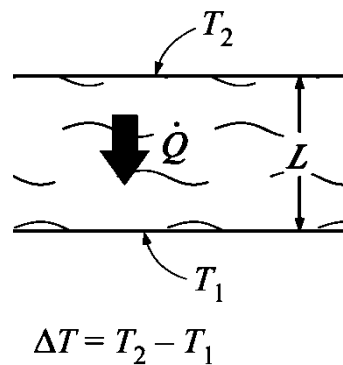
O número de Nusselt,  $Nu$ , é um coeficiente adimensional de transferência de calor por convecção. O número de Nusselt representa o aumento da transferência de calor através de uma camada de fluido como resultado da convecção em relação à condução do mesmo fluido em toda a camada (ÇENGEL, 2009). É uma prática comum também adimensionalizar o coeficiente de transferência de calor  $h$  usando  $Nu$ , dado na Equação 29:

$$Nu = \frac{hL_c}{k} \quad (29)$$

Em que:

- $k$  é a condutividade térmica do fluido [ $W/m K$ ].
- $L_c$  é o comprimento característico [ $m$ ].

Pode-se deduzir a equação acima considerando uma camada de fluido de espessura  $L$  e diferença de temperatura  $\Delta T = T_2 - T_1$ , como mostra a Figura 11.



**Figura 11 – Transferência de calor de uma camada de fluido de espessura  $L$  e diferença de temperatura  $\Delta T$ . Adaptado de ÇENGEL (2009).**

A transferência de calor através da camada de fluido é por convecção quando o fluido envolve algum movimento, e por condução quando a camada de fluido está imóvel. O fluxo de calor para ambos os casos é dado pelas Equações 30 e 31, respectivamente:

$$\dot{q}_{conv} = h\Delta T \quad (30)$$

e

$$\dot{q}_{cond} = \frac{k\Delta T}{L} \quad (31)$$

Portanto, da relação entre calor trocado por convecção e condução, obtém-se a Equação 32.

$$Nu = \frac{\dot{q}_{conv}}{\dot{q}_{cond}} = \frac{hL}{k} \quad (32)$$

### 3.3.4 Classificação Dos Escoamentos

A transferência de calor por convecção está ligada diretamente com a mecânica dos fluidos. São apresentadas algumas categorias gerais para classificar os problemas de escoamento de fluidos (INCROPERA, DEWITT, 2012).

- Escoamento viscoso e não viscoso: todo fluido apresenta uma viscosidade. Quando duas camadas de fluido se movem uma em relação à outra, uma força de atrito se desenvolve entre elas devido a presença da viscosidade. Portanto, regiões de escoamento em que os efeitos do atrito causado pela viscosidade não são significativos são classificados como escoamento não viscoso. Escoamentos em que os efeitos do atrito são considerados significativos são considerados escoamentos viscosos.
- Escoamento interno e externo: o escoamento de um fluido sobre a superfície de uma placa, fio ou tubo é considerado um escoamento externo. O escoamento em um tubo ou duto é um escoamento interno.
- Escoamento compressível e incompressível: a incompressibilidade é uma aproximação e um escoamento é dito incompressível se a densidade permanece quase constante nele todo. Os escoamentos líquidos são considerados essencialmente constantes, sendo assim, o escoamento dos líquidos é tipicamente incompressível. Os gases, por outro lado, são altamente compressíveis. Os escoamentos gasosos são modelados como compressíveis ou incompressíveis baseados no seu número de Mach,  $Ma$ , definido como  $Ma = V/V_{som}$ , em que  $V$  é a velocidade de escoamento do fluido e  $V_{som}$  é a velocidade do som no fluido. Escoamentos de gases muitas vezes são aproximados como incompressíveis se  $Ma < 0,3$ , correspondendo a uma velocidade  $V = 100m/s$  para o ar.

- Escoamento laminar e turbulento: o movimento de fluido altamente ordenado é chamado de laminar. O movimento altamente desordenado de fluidos, o que ocorre geralmente em velocidades elevadas, é chamado de turbulento.
- Escoamento natural e forçado: no escoamento forçado, o fluido é forçado a fluir através de uma superfície ou meio externo por meio de bomba ou ventilador. No escoamento natural os movimentos do fluido são devidos aos meios naturais, como o efeito empuxo, que faz com que o ar quente, menos denso e portanto mais leve, suba em relação ao ar frio, menos denso e portanto mais pesado.
- Escoamento transiente e permanente: o termo transitório é normalmente utilizado para escoamentos que ainda estão em desenvolvimento e suas características variam com o tempo. O termo permanente implica em nenhuma alteração com o tempo em um ponto.

### 3.3.5 Camada Limite Hidrodinâmica

A região do escoamento acima da placa delimitada por  $\delta$ , mostrado na Figura 12, em que os efeitos das folhas de cisalhamento viscoso causadas pela viscosidade do fluido são sentidos é chamada de camada limite hidrodinâmica.

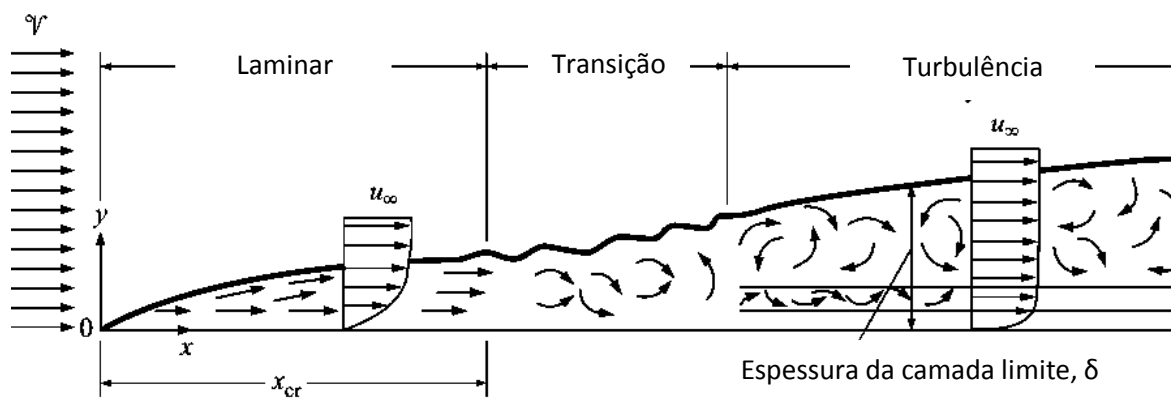


Figura 12 – Desenvolvimento da camada limite hidrodinâmica. Adaptado de ÇENGEL (2009).

A espessura da camada limite é definida como a distância a partir da superfície em que  $u = 0,99V$ . Essa linha hipotética divide o escoamento em uma placa em duas regiões: região da camada limite em que os efeitos viscosos são significativos e a região do escoamento irrotacional, em que os efeitos de atrito são desprezíveis e a velocidade permanece essencialmente constante (ÇENGEL, 2009).

### 3.3.6 Camada Limite Térmica

A região de escoamento sobre a superfície em que a variação de temperatura na direção normal à superfície é significativa é a camada limite térmica. A espessura da camada limite térmica  $\delta_t$  em qualquer local ao longo da superfície é definida como a distância da superfície em que a diferença de temperatura  $T - T_S$  é equivalente a  $0,99(T_\infty - T_S)$ , em que  $T_S$  é a temperatura da superfície e  $T_\infty$  é a temperatura uniforme do fluido adjacente à superfície de escoamento.

### 3.3.7 Número De Prandtl

O número de Prandtl,  $Pr$ , descreve a espessura relativa das camadas limite hidrodinâmica e térmica, definido como a razão entre a difusividade molecular da quantidade de movimento e a difusividade molecular de calor, dada pela Equação 33.

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{k} \quad (33)$$

### 3.3.8 Número De Reynolds

O número de Reynolds,  $Re$ , relaciona as forças de inércia e as forças viscosas de um fluido por meio da razão entre essas grandezas, dada pela Equação 34:

$$Re = \frac{VL_c}{\nu} = \frac{\rho VL_c}{\mu} \quad (34)$$

O número de Reynolds é geralmente expresso para um escoamento externo e tem relação fundamental com o tipo de regime: laminar ou turbulento.

### 3.3.9 Número De Grashof

O regime de escoamento em convecção natural é regido pelo parâmetro adimensional de Grashof,  $Gr_L$ , e representa a razão entre a força de empuxo e a força viscosa agindo sobre o fluido. O número de Grashof pode ser calculado usando a Equação 35:

$$Gr_L = \frac{g\beta(T_S - T_\infty)L_c^3}{\nu^2} \quad (35)$$

Em que:

- $g$  é a aceleração da gravidade [ $m/s^2$ ].
- $\beta$  é o coeficiente de expansão volumétrica [ $K^{-1}$ ].
- $T_S$  é a temperatura da superfície [ $K$ ].
- $T_\infty$  é a temperatura do fluido suficientemente longe da superfície [ $K$ ].
- $L_c$  é o comprimento característico da geometria [ $m$ ].
- $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido [ $m^2/s$ ].

Quando uma superfície é submetida a um escoamento externo, o problema envolve convecção forçada e natural. A importância relativa de cada modo de transferência de calor é determinado pela razão do coeficiente  $Gr_L/Re_L^2$ .

Possíveis intervalos de valores para o coeficiente acima:

- $Gr_L/Re_L^2 \ll 1$ : os efeitos da convecção natural são insignificantes.
- $Gr_L/Re_L^2 \gg 1$ : os efeitos da convecção forçada são insignificantes e a convecção livre predomina.
- $Gr_L/Re_L^2 \approx 1$ : ambos os efeitos de convecção natural e forçada predominam e devem ser considerados.

### 3.3.10 Número De Rayleigh

As correlações empíricas para o número de Nusselt médio,  $Nu$ , na convecção natural são dados pela Equação 36:

$$Nu = \frac{hL_c}{k} = C(Gr_L Pr)^n = CRa_L^n \quad (36)$$

Em que  $Ra_L$  é o número de Rayleigh. O produto dos números de Grashof e Prandtl é dado na Equação 37:

$$Ra_L = Gr_L Pr = \frac{g\beta(T_S - T_\infty)L_c^3}{\nu^2} Pr \quad (37)$$

As constantes  $C$  e  $n$  dependem da geometria da superfície e do regime de escoamento, que é caracterizado pela faixa do número de Rayleigh. Essas constantes podem ser obtidas em INCROPERA e DEWITT (2012) e ÇENGEL (2009).

Todas as propriedades dos fluidos devem ser avaliadas na temperatura do filme,  $T_f$ , dada pela Equação 38.

$$T_f = \frac{1}{2}(T_s + T_\infty) \quad (38)$$

### 3.4 Radiação

Um corpo em uma temperatura absoluta acima de zero emite radiação em todas as direções ao longo de uma vasta faixa de comprimento de onda. A quantidade de energia de radiação emitida a partir de uma superfície em um determinado comprimento de onda depende do material do corpo e da condição de sua superfície, assim como da temperatura em que se encontra.

#### 3.4.1 Corpo Negro

Um corpo negro é definido como um perfeito emissor e absorvedor de radiação. Nenhuma superfície a uma determinada temperatura e comprimento de onda consegue emitir ou absorver mais radiação que um corpo negro (ÇENGEL, 2009). A energia de radiação emitida por um corpo negro,  $E_b$ , em  $W/m^2$ , é dada pela Equação 39.

$$E_b(T) = \sigma T^4 \quad (39)$$

Em que:

- $\sigma$  é a constante de Stefan-Boltzmann, que no Sistema Internacional de Unidades vale  $5,670 * 10^{-8} W/m^2 K^4$ .
- $T$  é a temperatura absoluta da superfície [K].

#### 3.4.2 Emissividade

A emissividade de uma superfície representa a razão entre a radiação emitida pela superfície a uma determinada temperatura e a radiação emitida por um corpo negro na mesma temperatura. A emissividade de uma superfície é denotada por  $\epsilon$  e varia entre zero e um (ÇENGEL, 2009).

A emissividade real de uma superfície não é uma constante. Ela varia com a temperatura da superfície, comprimento de onda e a direção das radiações emitidas.

Para o problema proposto, a emissividade  $\epsilon$  dos aços inoxidáveis é dada na Tabela 4.



**Tabela 4 – Emissividade de aços inoxidáveis em função da temperatura absoluta. Adaptado de ÇENGEL (2009).**

<b>Emissividade de aços inoxidáveis em função da temperatura absoluta</b>	
Temperatura (K)	Emissividade ( $\epsilon$ )
300	0,17
700	0,25
1000	0,30

### 3.4.3 Taxa De Transferência De Calor Por Radiação

Quando uma superfície de emissividade  $\epsilon$  e área superficial  $A_s$  a uma temperatura absoluta  $T_s$  é completamente delimitada por uma superfície muito maior a uma temperatura termodinâmica  $T_{arr}$  separados por um gás, como o ar, a taxa líquida de transferência de radiação  $\dot{Q}_{rad}$ , dada em  $W$ , entre essas duas superfícies é dada pela Equação 40.

$$\dot{Q}_{rad} = \epsilon \sigma A_s (T_s^4 - T_{arr}^4) \quad (40)$$

### 3.5 Considerações Finais

O Capítulo 3 apresenta uma introdução teórica aos principais mecanismos de transferência de calor que estão envolvidos na solução do problema proposto e devem ser avaliados para se determinar a importância de cada um deles na obtenção de resultados coerentes.

## 4 ELASTICIDADE

### 4.1 Considerações Iniciais

Os materiais usados na engenharia possuem propriedades elásticas. Se as forças externas que produzem deformação não excederem certo limite, a deformação desaparece quando as forças param de atuar (TIMOSHENKO, 1980).

Hipóteses adotadas: os corpos que suportam a ação de forças externas são perfeitamente elásticos, isto é, retomam sua forma inicial completamente quando as forças deixam de atuar.

Será considerado também que a matéria de um corpo elástico é homogênea e distribuída de forma contínua em seu volume.

### 4.2 Equações Gerais Em Coordenadas Polares

Na análise de tensões em anéis e discos circulares é vantajoso usar coordenadas polares. A posição de um ponto no plano médio de uma chapa é então definido pela distância da origem  $O$  e pelo ângulo  $\theta$  entre  $r$  e um certo eixo  $Ox$  fixado no plano (TIMOSHENKO, 1980), como mostrado na Figura 13.

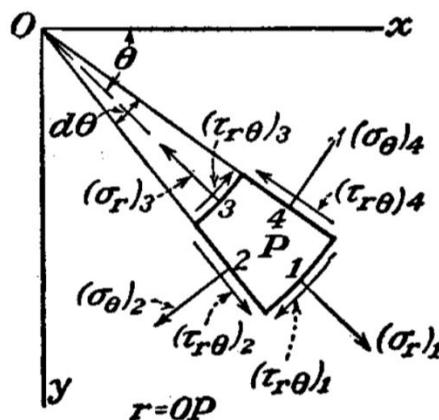


Figura 13 – Elemento infinitesimal em coordenadas polares. Adaptado de TIMOSHENKO (1980).

Considere agora o equilíbrio de um elemento infinitesimal 1234, delimitado pelas seções radiais  $O4$  e  $O2$ , normais a chapa, e por mais duas superfícies cilíndricas, 3 e 1,

também normais a chapa. A componente normal da tensão na direção radial é designada por  $\sigma_r$ , a componente normal na direção circunferencial por  $\sigma_\theta$ , e as componentes cisalhantes por  $\tau_{r\theta}$ . Os símbolos referem-se à tensão no ponto  $r, \theta$ , que é o ponto médio P do elemento (TIMOSHENKO, 1980).

Efetuada o somatório de forças na direção radial e simplificando, obtém-se a Equação 41.

$$\frac{(\sigma_r r)_1 - (\sigma_r r)_3}{dr} - \frac{1}{2} [(\sigma_\theta)_2 + (\sigma_\theta)_4] + \frac{(\tau_{r\theta})_2 - (\tau_{r\theta})_4}{d\theta} + Rr = 0 \quad (41)$$

Tomando as dimensões dos elementos cada vez menores, até o limite zero, a Equação 41 de equilíbrio na direção radial toma a forma final da Equação 42, em que  $R$  é a força de massa por unidade de volume na direção radial.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0 \quad (42)$$

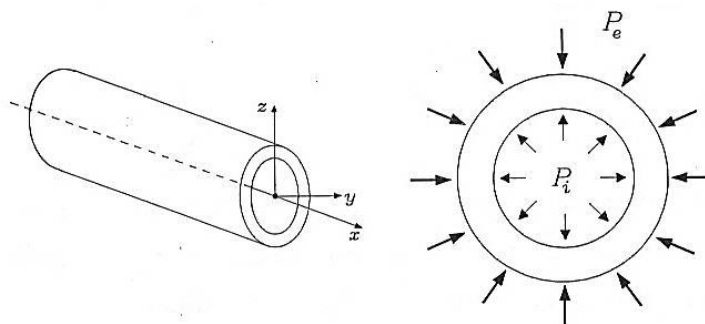
De forma análoga, a equação de equilíbrio na direção tangencial é dada pela Equação 43.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + S = 0 \quad (43)$$

Em que  $S$  é a componente da força de massa na direção tangencial.

### 4.3 Distribuição de Tensões Simétricas em Relação A Um Eixo

A Figura 14 ilustra os tubos com comprimento muito maior do que as dimensões da seção transversal, que possuem seção circular oca e eixo reto. Quanto à espessura não há nenhuma restrição. As solicitações necessárias são as pressões internas ou externas.



**Figura 14 – Tubo submetido a pressões internas e externas. Retirado de PROENÇA (2003).**

No equacionamento da distribuição de tensões simétricas em relação a um eixo são adotadas as seguintes hipóteses (PROENÇA, 2003):

- Comportamento elástico linear do material.
- Pequenas deformações.
- Desconsideram-se as tensões normais na direção axial.
- Comprimento do eixo é muito grande em relação às dimensões da seção transversal, sendo considerado nulo o alongamento na direção axial.

Dadas as hipóteses acima, a análise a seguir é desenvolvida totalmente no plano da seção transversal (PROENÇA, 2003).

Devem-se determinar as distribuições de tensões, deformações e o campo de deslocamentos sabendo-se as pressões atuantes e a geometria do tubo. Dada a geometria do tubo e o carregamento considerado, o problema resulta em uma configuração axissimétrica, viabilizando a utilização de coordenadas polares. A Figura 15 ilustra um elemento infinitesimal do tubo em coordenadas polares.

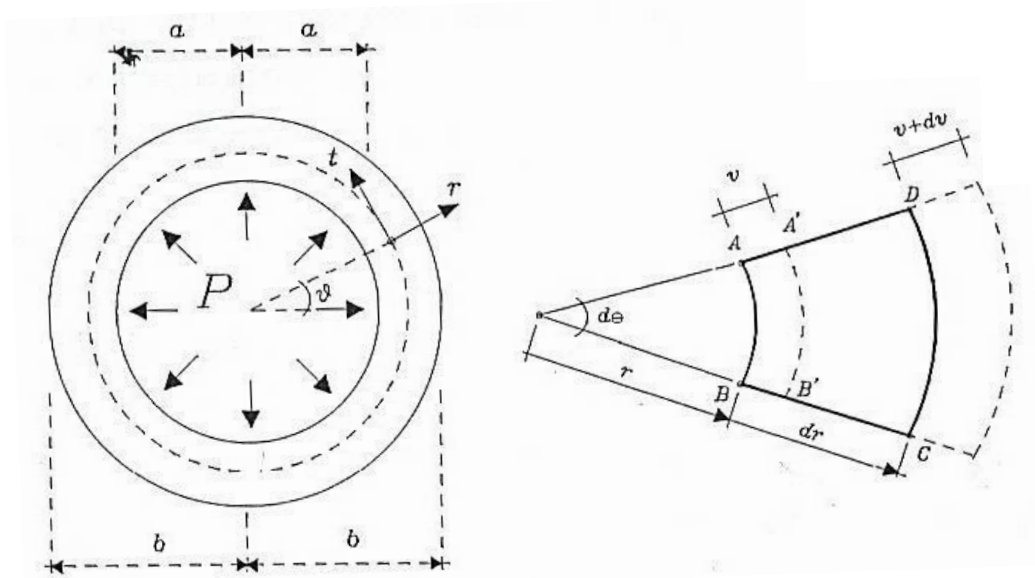


Figura 15 – Elemento infinitesimal do tubo em coordenadas polares. Retirado de PROENÇA (2003).

Dado o elemento infinitesimal definido pela seção transversal do tubo, ilustrado pela Figura 15, o deslocamento radial dos seus pontos é dado pela função  $v = v(r)$ . As Equações 44 e 45 representam a deformação tangencial e radial, respectivamente.

$$\varepsilon_t = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{(r + v)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{v}{r} \quad (44)$$

$$\varepsilon_r = \frac{dv}{dr} = v' \quad (45)$$

Considerando a axissimetria do problema, a deformação do elemento se dá de modo que sua forma se preserva, ou seja, não há distorções angulares associadas às direções radial ou tangencial. Como somente a componente radial é não nula, função da coordenada  $r$ , tem-se a Equação 46 com a definição da distorção angular segundo as direções  $r$  e  $t$ .

$$\gamma_{rt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial r} \quad (46)$$

Em que  $u$  é a componente do deslocamento na direção axial, nula segundo a definição do problema.

A condição de equilíbrio para o elemento infinitesimal é mostrada na Figura 16.

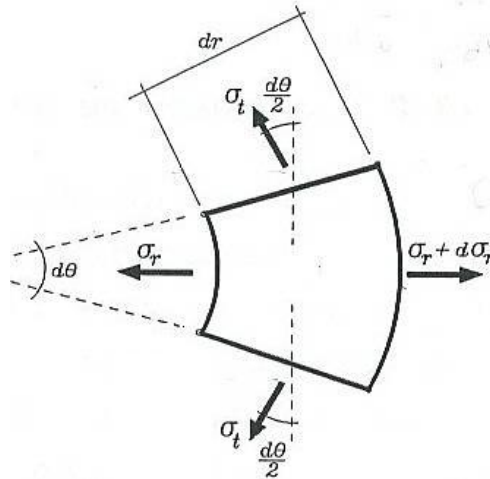


Figura 16 – Elemento infinitesimal em equilíbrio. Retirado de PROENÇA (2003).

Dada a axissimetria do problema é possível notar a ausência de tensões de cisalhamento, sendo então as tensões normais as principais.

O equilíbrio de forças na direção radial é dado pela Equação 47.

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\theta dz - \sigma_r r d\theta dz - 2\sigma_t dr dz \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0 \quad (47)$$

Aproximando  $\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \approx \frac{d\theta}{2}$  e desconsiderando os termos infinitesimais de ordem superior, resulta a Equação 48.

$$\sigma_r - \sigma_t + r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (48)$$

A Lei de Hooke estabelece relações entre as componentes tangencial e radial dos campos de deformação e tensão, dados pelas Equações 49, 50 e 51.

$$\epsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_t) \quad (49)$$

$$\epsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu\sigma_r) \quad (50)$$

$$\gamma_{rt} = \frac{1}{G}\tau_{rt} \quad (51)$$

Ou, em termos de tensão, tem-se as Equações 52, 53 e 54.

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} \left( \frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right) \quad (52)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right) \quad (53)$$

$$\tau_{rt} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{rt} = 0 \quad (54)$$

Combinando-se as relações de compatibilidade dadas pela Equações 44 e 45, obtém-se a Equação 55.

$$\frac{dv}{dr} = \varepsilon_t + r \frac{d\varepsilon_t}{dr} = \varepsilon_r \quad (55)$$

Utilizando as Equações 49, 50 e 51 na Equação 55, obtém-se a Equação 56.

$$r \left( \frac{d\sigma_t}{dr} - \nu \frac{d\sigma_r}{dr} \right) = (\sigma_r - \sigma_t)(1 + \nu) \quad (56)$$

Portanto, o conjunto das Equações 48 e 56 formam um sistema nas incógnitas  $\sigma_r$  e  $\sigma_t$ .

A solução geral para esse sistema de equações é apresentado pelas Equações 57 e 58:

$$\sigma_r = \frac{C}{2} + \frac{C^*}{r^2} \quad (57)$$

$$\sigma_t = \frac{C}{2} - \frac{C^*}{r^2} \quad (58)$$

As constantes de integração  $C$  e  $C^*$  são obtidas aplicando-se as condições de contorno no plano da seção transversal. Para um tubo com pressões interna e externa, com geometria definida por um raio interno  $a$  e um raio externo  $b$ , tem-se as Equações 59 e 60 que são as expressões para o cálculo das tensões (PROENÇA, 2003):

$$\sigma_r = -\frac{\left(\frac{b}{r}\right)^2 - 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1} p_i - \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{r}\right)^2}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1} p_e \quad (59)$$

$$\sigma_t = \frac{\left(\frac{b}{r}\right)^2 + 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1} p_i - \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{r}\right)^2}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1} p_e \quad (60)$$

A solução geral para o deslocamento radial (PROENÇA, 2003) é dada na Equação 61.

$$v(r) = -\frac{1-\nu}{E} r \left\{ \frac{(p_e - p_i) b^2}{a^2 \left[ \left(\frac{b}{a}\right) - 1 \right]} \left[ \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \left(\frac{a}{r}\right)^2 + 1 \right] + p_i \right\} \quad (61)$$

#### 4.4 Discos Giratórios

A distribuição de tensões em discos circulares giratórios é de grande importância prática. Se a espessura do disco for pequena em comparação com seu raio, a variação das tensões radial e tangencial ao longo da espessura pode ser desprezada (TIMOSHENKO, 1980).

As Equações 42 e 43 podem ser aplicadas nessa situação. Deve-se, no entanto, fazer a força de inércia igual a força de massa. O peso do disco será desprezado. Então, tem-se  $R = \rho\omega^2 r$  e  $S = 0$ .

Em virtude da simetria,  $\tau_{r\theta}$  é nula e  $\sigma_r$  e  $\sigma_\theta$  são independentes de  $\theta$ . Sendo assim, a Equação 43 é inteiramente satisfeita. Já Equação 42 pode ser reescrita como mostra a Equação 62.

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\theta + \rho\omega^2 r^2 = 0 \quad (62)$$

As componentes de deformação em caso de axissimetria são dadas pelas Equações 63 e 64.

$$\epsilon_r = du/dr \quad (63)$$

$$\epsilon_\theta = u/r \quad (64)$$

Tem-se também, das Equações 49, 50 e 51 dadas anteriormente, a tensão-deformação:

$$\epsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \quad (49)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \quad (50)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{G}\tau_{r\theta} \quad (51)$$

Utilizando as Equações 49 e 50 como componentes de tensão e as Equações 63 e 64 como componentes de deformação, obtêm-se as Equações 52 e 53, também dadas anteriormente e reescritas novamente por conveniência.

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right) \quad (52)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right) \quad (53)$$

A solução geral para o deslocamento radial  $u$  é dado pela Equação 65:

$$u = \frac{1}{E} \left[ (1-\nu)Cr - (1+\nu)C_1 \frac{1}{r} - \frac{1-\nu^2}{8} \rho \omega^2 r^3 \right] \quad (65)$$

Em que  $C$  e  $C_1$  são constantes arbitrárias.

As componentes da tensão são determinadas pelas Equações 66 e 67.

$$\sigma_r = C + C_1 \frac{1}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \quad (66)$$

$$\sigma_\theta = C - C_1 \frac{1}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \quad (67)$$

E as constantes  $C$  e  $C_1$  são determinadas utilizando as condições de contorno.

Aplicando as condições de contorno para um disco maciço (eixo) de raio  $b$ , obtém-se as Equações 66, 67, 68, 68 e 70.

$$C_1 = 0 \quad (66)$$

$$C = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \quad (67)$$

$$u = \frac{1}{E} \left[ (1-\nu)Cr - (1+\nu)C_1 \frac{1}{r} - \frac{1-\nu^2}{8} \rho \omega^2 r^3 \right] \quad (68)$$

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (b^2 - r^2) \quad (69)$$

$$\sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2 - \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \quad (70)$$

Aplicando as condições de contorno para um disco com um orifício circular no centro de raio interno  $a$  e raio externo  $b$ , obtém-se as Equações 71, 72, 73, 74 e 75.

$$C = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (b^2 + a^2) \quad (71)$$

$$C_1 = -\frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 a^2 b^2 \quad (72)$$

$$u = \frac{1}{E} \left[ (1-\nu)Cr - (1+\nu)C_1 \frac{1}{r} - \frac{1-\nu^2}{8}\rho\omega^2 r^3 \right] \quad (73)$$

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 \left( b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right) \quad (74)$$

$$\sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 \left( b^2 + a^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right) \quad (75)$$

#### 4.5 Considerações Finais

O Capítulo 4 trata dos conceitos envolvidos na Teoria da Elasticidade e que são necessários para análise e resolução do problema dado. Faz-se necessário agora analisar o efeito das forças envolvidas no ajuste interferente e na dilatação por meio da aplicação de uma velocidade angular do conjunto na tentativa de desmontá-lo.

## 5 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

### 5.1 Breve Histórico

Não se pode dizer que a ideia básica do Método dos Elementos Finitos está vinculada a apenas uma pessoa ou grupo de pessoas da mesma época. Há mais de dois mil anos pensadores e filósofos tinham noção de que os objetos eram formados por um número infinitamente grande de partículas menores. Na década de 30, Hrennikoff e McHenry substituíram um elemento estrutural contínuo por uma estrutura formada por barras seguindo a geometria original e mantendo as mesmas condições de vínculos e carregamentos.

Os métodos de discretização que deram origem às análises matriciais, apesar de considerarem meios contínuos utilizando elementos discretos com propriedades físicas conhecidas, não apresentam o aspecto conceitual implícito no método dos elementos finitos que consiste em, além dos aspectos já citados, admitir funções contínuas que permitam representar, por exemplo, o campo de deslocamentos no domínio de um elemento que também nos fornece o estado de deformações correspondente, o qual associado às propriedades do material permite definir o estado de tensões em todo o elemento. Este estado de tensões pode ser transformado em esforços internos que devem estar em equilíbrio com as ações externas (ASSAN, 2003).

Devido à publicação dos trabalhos de Turner, Clough, Martin e Topp em 1956 que o método dos elementos finitos foi definido do modo que é conhecido atualmente. Embora o método já estivesse formulado desde a década de 50, passou a ser conhecido e aplicado em diversas áreas da engenharia apenas com a evolução e expansão dos computadores.

A seguir tem-se uma breve descrição do método de Rayleigh-Ritz e do método de Galerkin que são os mais conhecidos e que deles originaram o método dos elementos finitos.

### 5.2 Método De Rayleigh-Ritz

No método de Rayleigh-Ritz, uma função  $y(x)$  é substituída por uma função aproximada  $v(x)$ , formada por uma combinação linear de funções  $\phi_i(x)$ . Substitui-se então

$v(x)$  no funcional, este é minimizado. A função  $v(x)$  é aproximada e não exata como  $y(x)$ . A escolha das funções  $\phi_i(x)$  é fundamental para se obter uma boa aproximação para a solução do problema (ASSAN, 2003).

Deseja-se então, encontrar a função  $v(x)$  que minimiza o funcional dado pela Equação 76.

$$Y = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (76)$$

Sendo as condições de contorno  $y(x_1) = y(x_2) = 0$ .

Assumindo que a solução pode ser obtida considerando uma função  $v(x)$  como uma combinação linear de funções  $\phi_i(x)$  tal qual dada pela Equação 77:

$$y(x) \cong v(x) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x) \quad (77)$$

As funções  $\phi_i(x)$  são chamadas de funções de forma e são linearmente independentes, satisfazendo individualmente as condições de contorno  $\phi_i(x_1) = \phi_i(x_2) = 0$  ;  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Essas funções são contínuas até o grau  $(m - 1)$ , sendo  $m$  a ordem da maior derivada do funcional.

Substituindo  $y$  por  $v$  no funcional e impondo a condição de estacionariedade (mínimo), tem-se a Equação 78.

$$\delta Y = \frac{\partial Y}{\partial a_1} \delta a_1 + \frac{\partial Y}{\partial a_2} \delta a_2 + \dots + \frac{\partial Y}{\partial a_n} \delta a_n = 0 \quad (78)$$

Os coeficientes  $a_i$  a serem determinados são denominados parâmetros de deslocamentos. Como as variações  $\delta a_i$  são arbitrárias, a equação acima se transforma em um sistema de equações homogêneas da forma  $\frac{\partial Y}{\partial a_i} = 0$  ;  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Se  $Y$  é uma função quadrática de  $\phi_i$  e  $\phi'_i$ , então essas equações são lineares em  $a_i$ .

Aumentando o número  $n$  de termos da função  $v(x)$ , em geral, a solução é melhorada. Para se obter uma sequência de soluções convergentes para a solução exata, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

- As funções aproximadoras  $v(x)$  devem ser contínuas até uma ordem a menos do que a maior derivada do integrando.
- Cada função  $\phi_i(x)$  deve satisfazer as condições iniciais de contorno.
- A sequência de funções deve ser completa.  $v(x)$  é dita completa quando a seguinte condição dada na Equação 79 é satisfeita.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_1}^{x_2} (y - \sum_{i=1}^n a_i \phi_i)^2 dx < \lambda \quad (79)$$

Sendo  $\lambda$  um número tão pequeno quanto se deseja.

As funções que satisfazem as duas primeiras condições são chamadas admissíveis.

Para verificar a convergência do método é preciso considerar duas ou mais tentativas para a função aproximadora. A convergência é verificada comparando diversos valores  $Y^{(i)}$  do funcional minimizado obtido com a Equação 80.

$$\begin{aligned} v^{(1)} &= a_1^{(1)} \phi_1^{(1)} \\ v^{(2)} &= a_1^{(2)} \phi_1^{(2)} + a_2^{(2)} \phi_2^{(2)} \\ &\vdots \\ v^{(n)} &= a_1^{(n)} \phi_1^{(n)} + a_2^{(n)} \phi_2^{(n)} + \dots + a_n^{(n)} \phi_n^{(n)} \end{aligned} \quad (80)$$

Uma vez que a enésima função aproximadora inclui todas as funções contidas na aproximação anterior e  $Y$  é minimizado em cada passo, então a condição dada na Equação 81 é verificada:

$$Y^{(1)} \geq Y^{(2)} \geq \dots \geq Y^{(n)} \quad (81)$$

Essa convergência para a solução exata é chamada de monotônica, e as igualdades na Equação 80 formam uma sequência minimizante. Quando se utiliza uma função minimizante de funções aproximadoras, assegura-se a convergência monotônica do funcional. Portanto, para que a resposta convirja para a solução exata as funções devem ser admissíveis e completas.

### 5.3 Método De Galerkin

Este método não requer a existência de um funcional, utilizando diretamente a equação diferencial que descreve matematicamente o problema em análise.

Para resolver um sistema de equações diferenciais pelo método de Galerkin, substitui-se nele uma ou mais funções aproximadoras que satisfaçam as condições de contorno. Como as funções aproximadoras não são as soluções exatas do sistema de equações diferenciais tem-se resíduos que devem ser ponderados por meio de funções ponderadoras. O produto entre a função residual e cada função ponderadora é supostamente zero no domínio de integração, determinando condição de ortogonalidade (ASSAN, 2003).

Suponha um sistema de equações lineares da forma da Equação 82.

$$Lv = f \quad (82)$$

Em que  $L$  é um operador e a função  $v$  satisfaz certas condições de contorno.

Admite-se uma função aproximadora  $\bar{v}$  para  $v$  da forma da Equação 83:

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i \quad (83)$$

Em que  $\phi_i$  são funções que satisfazem as condições do problema.

Substituindo  $v$  por  $\bar{v}$  a primeira equação não mais se verifica, sendo introduzido um erro dado por  $\epsilon = L\bar{v} - f$ .

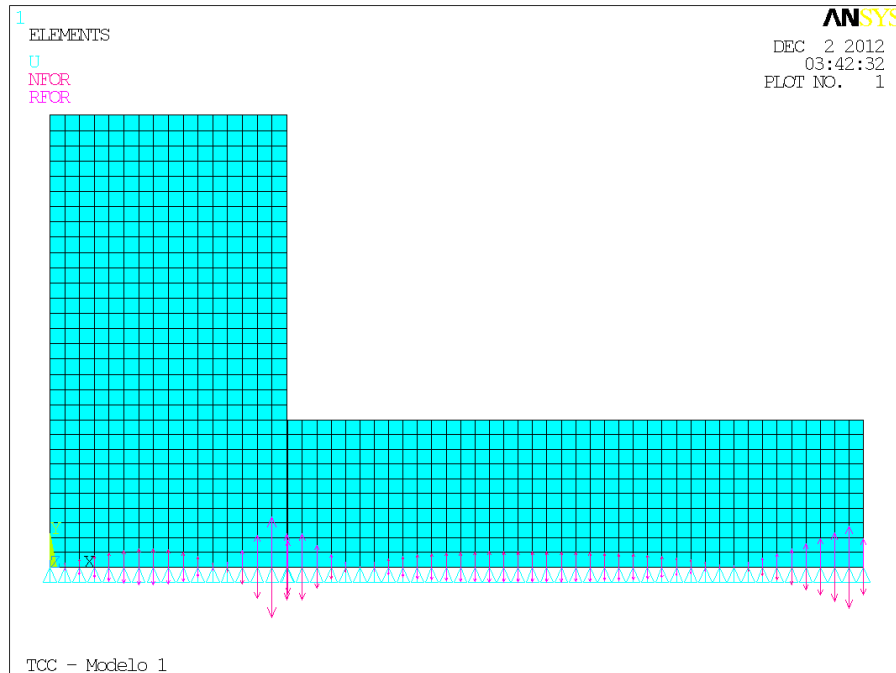
Este método exhibe a condição de ortogonalidade entre a função  $\epsilon$  e as funções ponderadoras  $\phi_i$ , sendo dada pela Equação 84:

$$\int_V (L\bar{v} - f)\phi_i dV = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (84)$$

Os coeficientes  $a_i$  provêm da solução do sistema de  $n$  equações acima. Esses coeficientes são então calculados de forma que os resíduos se anulem em cada integração ponderada.

## 5.4 Método Dos Elementos Finitos

O método dos elementos finitos mais comumente utilizado é o baseado no método de Rayleigh-Ritz e prevê a divisão do domínio de integração, contínuo, em um número finito de pequenas regiões denominadas elementos finitos, transformando o meio contínuo em discreto. A Figura 17 abaixo mostra um elemento discretizado no software ANSYS®.



**Figura 17 – Rede de elementos finitos no software ANSYS®.**

A essa divisão do domínio dá-se o nome de rede de elementos finitos. O tamanho desses elementos discretos pode ser aumentado ou diminuído, variando assim, o tamanho da malha. Os pontos de intersecção das linhas são chamados de nós.

O modelo do problema mostrado na Figura 17 apresenta 978 nós e 890 elementos finitos.

No método dos elementos finitos, busca-se uma função admissível que satisfaça as condições de contorno no domínio de cada elemento finito. Para cada elemento finito  $i$  é montado um funcional  $\Pi_i$ , que, somado ao funcional dos demais elementos finitos, forma um funcional  $\Pi$  para todo o domínio, dado pela Equação 85.

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \Pi_i \quad (85)$$

Para cada elemento  $i$  a função aproximadora é formada por variáveis referidas aos nós do elemento, chamados parâmetros nodais, e por funções de forma. Desse modo, a função aproximadora  $v$  tem a forma da Equação 86.

$$v = \sum_{j=1}^m a_j \phi_j \quad (86)$$

Em que  $a_j$  são os parâmetros nodais e  $\phi_j$  são as funções de forma.

Desse modo, o funcional  $\Pi$  é expresso pela Equação 87:

$$\Pi(a_j) = \sum_{i=1}^n \Pi_i(a_j)v = \sum_{j=1}^m a_j \phi_j \quad (87)$$

A condição de estacionariedade implica, como no método de Rayleigh-Ritz, em um sistema linear algébrico de equações dado pela Equação 88.

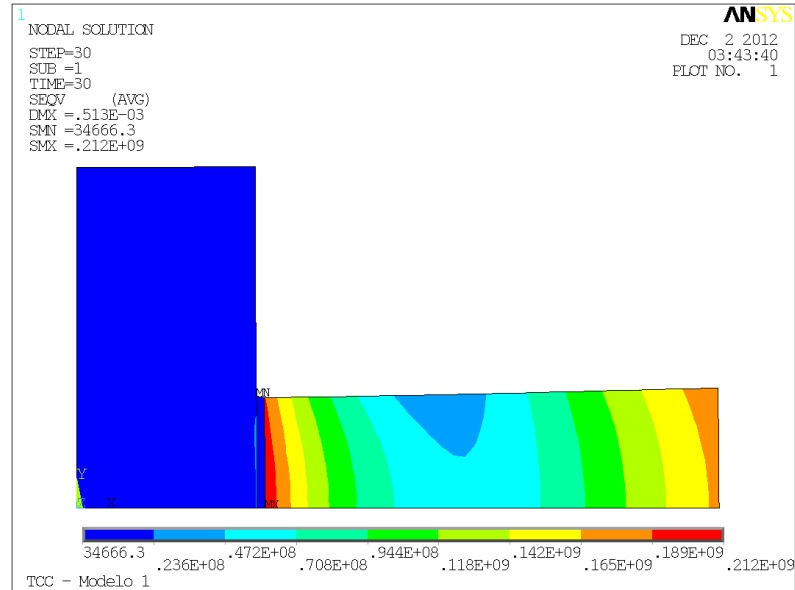
$$\delta \Pi(a_j) = \sum_{i=1}^n \delta \Pi_i(a_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial \Pi_i(a_j)}{\partial a_j} = 0 \quad (88)$$

A solução do sistema de equações acima nos fornece os parâmetros nodais  $a_j$  que podem ser forças internas, deslocamentos ou ambos, dependendo da formulação utilizada.

Se o campo de deslocamentos é descrito por funções aproximadoras e o princípio da mínima energia potencial é empregado, as componentes dos deslocamentos nodais são as incógnitas e o método é então denominado método dos elementos finitos - modelo dos deslocamentos ou método dos elementos finitos - modelo da rigidez.

Se o campo de tensões ou esforços é representado por funções aproximadoras, as tensões ou esforços internos nodais são as incógnitas e o método é então denominado método dos elementos finitos, modelo da flexibilidade ou método dos elementos finitos - modelo das forças, utilizando o princípio da mínima energia complementar.

A Figura 18 mostra um exemplo de resultado de uma análise elástica feita a partir da análise térmica mostrando tensões na peça.



**Figura 18 – Tensões de Von-Mises nodais sendo exibidas no ANSYS® para um análise.**

## 5.5 Considerações Finais

O Método dos Elementos Finitos será utilizado para solução das equações diferenciais que regem o problema e, portanto, é de extrema importância que o Capítulo 5 apresente uma introdução teórica sobre o Método dos Elementos Finitos e seu histórico no contexto do problema dado.

## 6 METODOLOGIA

### 6.1 Condição De Desmontagem

Deve-se verificar no problema proposto a possibilidade de se desmontar o disco do eixo de alguma forma que não danifique nenhum dos elementos envolvidos.

Para desmontar a união eixo-cubo, faz-se necessário calcular a folga mínima do cubo com o eixo para que isso seja possível. A condição necessária que garante a desmontagem do conjunto é a mesma condição inicial que foi verificada no processo de montagem, aquecendo-se o disco a 120 °C em uma estufa elétrica durante 30 minutos garante que a peça toda atinja a temperatura do forno. O disco então é retirado da estufa e inserido no eixo.

Deve-se, portanto, calcular a folga inicial de montagem. O valor encontrado será a folga necessária para desmontar o conjunto.

Para calcular essa folga, faz-se uso da equação  $\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$ .

Tem-se para a equação acima que  $\Delta L$  é a dilatação térmica ocorrida [ $m$ ],  $\alpha$  é o coeficiente de dilatação térmica linear [ $K^{-1}$ ],  $L_0$  é a dimensão ou comprimento inicial [ $m$ ] e  $\Delta T$  é a variação de temperatura ocorrida, [°C] ou [ $K$ ].

Considerando a temperatura ambiente de 20 °C e que o eixo também esteja na temperatura ambiente, e seja a temperatura uniforme final do disco a mesma temperatura do forno, 120 °C tem-se uma diferença de temperatura  $\Delta T = 100$  °C.

O diâmetro inicial do furo do disco é 0,210  $m$  e o coeficiente  $\alpha$  do material de que é feito o disco, aço inoxidável ASTM A890 Grade 3A, é  $\alpha = 11,34 * 10^{-6} K^{-1}$ .

Portanto, tem-se um aumento no diâmetro total do furo do disco de  $\Delta L = 238,1 * 10^{-6} m = 238 \mu m$ .

O valor de  $\Delta L$  é a folga diametral para condição de desmontagem. Dividindo esse valor por dois, obtém-se a folga radial necessária para a desmontagem da união eixo-cubo, que é de aproximadamente 120  $\mu m$ .

Portanto, para que o conjunto possa ser desmontado, é necessária uma folga radial de  $120 \mu\text{m}$ . Essa é a condição de desmontagem que se deseja atingir para solucionar o problema.

## 6.2 Discos Giratórios

A primeira abordagem feita na tentativa de solução foi aplicar uma velocidade de rotação no conjunto girante e analisar os deslocamentos na direção radial para verificar se a condição de desmontagem era alcançada.

O procedimento consiste em rotacionar o eixo e o disco a uma velocidade angular constante e verificar a viabilidade de desmontagem do conjunto por este método.

Foi criado um programa no MATLAB® que efetua os cálculos descritos na seção 4.2 para o eixo e para o disco, calcula a diferença radial de deslocamentos do raio externo do eixo e do raio interno do disco,  $\Delta u_r$ , e traça um gráfico dos deslocamentos em função das rotações, como mostra a Figura 19.

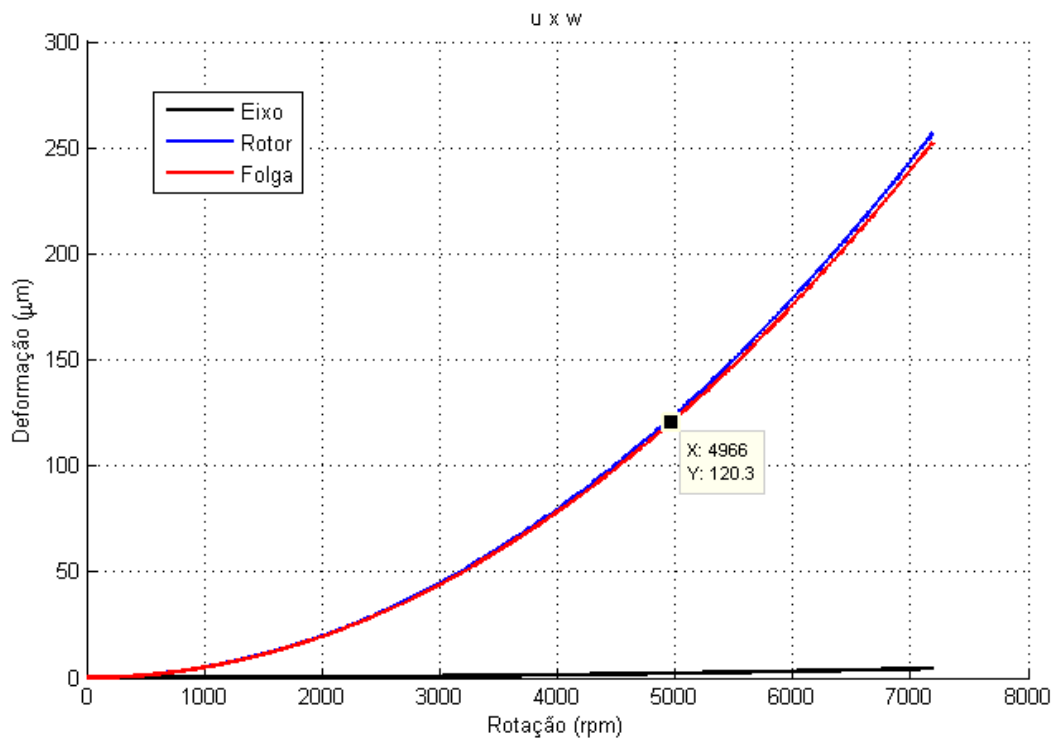


Figura 19 – Gráfico da deformação em função da rotação.

A condição necessária para se conseguir uma folga radial  $\Delta u_r$  de pelo menos  $120 \mu m$  e desmontar o disco do eixo foi a uma rotação  $\omega = 4965,6 \text{ rpm}$ , atingindo uma folga  $\Delta u_r = 120,35 \mu m$ .

Na prática, a condição de desmontagem encontrada não é viável para ser implementada, visto a grande massa dos elementos de máquina envolvidos e a alta rotação necessária para se solucionar o problema.

Surge então a necessidade de uma nova abordagem para o problema proposto. Faz-se necessário agora uma análise em elementos finitos para avaliar possíveis temperaturas que poderiam ser aplicadas no problema a fim de resolvê-lo.

### 6.3 Aquecimento Do Disco

Da necessidade de tentar uma solução no domínio térmico para o dado problema, é necessário avaliar inicialmente a melhor opção de disposição do conjunto girante, horizontal ou vertical.

Essa solução deve ser inserida em um contexto real. Se o disco for aquecido no eixo com este na posição horizontal, será necessário um mecanismo que tracione o disco de forma satisfatória para que seja possível retirá-lo do eixo quando a condição de desmontagem for alcançada. Uma possibilidade alternativa e melhor seria posicionar o conjunto montado na vertical utilizando olhais nas extremidades do eixo juntamente com uma talha ou ponte rolante. Dessa forma, o próprio peso do disco funciona como agente para desmontar o disco imediatamente quando a condição de desmontagem necessária for alcançada. Portanto, o conjunto girante será posicionado na vertical.

Deve-se avaliar agora qual a melhor posição para aplicação de temperatura e calor no disco, para que este deforme o máximo possível, sempre dentro dos limites de tensão elástica e ainda chegue à condição de desmontagem o mais rápido possível, transmitindo a menor quantidade de calor possível para o eixo.

Uma prática muito comum na indústria para efetuar esse tipo de desmontagem é a aplicação de calor por meio da chama de um maçarico em toda região radial do cubo do disco, próximo ao eixo. Isso transfere calor rapidamente para o eixo que acaba dilatando tanto quanto o disco. Como resultado dessa prática, vários eixos e outros elementos de máquina

acabam sofrendo avarias, que acarretam maiores custos ao projeto e ainda alocam grande parte do tempo na tentativa de solucionar o problema por tentativa e erro.

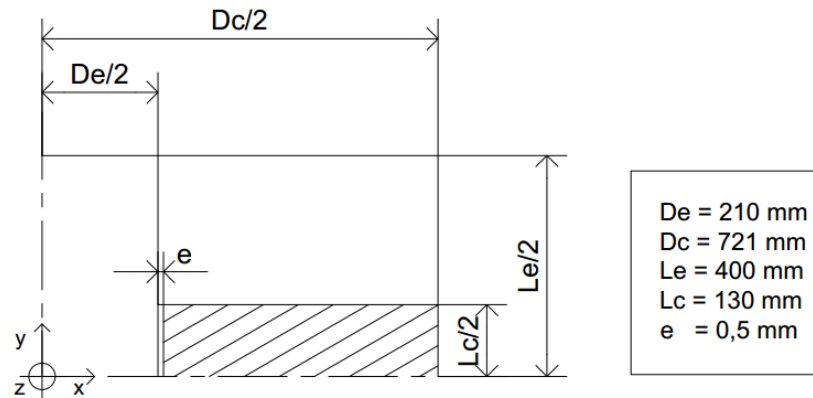
Uma forma muito mais eficaz de desmontar esse disco do eixo é aplicando calor nas extremidades do disco. Ao se aplicar calor nas extremidades, longe do cubo e do eixo, garante-se que menos calor chegue ao eixo, fazendo com que ele dilate menos que o furo do disco, o que já é uma vantagem inicial. O segundo ponto importante é que o calor sendo aplicado em toda a extremidade de uma vez, por meio de uma resistência elétrica ou outra forma de aquecimento, garante-se que a extremidade do disco vai se dilatar mais e como consequência disso, vai acabar tracionando o material que ainda está frio do disco para fora, aumentando o diâmetro do furo do disco e passando uma quantidade de calor muito menor para eixo, comparado com o que é feito na indústria atualmente.

Portanto, o calor será aplicado em toda a extremidade do disco simultaneamente por meio de uma resistência elétrica ou outra forma de aquecimento, visto que, teoricamente, é a melhor solução para o problema proposto.

Faz-se necessário agora analisar se aplicando calor nas extremidades do disco, com o conjunto montado na vertical, é possível atingir a folga mínima radial para desmontagem, que é em torno de  $120 \mu m$ . Para isso, será utilizada simulação numérica na análise, com o auxílio do software ANSYS® v.14.

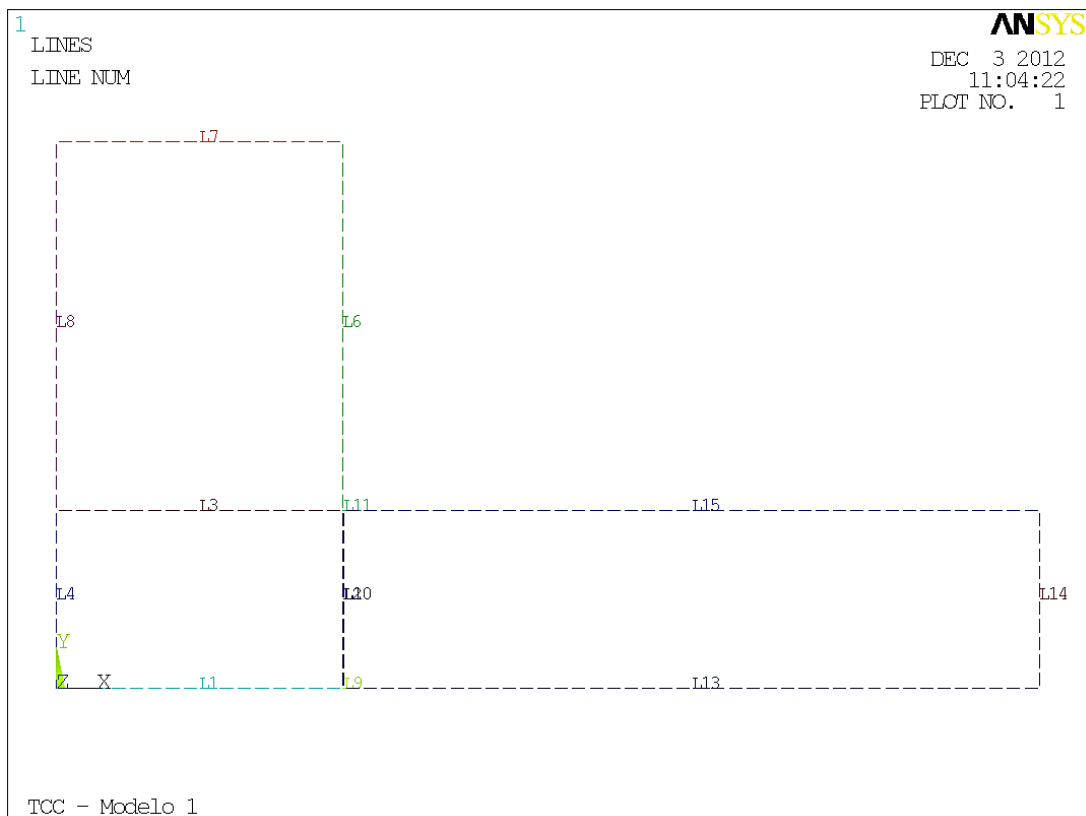
Para simplificar o modelo adotado, optou-se por utilizar axissimetria e simetria vertical, caracterizando  $\frac{1}{4}$  do modelo. Dessa forma, é possível refinar mais a malha de elementos finitos no modelo e ainda reduzir o tempo de processamento das análises. A Figura 20 ilustra o modelo adotado e apresenta suas principais dimensões.

Modelo geométrico utilizado - 1/4 do modelo



**Figura 20 – Modelo geométrico utilizado.**

A Figura 21 mostra como o modelo foi construído no ambiente de software ANSYS® Mechanical v.14.



**Figura 21 – Modelo construído no ANSYS® para solução do problema proposto.**

### **6.3.1 Mecanismos De Transferência De Calor**

Deve-se analisar quais os mecanismos de transferência de calor envolvidos na solução térmica do problema que são relevantes e influenciam na análise.

Como o calor será aplicado em toda a extremidade do disco, o carregamento térmico adotado será que a superfície da extremidade do disco é uma isotérmica e apresenta temperatura maior que a do conjunto montado.

### **6.3.2 Condução**

O mecanismo de condução térmica é, sem dúvida, o fenômeno de transferência de calor mais relevante do processo. Como os materiais utilizados são aços inoxidáveis, a parcela maior de troca de calor se dará em função da condução.

### **6.3.3 Convecção**

O ambiente externo do conjunto girante é fechado e não apresenta ventos. Portanto, deve-se avaliar a influência da transferência de calor por convecção forçada e compará-la com a convecção natural.

### **6.3.4 Radiação**

O conjunto a ser desmontado encontra-se em um grande ambiente fechado. É necessário avaliar se a transferência de calor por radiação é significativa no processo.

### **6.3.5 Elementos Finitos**

Com a definição do problema, da geometria, dos carregamentos e condições de contorno, pode-se modelar o problema por meio de elementos finitos utilizando o software ANSYS®.

Foram criadas várias macros para resolução do problema no ANSYS®. A ordem dos elementos considerados é:

- Entrada das constantes do problema, como temperatura ambiente e propriedades físicas dos materiais.
- Criação da geometria do problema no ambiente do software. Definir pontos, linhas, áreas e volumes.
- No ambiente do ANSYS®, para cada tipo de análise, térmica ou estrutural, devem-se utilizar elementos finitos adequados e que tenham os graus de liberdade (GDL) requeridos para a solução do problema. Foram escolhidos elementos com quatro nós para criação da malha. Para a solução do transiente térmico o elemento utilizado é o PLANE55. Para a solução estrutural, o elemento mais adequado é o PLANE42. Ambos suportam axissimetria e simetria vertical, apresentam os GDLs necessários para cada ambiente de solução, térmico ou estrutural e são compatíveis com a metodologia usada para acoplamento das soluções térmicas e estruturais.
- Escolha de opções essenciais ao modelo adotado, como axissimetria e simetria vertical.
- Geração da malha de elementos finitos. Deve-se tomar cuidado na criação da malha de elementos finitos.
- Definição do ambiente térmico: atribuição das propriedades físicas dos materiais ao elemento térmico utilizado, PLANE55, aplicação das condições iniciais nos nós, como temperatura e simetria vertical, definição do carregamento térmico na extremidade do disco.
- Definição do ambiente estrutural: especificação do tipo de elementos utilizado na análise para PLANE42 e escolha de opções de axissimetria e simetria vertical novamente. Atribuem-se as propriedades termoelásticas dos materiais utilizados.
- Solução Térmica Transiente: lê o ambiente térmico e efetua uma solução transiente para os parâmetros especificados. Salva os dados em um banco de dados.
- Solução Estrutural Permanente: lê o ambiente estrutural e efetua várias soluções em regime permanente para a estrutura do material, utilizando dados da solução térmica transiente para o cálculo, tendo como condição de contorno as temperaturas nodais previamente calculadas. Deve-se tomar cuidado no

aquecimento do disco para não exceder as tensões de escoamento dos materiais utilizados.

- Análise dos resultados: criação de gráficos com temperaturas nodais, deslocamentos nodais e tensões nodais traçados em função do tempo; folga radial,  $\Delta u_r$ , em todos os pontos (nós) criados na malha de elementos finitos na interface entre o eixo e o cubo traçados em função do tempo para avaliar o tempo necessário para alcançar a condição de desmontagem do conjunto.

### 6.3.6 Aplicação Do Carregamento Térmico

Uma preocupação que se deve ter ao aplicar a condição de carregamento térmico no problema é com as tensões resultantes no material.

Os carregamentos aplicados para análises transientes no ANSYS® podem ser de dois tipos: degrau ou rampa.

No tipo degrau, os carregamentos são aplicados totalmente já no primeiro passo de tempo da simulação e são usados até o final da simulação.

No tipo rampa, os carregamentos são interpolados linearmente (rampa) em cada passo da simulação até atingir o carregamento total no último passo da simulação.

A Figura 22 ilustra a diferença entre uma entrada rampa e uma entrada degrau.

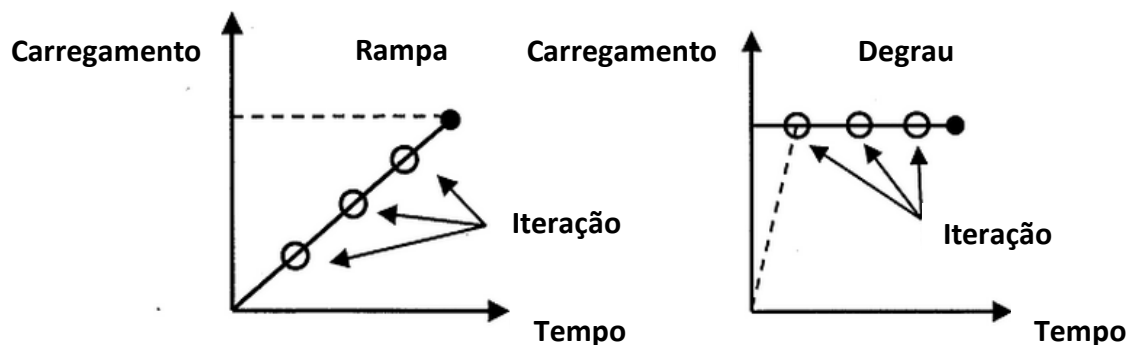


Figura 22 – Entradas rampa e degrau, respectivamente. Adaptado de Chapter 16: Convergence of Nonlinear Analysis (2012).

Para o carregamento de temperatura constante aplicado nas extremidades do disco, uma entrada degrau pode causar tensões muito altas no material, podendo ocorrer deformação plástica e até fraturas. Uma entrada rampa demora mais para atingir o carregamento de

temperatura final, no entanto, as tensões causadas são muito menores, pois o calor difunde-se na peça aliviando um pouco das tensões nos materiais.

### 6.3.7 Condições De Contorno

As condições de contorno adotadas na simulação no software ANSYS® são:

- Temperatura inicial de todos os nós é de 300 K.
- Os efeitos de convecção natural nesse problema são muito mais significativos que os de convecção forçada.
- A convecção natural pode ser desprezada no eixo já que a diferença de temperatura da superfície do eixo com o ar é insignificante.
- A convecção natural é significativa nas extremidades do disco e nas áreas superior e inferior próximo à borda somente se a superfície estiver livre e não tiver isolamento térmico.
- A perda de calor por radiação térmica é da mesma ordem de grandeza que a convecção térmica, sendo assim, significativa para o problema somente se a superfície não estiver isolada.
- Foi adotado que a resistência elétrica utilizada no aquecimento das extremidades do disco tem potência variável (consegue-se aplicar uma entrada rampa no sistema) e está devidamente isolada para evitar perdas de calor para o ambiente.
- As superfícies próximas à resistência de aquecimento também foram isoladas termicamente para evitar perda de calor por convecção e radiação.
- A condução térmica é o principal e mais relevante mecanismo de troca de calor no problema proposto, dado todas as hipóteses e condições consideradas.

### 6.4 Modelagem Da Película De Óleo

A espessura da película de óleo resultante da aplicação do lubrificante para reduzir o atrito entre o eixo e o cubo do disco foi modelado da seguinte forma:

- A película foi considerada na simulação numérica como um elemento sólido elástico de espessura  $e = 0,5 \text{ mm} = 500 \mu\text{m}$  e comprimento  $L_c = 130 \text{ mm}$ .

- As propriedades mecânicas da película foram definidas de modo que a rigidez da película fosse insignificante se comparada com a rigidez dos aços inoxidáveis utilizados no eixo e no cubo. Desse modo, o filme de óleo não teria relevância nas deformações e tensões mecânicas analisadas.
- O coeficiente de dilatação térmico, a densidade, a condutividade térmica e o calor específico de referência adotados foram retirados de tabelas de propriedades de óleos lubrificantes.

Os graus de tolerância-padrão do diâmetro interno do disco e do diâmetro externo do eixo são, respectivamente, IT6 e IT5, apresentando uma rugosidade média superficial  $Ra = 0,8 \mu m$ . Se a película de óleo no ajuste tiver espessura de cerca de cinco vezes a rugosidade média das superfícies, essa película pode ter até  $5 \mu m$  de espessura. Como o ajuste é interferente, logo após a montagem do disco no eixo, com a perda de temperatura, o disco contrai-se. O óleo então vaza do cubo como resultado da compressão pelo disco que se contrai com o resfriamento.

Devido à falta de literatura com relação à modelagem dessa película nas especificações dadas, há a necessidade de se efetuar testes para determinar o valor e as propriedades térmicas da película de forma experimental para que os resultados finais estejam o mais próximos do real. Dada a impossibilidade de tais testes serem realizados no período, assumiu-se a hipótese de que a espessura real da película de óleo que fica na interface do eixo com o disco seja da ordem de  $5 \mu m$ .

No modelo geométrico foi utilizada uma espessura de  $500 \mu m$  para facilitar a visualização da solução do problema no software ANSYS®. No entanto, as propriedades físicas do material devem ser ajustadas para que se tenha uma correlação adequada. Para isso, foram modificadas as seguintes propriedades físicas:

- Calor específico: foi adotado um valor 10 vezes menor que o do óleo para compensar pelo aumento volumétrico do elemento utilizado no modelo computacional. Portanto,  $c_p$  antes tinha módulo igual a 1909. Após essa compensação,  $c_p = 190,9 J/kg K$ .
- Condutividade térmica: foi adotado um valor 10 vezes maior que o do óleo, pois como a película no modelo computacional é bem maior que a estimada na realidade, a película na simulação numérica deve conduzir mais calor para

compensar o gradiente térmico no elemento. A condutividade térmica  $k$  final com a compensação é  $k = 1,45 \text{ W/mK}$ .

A Tabela 5 apresenta um resumo das propriedades adotadas para a película modelada no ANSYS®.

**Tabela 5 – Propriedades da película de óleo modelada na simulação em elementos finitos. Adaptado de ÇENGEL (2009).**

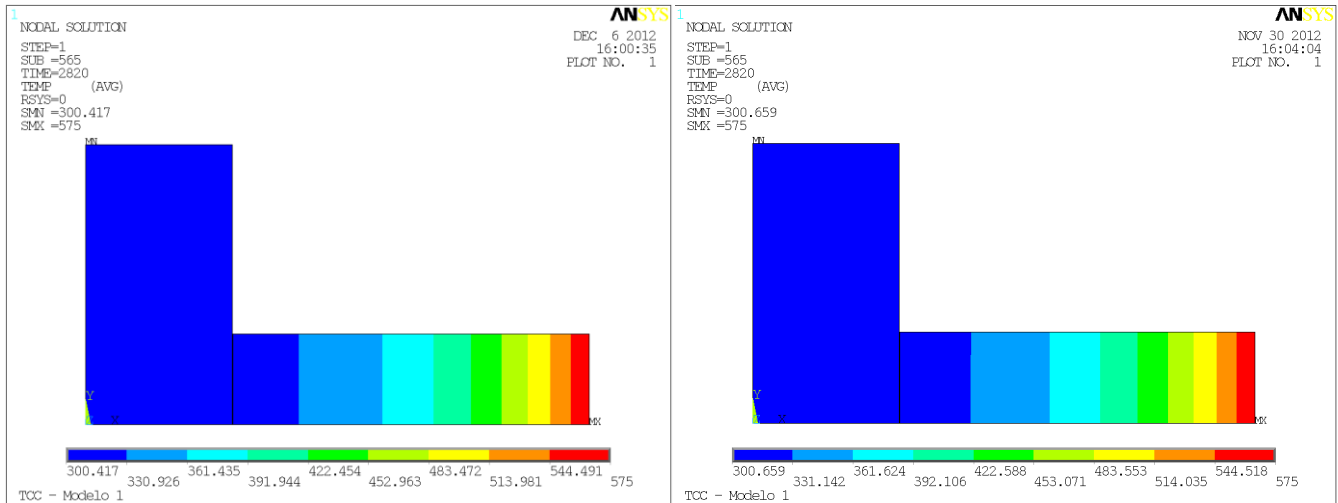
Propriedades - Película de Óleo Modelada no ANSYS			
Propriedade	Símbolo	Valor	Unidade
Módulo de Elasticidade	E	0,20	MPa
Coefficiente de Poisson	$\nu$	0,32	-
Densidade	$\rho$	884	kg / m <sup>3</sup>
Calor Específico	Cp	190,90	J / kg K
Condutividade Térmica	k	1,45	W / m K
Coefficiente de Dilatação Térmica Linear	$\alpha$	7,00E-04	1 / K

A Tabela 6 apresenta um comparativo entre as propriedades térmicas de um óleo real e da película modelada no estudo.

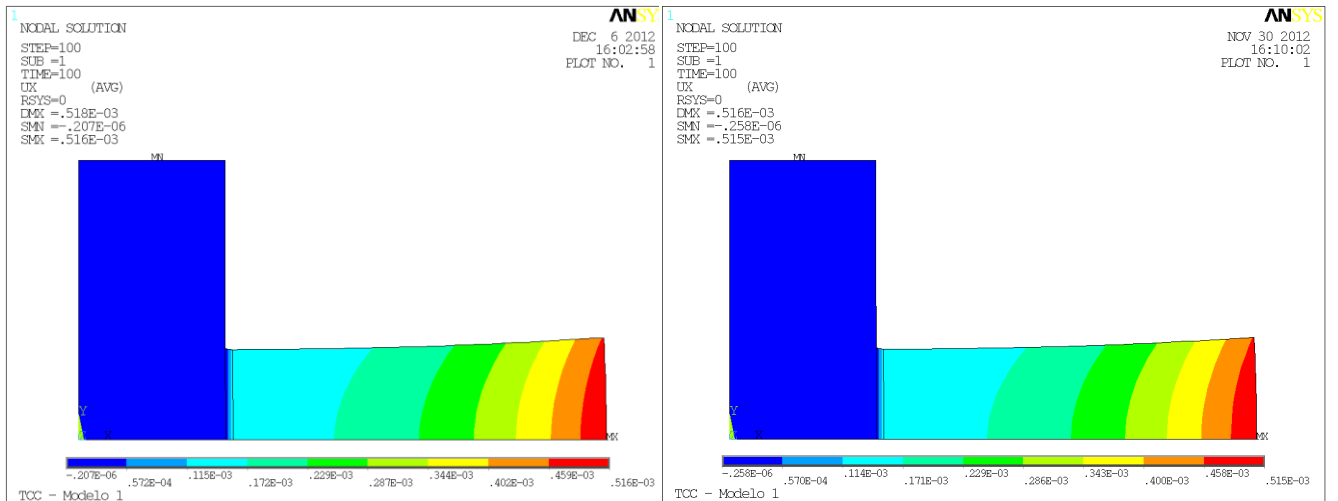
**Tabela 6 – Comparativo entre as propriedades térmicas de um óleo real e da película modelada no estudo. Adaptado de ÇENGEL (2009).**

Comparação - Propriedades de um Óleo Real X Película Modelada				
Propriedade	Símbolo	Óleo de Motor	Película Modelada	Unidade
Densidade	$\rho$	884	884	kg / m <sup>3</sup>
<b>Calor Específico</b>	<b>Cp</b>	<b>1909,00</b>	<b>190,90</b>	<b>J / kg K</b>
<b>Condutividade Térmica</b>	<b>k</b>	<b>0,15</b>	<b>1,45</b>	<b>W / m K</b>
Coefficiente de Dilatação Térmica Linear	$\alpha$	7,00E-04	7,00E-04	1 / K

Para se comparar os efeitos causados utilizando as propriedades de um óleo real e as propriedades adotadas na película modelada, tem-se o resultados comparativos da simulação dados abaixo. A Figura 23 apresenta os resultados do gradiente térmico nas peças no tempo de 2820 segundos, sendo a imagem da esquerda os resultados da simulação utilizando as propriedades reais de um óleo e a imagem da direita os resultados da simulação com as propriedades da película modelada. A Figura 24 apresenta a comparação dos deslocamentos nodais das peças no tempo 2820 s resultantes utilizando as propriedades de um óleo de motor real, à esquerda, e as propriedades da película modelada, à direita. Nota-se que as diferenças são muito pequenas e podem ser desprezadas.



**Figura 23 – Comparação dos gradientes térmicos nas peças no tempo 2820 s resultantes utilizando as propriedades de um óleo de motor real, à esquerda, e as propriedades da película modelada, à direita.**



**Figura 24 – Comparação dos deslocamentos nodais nas peças no tempo 2820 s resultantes utilizando as propriedades de um óleo de motor real, à esquerda, e as propriedades da película modelada, à direita.**

## 7 RESULTADOS

O problema foi simulado utilizando-se o Método dos Elementos Finitos no pacote computacional ANSYS®.

Foram selecionadas várias temperaturas para desmontagem, todas maiores que a temperatura de montagem que é de 120 °C, equivalente a 393 K.

É necessário deixar claro a terminologia utilizada nesta etapa de solução. Foi definido como “Tempo de Aquecimento” o tempo total necessário para aplicar totalmente o carregamento em uma entrada rampa. Por exemplo, se o tempo de aquecimento é 600 segundos, a temperatura de carregamento é 500 K e a temperatura inicial é 300 K, isso implica que a temperatura de carregamento será aplicada aos poucos, linearmente por meio de uma interpolação linear e atinge os 500 K somente aos 600 segundos. No tempo igual a 300 segundos, a temperatura aplicada será de 400 K. Se o tempo de aquecimento é igual a zero, significa que o tipo de entrada aplicada foi a degrau, e, portanto, já no instante inicial o carregamento total foi aplicado, resultando em um tempo de aquecimento “instantâneo”.

Foi definido como “Tempo de Desmontagem” o tempo total gasto para desmontar o conjunto, ou, o tempo final em que a condição de desmontagem da união eixo-cubo é atingida. A condição de desmontagem é a folga radial necessária para desmontagem do conjunto e foi calculada anteriormente em  $\Delta u_r = 120 \mu m$ . Quando o sistema chega nessa condição, o disco pode ser retirado do eixo sem causar danos aos elementos de máquina do sistema. No desenvolvimento da solução, escolheu-se a configuração em que o conjunto girante está na vertical e, portanto, o sistema desmonta automaticamente ao atingir a condição de folga radial. Por exemplo, se o tempo de desmontagem é de 2600 segundos, significa que o conjunto pode ser desmontado tranquilamente depois de 2600 segundo da aplicação de calor nas extremidades.

No caso em que o tempo de aquecimento é 600 s, o tempo de desmontagem é 2600 s e a temperatura aplicada na extremidade é 500 K, tem-se que o calor começa a ser aplicado no sistema e após 600 s do início, a temperatura chega ao carregamento total de 500 K e 2000 segundos após atingir os 500 K a peça desmonta, totalizando 2600 s, que é o tempo total gasto para desmontar o conjunto.

No caso em que o tempo de aquecimento é 3600 s, o tempo de desmontagem 3000 s e a temperatura aplicada nas extremidades é 600 K, o que ocorre é que a união eixo-cubo desmonta antes da temperatura nas extremidades atingir os 600 K. O sistema levaria 3600 s para chegar à temperatura de 600 K na extremidade, no entanto, antes de atingir os 3600 s o conjunto atingiu a condição de desmontagem, conseguindo a solução esperada em 3000 s e, portanto, em uma temperatura da superfície da extremidade menor que 600 K.

O tempo de aquecimento foi simulado numericamente para diversos valores até obter tensões nos materiais que ficassem abaixo do limite de escoamento para tentar reduzir ao máximo o tempo gasto para desmontar o conjunto. Essa tensão limite de escoamento permitida no material foi definida como “Tensão de Escoamento”.

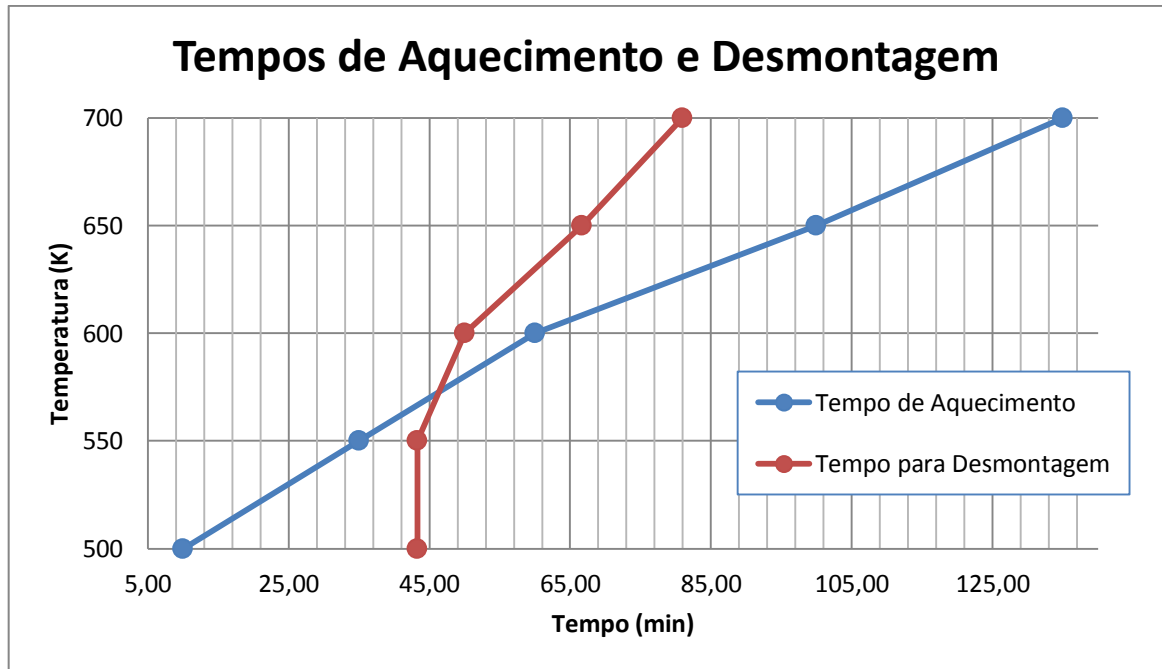
Foi definida como “Tensão Máxima Simulada” a máxima tensão verificada por meio da análise numérica do ANSYS® para a dada temperatura e dado tempo de aquecimento.

Os resultados simulados por meio do método dos elementos finitos estão mostrados na Tabela 7, juntamente com suas respectivas condições, como temperatura, tempo de aquecimento e tensão de escoamento, e também com os resultados obtidos, tempo de desmontagem e tensão máxima simulada.

**Tabela 7 – Tempos de Desmontagem Calculados.**

<b>Tempos de Desmontagem Calculados</b>						
Temperatura	Tempo de Aquecimento		Tempo de Desmontagem		Tensão de Escoamento	Tensão Máx. Simulada
	(K)	(s)	(min)	(s)		
500	600,00	10,00	2600,00	43,33	380	376
550	2100,00	35,00	2600,00	43,33	375	365
600	3600,00	60,00	3000,00	50,00	370	368
650	6000,00	100,00	4000,00	66,67	355	347
700	8100,00	135,00	4860,00	81,00	350	347

A Figura 25 mostra as temperaturas aplicadas em função do tempo de aquecimento e montagem calculados numericamente.



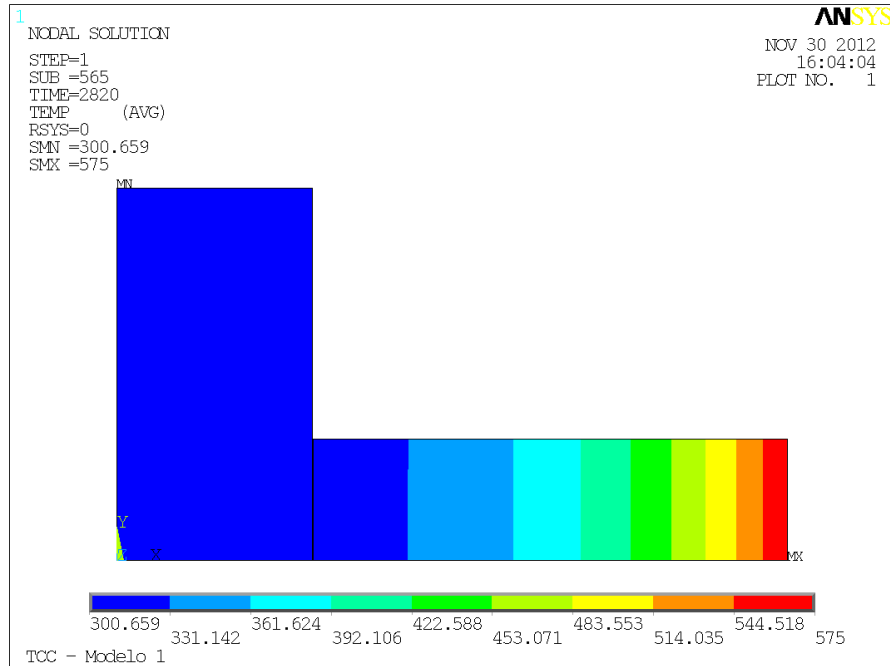
**Figura 25 – Tempos de aquecimento e desmontagem.**

Nota-se que o ponto em que as curvas de tempo de aquecimento e tempo para desmontagem se cruzam é um ponto único em que o tempo de aquecimento será igual ao tempo de desmontagem. A temperatura ótima escolhida para ser aplicada é de aproximadamente 575 K, sendo o tempo de aquecimento igual ao tempo de desmontagem, que é aproximadamente 47 minutos.

Uma das características mais poderosas do ANSYS® é a possibilidade de criação de macros. Uma macro é uma sequência de comandos do software gravados em um arquivo e que podem ser executados como um comando regular a qualquer momento no software ANSYS®. Foi desenvolvida uma macro especificamente para a resolução do problema utilizando-se a temperatura escolhida.

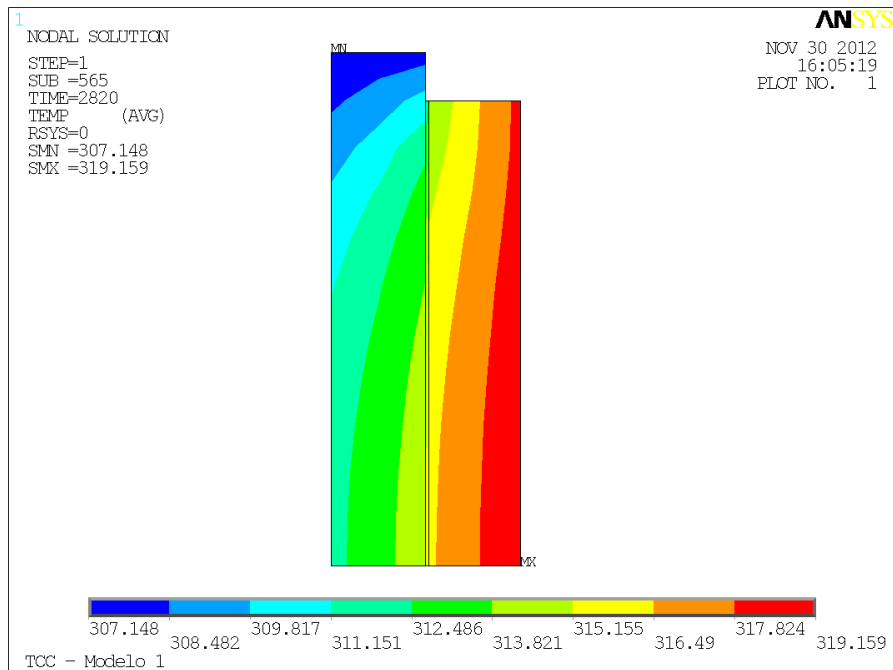
Utilizando a temperatura de 575 K e o tempo de aquecimento de 2820 s, obteve-se o tempo de desmontagem de 2820 s aproximadamente. As imagens a seguir mostram resultados da simulação feitos no ANSYS® para esse caso particular de desmontagem da união eixo-cubo.

A Figura 26 mostra o gradiente de temperaturas no interior das peças no momento da desmontagem, que é o momento em que a temperatura na borda atinge 575 K.



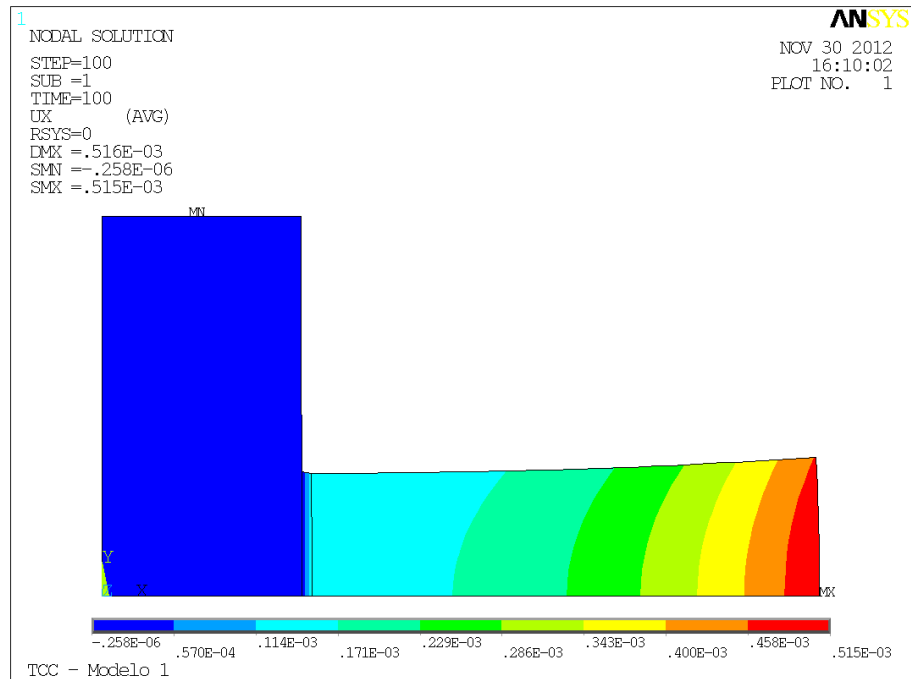
**Figura 26 – Gradiente de temperaturas no interior das peças no momento da desmontagem.**

A Figura 27 mostra o gradiente de temperaturas na região de interface entre o eixo e o cubo do disco no tempo 2820 s.



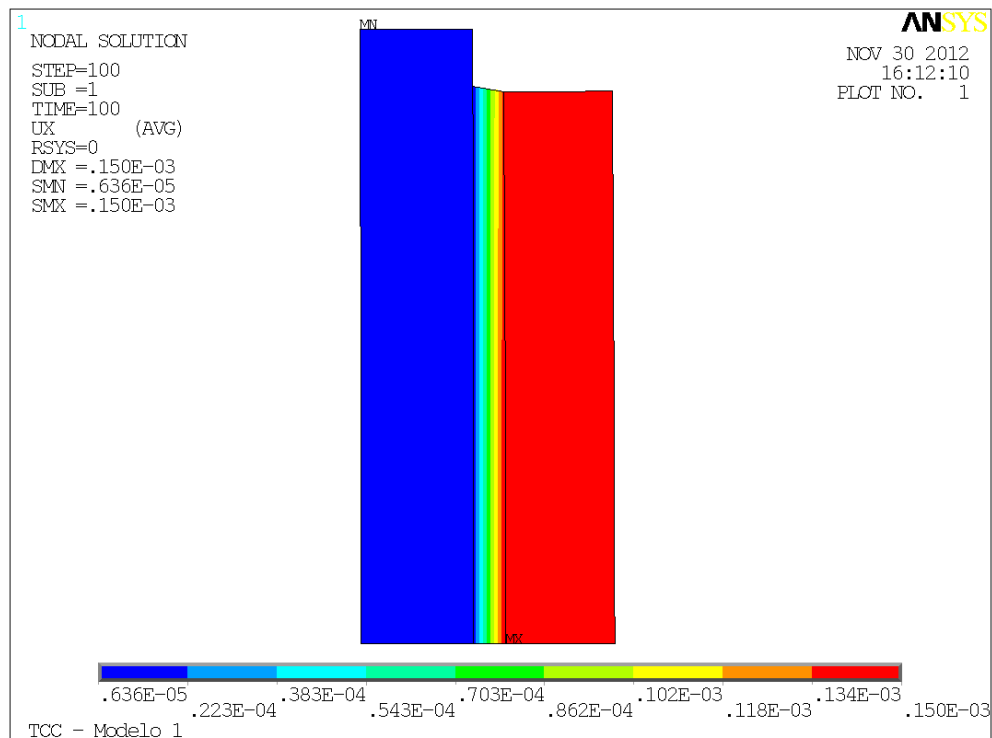
**Figura 27 – Gradiente de temperaturas na região de interface entre o eixo e o cubo do disco no momento da desmontagem.**

A Figura 28 mostra os deslocamentos nodais para as peças no tempo 2820 s.



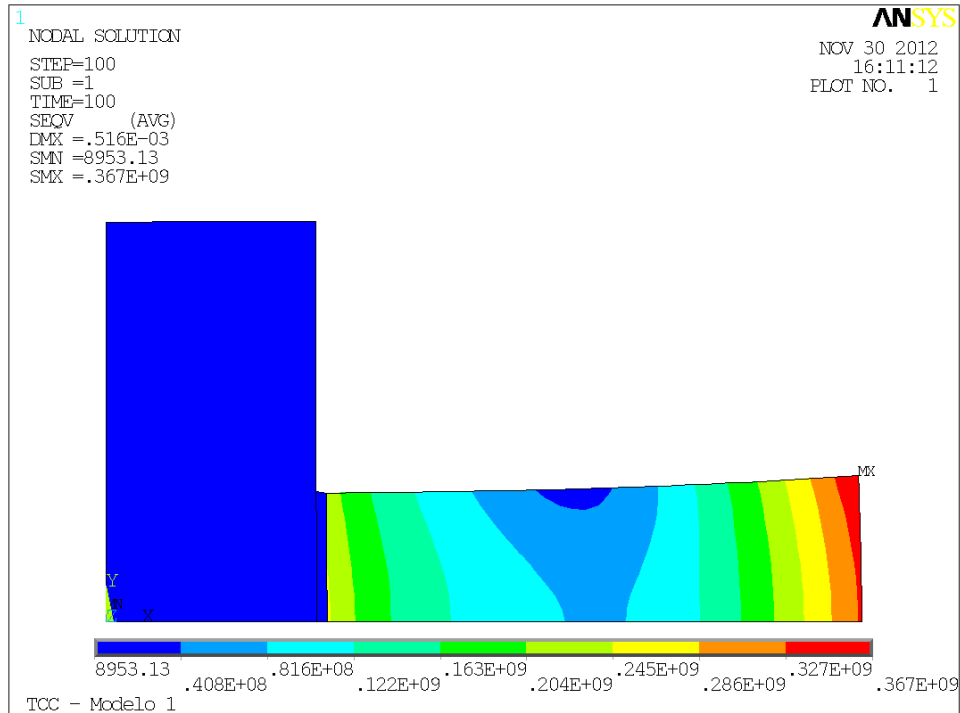
**Figura 28 – Deslocamentos nodais no momento da desmontagem.**

A Figura 29 mostra os deslocamentos nodais na região de interface entre o eixo e o cubo do disco no tempo 2820 s.



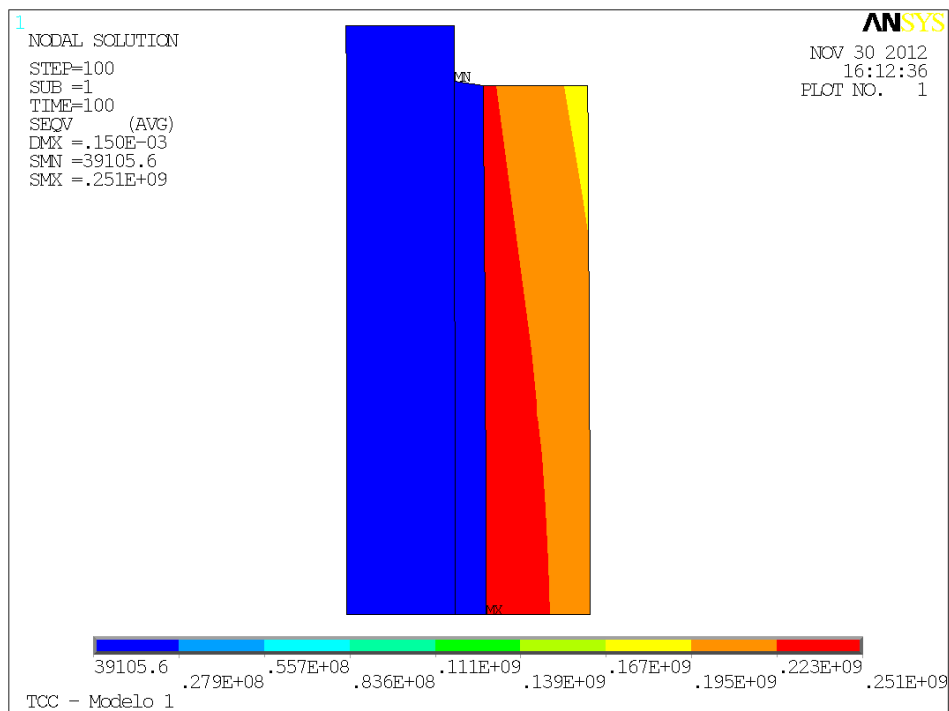
**Figura 29 – Deslocamentos nodais na região de interface entre o eixo e o cubo do disco no momento da desmontagem.**

Na Figura 30 estão apresentadas as tensões de Von Mises das peças no tempo 2820 s.



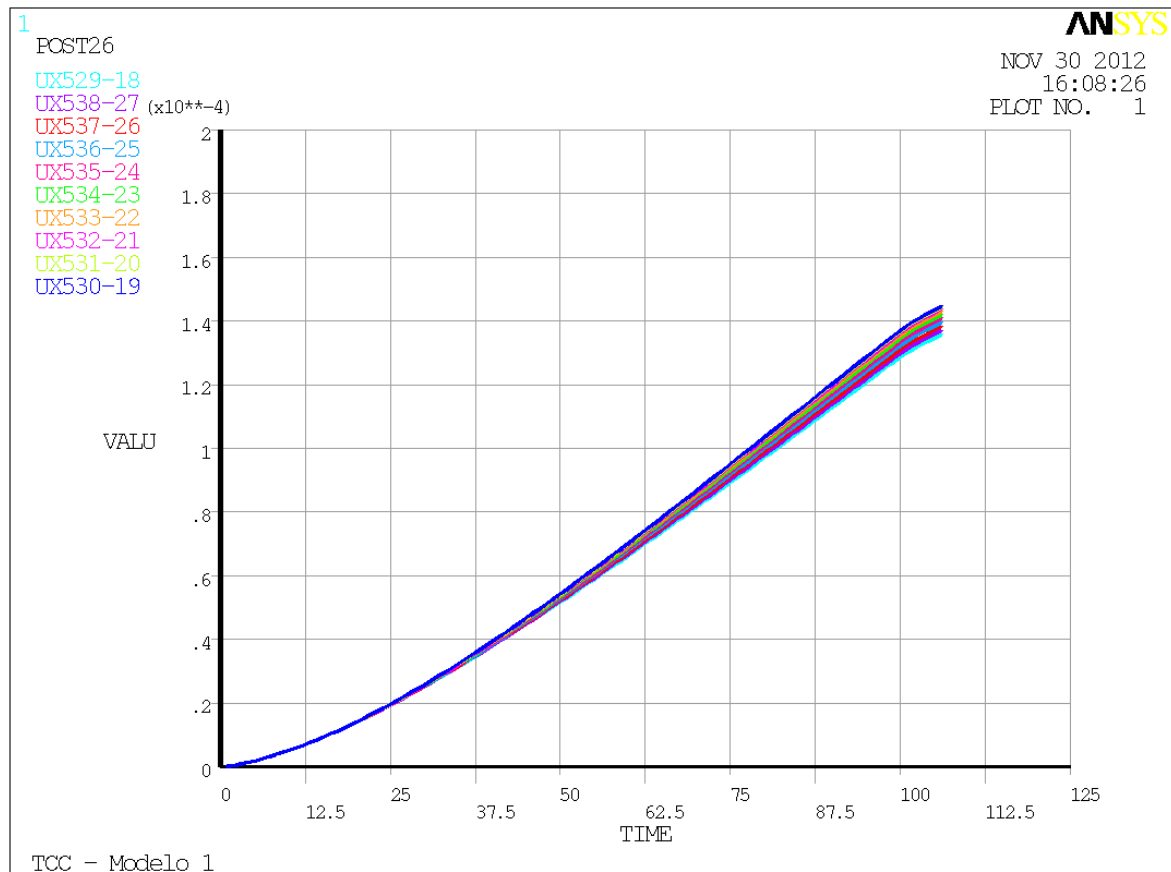
**Figura 30 – Tensões de Von Mises das peças no momento da desmontagem.**

Na Figura 31 estão apresentadas as tensões de Von Mises na região de interface entre o eixo e o cubo no tempo 2820 s.



**Figura 31 – Tensões de Von Mises na região de interface entre o eixo e o cubo no momento da desmontagem.**

A Figura 32 mostra as folgas radiais calculadas nos nós da interface entre o diâmetro externo do eixo e o diâmetro interno do disco em função do tempo. Nota-se que a condição de desmontagem é atingida quando todas as folgas radiais dos nós ultrapassam o valor de  $120 \mu\text{m}$ . É importante notar que cada unidade da escala de tempo da Figura 32 equivale a 28,2 segundos de tempo e, portanto, o valor de 100 unidades na figura corresponde a 2820 segundos.



**Figura 32 – Folgas radiais calculadas nos nós da interface entre o diâmetro externo do eixo e o diâmetro interno do disco em função do tempo.**

É possível observar que diversas soluções foram encontradas, sendo essa a solução em que o tempo de aquecimento se iguala ao tempo de desmontagem para o problema proposto, possibilitando assim a desmontagem do conjunto sem danificar suas peças.

## 8 CONCLUSÕES

Neste Trabalho de Conclusão de Curso foi desenvolvido um estudo baseado em um problema real da indústria metalúrgica / mecânica. Dado o problema de desmontagem da união eixo-cubo montada com ajuste interferente transversal, foram propostas algumas soluções possíveis para o problema.

O processo de desmontagem mais viável encontrado foi o aquecimento do diâmetro externo do disco por meio de uma temperatura uniformemente variada. Uma propriedade importante que deve ser verificada durante toda simulação em elementos finitos é a tensão nos materiais dos elementos de máquinas. Deve-se tomar cuidado para que essas tensões não ultrapassem o limite das tensões de escoamento e ruptura, para garantir que a peça não sofrerá deformações plásticas ou rupturas. O cuidado com as tensões nas peças foi um dos fatores que complicou a análise, pois foi verificado, com a simulação no ANSYS®, que as temperaturas necessárias para desmontagem excediam em muito as tensões de escoamento. Para resolver esse problema, optou-se pelo aquecimento gradual e linear das extremidades até a temperatura necessária, pois dessa forma, as tensões seriam gradualmente transmitidas pelas peças e não excederiam os limites elásticos. Essa forma de aquecimento na prática só é possível devido ao controle da potência da resistência elétrica usada no aquecimento. O problema das tensões nos materiais das peças foi resolvido, no entanto, o tempo necessário para desmontagem efetiva do conjunto aumentou muito. Com os dados obtidos nas diversas simulações feitas, foi possível verificar a existência de uma temperatura para desmontagem que garante o tempo de aquecimento igual ao tempo de desmontagem, sendo essa temperatura cerca de 575 K e o tempo de desmontagem de aproximadamente 2820 segundos, ou, 47 minutos. Pôde-se então mostrar os resultados dos gradientes térmicos, deslocamentos nodais e tensões resultantes nas peças para a condição dada no processo de desmontagem.

Portanto, foi possível determinar as melhores condições para desmontagem do conjunto e mostrar que o aquecimento uniforme das extremidades do disco é a maneira mais eficiente de se aplicar calor nesse processo.

Devido à falta de literatura para modelagem da espessura de óleo no modelo proposto, propõe-se que sejam feitos testes reais para obtenção de valores reais de espessura e das

propriedades físicas envolvidas no problema proposto a fim de conseguir maior precisão e validar os resultados obtidos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABNT. **NBR 6158: Sistema de Tolerâncias e Ajustes**. Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Normas Técnicas, 1995.

ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos: Primeiros Passos**. 2. ed. Campinas: Editora Unicamp, 2003.

ÇENGEL, Y. A. **Transferência de Calor e Massa: uma abordagem prática**. 3. ed. [s.l.]: Mc Graw Hill, 2009.

**Chapter 16: Convergence of Nonlinear Analysis**. National Cheng Kung University. Disponível em: <[http://office.es.ncku.edu.tw/leehh/ANSYS/ANSYS/CAE\\_Course/Chap16\\_Nonlinear/KBC.htm](http://office.es.ncku.edu.tw/leehh/ANSYS/ANSYS/CAE_Course/Chap16_Nonlinear/KBC.htm)>. Acesso em: 12 nov. 2012.

INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P.; **Fundamentals of Heat and Mass Transfer**. 7. ed. [s.l.]: John Wiley & Sons, 2012.

NIEMANN, G. **Elementos de Máquinas**. Rio de Janeiro: Edgard Blucher LTDA, 1971.

PROENÇA, S. P. B. **Curso de Resistência dos Materiais: notas de Aulas – Volume II**. São Carlos: EESC, 2003.

ROLLED ALLOYS. **Datasheet Zeron 100**. n. 104. Estados Unidos, 2009.

STEEL FOUNDER'S SOCIETY OF AMERICA. **Steel Castings Book: Supplement 8 High Alloy Data Sheet Corrosion Series.** [s.l.]: Steel Founder's Society of America, 2004.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Theory of Elasticity.** 3.ed. [s.l.]: Mc Graw Hill. 1980.