BRUNO LUIZ DE MIRANDA SANTOS

MEDIDAS DE RISCO EM CARTEIRAS DE ATIVOS FINANCEIROS

Trabalho de Formatura apresentado à
Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo para a obtenção do Diploma
de Engenheiro de Produção

SÃO PAULO
2007

BRUNO LUIZ DE MIRANDA SANTOS

MEDIDAS DE RISCO EM CARTEIRAS DE ATIVOS FINANCEIROS

Trabalho de Formatura apresentado à
Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo para a obtenção do Diploma
de Engenheiro de Produção

Orientadora:
Profª Drª Celma de Oliveira Ribeiro

SÃO PAULO
2007

FICHA CATALOGRÁFICA

Santos, Bruno Luiz de Miranda
Medidas de risco em carteiras de ativos financeiros / B.L.M.
Santos. -- São Paulo, 2007.
87 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo. Departamento de Engenharia de Produção.

1.Finanças 2.Pesquisa operacional 3.Otimização estocástica
I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.
Departamento de Engenharia de Produção II.t.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha família.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Edson Ferreira dos Santos e Márcia Maria de Miranda e Silva Santos pela oportunidade de estudar nesta gloriosa escola.

À professora Celma de Oliveira Ribeiro, pela orientação e pelo constante estímulo transmitido durante todo o trabalho.

Ao meu irmão Eduardo José de Miranda Santos pelo exemplo de garra e perseverança no estudo da engenharia.

A todos que fizeram parte direta ou indiretamente para a produção deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de estudar os modelos de otimização de carteiras de investimento utilizando diferentes medidas de risco. Primeiramente, foi estudado o problema de alocação de capital em carteiras exclusivamente de ações utilizando os modelos de Markowitz, Minimax, Konno e CVaR (Valor em Risco Condicional). Estes modelos permitem a construção de uma fronteira eficiente onde fica ilustrado a minimização do risco medido através da variância, desvio padrão absoluto e CVaR, respectivamente, para cada retorno exigido.

Num segundo momento, opções de ações são introduzidas nos modelos. Esta estratégia tem o objetivo de estudar o efeito destes derivativos nas carteiras de ações. Diversos testes foram feitos para a projeção dos preços dos ativos, para o qual foi utilizado simulação.

Os resultados se demonstraram positivos. As carteiras geradas com ações e opções atingiram a meta de minimizar a perda do investidor para um dado nível de retorno exigido. Os modelos estudados provaram-se consistentes e eficientes, tornando possível sua adoção na gestão financeira de carteiras de investimento puramente de ações ou também com opções.

ABSTRACT

This work has the goal of studying the optimization of investment portfolios using different risk measuring methodology approaches. First of all, the problem of capital allocation in a portfolio of stocks was dealt with by using the models: Markowitz; Konno; Minimax; and CVaR (Conditional Value-at-Risk). Those models permit the construction of an efficient frontier, on which the minimization of the risk level, measured by Variance, Average Absolute Deviation and CVaR for a given minimum return level, is represented.

In a second moment, stock options were put into the models. This strategy has the goal of studying the effects of derivatives on portfolios of stocks. Several price projections are put to the test using the simulation.

The results of the models are positive. Portfolios of stocks and stock options were made in order to minimize the investor loss. The models were proven consistent and efficient, making its adoption by the management of investment portfolios with stocks and stock options possible.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

APÊNDICES

1 INTRODUÇÃO

Desde a publicação do artigo *Portfolio Selection*, em março de 1952, por Harry Markowitz, base da Teoria Moderna de Porfolio, houve avanços significativos nos estudos de alocação ótima de capital em ativos de uma carteira de investimento. Atualmente, existem inúmeros modelos de otimização que têm por objetivo definir a composição de uma carteira que satisfaça a rentabilidade mínima imposta pelo investidor e minimiza o nível de risco. Tal risco pode ser mesurado por meio da variância da carteira; desvio absoluto; VaR (*Value at Risk*); ou CVar (*Conditional Value at Risk*), dentre várias outras medidas de risco desenvolvidas para tal finalidade.

Outra evolução considerável no mercado em geral foi o desenvolvimento dos derivativos, ativos financeiros cujo preço depende de um outro ativo, como moedas, commodities ou ações, dentre outros. Tais produtos financeiros podem ser utilizados como ferramentas na tentativa de minimização do risco de carteiras, podendo com eles, se produzir inúmeras estratégias de investimento. Entretanto, com a inserção de tais ativos, há também, um aumento na complexidade e dificuldade operacional dos modelos de otimização, assim com perda de eficiência computacional.

Neste trabalho, o objetivo é expor as diferentes formas de modelar a relação entre risco e retorno que envolve a decisão de quanto investir em ativo financeiro. Serão utilizados como referência os trabalhos desenvolvidos por KONNO (1991), RIBEIRO (2003), RUSSI (2005), TOPOLOGLOU (2004), DUARTE JÚNIOR (2005), DENG (2005), BERGAMASCO (2006) e FERREIRA (2006).

Tal estudo, entretanto, não se aplica exclusivamente a abordagem financeira, podendo ser utilizado em qualquer empresa, de qualquer setor, que tenha o objetivo de alocar seu capital, ou mesmo seus recursos produtivos, de forma otimizada dentre um carteira de produtos, o que torna este trabalho interessante do ponto de vista industrial.

A abordagem adotada e desenvolvida neste trabalho foi elaborada por meio do estudo de diversos temas, dentre estes: Teoria Moderna de Carteira, métodos numéricos de simulação, estudo das características dos ativos e produtos derivativos do mercado de capitais, metodologias de aferição de risco em de ativos financeiros, apreçamento de opções, estratégias de *hedge* em carteiras de investimento, otimização linear e quadrática. Todos estes temas encontram se devidamente consolidados no presente trabalho, representando portanto, uma contribuição para o estudo de otimização de carteiras de investimento.

1.1 Motivação

Este trabalho justifica-se pelo aumento da importância do mercado de capitais para empresas em geral no que diz respeito à seleção de portifolio de investimento em mercado financeiro organizado. Atualmente o Brasil vive a consolidação de sua economia e com isto, de seu mercado financeiro. A elaboração de regras modernas, que trazem transparência e segurança aos investidores, explica o rápido desenvolvimento do mercado de capitais.

Este mercado vem ganhando cada vez mais importância junto a empresas, tanto financeira como não financeiras, que desejam aplicar seu excedente de caixa ou mesmo suas provisões técnicas relativas a exercícios futuros, no mercado de capitais, na tentativa de maximizar seus ganhos. Logo, o sucesso de empresas de diversos setores está cada vez mais relacionado com a dinâmica dos mercados financeiros e como esta empresa está preparada para avaliar as diversas estratégias de investimento, financiamento e gestão de risco.

O grande aumento de meios de investimentos financeiros, assim como a expressiva evolução dos modelos de otimização, encontrados atualmente na literatura, já torna explicito o grande interesse por parte de diferentes agentes deste setor. Com isto, a análise e seleção de investimentos, e também, o conhecimento das técnicas mais modernas de otimização, tornam-se indispensáveis para o auxílio à tomada de decisão de investimento cuja finalidade é maximizar os retornos e minimizar os riscos incorridos na exposição a este mercado.

Para tal este trabalho tenta consolidar de foram padronizada o resultado de vários modelos de otimização de retorno e risco em carteiras de investimento, usando, para tal fim, diferentes produtos do mercado financeiro como: certificados de depósito interbancário, utilizado como ativo livre de risco; ações de empresas listadas na Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA); e por fim, opções listadas na Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F).

1.2 O Estágio

O estágio foi desenvolvido na empresa M. Safra & Co., na área de análise de ativos de renda variável, mais especificamente, ações de empresas listadas na Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA).

A M. Safra & Co. foi fundada em 1999, inicialmente voltada apenas para o mercado de renda fixa, posteriormente ingressaria nos mais diversos mercados de investimento nacionais e internacionais, possuindo escritórios em São Paulo e em Nova York, EUA.

O estágio teve como principal área a análise de ações dos setores de saúde e telecomunicação, posteriormente agregando os setores de: bens de capital, educação, farmacológicos e de tecnologia. Cada setor possuindo peculiaridades para efeito de modelagem. Foram desenvolvidos modelos de aferição de preços de ações, assim como, estudos setoriais onde o autor pode aplicar boa parte do conhecimento trazido das aulas de Engenharia de Produção da Escola Politécnica de São Paulo.

A equipe de renda variável, com é conhecida, é composta de oito pessoas que administram posições financeiras para a aplicação exclusivamente em ações. Tal equipe e propriamente dividida entre analistas e operadores de mercado financeiro. Tal equipe, composta por profissionais extremamente preparados e experientes foi fundamental para compreensão dos modelos neste trabalho estudados, assim como das características de produtos do mercado financeiro, como por exemplo as opções.

O estágio permitiu ao autor aprofundar e expandir seu conhecimento sobre o mercado financeiro, seus detalhes, características de diferentes tipos de produtos, métodos quantitativos e qualitativos de auxílio à tomada de decisão.

1.3 Organização do Trabalho

O trabalho é organizado em seis partes básicas. A premissa básica é consolidar uma base teórica, apresentar as aplicações práticas desta teoria, e assim acrescentar a contribuição ao tema.

No Capítulo 1 serão apresentados os objetivos do trabalho assim como uma breve introdução ao tema proposto. Serão também descritos o estágio e a motivação para tal projeto.

A parte teórica é apresentada no capítulo 2, onde são introduzidos os conceitos fundamentais de finanças e dos mercados financeiros. Após uma breve introdução, são discutidos os principais conceitos que envolvem os mercados financeiros, ações, opções, aferição de preço de opções, proteção *(hedge)* de carteiras e os principais participantes do mercado de capitais. Posteriormente serão apresentados conceitos como Teoria Moderna de Portfolios, marco fundamental da teoria de finanças. E por fim serão detalhados os conceitos básicos de Risco aplicado ao mercado, e as suas principais métricas.

No Capítulo 3 são descritos os principais modelos matemáticos para a seleção de ativos na composição ótima de carteiras de investimento de ações. Serão utilizados os modelos de Markowitz, Konno, Deng e Rockafelar para a seleção de carteiras de investimentos exclusivamente de ações listadas na Bolsa de Valores de São Paulo. Será utilizado como ativo livre de risco o CDI (Certificado de Depósito Interbancário).

No Capítulo 4 serão descritos os modelos CVAR e Variância para otimização de carteiras de opções de ações. São discutidas suas características, medidas de risco relacionadas e principais restrições.

Posteriormente, o Capítulo 5, concluída a introdução teórica, passa se a análise dos resultados obtidos pelos modelos de otimização de retorno e risco nos capítulos anteriores, sendo discutidas as principais conclusões, apontando benefícios e limitações dos modelos.

E por fim o Capítulo 6 serão apresentadas às conclusões gerais do trabalho desenvolvido, assim como comentários e recomendações para futuros estudos sobre o tema abordado. Nos Anexos estão disponíveis, com maior detalhe, a programação utilizada no software MatLab, assim como conceitos das metodologias utilizadas.

2 CONCEITOS

Investir, segundo Bodie (2000), é comprometer o uso de recursos no presente com a expectativa de benefícios futuros. Com o desenvolvimento do mercado de capitais, novos produtos financeiros, com as mais diversificadas características e riscos, surgiram como alternativas de investimento. Tal abundância de produtos e riscos tornou mais complexa à decisão de investimento e alocação de capitais dentre ativos.

A composição de uma carteira pode variar muito devido à existência de diferentes tipos de investidores que desejam assumir diferentes riscos e retornos. Este risco é subdividido na literatura entre risco sistêmico e risco não sistêmico, segundo Damodaran (2002) o primeiro, conhecido como não diversificável, está relacionado às flutuações do mercado como um todo, o segundo consiste na parcela do risco que pode ser associado ao comportamento do ativo e é função do desempenho, como por exemplo, de uma empresa, da economia de um país ou da produtividade de uma determinada commodity agrícola.

Harry Markowitz contribuiu significativamente com o processo de seleção de carteiras de investimentos desenvolvendo uma metodologia de avaliação e compensação do risco através da diversificação de investimentos. Seu trabalho ressalta a importância da diversificação do investimento entre ativos, o que se dá por meio de um modelo estatístico conhecido como Modelo Média-Variância baseado na variância dos retornos de séries temporais dos ativos e suas correlações. Tal modelo analisa por meio das correlações dos ativos a melhor alocação do capital para se obter uma carteira cujo risco global seja o menor, dado um retorno mínimo exigido

Atualmente, o problema de alocação de capitais é abordado de diferentes formas. O risco atrelado à deterioração do preço dos ativos, resultando em uma piora no valor da carteira de investimento, apresenta várias definições estatísticas, todas elas referindo-se às incertezas dos retornos dos ativos. Estas vão da variância, no modelo de Markowitz, desvio absoluto da série de retornos, no modelo de Konno, até o VAR (Value at Risk) que, segundo Jorion (1998), representa a maior ou pior perda esperada dentro de determinados períodos de tempo e intervalos de confiança de uma carteira. Tais modelos serão mais adiante devidamente tratados.

Apesar de ser vasta a gama de modelos de seleção de ativos e otimização de carteiras, estes são geralmente empregados para a seleção de ativos financeiros de grupos específicos, como ações, commodities, títulos do governo ou opções, o que é justificado pela diferença de características operacionais entre estes. Tal fato torna oportuno o estudo de modelos que tenham a capacidade de selecionar ativos de diversos tipos para a composição de uma carteira ótima, para os diversos tipos de investidores e agentes do mercado financeiro. Tais agentes serão detalhados a seguir.

2.2 Participantes do mercado

Para uma maior compreensão dos agentes econômicos que atuam no mercado, segue a seguir as principais entidades. No mercado financeiro existem diferentes agentes econômicos, com objetivos e comportamentos característicos. Classifica estes nas quatro categorias a seguir.

Hedgers

São agentes que operam com os ativos de investimento tendo como objetivo a proteção contra riscos de preços, que podem oscilar devido a diversos fatores, como a variação no câmbio das moedas e oscilação de taxas de juros.

Especuladores

Estes possuem o comportamento de apostar em tendências. Este tipo de agente econômico busca realizar lucro comprando e vendendo determinados ativos, de acordo com a sua crença que determinado preço irá subir ou descer. Os especuladores são importantes ao mercado, pois sua participação contribui para aumentar a liquidez dos mercados.

Arbitradores

Os Arbitradores são agentes que montam operações em que obtém ganho sem risco, a partir da constatação de ineficiências do mercado, representadas por distorções nos preços de determinados ativos.

Corretores

Os corretores são os intermediários da transação no mercado de capitais. Estes trabalham para as corretoras de valores, e recebem a corretagem, espécie de taxa paga pelos investidores às corretoras, e são cobradas em porcentagem das operações realizadas.

2.3 Tipos de investimento

Os ativos do mercado financeiro podem ser classificados, quanto à sua lucratividade, o que pode ser fixa ou variável. Ativos de renda fixa (títulos de Credito), são aqueles que detêm uma componente de remuneração periódica determinada contratualmente, podendo ser pré-fixada, como em letras de câmbio e CDB; pós-fixada: cadernetas de poupança; letra imobiliária; CDB (Certificado de Depósito Bancário); RDB (Recibo de Deposito Bancário); e debêntures. Os ativos de Renda variável são títulos de propriedade, contendo componentes de remuneração periódica determinada contratualmente. As ações e cotas de fundos de investimentos são os ativos de renda variável mais conhecidos.

Dentre todo o universo de produtos de investimento presentes no mercado financeiro foram selecionados, para o estudo os seguintes ativos:

- Ações
- Opções
- CDI

As suas características e peculiaridades serão apresentadas em seguidas.

2.3.1 Ações

Segundo a definição adotada pela Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA), ações são títulos representativos de propriedade de cotas, partes em que se divide o capital social de uma sociedade anônima. Tais títulos conferem a seu possuidor parcelas de participação no controle, nos bens e nos lucros da empresa, assim como suas obrigações como acionista.

Existem basicamente dois tipos de ações, classificadas quanto sua natureza. O primeiro tipo se refere às ações ordinárias (ON), que atribuem ao sócio o direito ao voto na assembléia de acionistas. O segundo tipo faz referência às preferenciais (PN), ações que não possuem o direito a voto, porém possuem a prioridade na distribuição de dividendos.

2.3.2 Derivativos

Para Figueiredo (2002), derivativos são títulos cujos valores dependem dos valores de outras variáveis mais básicas, por exemplo, o derivativo de uma *commodity* como a soja, teria seu valor derivado do comportamento do preço da soja à vista.

Os derivativos mais negociados no mercado brasileiros são:

Futuros, os contratos futuros são compromissos de compra ou de venda de determinado ativos, e uma data futura, a um preço previamente negociado;

Opções, os contratos de opções conferem a seus titulares (compradores) direitos de compra ou venda de determinado ativo em uma data e a um preço previamente negociado, e a seus lançadores (vendedores) obrigações de compra ou venda dos ativos objetos, por exemplo, ações ou *commodities* físicas como milhos, soja ou arroz;

Swaps, os contrato de *Swaps* são contratos nos quais as partes trocam indexadores de operações ativas e passivas, sem trocar o montante principal da negociação; e

Termos, operações de compra e venda de um ativo, acertada na data inicial, para liquidação física e financeira em uma data futura. Os contratos a termo diferem dos contratos futuros somente pela existência da necessidade de liquidação financeira mediante a pagamento e recebimento de capitais.

2.2.3 Opções

Segundo Costa (1998), o conceito de opção consiste em "um direito negociável de compra ou venda de um ativo a um preço futuro predeterminado". O titular, agente econômico que compra a opção, pagando por ela um determinado preço, conhecido como prêmio, possui a escolha de exercer ou não tal direito, ou seja, de comprar ou vender o ativo objeto na referida data ao preço previamente contratado. Em contrapartida o lançador, agente econômico que vende uma opção possui o dever de aceitar a decisão do titular, sendo obrigado a comprar ou vender o ativo objeto da opção ao preço negociado.

Tais direitos e obrigações estão descritas no quadro abaixo:

	Opção de Compra (Call)	**Opção de Venda (Put)**
Titular	Direito de compra	Direito de Venda
Lançador	Obrigação de compra	Obrigação de venda

Tabela 2.1: Tipos de Opções

Existem diversos tipos de opção, que usualmente são classificadas quanto ao seu tipo de exercício, ou seja, quanto à possibilidade do detentor da ação comprar ou vender o ativo objeto, antes ou somente da data de exercício pré-estabelecida.

Dentre os casos mais simples existem as opções de estilo americana. Este tipo de opção pode ser exercida em qualquer data até o seu vencimento (data limite de exercício). Outro estilo de exercício refere-se ao de opções do tipo européias, onde o este só é permitido na data de vencimento contratada. Existe, no mercado financeiro, uma grande gama de tipos de opções, que variam das asiáticas até as exóticas, porém não é objetivo do presente trabalho detalhá-las. Caso haja interesse ver a referência bibliográfica Costa, 1998.

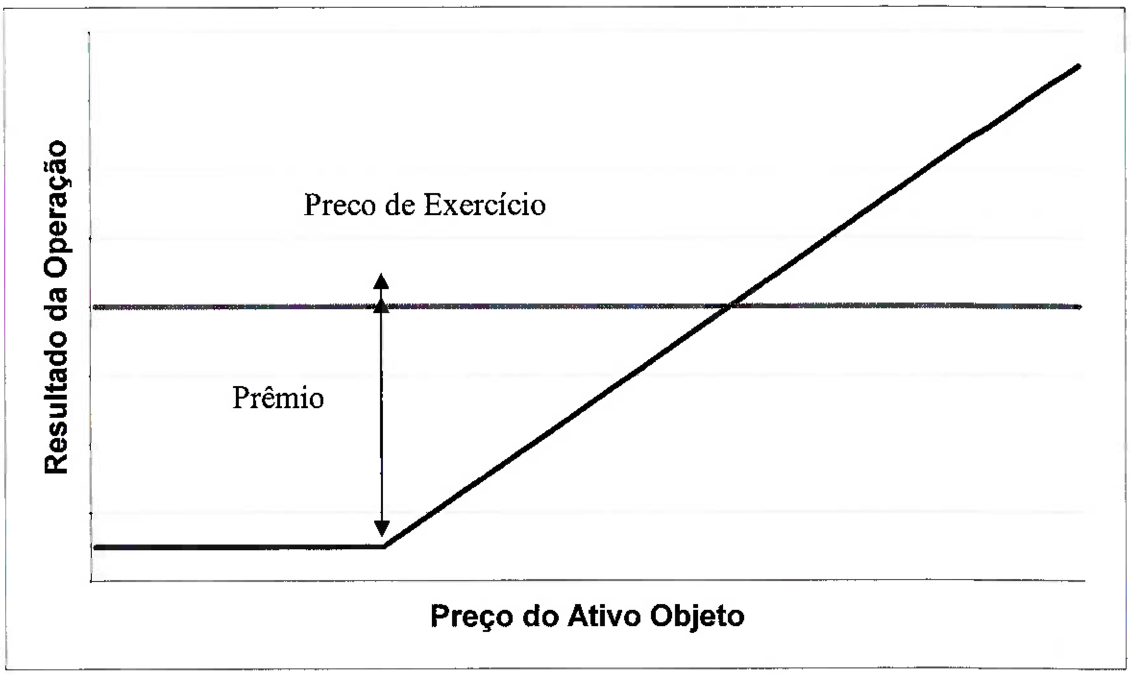

Grafico 2.1: ***Payoff*** **de opção de compra**

O tipo de opção pertinente ao trabalho é o europeu, onde a opção, no caso uma *Call*, de um ativo objeto específico, fica completamente caracterizada por sua data de exercício e por seu preço de exercício.

Normalmente uma opção é lançada sobre um preço, que não precisa ser necessariamente o preço de um ativo, pode ser uma taxa, um índice, uma quantidade, ou qualquer coisa que se convencione ter valor. No caso de ações, os preços de suas opções partem de um valor conhecido, (o preço presente da ação), e podem adquirir qualquer valor no futuro, sendo automaticamente alterados em caso de distribuições de proventos como, por exemplo, o dividendo.

Segundo Hull (2002) um item utilizado para caracterização de uma opção é a data de vencimento, que representa o último dia que as opções podem ser negociadas ou exercidas. Castro (1998) relata que o preço de exercício (ou *strike price*) de uma opção é o valor e do preço do ativo objeto além do qual o exercício possui um valor positivo.

Sendo direitos negociáveis, as opções possuem um preço ou prêmio (para evitar confusão com preço de exercício) pelo qual são lançadas, e pelo qual são negociadas nos mercados financeiros. Este prêmio em conjunto com o preço do ativo objeto define o *payoff* do investidor, ou seja, o valor recebido caso o valor do ativo objeto exceda o valor do preço de exercício.

Este *payoff* na data de vencimento pode ser descrito como:

$$\max\{(S - E),0\}$$

Onde:

S é a cotação a vista do ativo objeto

E é o preço de exercício da opção

Para opções de venda, o prêmio é determinado por:

$$\max\{(E - S),0\}$$

Segundo Hull (2002) existem basicamente cinco variáveis que afetam o preço das opções:

S – preço a vista do ativo objeto: o preço a vista do ativo objeto determina, juntamente com o preço de exercício, o *payoff* da negociação;

E – preço de exercício da opção: é o preço de negociação do ativo objeto acordado entre o comprador e o vendedor da opção, em uma data futura.

r – taxa de juros livre de risco: é a taxa de juros de títulos do governo

t – tempo até o vencimento: é a quantidade de dias úteis do momento presente até a data de vencimento.

σ - volatilidade do ativo objeto

$$\text{Preço da Opção de Compra } \geq máx(S_0 - E\,e^{-rt},0)$$

$$\text{Preço da Opção de Venda } \geq máx(E\,e^{-rt} - S_0,0)$$

2.4 Modelo de Black & Scholes para aferição de preços de Opções

Para um melhor entendimento sobre as opções faz se necessário entender os modelos que aferem seus preços. Dentre os diversos modelos presentes hoje na literatura foi escolhido para se basear os estudos sobre as opções, o modelo de Black & Scholes. Tal método, proposto no início dos anos 70 é o mais freqüente utilizado devido sua fácil implementação e grande aderência me aplicações do mercado de capitais.

O modelo se baseia na hipótese de não arbitragem de preços, onde na ausência de oportunidades de arbitragem, o retorno da carteira deve ser a taxa de juros livres de risco, Jorion (1997).

O modelo proposto por Black e Scholes tem como principais vantagens:

- Fácil implementação computacional;
- Rápida compreensão do modelo e de seus resultados; e
- Rigor teórico adotado pelos autores na formulação das suas hipóteses.

Considerando:

$B = B(y^S, t)$: Preço da opção de compra

$P = P(y^S, t)$: Preço da opção de venda

y^S : Preço do ativo objeto no tempo t

X : Preço de exercício

r : Taxa livre de risco

t : tempo atual

T : Data de vencimento

$T - t$: Número de dias para o vencimento

σ : Volatilidade

$\Theta(d)$: Função distribuição normal acumulada

Black e Sholes desenvolveram uma formulação que determina o preço de opções de compra do tipo Européia, por meio da expressão:

$$B = y^S \Theta(d1) - Xe^{-r(T-t)}\Theta(d2)$$

E as opções de venda como:

$$P = Xe^{-r(T-t)}\Theta(d2) - y^S \Theta(d1)$$

onde:

$$d1 = \frac{\ln(\frac{y^s}{x}) + (r + (\frac{\sigma^2}{2}))(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d2 = d1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Também faz se necessário apresentar algumas definições quanto à análise de opções, no caso as *gregas*, nome dado a alguns conceitos de análise da função do preço da opção em função de suas variáveis, devido ao fato destes serem apresentados por letras gregas. Estas serão descritas abaixo.

2.5 As gregas de opções

Com o objetivo de administrar os riscos de uma posição em opções, o investidor deve atentar as letras gregas, ou simplesmente gregas de uma opção. Cada grega mede uma das dimensões do risco de uma posição em contratos de opções. Existem 5 gregas que serão detalhadas a seguir.

DELTA - Δ

O delta de uma opção (Δ) nada mais é do que a derivada do preço da opção em relação ao perco do ativo objeto. Segundo Hull (2002), caso o preço da ação sofra pequenas variação o preço da opção se alterará Δ% desta variação.

O delta de uma opção pode ser interpretado como a probabilidade do preço do ativo objeto atingir o preço de exercício e é descrito matematicamente como:

$$\Delta = d1 = \frac{\ln(\frac{y^s}{x}) + (r + (\frac{\sigma^2}{2}))(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

O delta das opções é amplamente utilizado para estratégias de proteção de uma carteira de investimentos para eventuais crises, sendo uma das mais famosas a estratégia delta neutro que veremos mais adiante.

TETA - Θ

A derivada do valor de uma carteira de opções, em função do tempo, considerando todas as outras variáveis constantes, é conhecido como Teta. Especificamente:

$$\Theta = \frac{\partial Valor\ \ da\, Carteira}{\partial t}$$

GAMA - Γ

O grama de uma carteira de opções é a derivada do delta da mesma, ou a segunda derivada do preço da opção em função do preço do ativo. Pode ser interpretado como a aceleração do delta. "Quão maior o gama mais rapidamente o delta de uma carteira variará", (HULL, 2002).

$$\Gamma = \frac{N'(d1)e^{-qT}}{S_0\sigma\sqrt{T}}$$

Onde:

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

q : taxa contínua de dividendos

VEGA- υ

O vega é a derivada no valor de uma carteira de em função da variação na volatilidade do ativo objeto. Para vegas baixos mudanças de volatilidade irão causar pouca variação no valor do portfolio. É formalmente descrito como:

$$\upsilon = S_0 \sqrt{T} N'(d1) e^{-qT}$$

RÔ - P

O rô de uma carteira de opções é a taxa de variação no valor da mesma em função da taxa de juros praticada. E descrito matematicamente como:

Para opções de compra : $P = XTe^{-rT} N(d2)$

Para opções de venda : $P = -XTe^{-rT} N(-d2)$

2.6 – Hedge

Com a intenção de proteger seus investimentos, um investidor pode lançar mão de vários mecanismos de *hedge*. Na tradução literal *hedge* significa cercar, o que implica na pratica em defender a posição utilizando estratégias que neutralizem efeitos negativos na carteira de investimento como um todo.

2.6.1 Estratégia Delta Hedge

Segundo **BLACK e SCHOLES (1973)**, a qualquer tempo t, um investidor que tenha a intenção de proteger sua carteira de investimento contra possíveis crises, *o hedger,* pode criar uma carteira livre de risco, constituída por uma posição em opções e uma posição no ativo objeto, ou seja, toda a perda atribuída a variação do preço do ativo livre de risco é anulada pelo ganho referente a posição em opções do mesmo.

Para **BLACK e SCHOLES (1973),** sendo V^H o valor total de uma carteira de investimentos, constituída de uma posição comprada em um número determinado de ações do ativo objeto, e uma posição vendida de um número determinado de opções européias do ativo objeto, temos que o valor desta carteira segue a seguinte equação:

$$V^H = xy^s - NB$$

Sendo:

N : Número de contratos de opções

x : Número de ações do ativo objeto

Logo, conclui que: para se construir uma carteira de ações com um hedge em opções de maneira a anular as variações de preço dos ativos objetos, deve se negociar um número de ações tal que:

$$x = N\frac{\partial B}{\partial y^S}$$

Nota se que o fator $\frac{\partial B}{\partial y^S}$ é a derivada da função do preço de uma opção em relação ao preço de seu ativo real, ou seja, tal fator é conhecido como Delta da opção e encontra se devidamente apresentado no item anterior.

Assim para imunizar os efeitos da variação no valor da carteira composta por N opões, deve se possuir $N\frac{\partial B}{\partial y^S}$ ações do ativo objeto. Com isto a carteira está instantaneamente livre de risco, e deverão ser feitos rebalanceamentos contínuos para se manter tal característica. Esta estratégia é conhecida como estratégia Delta Neutro.

Como a carteira é instantaneamente livre de risco seu retorno é dado pela taxa de juros livre de risco r.

Assim as condições iniciais para uma carteira Delta Neutro são:

$$B(y^S, T) = \max(y^S - X, 0)$$

$$B(y^S, t) \leq y^S \quad \forall t$$

$$B(0, t) \leq 0 \quad \forall t$$

Para se exemplificar a teoria anteriormente apresentada toma-se um investidor que vendeu 30 contratos de opção de compra referentes a 3000 opções de PETR4. No instante da negociação o preço da opção era de R$ 3 e o preço da ação PETR4 era de R$ 80. A opção possui um DELTA de 0,7.

Logo, para proteger-se das possíveis perdas o investidor pode comprar 0,7 x 3.000 = 2.100 ações de PETR4. Para um período curto de tempo há tendência de que o preço da *call* varie 70% do preço da ação e assim o ganho ou perda referentes a opção será compensado pela perda ou ganho referente a ação.

2.7 Teoria de Portfolios

A Teoria Moderna sobre a Carteira, (TMC), ou *Modern Portfolio Theory*, desenvolvida por Markowitz, introduziu o conceito de retorno e risco da carteira de investimento como um todo, tal teoria revolucionaria a administração de risco no mercado financeiro. Os investidores, antes desta teoria, selecionavam os ativos de uma carteira de investimento atentando exclusivamente aos retornos individuais de tais ativos, assim como seus riscos. A elaboração de carteiras era feita de maneira puramente intuitiva, não obedecendo a nenhum critério quantitativo, utilizando conceitos introduzidos nos séculos XVII e XVIII.

Ao analisar a relação risco - retorno, Markowitz verificou que a diversificação de uma carteira de investimentos, tema tratado posteriormente, leva a redução no nível de risco a patamares inferiores àqueles obtidos ao se analisar os ativo de maneira isolada, de tal forma que a partir de uma alocação apropriada de recursos, torna-se possível se obter uma carteira com risco mínimo para um dado retorno da carteira como um todo. Um ponto importante de se ressaltar é que a diversificação reduz apenas o risco diversificável, a priori já mencionado, o que não ocorre com o risco não diversificável.

Assim, o risco de uma carteira de ativos foi mesurado pela primeira vez de maneira quantitativa. A média, um conceito padrão estatístico, de fácil compreensão e de grande popularidade avalia o desempenho do investimento no período de análise. Como medida de risco Markowitz sugeriu a variância, medida intuitiva de se murar a dispersão de um ponto em relação à média dos pontos no período de análise.

Para o caso em que os retornos dos ativos são normalmente distribuídos, a média e a variância trazem consigo todas as informações necessárias para definir a distribuição de probabilidades da variável aleatória de interesse.

Markowitz apóia seu modelo em dois critérios fundamentais para análise de sua eficiência:

- Sejam A e B duas carteiras de ativos, com o mesmo retorno, o mais eficiente será aquele com menor variância (menor risco); e
- Para um dado nível de risco, uma carteira é eficiente se possuir o máximo nível de retorno possível.

Com este modelo, Markowitz tornou a variância uma medida extremamente popular no mercado financeiro assim como o conceito de otimização do nível de risco da carteira como um todo. A idéia fundamental do modelo é, para um retorno mínimo exigido, determinar a alocação de capital, entre os ativos disponíveis, de tal foram que minimize o risco global da carteira. Tal conceito se difundiu pelo mercado financeiro, fazendo com que hoje, a maioria dos modelos de otimização de carteiras de investimentos, que trabalham com as mais variadas medidas de risco, possua este objetivo.

Devido às correlações existentes entre ativos de uma carteira, Markowitz observou que a soma dos efeitos das variações dos preços destes acabava por produzir uma variação do valor da carteira como um todo, o que difere das variações individuais. Tal efeito de diluição, devido à covariância entre ativos, afeta a variância da carteira composta por estes ativos, e assim, seu risco como um todo.

Markowitz também demonstrou que com o aumento no número de ativos em uma carteira, a variância total desta diminui convergentemente para um limite mínimo de risco independente da quantidade de ativos.

2.8 Definições referentes à teoria de carteiras

Um investidor deseja obter um alto retorno para seu investimento, porém, o quer a um nível baixo de risco. Pode-se apresentar o retorno de um determinado investimento como sendo a razão entre a variação de preços do ativo ao longo de um período em relação ao preço inicial do ativo em questão. Ganhos ou perdas de investimento geram, portanto aumento ou diminuição da riqueza para seus investidores. Para uma maior compreensão destes e outros conceitos utilizados no trabalho serão apresentadas a seguir algumas definições:

Retorno esperado de um ativo

O retorno esperado de um ativo financeiro é avaliado como a razão do seu preço num período t , $P(t)$ sobre seu preço em no período anterior t-1, $P(t-1)$, o que é matematicamente descrito por:

$$R = \frac{P(t)}{P(t-1)}$$

Na intenção de aproximar a distribuição de probabilidades do retorno do ativo à distribuição normal, lança-se mão da função logaritmo neperiano. Assim utilizaremos o retorno logarítmico dos preços dos ativos, que pode ser descrito formalmente como:

$$R = \ln\left(\frac{P(t)}{P(t-1)}\right)$$

Carteira com n ativos

A principal característica de uma carteira de investimento é sua composição, o que se dá pela percentagem do investimento total alocado em cada ativo.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Sendo x_i a percentagem referente ao ativo i.

Tal alocação tem a seguinte propriedade: $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, o que indica que a soma de todas as porcentagens do capital total de uma carteira, alocadas nos respectivos ativos, deve totalizar 100%.

Retorno Esperado da Carteira

O retorno de uma carteira de investimento é a soma ponderada, pela participação na alocação do capital total, dos retornos de cada ativo. Sendo x_i a porcentagem alocada ao i-ésimo ativo e R_i o retorno associado a este temos que o retorno de uma carteira é expresso por:

$$R(x) = \sum_{i=1}^{n} R_i x_i$$

2.8.1 Medidas de risco

Do italiano *riscare*, ousar, a palavra risco está diariamente na mente dos investidores. Porém muito antes da existência de um mercado globalizado e eficiente este conceito já aguçava a curiosidade e receio para os filósofos e cientistas da renascença, culminando no trabalho de Blaise Pascal e Pierre de Fermat, a teoria da probabilidade. Posteriormente Abraham de Moivre introduziu a distribuição normal e conceitos como desvio padrão, largamente utilizado para se inferir a dispersão de elementos de uma amostra qualquer, a exemplo dos preços de um ativo financeiro.

Atualmente existe uma vasta gama de indicadores de dispersão, e medidas de risco, chegando ao ponto de haver indicadores específicos, como por exemplo o VaR, que responde a pergunta: qual é a perda máxima para um determinado investimento para um nível de confiança $a\ \%$ num período de n dias.

Para avaliar o risco de um ativo ou uma carteira foram elaboradas diferentes métricas. Tais medidas de risco são apresentadas a seguir.

Variância de uma carteira

Segundo Vianna (2004) a variância é a primeira forma de medida de risco utilizada com risco de uma carteira de investimentos e pode é definida como:

$$\sigma^2(R(x)) = E((R(x) - E(R(x)))^2) = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i\right)\right)^2\right]$$

A covariância da carteira pode ser expressa por:

$$\sigma_{ij} = E((R_i - E(R_i))((R_j - E(R_j))$$

Assim verifica-se que:

$$\sigma^2(R(x)) = x^T \sum x$$

Sendo $\sum = \sigma_{ij}$ a matriz de covariâncias dos ativos. Assim a variância de uma carteira é definida como o somatório das variâncias de cada ativo e covariâncias entre os ativos dois a dois, levando em consideração a porcentagem de cada ativo do investimento total.

Desvio médio absoluto

Devido à complexidade computacional, a variância cedeu lugar para outras medidas de risco. Konno e Yamazaki (1991) utilizam o desvio médio absoluto em seu modelo, o que reduzir a complexidade numérica e tempo computacional. O desvio médio absoluto do retorno de uma carteira se caracteriza por ser o primeiro momento absoluto e é descrito por:

$$W_k = E(|R(x) - E(R(x))|) = E\left[\left|\sum_{i=1}^{n} R_i x_i - E\left[\sum_{i=1}^{n} R_i x_i\right]\right|\right]$$

Para retornos que seguem uma distribuição normal, o que pode ser uma hipótese fraca para os problemas reais, pode ser verificar que o desvio padrão é múltiplo do desvio médio, o que implica que a carteira ótima resultante da utilização do desvio médio absoluto como media de risco deverá ser a mesma obtida por meio da utilização da variância.

Value at Risk (VAR)

Com a finalidade de analisar a exposição de uma carteira de investimentos ao risco de mercado o banco JP Morgan desenvolveu a metodologia VaR. O VaR é definido por Jorion (2003) com sendo: " *a maior (ou pior) perda esperada dentro de determinados períodos de tempo e intervalos de confiança".*

Sendo X a variável aleatória dos possíveis retornos de uma carteira o VaR é definido :

$$VaR(X,\alpha) = \{x \in \Re \mid \int_x^{\infty} f(x)dx = \alpha\}$$

Sendo:

α : nível de confiança requerido

$f(x)$: função densidade de probabilidade da variável aleatória dos retornos dos ativos.

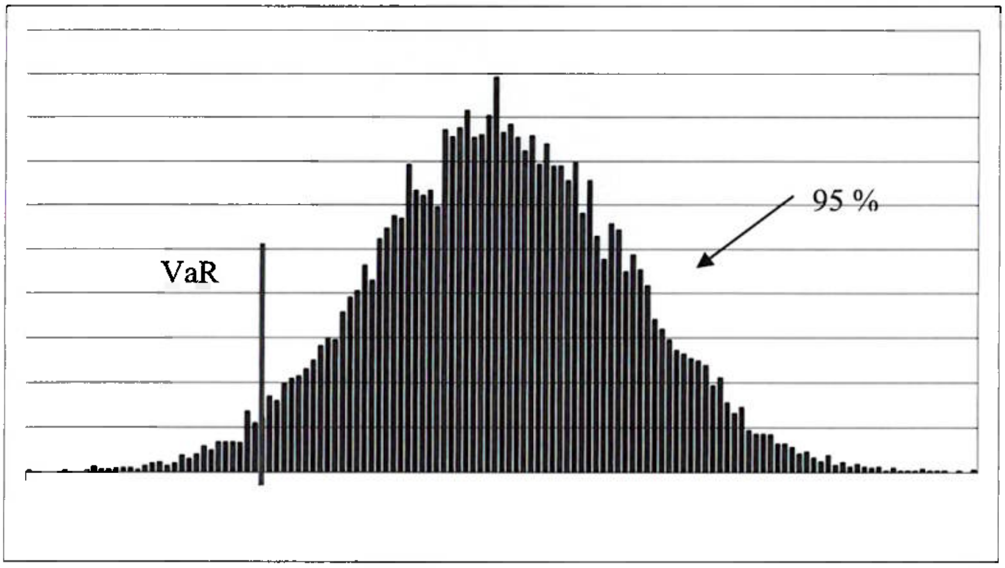

Figura 2.2 : VaR de uma Carteira de Investimentos.

Apesar da popularidade do VaR na aferição de risco, esta medida não é utilizada na prática nos problemas de otimização de carteira de investimento, devido a dificuldade de implementação computacional. O estudo do problema de otimização de carteiras de mínimo valor em risco recai em modelos matemáticos complexos utilizando medidas de risco baseadas em percentis da distribuição de perdas o que acaba por torná-lo pouco prático.

Conditional Value at Risk (CVAR)

Para uma análise mais aprofundada de momentos de crise no mercado financeiro, autores consagrados como Rockafellar (2002), dedicaram-se ao estudo das caudas das distribuições de probabilidade do retorno de uma carteira de investimento. Em quanto o VaR se dedica em demonstrar um intervalo de confiança para máximo ganho ou perda de uma carteira de investimento para um dado período e um nível de confiança pré estabelecido , o CVaR se dedica ao estudo da cauda da distribuição de probabilidade caso o VaR seja excedido.

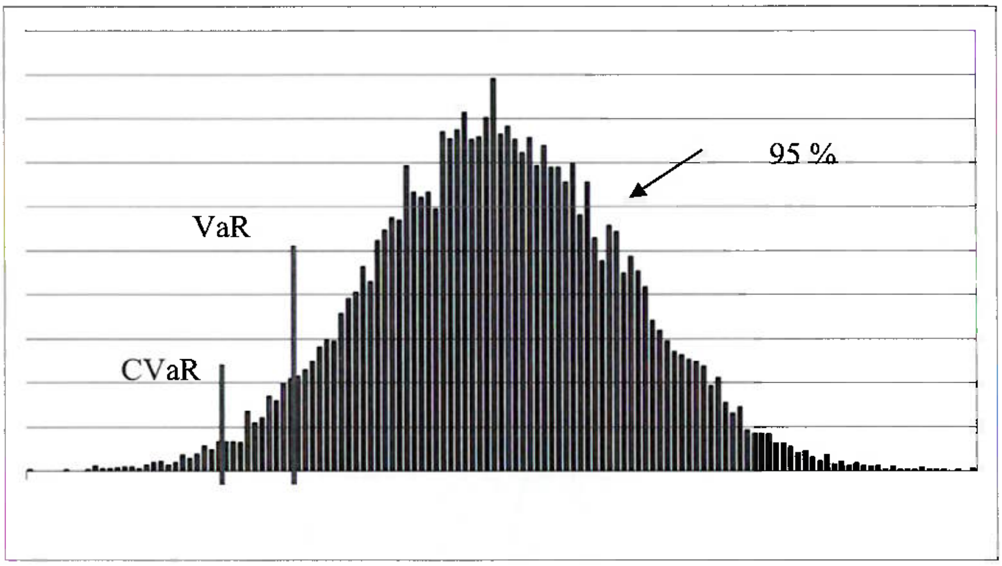

Figura 2.3 : CVaR de uma Carteira de Investimentos

O CVaR como medida de risco na composição de carteira de investimento apresenta algumas características interessantes do ponto de vista de facilidade de implementação. Para construir carteiras de menor CVaR, são utilizadas técnicas de programação linear, computacionalmente mais simples do que as quadráticas, porém, há a necessidade de um grande número de restrições, deixando o modelo mais instável matematicamente Experimentos numéricos indicam que minimização do CVaR podem oferecer automaticamente o VaR , visto que valor VaR não excede o CVaR, URYASEV (2002).

2.8.2 Fronteira Eficiente

Para um dado nível de risco a distribuição do capital entre os ativos em uma carteira irá gerar um retorno especifico A fronteira eficiente de uma carteira de investimento relativa a estes riscos e retorno é, segundo Markowitz (1952), a melhor composição possível de ativos, ou seja, a melhor forma de alocação do capital dentre os ativos com o objetivo de se obter o maior retorno possível para um dado nível de risco. Assumindo a racionalidade dos investidores, se tem que estes apenas escolheriam carteiras de investimentos que estivessem na linha da fronteira eficiente.

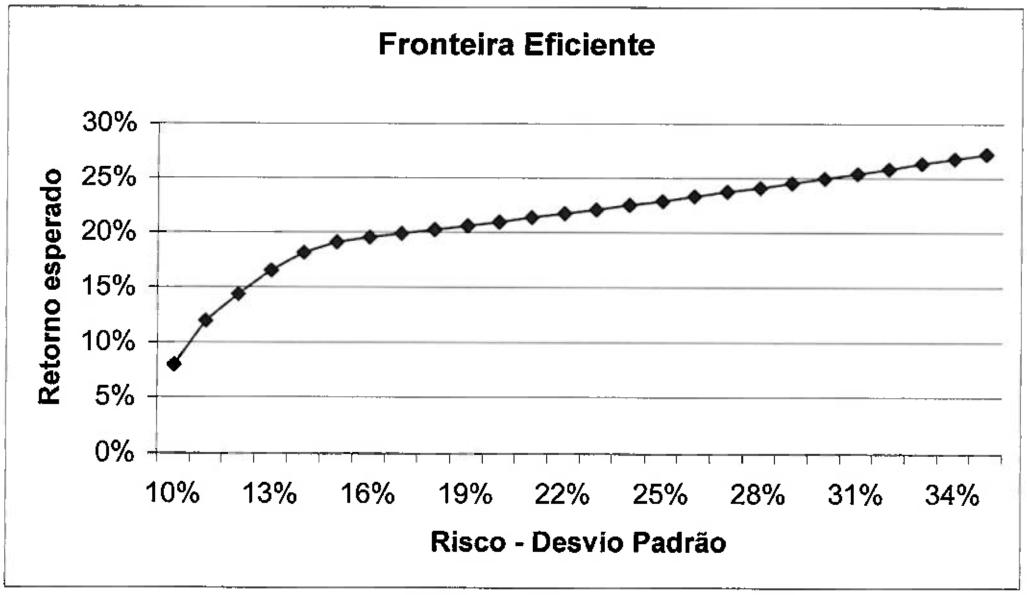

Figura 2.4: Fronteira Eficiente de uma Carteira de Investimentos

2.9 Função Utilidade

Na literatura financeira, a avaliação de investimentos consiste na análise da riqueza obtida em um horizonte de tempo. Torna-se importante, portanto, identificar como os modelos de otimização, presentes neste trabalho se inserem neste contexto.

Devido a incertezas dos ganhos, os investimentos possuem retornos imprevisíveis. Caso contrário todo o capital disponível para investimento seria alocado no ativo que maximizasse a riqueza. Porém tal imprevisibilidade não é verdadeira para investimentos livres de risco, ou seja, em situações onde o retorno é liquido e certo. O ganho não está relacionado à incerteza.

Segundo Luenberger (1998), para possibilitar a classificação de diversas possibilidades de investimento, é necessário poder escolher entre deferentes alternativas e para tal define-se a função utilidade, que atribuí a cada possível valor de riqueza W um número real $U(W) \in \Re$.

A riqueza pode ser considerada como uma variável aleatória, em ambiente de incertezas. Os investimentos podem ser ordenados, definida a função utilidade, segundo os valores esperados das respectivas utilidades. Por exemplo, no caso de dois investimentos, x e y, com respectivas riquezas representadas pelas variáveis aleatórias x e y dar se a preferência àquele com maior valor esperado de suas utilidades.

Segundo Luenberger (1998) o critério media variância utilizada no modelo de Markowitz pode ser analisado por meio de uma função de utilidade quadrática pode ser definida como $U(x) = ax - 1/2bx^2$, onde a > 0 e b < 0, sendo significativa apenas no intervalo x < a/b, no qual é crescente. Para b > 0 é estritamente côncava e dita avessa ao risco. Sendo os retornos, variáveis aleatórias normalmente distribuídas, o critério de média variância é equivalente a da utilidade esperada para qualquer função utilidade avessa ao risco.

Sendo w a variável aleatória que representando a riqueza W de um investidor, normalmente distribuída com média μ e desvio padrão σ, a distribuição de probabilidade é completamente definida por tais estimadores, logo a utilidade esperada é completamente definida por μ e σ. Assim:

$$E[U(W)] = f(\mu, \sigma)$$

"Para o caso de aversão ao risco, U, então $f(M, \sigma)$ é crescente em relação a M e decrescente em relação a σ", (LUENBERGER,1998). Considerando a normalidade dos retornos de todos os ativos da carteira, qualquer combinação linear destes ativos gerará um a carteira representada por uma variável aleatória normalmente distribuída. O problema da otimização da carteira passa a ser uma seleção de conjuntos de ativos que maximiza a função $f(\mu, \sigma)$ em relação ao conjunto viável.

Markowitz, em seu modelo, utiliza a variância como medida de risco e retorno esperado como medida de retorno. Sendo, o retorno da carteira é uma combinação linear dos retornos dos ativos que a compõem, com pesos dados proporção de riqueza investida em cada um, a variância da carteira pode ser expressa pela forma quadrática destes pesos, tendo covariâncias entre os ativos e variância como coeficiente.

3 Modelos de Otimização de Carteiras de Ações

No capítulo 2 foram apresentados os principais conceitos e motivações que culminaram na avaliação quantitativa do risco em uma carteira de investimento. Tal risco foi tratado no capítulo anterior como a variância do retorno de uma carteira de investimento, no modelo de otimização de Markowitz, desvio padrão absoluto, em Konno ou como o CVaR, segundo a visão de Topaloglou.

No presente capítulo será tratado o problema de otimização de alocação de ativos financeiros em carteiras de investimento utilizando as medidas de risco apresentadas. Todos os modelos posteriores partem de um mesmo principio básico, a maximização da função utilidade de uma carteira de ativos ou, em outro aspecto, da minimização de uma função referente ao risco.

Como já apresentado anteriormente, uma carteira de investimento pode se descrita como um vetor X de dimensão n, tal que n é o número de ativos presentes na mesma, e cada elemento do vetor X representa o percentual do capital total alocado em seu respectivo ativo.

Sendo $U(W)$ a função utilidade que se pretenda maximizar, onde W é a riqueza do investidor, observa-se que todos os modelos estudados se empenham em minimizar $P(W)$, onde $P(X) = -U(W)$, que nada mais é do que a função do risco, obtida por meio de uma medida de risco anteriormente apresentada.

Assim, sendo $P(X)$ a medida de risco que se pretenda minimizar, a formulação matemática do problema de otimização pode ser totalmente descrita por:

$$Minimizar \quad P(X)$$

Sujeito a:

$$AX \geq b \quad (3.1)$$

$$CX \geq d \quad (3.2)$$

$$x \geq 0 \quad (3.3)$$

A restrição (3.1) exige que o retorno da carteira como um todo seja no mínimo igual a um retorno Ro definido pelo investidor, enquanto a restrição (3.2) exige que o somatório das proporções de cada ativo deverá ser igual a 1, ou seja, somando se todas as participações de cada ativo *i* na carteira, deverá se ter 100% do capital total. Por fim a restrição (3.3) impede a proporção negativa, ou venda, de um ativo, sendo a carteira, portanto, financiada uma única vez pelo capital inicial.

Todos os modelos apresentados a seguir possuem uma função $P(X)$ que deverá ser otimizada por meio de sua minimização.

3.1 Modelo de Markowitz

O modelo clássico de MARKOWITZ, conhecido como modelo Média – Variância que tem por objetivo minimizar a variância da carteira, é um modelo de otimização quadrática, ou seja, possui uma função objetivo de segundo momento, tendo sido elaborado sobre o retorno esperado da carteira e a variância, segundo momento absoluto central, de uma carteira de investimento em ativos financeiros.

Assim sendo, o retorno da carteira varia linearmente com os pesos de cada ativo o que não ocorre com a variância total da carteira que é obtida a partir do somatório da combinação linear de todos os pares de ativos que compõem a carteira, sendo ponderado pelos pesos e desvios padrões dos ativos individuais, multiplicada pela correlação entre cada par de ativos. Conclui se então que a relação entre variância da carteira e a variância dos ativos não é, portanto, linear.

No modelo de Markowitz, o retorno da carteira é uma variável aleatória contínua com distribuição normal de média:

$$E[R(x)] = \sum_{i=1}^{n+1} r_i x_i$$

Onde $x = (x_1, x_2, .. x_n)$, o vetor da participação de cada ativo i = (1,2,...,n) na carteira e $r = (r_1, r_2, .. r_n)$ o vetor de retorno médio esperado.

A variância do modelo é representada por:

$$Var[R(x)] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j$$

Segundo Markowitz (1952), existe uma solução ótima de alocação de capital dentre os ativos de uma carteira, para dado um nível de variância, do seguinte problema:

Função objetivo

$$MIN\sum_{i}\sum_{j}\sigma_{ij}\cdot x_j\cdot x_i$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1} r_j x_j \geq \rho Mo \quad (1)$$

$$\sum_{j=1} x_j = Mo \quad (2)$$

$$0 \leq x_j \leq u_j \quad (3)$$

Sendo:

r_j	: Média dos Retornos do Ativo j
σ_{ij}	: Covariância entre o ativo i e j
Mo	: Capital inicial
u_j	: Quantia máxima no ativo j
ρ	: Taxa de retorno mínimo requerido

A restrição (1) assegura que o valor da carteira ótima deve ter uma rentabilidade mínima ρ sobre o capital inicial Mo. A segunda restrição impõe que a soma do capital alocado entre os ativos da carteira deve ser estritamente igual ao capital inicial. E a restrição (3) tem que o capital alocado em cada ativo deve ser maior do que zero, impedindo assim a venda de ativos, e menor do que um valor máximo u_j.

Diversos autores têm aprestado objeções ao modelo de Markowitz ao longo dos anos. Dentre as diversas criticas ao modelo, estão a grande sensibilidade à variação dos parâmetros e a questões de implementação e desempenho computacionais, a instabilidade das soluções e a não normalidade dos retornos dos ativos.

Buscando a resolução de alguma destas questões diversos modelos têm sido propostos como Konno, os quais, em linhas gerais procuram utilizar diferentes medidas de risco para produção de carteira. Os modelos de Markowitz e Konno utilizam como medidas de risco momentos da distribuição de probabilidade de retorno carteira. O método do valor condicional, mais recente, analisa a cauda da distribuição na determinação da carteira de menor risco.

3.2 Modelo de Konno

Konno, um pesquisador mais atual de modelos de otimização financeira, propõe a utilização do desvio absoluto médio, como medida de risco para seu modelo de seleção de ativos. Segundo Júdice e Ribeiro (2004) a principal desvantagem do modelo de Markowitz e que o mesmo recai num problema de otimização quadrática. Entretanto o modelo de Konno ao minimizar o desvio absoluto médio, pode ser transformado num problema de programação linear.

Seja r_{jt} o valor médio assumido pela variável aleatória do retorno de um ativo j, R_j, durante o período t $(t = 1,2,...T)$, temos que a sua média aritmética é dada por:

$$\bar{r}_j = \hat{E}(R_j) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{jt}$$

Neste caso o desvio padrão absoluto pode ser aproximado por:

$$\hat{E}\left[\left|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right]\right|\right] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{j=1}^{n}(r_{jt} - \bar{r}_j)\right|$$

Seja ainda:

$a_{jt} = r_{jt} - \bar{r}_j$
$j = 1, 2, ..., n;$
$t = 1, 2, ..., T.$

Então o problema de otimização de carteiras pode ser escrito como:

$$Min \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \right|$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1} r_j x_j \geq \rho Mo$$

$$\sum_{j=1} x_j = Mo$$

$$0 \leq x_j \leq u_j \; j = 1,2, ...,n$$

Sendo:

Rj	: Retorno do Ativo j
r_j	: Média dos Retornos do Ativo j
Mo	: Capital inicial
u_j	: Quantia máxima alocada no ativo j
ρ	: Taxa de retorno mínimo requerido

Sendo:

$$y_t = \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \text{ ; e}$$

K o conjunto definido por $\sum_{j=1} r_j x_j \geq \rho Mo$, O problema pode ser escrito como:

$$Min \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}|y_t|$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jt}x_j - y_t = 0\,, \quad t=1,2,...,T$$

$$x \in K$$

Como y_t é uma variável sem restrições de sinal, tem-se que:

$$y_t = v_t - w_t$$

$$v_t \geq 0,\, w_t \geq 0, \quad t = 1,2,...,T$$

$$v_t w_t = 0$$

e

$$|y_t| = v_t + w$$

Assim o problema por ser reescrito da seguinte maneira:

$$Min \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(v_t + w)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jt}x_j - v_t + w_t = 0\,, \quad t=1,2,...,T$$

$$x \in K$$

$$v_t \geq 0,\, w_t \geq 0, \quad t = 1,2,...,T$$

$$v_t w_t = 0, \quad t = 1,2,...,T$$

Para se resolver este problema começa-se por trabalhar o programa linear relaxado , suprimindo se a condição de complementaridade $v_t w_t = 0, \quad t = 1,2,...,T$.

Sendo $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{w})$ a solução ótima do problema anterior, tem-se dois casos que devem ser analisados:

(1) Caso $v_t w_t = 0$ para $t = 1,2,...,T$, então $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{w})$ é solução ótima.

(2) Caso $v_t w_t \geq 0$ para certo $t = 1,2,...,T$, então:

$$a = \min\left\{\bar{v}_t, \bar{w}_t : \bar{v}_t \cdot \bar{w}_t > 0\right\}$$

Como $\bar{v}_t \geq a$ e $\bar{w}_t \geq a$

$$\bar{w}_t - \bar{v}_t = (\bar{w}_t - a) - (\bar{v}_t - a)$$

$$(\bar{w}_t - a) + (\bar{v}_t - a) = \bar{w}_t + \bar{v}_t - 2a < \bar{w}_t + \bar{v}_t$$

Então $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{w})$, não pode ser solução ótima do programa.

Assim, toda solução ótima do programa relaxado é solução ótima do problema integral, podendo a restrição de complementaridade ser suprimida.

Logo o modelo proposto por Konno recai num problema de otimização linear, de T restrições, dado por:

$$Min \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (v_t + w)$$

Sujeito a:

$$v_t - w_t - \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j = 0, \quad t=1,2,...,T$$

$$\sum_{j=1} x_j = Mo$$

$$\sum_{j=1} r_j x_j \geq \rho Mo$$

$$v_t \geq 0, w_t \geq 0, \quad t = 1,2,...,T$$

$$v_t w_t = 0, \quad t = 1,2,...,T$$

3.3 Modelo Minimax

Os pesquisadores Deng Li e Wang, estudaram a otimização de carteiras de investimento em mercados com n ativos disponíveis, com retornos variáveis e com certo nível de risco, e um ativo livre de risco, cujo retorno é determinístico. Em seu modelo, o investidor deve alocar o capital inicial dentre estes n ativos com risco e o ativo livre de risco. Este modelo ainda tem como hipótese inexistência de quantidade de venda ou compra dos ativos.

Sendo:

$\tilde{r}_i$	: Retorno logarítmico do ativo *i*
r_i	: Valor esperado de $\tilde{r}_i$
r_{n+1}	: Retorno logarítmico do ativo livre de risco
σ_{ij}	: Covariância entre o ativo i e j
x_i	: Participação do ativo *i* na carteira

Segundo Deng, os retornos dos ativos devem estar compreendidos dentro dos intervalos:

$$r_i \geq r_{n+1}$$

$$a_i \leq r_i \leq b_i$$

Onde a e b são os limites inferiores e superiores, respectivamente. A restrição $r_i \geq r_{n+1}$ impõe que o retorno de qualquer ativo com risco deve ser maior do que o retorno do ativo livre de risco. Segundo Bergamasco (2006), a existência da restrição $a_i \leq r_i \leq b_i$ deve se ao fato dos retornos dos ativos não serem exatamente estimados.

No modelo a matriz covariância $\sum x = (\sigma_{ij})_{nxn}$ é assumida como definida positiva. O retorno esperado da carteira de ativos é definido como:

$$E[R(x)] = \sum_{i=1}^{n+1} r_i x_i$$

Onde:

$x = (x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ são as participações de cada ativo na carteira, e

$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1$ impõe que a totalidade de participações seja de 100%.

A medida de risco da carteira é definida como sendo a variância, dada pela expressão:

$$Var[R(x)] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} = x^T \sum x$$

Para Deng; Li e Wang, (2005), o investidor deve atentar-se em minimizar a variância do seu modelo, também, maximizar o valor esperado do retorno de sua carteira. Para isto os autores definem w e (1-w) como pesos associados aos critérios variância e retorno respectivamente. Este ponderador w é conhecido como parâmetro de aversão a risco e está definido no intervalo $0 < w \leq 1$. Quanto maior o w, ou seja, mais próximo a 1, maior é o conservadorismo do investidor, assim este tenderá a alocar mais capital no ativo livre de risco.

Assim o modelo de otimização deve maximizar a função $f(x,r)$ definida como:

$$f(x,r) = (1-w)\sum_{i=1}^{n+1} r_i x_i - w\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}$$

Logo, o modelo Minimax foi desenvolvido para, dado um cenário com os piores valores esperados para os retornos dos ativos, gerar a melhor carteira para o investidor. Assim, sua função objetivo pode ser descrita como:

$$\underset{x}{Max}\ \underset{r}{Min}\ f(x,r) = (1-w)\sum_{i=1}^{n+1} r_i x_i - w\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \qquad \text{(P1)}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1$$

$$r_i \geq r_{n+1} \quad i = 1, ..., n$$

$$a_i \leq r_i \leq b_i \quad i = 1, ..., n$$

Sendo $X = \left\{ x : \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \right\}$ e $R = \{ r_i \geq r_{n+1}, a_i \leq r_i \leq b_i \quad i = 1,...,n \}$, o problema anterior pode ser reescrito como:

$$(P1) \quad \underset{x \in X}{Max} \; \underset{r \in R}{Min} \; f(x,r)$$

Como estratégia de otimização Deng; Li e Wang, (2005) demonstram que:

$$(P1) \quad \underset{x \in X}{Max} \; \underset{r \in R}{Min} \; f(x,r) = (P1)' \quad \underset{r \in R}{Min} \; \underset{x \in X}{Max} \; f(x,r)$$

O problema (P1) assume R como compacto e f como uma função contínua, convexa em R e côncava em X, o que torna valida, segundo FAN (1953) a estratégia de otimização acima. Assim o problema (P1)' pode ser escrito como:

$$\underset{x}{Max} \quad (1-w)\sum_{i=1}^{n+1} r_i x_i - w \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1$$

Utilizando se uma notação vetorial, o problema acima pode ser escrito como:

$$\underset{x}{Max} \quad (1-w) r_{n+1} + (1-w)(r - 1r_{n+1})^T x - w x^T \sum x$$

Sendo:

$1r_{n+1} = (r_{n+1})_{nx1}$ o vetor de tamanho n do retorno do ativo livre de risco

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ o vetor de tamanho n da participação dos ativos com risco na carteira.

A solução ótima proposta do problema acima pode ser descrita como:

$$x = \frac{(1-w)}{2w} \sum^{-1} (r - 1r_{n+1})$$

Onde seu máximo é representado por:

$$(1-w)r_{n+1} + \frac{(1-w)^2}{4w}(r - 1r_{n+1})^T \sum^{-1} (r - 1r_{n+1})$$

Considerando a maximização anterior, o problema de maxmin (P1), pode ser solucionado da seguinte maneira:

$$\underset{r}{Min} \quad (r - 1r_{n+1})^T \sum^{-1} (r - 1r_{n+1})$$

Sujeito a:

$$r_i \geq r_{n+1} \quad i = 1,\ldots,n$$

$$a_i \leq r_i \leq b_i \quad i = 1,\ldots,n$$

Segundo Deng; Li e Wang (2005) o problema (P1) tem uma única solução ótima, descrita por r* (r *,r *,...,r *). Portanto a solução ótima para o problema de minimax proposto (P1) é:

$$x = \frac{(1-w)}{2w} \sum^{-1} (r^* - 1r_{n+1})$$

$$x_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

O valor esperado e a variância associada ao retorno da carteira são, respectivamente:

$$e(w) = r_{n+1} + \frac{(1-w)}{2w}(r^* - 1r_{n+1})^T \sum^{-1} (r^* - 1r_{n+1})$$

$$\sigma^2(w) = \frac{(1-w)^2}{4w}(r^* - 1r_{n+1})^T \sum^{-1} (r^* - 1r_{n+1})$$

3.4 Modelo CVAR

O modelo CVar, assim, como os outros modelos apresentados anteriormente, tem como minimizar uma medida de risco relacionada a carteira de investimentos de um investidor através da alocação eficiente de capital dentre ativos do mercado financeiro.

Tomando h como capital inicial, tempo $t0$, o investidor deve decidir por alocar este capital dentre ativos de risco e o ativo livre de risco. O modelo tem como objetivo satisfazer um nível mínimo de retorno médio, pela alocação de capital dentre os ativos, utilizando como medida de risco o CVar. Este modelo impõe que o investidor não poderá rebalancear a carteira, ou seja, uma vez tomada à decisão de alocação inicial esta irá permanecer inalterada até a data de horizonte.

Variáveis do Modelo

Para facilitar o entendimento, as variáveis do modelo serão divididas em:

- Indexadores;
- Parâmetros e variáveis deterministicas;
- Variáveis dependentes da simulação;
- Variáveis de decisão; e
- Variáveis auxiliares.

Os indexadores são representados por:

$I = \{1,2,..., i\}$	: conjunto de ações disponíveis
$S = \{1,2,..., s\}$	: conjunto de simulações realizadas

Como parâmetros e variáveis determinísticas o modelo toma:

h	: capital disponível em caixa em $T0$ (instante inicial)
w_i^0	: quantidade de ações i na carteira inicial
μ	: nível mínimo de retorno médio aceitável
α	: nível de confiança para o cálculo do CVAR
T	: horizonte de investimento (em dias)
rf	: taxa livre de risco (% aa)
π_i^0	: preço do ativo i em $T0$ (instante inicial)
V^0	: valor total da carteira em $T0$ (instante inicial)

As variáveis dependentes da simulação são descritas por:

π_i^s : preço do ativo i na data de horizonte, no cenário s

V_s : valor total da carteira na data de horizonte, no cenário s

R_s : retorno obtido pela carteira até a data de horizonte, no cenário s

As variáveis de decisão são descritas por:

b_i : quantidade de ações i compradas

s_i : quantidade de ações i vendidas

w_i^T : quantidade de ações i na carteira final

E, por fim , a variável auxiliar é dada por:

$\overline{R}$: retorno médio obtido dentre os cenários simulados

Restrições

As restrições do modelo são:

$$h + \sum_i s_i \cdot \pi_i^0 = \sum_i b_i \cdot \pi_i^0 \quad (3.4)$$

$$V^0 = \sum_i w_i^0 \cdot \pi_i^0 + h \quad (3.5)$$

$$V_s = \sum_i w_i^T \cdot \pi_i^s, \forall s \in S \quad (3.6)$$

$$R_s = \frac{V_s}{V^0} - 1, \forall s \in S \quad (3.7)$$

$$\overline{R} = \sum_s \frac{1}{S} \cdot R_s \quad (3.8)$$

$$\overline{R} \geq \mu \quad (3.9)$$

$$w_i^T \geq 0, \forall i \in I \quad (3.10)$$

$$b_i \geq 0, \forall i \in I \quad (3.11)$$

$$w_i^0 \geq s_i \geq 0, \forall i \in I \quad (3.12)$$

A restrição (3.4) impõe que o financiamento total da carteira venha do capital inicial e do recurso financeiro obtido pela venda de ações. A restrição (3.5) impõe que o valor da carteira na data $T = 0$, é a somatória do preço dos ativos nesta data vezes a quantidade dos mesmos somado ao capital inicial a ser investido. A seguinte restrição denota que o valor da carteira em uma data T futura é igual ao preço dos ativos nesta data multiplicado pela quantidade de ações dos mesmos. A restrição de número (3.7) toma que o retorno de um cenário s é igual ao valor da carteira em uma data $T = t$ dividida pelo valor da carteira em $T=t-p$, ponde p é o período de observação. A restrição (3.8) impõe o calculo da média dos retornos das carteiras, que deve ser maior que um retorno μ estabelecido pelo investidor, o que é imposto pela restrição (3.9). A restrição (3.10) impõe que a quantidade total de ações no em uma data T deve ser maior ou igual a zero, onde a restrição (3.11) impõe que quantidade comprada deve ser necessariamente maior ou igual a zero e a quantidade vendida deverá ser maior ou igual a zero e menor do que a quantidade total de ações, o que tem por objetivo impedir o *short selling,* sendo esta a última restrição.

Para ser possível minimizar o nível de risco, no caso o CVaR, ROCKAFELLAR (2002) toma como necessário linearizar o cálculo de tal medida de risco da carteira. Assim, sendo x, o conjunto de decisões possíveis quanto à carteira, ou seja, o conjunto de todas as variáveis do modelo, pode se associar uma função de perda a cada cenário simulado.

Segundo ROCKAFELLAR (2002) a função perda pode ser descrita por:

$$L_s = f(x), \forall s \in S$$

sendo:	$L_s =$	Função de perda
	$x =$	Conjunto de decisões de um cenário

Assim, a probabilidade da função perda Ls não exceder um nível especificado z é, então, a soma da probabilidade dos cenários em que a perda é menor do que z.

Tal probabilidade pode ser descrita como:

$$\psi(x,z) = \sum_{s|L_s \leq z} p_s$$

sendo:	$p_s =$	Probabilidade do cenário s

Com isto, o Var é definido como o menor valor de z para que a probabilidade da função perda não exceder z seja maior do que um nível de confiança α especificado. O que pode ser descrito matematicamente como:

$$VaR(x,\alpha) = \min\{z \in \Re \mid \psi(x,z) \geq \alpha\}$$

Sendo assim, o CVar é definido com sendo a perda média da carteira que exceda o Var para o nível de confiança α%, ou:

$$CVaR(x,\alpha) = \mathrm{E}[L_s \mid L_s \geq VaR(x,\alpha)]$$

Para ROCKAFELLAR et al. (2002) o modelo CVaR pode ser descrito como:

$$CVaR(x,\alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \left(\sum_{s \mid L_s \leq z} p_s - \alpha \right) \cdot z + \frac{1}{1-\alpha} \cdot \left(\sum_{s \mid L_s > z} p_s \cdot L_s \right)$$

Esta formulação foi ainda mais simplificada por TOPALOGLOU (2004), com a utilização de a variável auxiliar y_s, de tal forma que:

$$y_s = \max\{0; L_s - z\}$$

$$CVaR(x,\alpha) = z + \left(\frac{1}{1-\alpha} \right) \cdot \sum_s p_s \cdot y_s$$

É considerado que todos os cenários simulados são equiprováveis. Sendo assim a função objetivo, utilizando como medida de risco o CVar, pode ser descrita como o somatório ponderado das perdas condicionadas como superior ao Var para todos os cenários simulados, o que pode ser expresso matematicamente por:

$$\text{MIN} \quad z + \left(\frac{1}{1-\alpha} \right) \cdot \sum_s \frac{1}{S} \cdot y_s$$

Tal formulação exige o incremento de mais três varáveis auxiliares, tal como mais três restrições, o que podem ser descritas como:

z : VaR das perdas da carteira

y_s : variável auxiliar para linearizar a função de risco do CVaR

L_s : perda total da carteira no cenário s

E as restrições são:

$$y_s \geq L_s - z, \forall s \in S \quad (3.12)$$

$$L_s = -R_s, \forall s \in S \quad (3.13)$$

$$y_s \geq 0, \forall s \in S \quad (3.14)$$

A restrição (3.12) impõe que a variável y_s seja maior ou igual a a perda máxima no cenário s menos o VAR da carteira. A restrição (3.13) impõem que a variável y_s seja maior ou igual a zero. Por fim a restrição (3.14) impõem que a perda máxima do cenário s seja igual $-R_s$, onde R_s representa o retorno total da carteira obtido no cenário s.

3.5 Resumo dos modelos de otimização apresentados

Modelo	**Medida de Risco**	**Modelo de Otimização**
Markowitz	$Var = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$	**Função objetivo** $MIN \sum_{i} \sum_{j} \sigma_{ij} \cdot x_j \cdot x_i$ ***Sujeito a:*** $\sum_{j=1} r_j x_j \geq \rho Mo$ (1) $\sum_{j=1} x_j = Mo$ (2) $0 \leq x_j \leq u_j$ (3)
Konno	$DPA = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left\lvert \sum_{j=1}^{n} (r_{jt} - \bar{r}_j) \right\rvert$	**Função objetivo** $Min \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left\lvert \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \right\rvert$ ***Sujeito a:*** $\sum_{j=1} r_j x_j \geq \rho Mo$ $\sum_{j=1} x_j = Mo$ $0 \leq x_j \leq u_j$ j = 1,2, ...,n

Tabela 3.1 Quadro Resumo dos Modelos de Otimização para Ações

Modelo	Medida de Risco	Modelo de Otimização
Minimax	$f(x,r) = (1-w)\sum_{i=1}^{n+1} r_i x_i - w\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}$	**Função objetivo** $\underset{x}{Max}\ \underset{r}{Min}\ f(x,r) = (1-w)\sum_{i=1}^{n+1} r_i x_i - w\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}$ ***Sujeito a:*** $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1$ $r_i \geq r_{n+1} \quad i = 1,\dots,n$ $a_i \leq r_i \leq b_i \quad i = 1,\dots,n$
CVaR	$CVaR(x,\alpha) = z + \left(\frac{1}{1-\alpha}\right) \cdot \sum_s p_s \cdot y_s$	**Função objetivo** $\text{MIN} \quad z + \left(\frac{1}{1-\alpha}\right) \cdot \sum_s \frac{1}{S} \cdot y_s$ ***Sujeito a:*** $h + \sum_i s_i \cdot \pi_i^0 = \sum_i b_i \cdot \pi_i^0$ $\overline{R} \geq \mu$ $y_s \geq L_s - z, \forall s \in S$ $L_s = -R_s, \forall s \in S$ $y_s \geq 0, \forall s \in S$

Tabela 3.1 Quadro Resumo dos Modelos de Otimização para Ações (Continuação)

4 MODELOS DE OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE OPÇÕES

No capítulo anterior, foram apresentados os principais modelos de otimização de carteiras exclusivamente de ações. Como visto todos estes modelos tinham como princípio minimizar uma medida de risco, e assim se maximizar a utilidade de uma carteira para seu investidor.

Prosseguindo o estudo de modelos de otimização, no presente capítulo serão estudados modelos que tratam mais do que um produto financeiro numa mesma carteira de investimentos, ou seja, além das ações, tais modelos procuram alocar o capital do investidor também em alguns derivativos das mesmas, no caso opções listadas na Bolsa de Mercadorias e Futuros BM&F.

Autores como Topaloglou e Duarte Júnior adicionaram em seus modelos de seleção de investimento opções de ações, para com isto estudarem os efeitos do incremento de derivativos em carteiras no que se refere à utilidade da mesma. Tais modelos partem do principio dos modelos estudados no capítulo anterior, ou seja, a maximização da utilidade para o investidor por meio da minimização de uma medida de risco.

Duarte Júnior utiliza como medida de risco para seu modelo de otimização a variância, enquanto Topaloglou define sua medida de risco sobre o CVaR. Os modelos serão introduzidos a seguir.

4.1 Modelo de Variância

O modelo de Duarte Júnior para carteiras de ações e opções utiliza como medida de risco a variância relativa ao valor de uma carteira. Após a seleção ótima das opções a comporem a carteira é utilizado o conceito Delta Hedge, introduzido por Black & Scholes na decada de 70, com a finalidade de neutralizar os efeitos da variação dos preços dos ativos objeto.

Segundo Duarte Júnior (1996) o preço de uma opção padrão, conhecida como *plain vanilla,* V, depende de:

S	: preço do ativo objeto
σ	: volatilidade do ativo objeto
E	: preço de exercício
T	: tempo para vencimento
r	: taxa de juros

Sendo V(S,E,σ,r,T) o valor da opção , para pequenas variações no preço do ativo objeto, na volatilidade , na taxa de juros e no tempo para o vencimento, tem-se a variação do valor da opção pode ser descrito através da seguinte expressão:

$$dV = \Delta(ds) + \frac{\Gamma}{2}(ds)^2 + \mathrm{K}(d\sigma) + \rho(dr) + \Theta(dT)$$

Sendo:

Δ	: delta da opção
Γ	: gama da opção
K	: vega da opção
ρ	: rho da opção
Θ	: teta da opção

Considerando:

$$R_s \equiv \frac{dS}{S}, \quad R_\sigma \equiv \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad R_r \equiv \frac{d_r}{r}$$

Pode se escrever a variação do preço de uma opção como:

$$dV \approx \Delta S R_s + \frac{\Gamma}{2} R_s{}^2 + \mathrm{K}\sigma R_\sigma + \rho r R_r + \Theta dT$$

Assim, segundo Duarte Júnior (1996), uma aproximação da variância de dV para um intervalo de tempo conhecido é dada por:

$$Var(dV) \approx (\Delta S R_s + \frac{\Gamma}{2} R_s^{\ 2} + \mathrm{K}\sigma R_\sigma + \rho r R_r)$$

Supondo uma carteira com m opções , todas sobre o mesmo ativo objeto. Caso denotarmos Π como o valor da carteira, temos:

$$\Pi \equiv \sum_{i=1}^{m} \mathrm{V_i}(\mathrm{S}, \mathrm{E}, \sigma, \mathrm{r}, \mathrm{T}) n_i$$

Sendo:

n_i : número de opções na carteira

Caso n seja positivo, o investidor está com posição comprada neste ativo, caso contrário ele estará com uma posição vendida no mesmo ativo.

Logo, a variação do valor de uma carteira de opções, ou se retorno no período de estudo, pode ser descrita como:

$$d\Pi \approx \sum_{i=1}^{m} n_i (\ \Delta S R_s + \frac{\Gamma}{2} R_s^{\ 2} + \mathrm{K}\sigma R_\sigma + \rho r R_r + \Theta dT)$$

E sua variância tem a seguinte aproximação:

$$VAR(d\Pi) \approx VAR(\ \Delta S R_s + \frac{\Gamma}{2} R_s^{\ 2} + \mathrm{K}\sigma R_\sigma + \rho r R_r)$$

Sendo:

$$\Delta_\Pi \equiv \sum_{i=1}^{m} n_i \Delta_i, \quad \Gamma_\Pi \equiv \sum_{i=1}^{m} n_i \Gamma_i, \quad \mathrm{K}_\Pi \equiv \sum_{i=1}^{m} n_i \mathrm{K}_i, \quad \rho_\Pi \equiv \sum_{i=1}^{m} n_i \rho_i, \quad \Theta_\Pi \equiv \sum_{i=1}^{m} n_i \Theta_i$$

Tal modelo possui duas hipóteses embutidas, que são:

1. Todas as opções possuem igual tempo para vencimento;
2. Todas as opções possuem igual volatilidade implícita; e

Tendo em vista isto, a função objetiva é descrita matematicamente como:

$$Min \quad VAR(\Delta_{\Pi} SR_s + \frac{\Gamma_{\Pi}}{2} R_s^{\;2} + \mathrm{K}_{\Pi} \sigma R_\sigma + \rho_{\Pi} r R_r)$$

$$u_i \equiv \sum_{i=1}^{m} n_i \Delta_i$$

$$0 \leq n_i \leq l$$

As variáveis e parâmetros utilizados no modelo são:

1. Variáveis são utilizadas para modelar o número de ativo objeto e de opções a serem compradas e vendidas, enquanto (n) representam variáveis relacionadas às opções, (u) representa o ativo objeto;
2. Variáveis contínuas são utilizadas para modelar as gregas da carteira; e
3. Os tamanhos dos lotes de opções e ativos objetivos a serem comprados ou vendidos para hedge são totalmente divisíveis.

4.2 Modelo CVAR

O modelo CVaR, desenvolvido por Topaloglou, admite a adição de opções de ações em seu algoritmo de otimização.Para a utilização do modelo CVaR com ações e seus derivativos torna se necessário algumas adaptações, as quais serão expostas a seguir.

A função objetivo do modelo podes ser descrita como:

$$\text{MIN} \quad z+\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\cdot\sum_{s}\frac{1}{S}\cdot y_s$$

Onde:

z : VaR das perdas da carteira

y_s : variável auxiliar para linearizar a função de risco do CVaR

L_s : perda total da carteira no cenário s

Assim as restrições do modelo são:

$$y_s \geq L_s - z, \forall s \in S$$

$$L_s = -R_s, \forall s \in S$$

$$y_s \geq 0, \forall s \in S$$

O modelo possui a seguinte notação:

Indexadores:

$I = \{1,2,..., i\}$: conjunto de ações para estudo

$S = \{1,2,..., s\}$: conjunto de simulações

$C = \{1,2,..., c\}$: conjunto de opções de compra

$P = \{1,2..., p\}$: conjunto de opções de venda

Parâmetros e variáveis:

h	: capital inicia na data *T0* (instante inicial)
w_i^0	: quantidade de ações i na carteira inicial
μ	: retorno médio mínimo requerido
α	: nível de confiança requerido para o CVAR
T	: horizonte de investimento (em dias)
rf	: taxa livre de risco (% aa)
π_i^0	: preço do ativo i em *T0* (instante inicial)
$blc(c, E_c)$	: preço de uma opção de compra em *T0* (instante inicial) com preço de exercício E e cujo ativo objeto é a ação c.
$blp(p, E_p)$	: preço de uma opção de venda em *T0* (instante inicial) com preço de exercício E e cujo ativo objeto é a ação p.
V^0	: valor total da carteira em *T0* (instante inicial)

Variáveis de simulação:

π_i^s	: preço do ativo i na data de horizonte, no cenário s
V_s	: valor total da carteira na data de horizonte, no cenário s
R_s	: retorno obtido pela carteira até a data de horizonte, no cenário s

Variáveis de decisão:

b_i	: número total de ações i compradas
s_i	: número total de ações i vendidas
w_i^T	: número total de ações i na carteira final
xc_c	: número total de opções de compra c compradas
xp_p	: número total de opções de venda p compradas

Variável auxiliar:

$\overline{R}$	: retorno médio obtido dentre os cenários simulados

Restrições

As restrições do modelo são:

$$h+\sum_{i} s_i \cdot \pi_i^0 = \sum_{i} b_i \cdot \pi_i^0 + \sum_{c} xc_c \cdot blc(c,E_c) + \sum_{p} xp_p \cdot blp(p,E_p) \qquad (4.1)$$

$$V^0 = \sum_{i} w_i^0 \cdot \pi_i^0 + h \qquad (4.2)$$

$$V_s = \sum_{i} w_i^T \cdot \pi_i^s + \sum_{c} xc_c \cdot \max(\pi_c^s - E_c, 0) + \sum_{p} xp_p \cdot \max(E_p - \pi_p^s, 0), \forall s \in S \qquad (4.3)$$

$$\sum_{c} xc_c \cdot blc(c,E_c) + \sum_{p} xp_p \cdot blp(p,E_p) \le \sum_{i} w_i^T \cdot \pi_i^T, \forall i \in I \qquad (4.4)$$

$$R_s = \frac{V_s}{V^o} - 1, \forall s \in S \qquad (4.5)$$

$$\overline{R} = \sum_{s} \frac{1}{S} \cdot R_s \qquad (4.6)$$

$$\overline{R} \ge \mu \qquad (4.7)$$

$$w_i^T = w_i^0 + b_i - s_i, \forall i \in I \qquad (4.11)$$

$$w_i^T \ge 0, \forall i \in I \qquad (4.12)$$

$$b_i \ge 0, \forall i \in I \qquad (4.13)$$

$$w_i^0 \ge s_i \ge 0, \forall i \in I \qquad (4.14)$$

$$xc_c \ge 0, \forall c \in C \qquad (4.15)$$

$$xp_p \ge 0, \forall p \in P \qquad (4.16)$$

A restrição (4.1) impõe que o capital financiador da carteira é a soma do capital inicial do investidor como do capital recebido por venda de ativos ou de opções.

A restrição (4.2) e (4.3) impõem que o valor da carteira no instante inicial e em um tempo T qualquer, após a data T=0.

A restrição (4.4) impõe o limite de compra do ativo em relação às opções de compra ou de venda do mesmo na carteira. A restrição (4.5) impõe o calculo do retorno ao período da carteira nos cenários s, sendo imposto na restrição (4.6) que o retorno médio seja uma média ponderada dos retornos dos cenários estudados. Tal retorno deve atender a uma necessidade mínima estipulada pelo investidor, o que é imposto pela restrição (4.7).

A restrição (4.11) impõe que a quantidade de cada ativo na carteira final deve ser igual a soma da quantidade de ativos na carteira inicial somadas as compras e vendas dos mesmos.

Com a finalidade de proibir venda a descoberto a restrição (4.14) impõe que a quantidade de ativos na carteira inicial seja maior ou igual à quantidade de ativos na carteira em qualquer data. E finalmente, as restrições (4.15) e (4.16) proíbem a venda de opções.

4.3 Resumo dos modelos de otimização apresentados

Modelo	Medida de Risco	Modelo de Otimização
Variância	$VAR = (\Delta_{\Pi} SR_s + \frac{\Gamma_{\Pi}}{2} R_s^{\,2} + K_{\Pi} \sigma R_{\sigma} + \rho_{\Pi} r R_r)$	**Função objetivo** $Min \quad VAR(\Delta_{\Pi} SR_s + \frac{\Gamma_{\Pi}}{2} R_s^{\,2} + K_{\Pi} \sigma R_{\sigma} + \rho_{\Pi} r R_r)$ ***Sujeito a:*** $u_i \equiv \sum_{i=1}^{m} n_i \Delta_i$
CVaR	$CVaR(x,\alpha) = z + \left(\frac{1}{1-\alpha} \right) \cdot \sum_s p_s \cdot y_s$	**Função objetivo** $\text{MIN} \quad z + \left(\frac{1}{1-\alpha} \right) \cdot \sum_s \frac{1}{S} \cdot y_s$ ***Sujeito a:*** $h + \sum_i s_i \cdot \pi_i^0 = \sum_i b_i \cdot \pi_i^0 +$ $\sum_c xc_c \cdot blc(c, E_c) + \sum_p xp_p \cdot blp(p, E_p)$ $\overline{R} \geq \mu$ $y_s \geq L_s - z, \forall s \in S$ $L_s = -R_s, \forall s \in S$ $y_s \geq 0, \forall s \in S$

Tabela 4.1 Quadro Resumo dos Modelos de Otimização para Ações e Opções

5 Análises dos Resultados

Foram realizados inicialmente alguns testes com objetivo de se compreender a implementação e o comportamento dos modelos. Primeiramente foram resolvidos os modelos de Markowitz, de Konno, Minimax e CVaR para ações. Num segundo momento foram realizados testes para os modelos que trabalham com ações e suas opções. Para tal foram utilizados dados reais de séries históricas de ações e opções de ações de empresas.

De acordo com Markowitz (1952) a composição ótima de uma carteira de investimento não depende exclusivamente da quantidade de ativos que a compõem mas também da diversidade de setores relacionados com os títulos estudados, ou seja, empresas de um mesmo setor podem sofrer efeitos similares decorrentes de variações financeiras e econômicas, porém empresas de setores diferentes podem ter efeitos adversos em relação a estas variações.

Para os dados reais, adotaram-se as seguintes premissas:

- Janela de tempo de T = 252 dias (um ano de cotações) para determinação das estatísticas de cada série de ações;
- Série Histórica de 4 ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA) e de suas opções mais negociadas na Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F);
- Ao utilizar simulação para o modelo *CVaR* adotou-se que o retorno logarítmico dos ativos possui distribuição normal e foi empregada a fatoração de Cholesky para gerar as seqüências de retorno.

Logo, as ações das empresas estudadas foram:

Ativo	Código	Setor
Vale R Doce PNA	VALE5	Materiais Básicos / Mineração
Petrobrás PN	PETR4	Petróleo e Gás
Telemar PN	TNLP4	Telecomunicações
Net PN	NETC4	Telecomunicações

Tabela 5.1: Ações e Setores Estudados

As opções utilizadas tiveram seu preço aferido pelo modelo de BLACK-SCHOLES (1973), e são apresentadas:

Opções (Vencimento 15-Setembro-2007)			
Tipo	Call	Tipo	Put
Ação Objeto	Exercício	Ação Objeto	Exercício
TNLP4	40	TNLP4	40
TNLP4	42	TNLP4	42
TNLP4	44	TNLP4	44
TNLP4	46	TNLP4	46
TNLP4	48	TNLP4	48
TNLP4	50	TNLP4	50
PETR4	49.58	PETR4	49.58
PETR4	51.58	PETR4	51.58
PETR4	53.58	PETR4	53.58
PETR4	55.58	PETR4	55.58
PETR4	57.58	PETR4	57.58
PETR4	59.58	PETR4	59.58
VALE5	78	VALE5	78
VALE5	80	VALE5	80
VALE5	82	VALE5	82
VALE5	84	VALE5	84
VALE5	86	VALE5	86
VALE5	88	VALE5	88
NETC4	27	NETC4	27
NETC4	28	NETC4	28
NETC4	29	NETC4	29
NETC4	30	NETC4	30
NETC4	31	NETC4	31
NETC4	32	NETC4	32

Tabela 5.2 Opções estudadas

Como ativo livre de risco foi utilizado o CDI, certificado de depósito interbancário, com a taxa de 11,5% ao ano. Considerou-se a série de retornos de cada ação dentre o período de aproximadamente seis anos (09/09/2002 até 31/09/2007). O estudo foi realizado utilizando-se o aplicativo Matlab.

Devido a limitações legais quanto à venda de ações no mercado de capitais, como: disponibilidade da ação para aluguel; taxa de juros aplicadas ao aluguel; e margens financeiras, foi vetada a venda de ações nos modelos de otimização exclusivamente destes ativos na apresentação dos resultados.

5.1 Markowitz

O Modelo de Markowitz necessita da matriz de covariância e os retornos médios históricos dos ativos em estudo para a geração das carteiras de investimento. Logo estas estatísticas foram calculadas utilizando se as séries históricas das ações estudadas.

A tabela a seguir, representa os valores históricos da matriz de covariâncias e os retornos médios históricos de cada ativo.

	PETR4	VALE5	NETC4	TNLP4	CDI
PETR4	0,000377	0,000185	0,00022	0,000214	0,000015
VALE5	0,000185	0,000404	0,000128	0,000141	0,000015
NETC4	0,00022	0,000128	0,001652	0,000288	0,000015
TNLP4	0,000214	0,000141	0,000288	0,000437	0,000015
CDI	0,000015	0,000015	0,000015	0,000015	0,000015

Tabela 5.3: Matriz Covariância dos Ativos

Retorno Médio	
PETR4	0,14%
VALE5	0,18%
NETC4	0,21%
TNLP4	0,06%
CDI	0,04%

Tabela 5.4: Retorno Médio Diário dos Ativos

Dado um retorno mínimo exigido, o modelo de Markowitz calcula a participação percentual de cada ativo na formação da carteira, gerando assim uma fronteira eficiente.

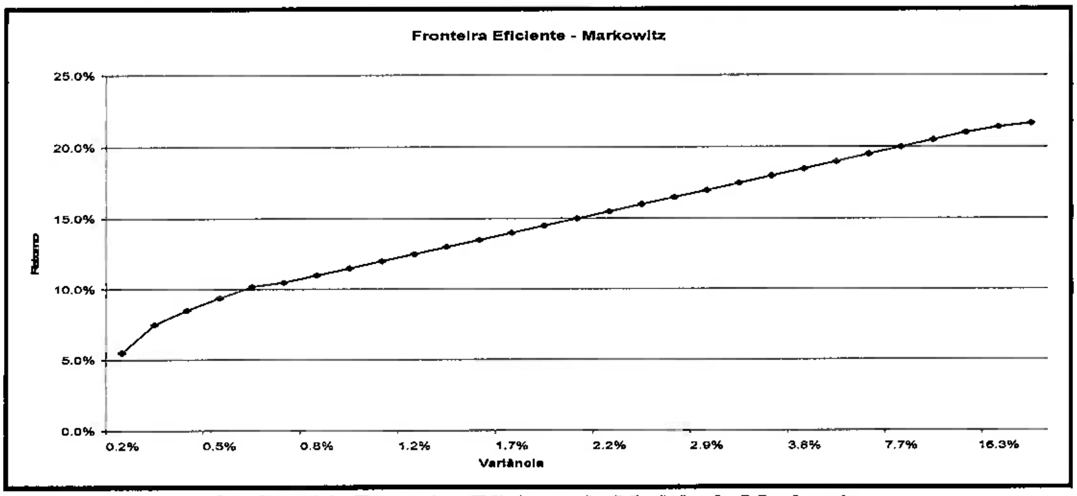

Gráfico 5.1: Fronteira Eficiente do Modelo de Markowitz

5.2 Konno

O Modelo de Konno necessita a Matriz de Covariância tanto como os retornos médios históricos dos ativos em estudo. Logo, foram utilizadas as mesmas séries de retorno e matriz covariância utilizadas no modelo de Markowitz.

O modelo de Konno possui uma peculiaridade que se faz importante ressaltar. Para cada observação utilizada, é necessária uma variável a mais no problema, logo, para, devido à restrição de capacidade computacional, foi selecionado um período dos últimos 100 dias úteis das observações. Tal período foi utilizado também para os outros modelos, para efeito de comparação.

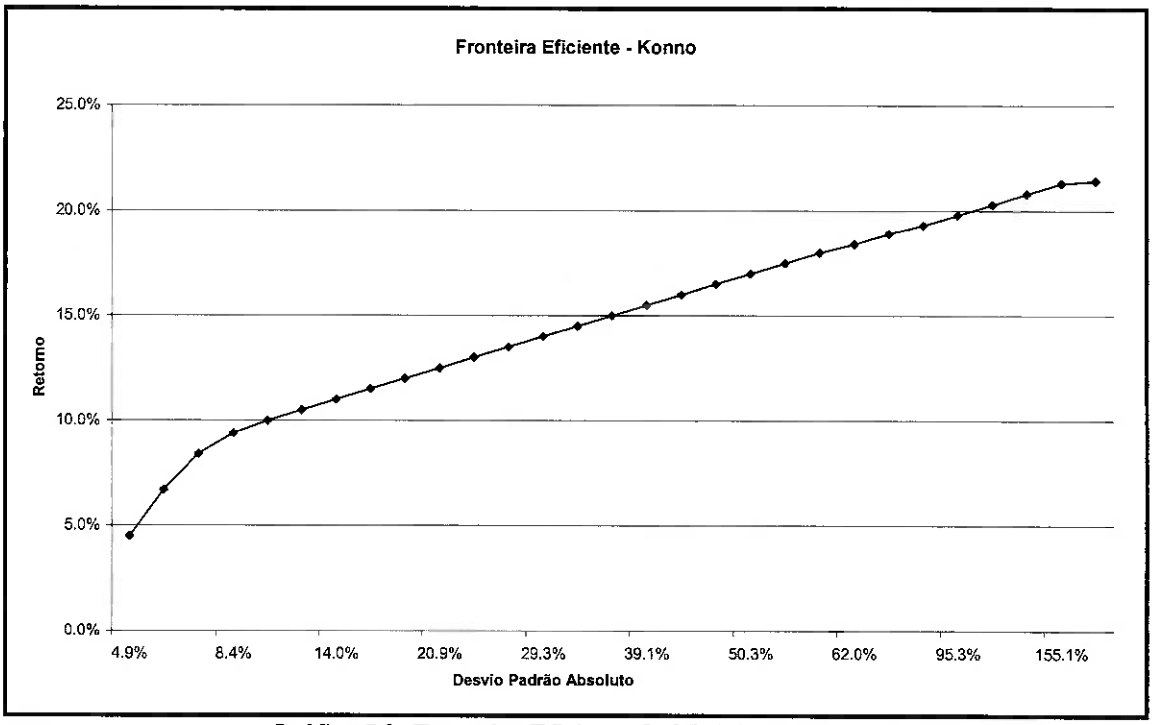

Gráfico 5.2: Fronteira Eficiente do Modelo de Konno

5.3 Minimax

O Modelo de Minimax necessita a Matriz de Covariância tanto como os retornos médios históricos dos ativos em estudo e uma limitação do retorno esperado. Este limite foi inferido por meio da utilização da distribuição T de Student com 95% de confiança e número de pontos superior a 100. Logo, o retorno e os limites são apresentados abaixo.

Retorno Médio		Limites	
		Sup	Inf
PETR4	0,14%	8,86%	-9,37%
VALE5	0,18%	7,73%	-7,93%
NETC4	0,21%	27,63%	-18,20%
TNLP4	0,06%	11,06%	-7,97%
CDI	0,04%	-	-

Tabela 5.5: Retorno médio e limites superiores e inferiores dos ativos

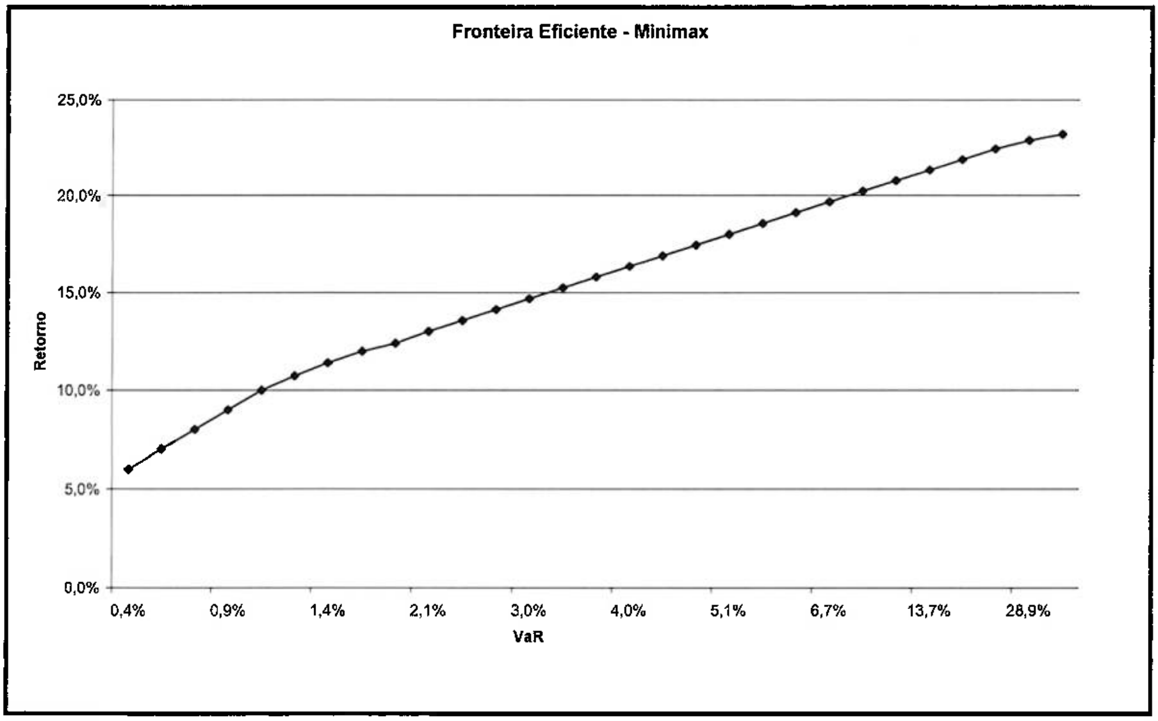

Gráfico 5.3: Fronteira Eficiente do Modelo Minimax

5.4 CVaR

Após concluir a formulação matemática e a compreensão do problema de otimização de carteira por meio do modelo CVaR, partiu-se para a programação. O horizonte de investimento neste trabalho foi de 1 dia. Foram feitas 1000 simulações.

As considerações inicias são:

- CDI de 11,5% ao ano;
- Carteira inicial de valor zero; e
- Disponibilidade de investimento inicial de R$ 1.000.000.

A fronteira eficiente do modelo é exibida a seguir.

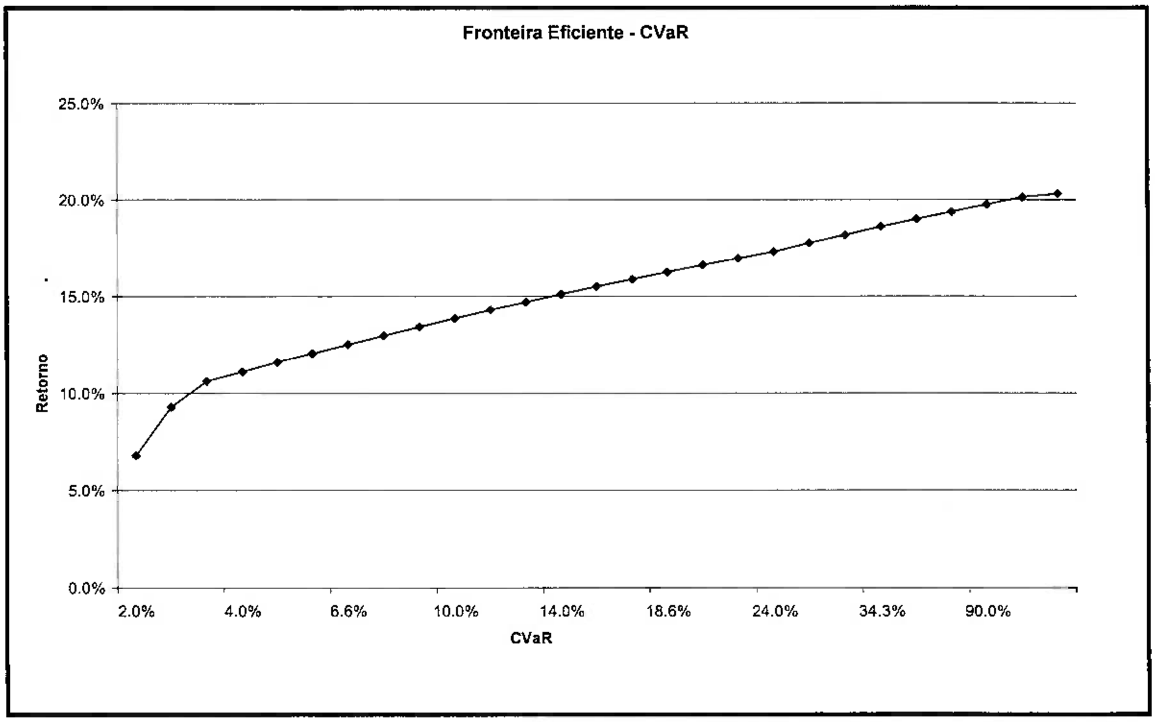

Gráfico 5.4: Fronteira Eficiente do Modelo CVaR

5.5 Comparação das Carteiras Obtidas Pelo Modelo

Para a composição das carteiras de ações, foram estabelecidos retornos mínimos exigidos de foram a tornar possível a comparação entre os modelos. A seguir são apresentadas as carteiras geradas pelos modelos descritos anteriormente.

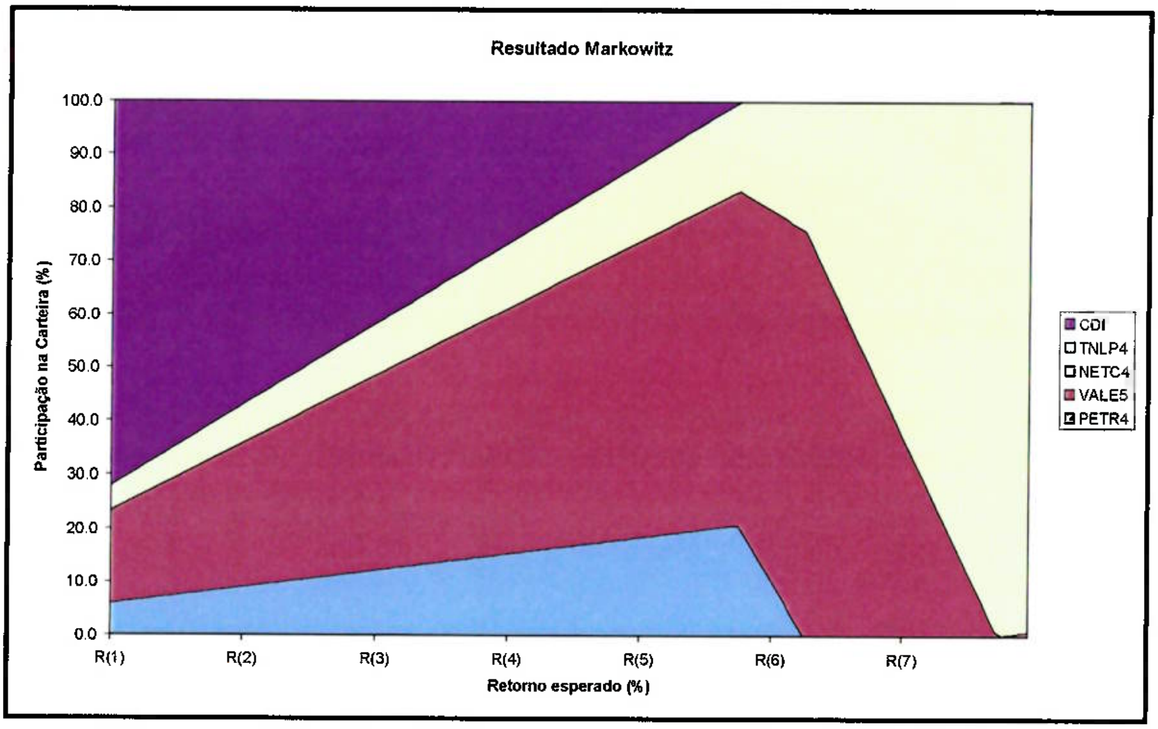

Figura 5.5: Participação dos Ativos na Carteira Ótima pelo Modelo de Markowitz

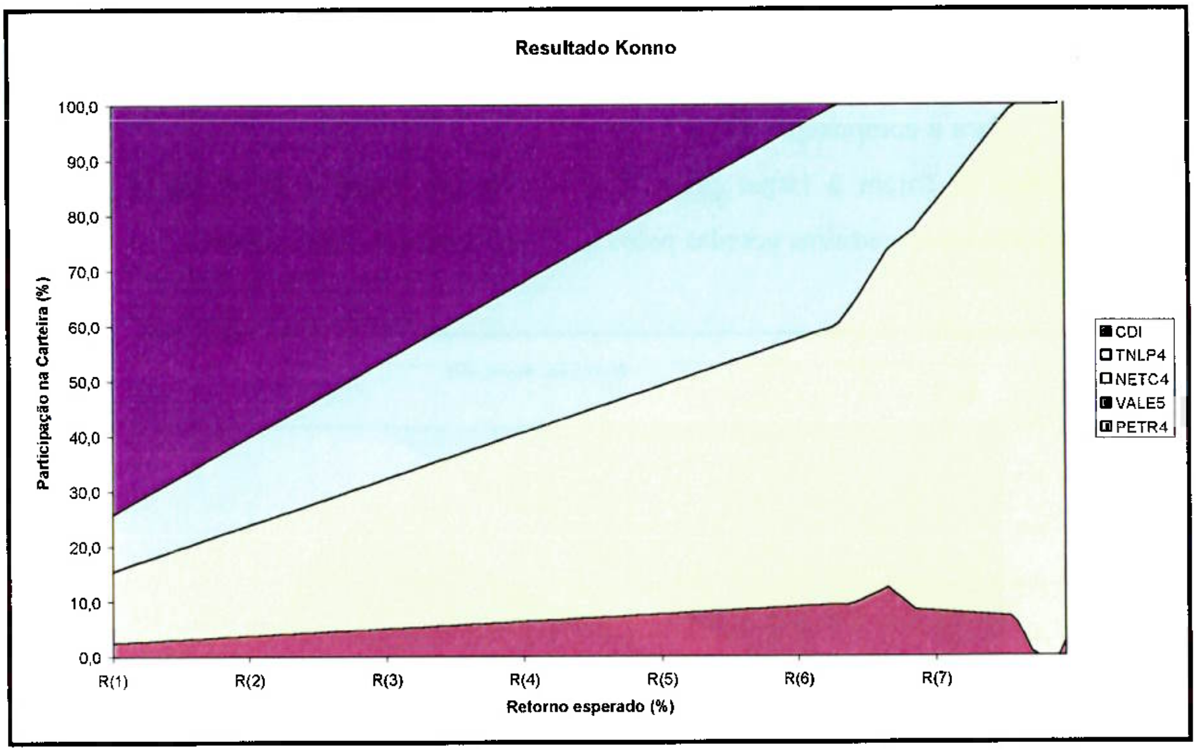

Figura 5.6: Participação dos Ativos na Carteira Ótima pelo Modelo de Konno

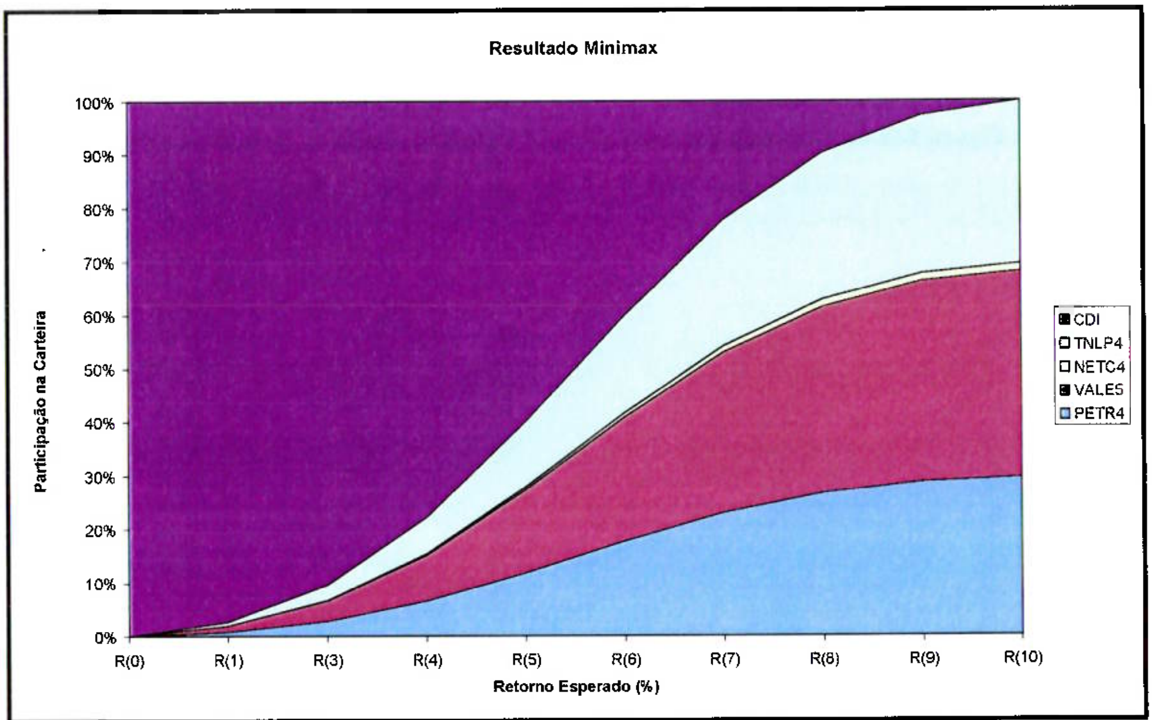

Figura 5.7: Participação dos Ativos na Carteira Ótima pelo Modelo de Minimax

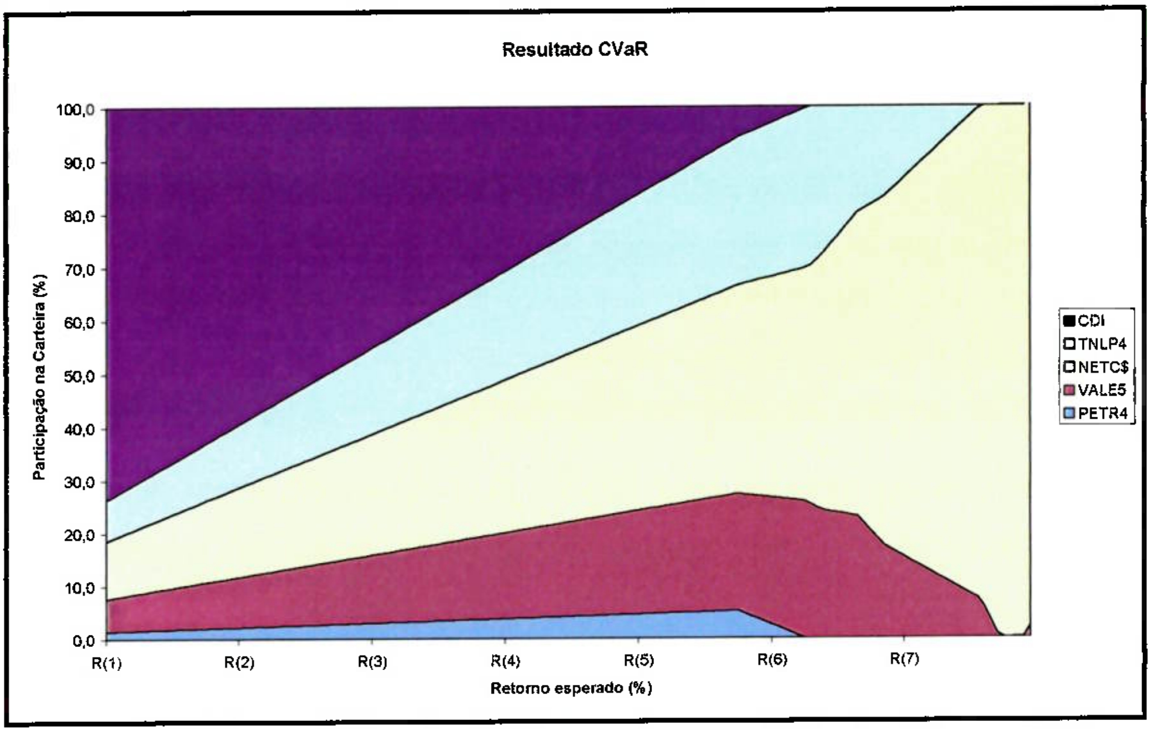

Figura 5.8: Participação dos Ativos na Carteira Ótima pelo Modelo de CVaR

Nota-se que os modelos de Markowitz, Konno e CVaR apresentam resultados similares. Todos estes modelos começam pela alocação de recursos financeiros em maior quantidade no ativo livre de risco, devido o baixo retorno exigido, alocando mais recurso financeiro, à medida que o retorno exigido aumenta, para os ativos com risco.

Outra característica é que este modelo possui a premissa da importância do risco ou do retorno para o investidor, o que é caracterizado pelo ponderador *w*, também conhecido como parâmetro de aversão ao ri*sco* e está definido no intervalo $0 < w \leq 1$. Quanto maior o *w*, ou seja, mais próximo a 1, maior é o conservadorismo do investidor, assim este tenderá a alocar mais capital no ativo livre de risco. Logo, existe uma a possibilidade de inviabilidade, referente a um nível de retorno mínimo exigido pelo investidor e seu perfil de aversão a risco.

Nota se que todos os modelos partem de uma grande alocação de capital no ativo livre de risco, ao serem exigidas taxas mínimas de retornos baixas. A medida em que a taxa requerida aumenta, os modelos criaram carteiras com maior nível de risco, culminando na alocação integral de capital em ativos de risco, ao serem exigidas altas taxas de retorno. Os modelos de Markowitz, Konno e CVaR, apresentaram-se mais reativos, em relação a taxa exigida, alocando mais capital em ativos de risco. O modelo minimax apresentou se mais lento nesta transferência de capital para ativos de risco, o que basicamente é explicado pela ponderação entre risco e retorno.

5.5 Resolução do Modelo Variância para Carteiras de Opções

Para a resolução do modelo de Júnior foram selecionadas seis opções com preços de exercício diferentes da ação PETR4, negociadas na BM&F. O período estudado é de aproximadamente 25 dias úteis (20/06/2002 até 31/08/2007). O estudo foi realizado utilizando-se o aplicativo Matlab.

O Modelo de Júnior necessita, como dado de entrada, as gregas tanto como uma matriz de covariância estimada para R_s, $R_s^{\ 2}$, R_σ e R_r. O lote padrão l, utilizado é de 100 ações. A tabela a seguir, representa os valores das gregas obtidas pelo software Matlab.

Opção de Compra	Delta	Gamma	Vega	Rhô
Exercício - 49,58	0,5995	0,0935	31,937	0,7572
Exercício - 51,58	0,4093	0,094	3,211	0,5244
Exercício - 53,58	0,2443	0,076	25,939	0,3163
Exercício - 55,58	0,1275	0,0505	17,243	0,1662
Exercício - 57,58	0,7743	0,0282	0,9631	0,0765
Exercício - 59,58	0,0236	0,0135	0,4603	0,0311

Tabela 5.6: As Gregas das Opções

S	σ	E	T	r
50,29	13,25%	49,58 - 59,58	7 dias úteis	11.5% a.a.

Tabela 5.7: Variáveis das Opções

R_s	$R_s^{\ 2}$	R_σ	R_r
0.1412%	0.2826%	0.0377%	0.0432%

Tabela 5.8: Os Retornos

A saída do modelo de otimização sugere a seguinte carteira de investimento:

Compra		Venda	
Opção	Exercício - 59,58	**Ação**	PETR4
Financeiro	R$ 1.000.000	**Financeiro**	R$ 596.404
Quantidade	502.513	**Quantidade**	11.859
Retorno no período	0,01%		
Variância ao Dia	0,87%		

Tabela 5.9: Carteira obtida pelo Modelo Variância

5.6 Resultados do Modelo CVaR com adição de Opções

O modelo CVaR seleciona a carteira de ações e opções dentre os ativos disponíveis. Adotou-se um nível de confiança de 95% para o cálculo do CVaR e o período de 1 dia útil..

Logo foi gerada a carteira abaixo:

TNLP4			
Operação	**Compra**	**Operação**	**Compra**
Opção Put	Exercício - 46		
Financeiro	R$ 10.553	**Financeiro**	R$ 374.800
Quantidade	8.794	**Quantidade**	8.794

PETR4			
Operação	**Compra**	**Operação**	**Compra**
Opção Put	Exercício - 54		
Financeiro	R$ 12.305	**Financeiro**	R$ 515.674
Quantidade	10.254	**Quantidade**	10.254

Retorno	1,05%
CVaR ao dia	6,9%

Tabela 5.10: Carteira obtida pelo Modelo CVaR

A carteira acima apresenta um retorno esperado anual de 13.90% e um CVaR de 3.45% ao ano. É formada por ações e opções da Petrobrás (PETR4) e da Telenorte Participações (TNLP4). A carteira apresentada possui a proporção de 1 *put* para cada 1 ação, o que acaba limitando a perda da carteira.

5.7 Comparação das Carteiras Geradas Pelos Modelos Mistos

O modelo CVaR seleciona a carteira de ações e opções de uma forma diferente da forma utilizada pelo modelo de Variância. Neste são dadas opções disponíveis e o modelo tem como objetivo, enquanto o modelo Variância busca selecionar uma carteira de opções dentre disponíveis que possua a menor variância, e imediatamente usar a estratégia de Delta Hedge, comprando ou vendendo o ativo objeto na proporção do Delta da opção utilizada.

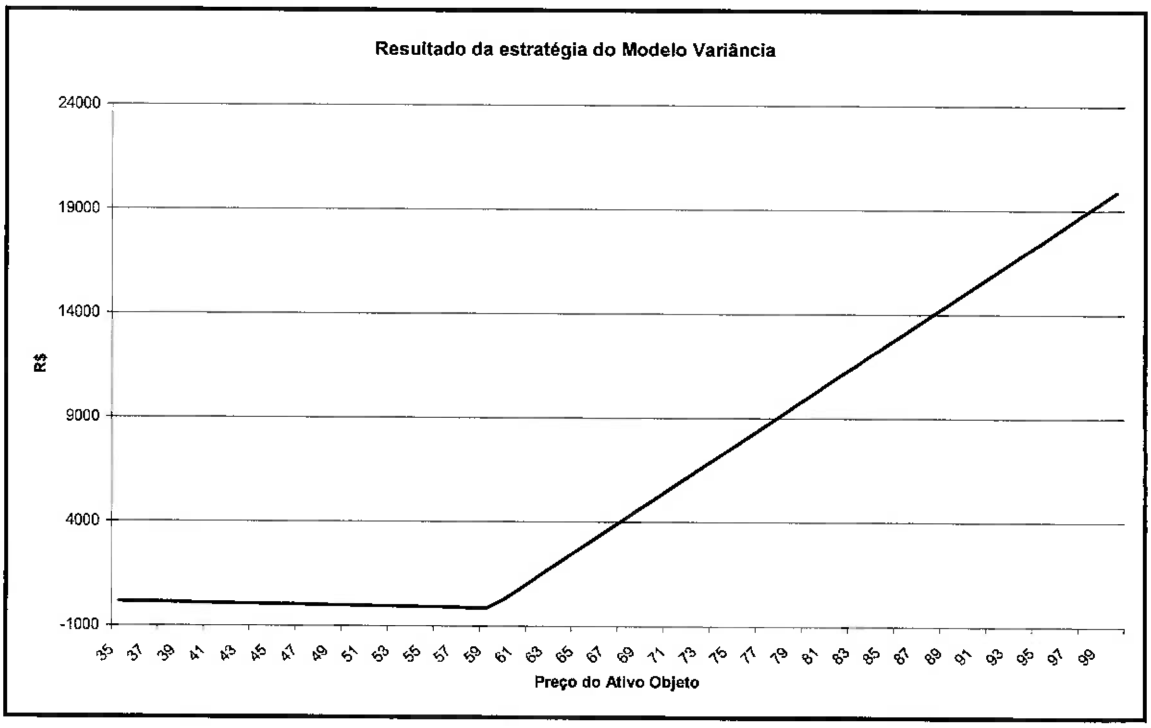

Figura 5.9: Retorno do Modelo Variância

Ao se analisar os resultados do Modelo Variância, é notado que este tem por objetivo proteger uma carteira de opções, com a compra ou venda de seus respectivos ativos objetos,e o faz por meio da estratégia do Delta Hedge, apresentada no Capítulo 2. Tal objetivo é notado pelo retorno da estratégia, relativamente baixo.

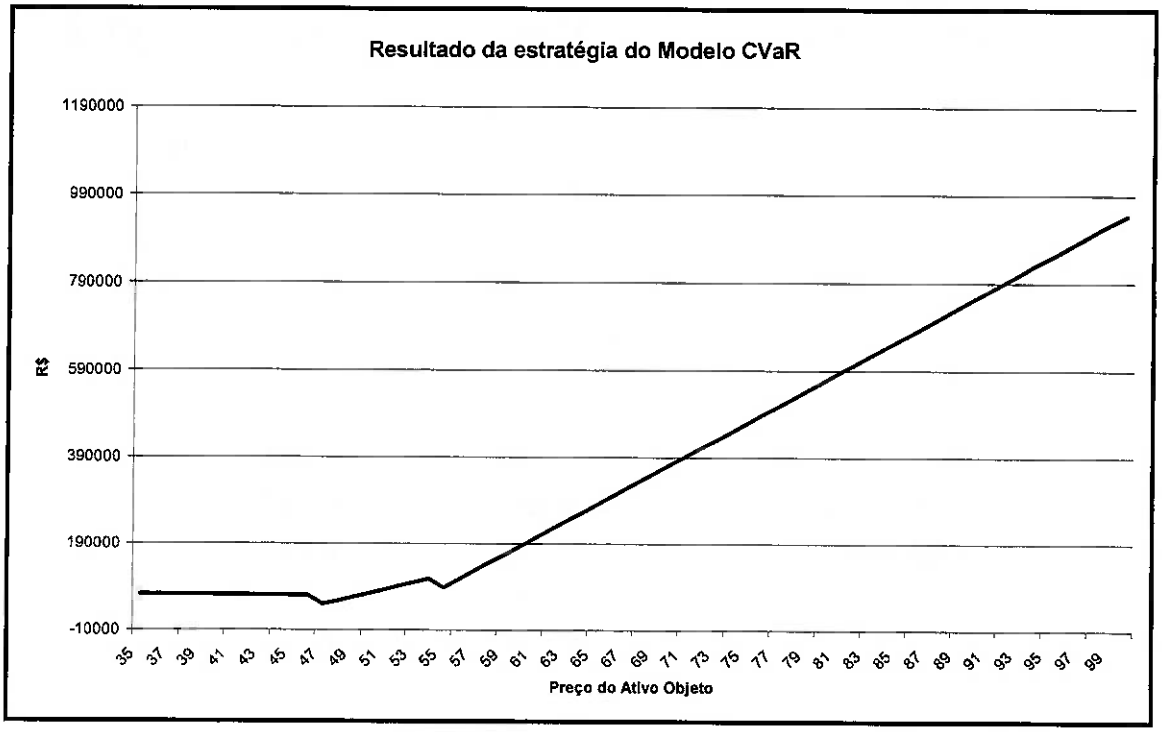

Figura 5.10: Retorno do Modelo CVaR

O Modelo CVaR, compõe a carteira de investimentos com ações e opções de ações Petrobrás (PETR4) e da Telenorte Participações (TNLP4). Nota-se no na figura acima que o desempenho desta estratégia não tem o objetivo de proteger o investimento da variação do preço do ativo objeto, mas sim minimizar as perdas nos piores cenários, sem que com isto o investidor perca as oportunidades de ganho nos melhores cenários.

É interessante se notar que com a utilização de opções, obtiveram-se carteiras de investimento com perfil da rentabilidade mais claro. O investidor possui o conhecimento de qual é sua perda máxima, caso o pior cenário aconteça, ou então seu lucro, caso o preço do ativo objeto alcance uma marca qualquer. O que torna esta

Para se consolidar as características dos modelos será apresentada, a seguir uma tabela com as características mais importantes destes.

Modelo de ações	Markowitz	Konno	Minimax	CVaR
Medida de risco	Variância	Desvio Padrão Absoluto	Variância	CVaR
Perda máxima	Desconhecido	Desconhecido	Desconhecido	Desconhecido
Eficiencia computacional	Alta	Baixa	Média	Baixa
Flexibilidade de estratégia	Baixa	Baixa	Alta	Alta

Tabela 5.11: Característica dos modelos

Modelos mistos	Variância	CVaR
Medida de risco	Variância	CVaR
Perda máxima	Conhecido	Conhecido
Eficiência computacional	Alta	Baixa
Flexibilidade de estratégia	Baixa	Alta

Tabela 5.12: Característica dos modelos (Continuação)

Para uma melhor compreensão desta tabela comparativa, os itens são apresentados a seguir:

- Medida de risco é a medida na qual o risco foi aferido no modelo;
- Perda máxima é a maior perda possível da carteira dado um cenário onde o preço do ativo atinge uma marca qualquer;
- Eficiência computacional, este item está relacionado com o tempo de processamento e também com a capacidade computacional para a análise das variáveis, alguns modelos possuem um número de variáveis relativamente alto, que acaba por inviabilizar computacionalmente a modelagem do problema; e
- Flexibilidade de estratégia, diz respeito a flexibilidade da adequação da carteira a um tipo de investidor. O modelo de Markowitz possui, por exemplo apenas a flexibilidade de se escolher um retorno mínimo exigido, enquanto o modelo Minimax, também possibilita a escolha de um perfil de risco por parte do investidor.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo o estudo dos modelos de otimização de carteiras de investimentos lastreados em diferentes medidas de risco. Procurou-se identificar empiricamente o desempenho destes modelos na seleção dos ativos para a produção de carteiras de menor risco. Foram estudadas as características e definições de algumas medidas de risco assim como foram implementados os modelos de Markowitz, Konno, MiniMax,Valor em Risco Condicional (CVaR), e para carteiras com opções foram implementados os modelos Valor em Risco Condicional e Variância.

O Modelo de Markowitz foi, dentre os modelos estudados, o de mais fácil implementação computacional, porém ainda com o auxilio do Software MatLab. Tal modelo recai em um problema de otimização quadrática, devido à necessidade do cálculo de uma matriz de covariância dos ativos. A aplicação prática deste modelo envolveu seleção de algumas ações listadas na Bolsa de Valores de São Paulo, e a compreensão do software MatLab.

O Modelo de Konno já ofereceu alguma dificuldade de implementação e perda de eficiência computacional, devido ao trabalho algébrico desenvolvido para que o problema recaísse em modelagem linear. O modelo tem como objetivo minimizar a função objetivo, que foi desenvolvida sobre a medida de risco desvio padrão absoluto. O principal problema observado no modelo, porém, foi dimensão resultante, que depende do número de observações. Em alguns casos o número de variáveis sobe a tal ponto, que o modelo torna-se inviável computacionalmente, o que pode ser interpretado como uma deficiência.

O Modelo MiniMax apresentou-se de difícil implementação computacional. A carteira selecionada apresentou se como a mais díspar em reação aos outros modelos.

O Modelo do valore em risco condicional exigiu um trabalho maior para sua implementação computacional requerendo suplementos ao software original, apesar de ser um problema de programação linear, devido a grande quantidade de restrições inseridas na modelagem, além de afetar o modelo. O Modelo foi elaborado sobre duas óticas: puramente com ações e posteriormente com ações e opções das mesmas.

O Modelo de Variância, utilizando sobre carteiras de opções, exigiu algum esforço para sua implementação, devido ao escasso número de observações de opções.

Tal modelo se especializa para a geração de carteiras de opções e é embasado na teoria do Delta Hedge, ou seja, após selecionar as opções cuja variância conjunta da carteira seja mínima, é necessário à compra ou venda de ações destas opções para que o Delta resultante da carteira seja nulo.

Os estudos e resultados obtidos dentre os diversos modelos elaborados não permitem a conclusão de superioridade de um em relação aos outros, uma vez que as curvas de retorno x risco são similares.

É interessante observar que os modelos geraram carteiras bastante concentradas em alguns ativos, o que pode na prática ser interpretado como uma deficiência pela grande exposição financeira ao risco inerente a poucas ações. Faz se necessário também, tornar claro, que tais modelos não levaram em consideração custos de transações decorrentes da compra ou venda de ativos.

Embora o presente trabalho tenha estudado os modelos de otimização financeira e suas medidas de risco aplicados ao mercado de capitais, faz-se necessário ressaltar que todos os modelos desenvolvidos possuem abrangente aplicação na gestão financeiras em empresas, não se limitando portanto, sua aplicação ao mercado financeiro.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTZNER P.; DELBAEN, F.; EBER, J. M.; HEATH, D. **Coherent measures of risk. Mathematical Finance**, 9(3):203–228, 1999.

BERGAMASCO, B. **O Modelo Minimaz e a incerteza na gestão de portfolio.** Trabalho de Formatura para obtenção do título de Engenheiro de Produção, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2006.

BIRGE, J. R. **Introduction to Stochastic Programming**. New York: Springer-Verlag New York, Inc. 1997.

BLACK, F.; SCHOLES, M. **The Pricing of Options and Corporate Liabilities**. Journal of Political Economy 81, p. 637-659, Maio-Junho 1973.

BODIE, Z.; KANE, A.; MARCUS, **A.. Fundamentos de Investimentos**. Porto Alegre: Bookman, 2000.

CABRAL. R. **Mercados Financeiros: Uma metodologia d ensino de estratégias de Investimeto.** Tese de Doutorado em Engenhra de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, 2002.

COSTA, C, L.; **Opções, Operando a Volatilidade.** São Paulo: Cultura, 1998.

DENG, X. LI Z. and WANG S.; **A Minimax Portfolio Selection Strategy with Equilibrium**, European Journal of Operational Research, vol.166, 2005

SILVA. M A.V. R. **A Determinação do Valor Econômico de uma Empresa Através do Fluxo de Caixa Descontado.** Tese de Doutorado em Engenharia de Produção, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2004.

FERREIRA, F.A.C. **O valor em risco condicional na otimização de carteiras com derivativos** Trabalho de Formatura para obtenção do título de Engenheiro de Produção, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2006.

FIGUEIREDO, A. **C.. Introdução aos Derivativos**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005.

FORTUNA, E.; **Mercado Financeiro Produto e Serviços**. São Paulo: Atlas, 2002.

HULL, J. C. **Fundamentos dos Mercados Futuros e de Opções**. São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros, 2005.

JORION, P. Value at Risk: **A Nova Fonte de Referência para a Gestão de Risco Financeiro**. 2ª ed. São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros, 2003

JUDICE, J. J.; RIBEIRO, C. O.; SANTOS, J. P. J. **Análise comparativa dos modelos de selecção de carteiras de ações de Markowitz e Konno**. Investigação Operacional, v.23, n.2, p.211-224, dez. 2003.

KONNO, H.; YAMAZAKI, H. **Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market.** Management Science, 1991. v.37. p.519 - 531. LEE, P. M. **Bayesian statistics: an introduction**. 3ª edição. Londres: Hodder Arnold, 2004.351p.

LARSEN, N.; MAUSSER, H.; URYASEV, S.; **Algorithms for Optimization of Value-at-Risk.** Research Report 2001-9, ISE Dept., University of Florida, 2001.

LEWIS, N. C. Market Risk Modelling: Applied Statistical Methods for Practitioners. Londres: Risk Water Group Ltd., 2003.

LUENBERGER, D.G., **Investment science.** Oxford: Oxford University Press, 1998. 488p.

MARKOWITZ, H. M. **Portfolio Selection**. Journal of Finance, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.
MORGAN, Banco J. P. RiskMetrics. 4ª ed. New York, J.P. Morgan, 1996. 296p.

ROCKAFELLAR, R.T.; URYASEV, S. **Conditional Value-at-Risk for general loss distributions**. Journal of Banking and Finance, v.26, n.7, p.1443–1471, 2002.

RUSSI, B.. **Otimização multiperíodo de carteiras de investimento utilizando a técnica de geração de árvores de cenários**. São Paulo, 2005. 96 p.

TOPALOGLOU, N. A **Stochastic Programming Framework For International Portfolio Management**. University Of Cyprus, 2004.

URYASEV, S. **Portfolio optimization with Conditional Value-at-Risk objective and constraints,** Research Report, Setembro 2001

VIANA, L V M C. **Análise do impacto do uso de estimadores de medidas de risco na otimização de carteiras**, Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo 2004

Anexo

Anexo 1 Séries temporais dos ativos utilizadas para modelagem

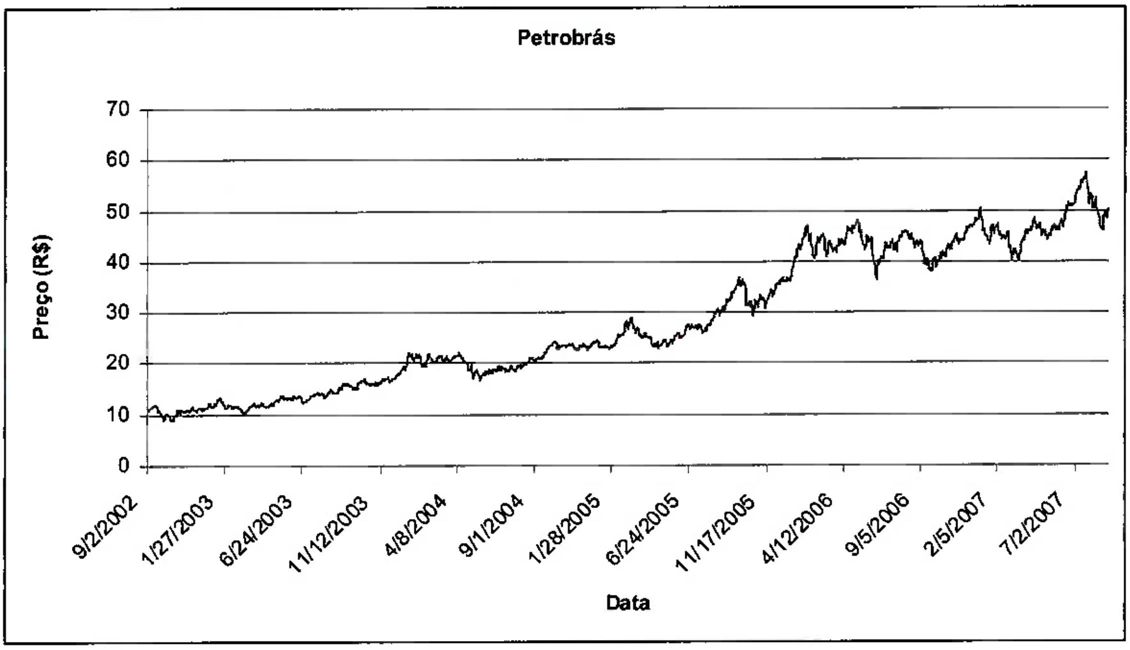

Figura 1.1 (A): Série Histórica do Preço da Ação PETR4

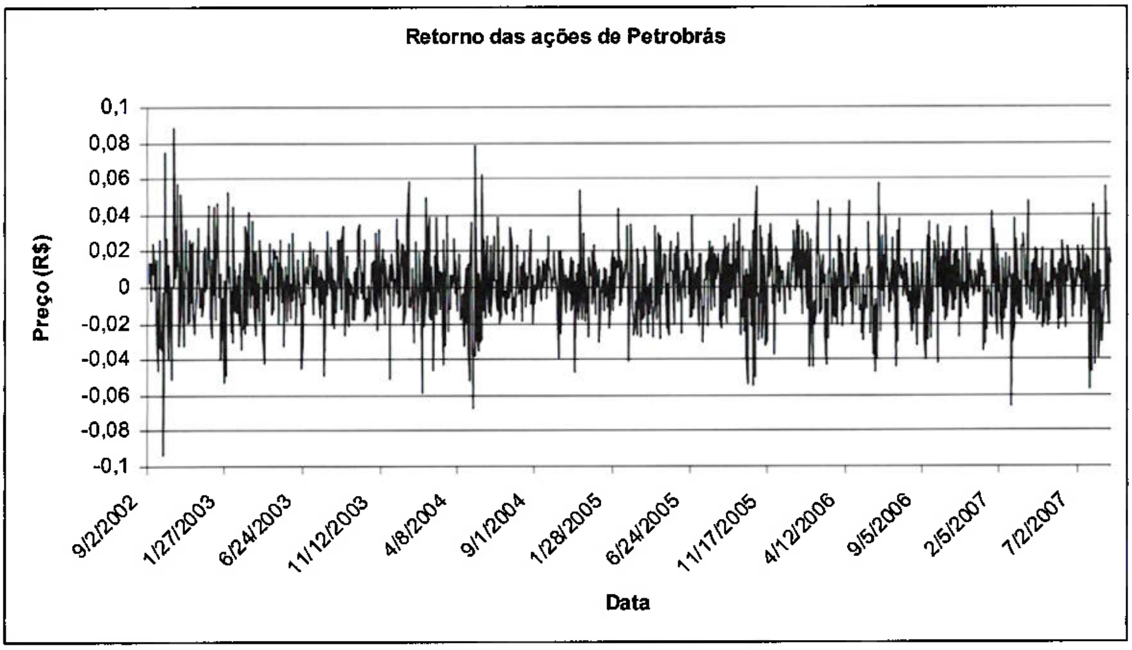

Figura 1.2(A): Série do Retorno do Preço da Ação PETR4

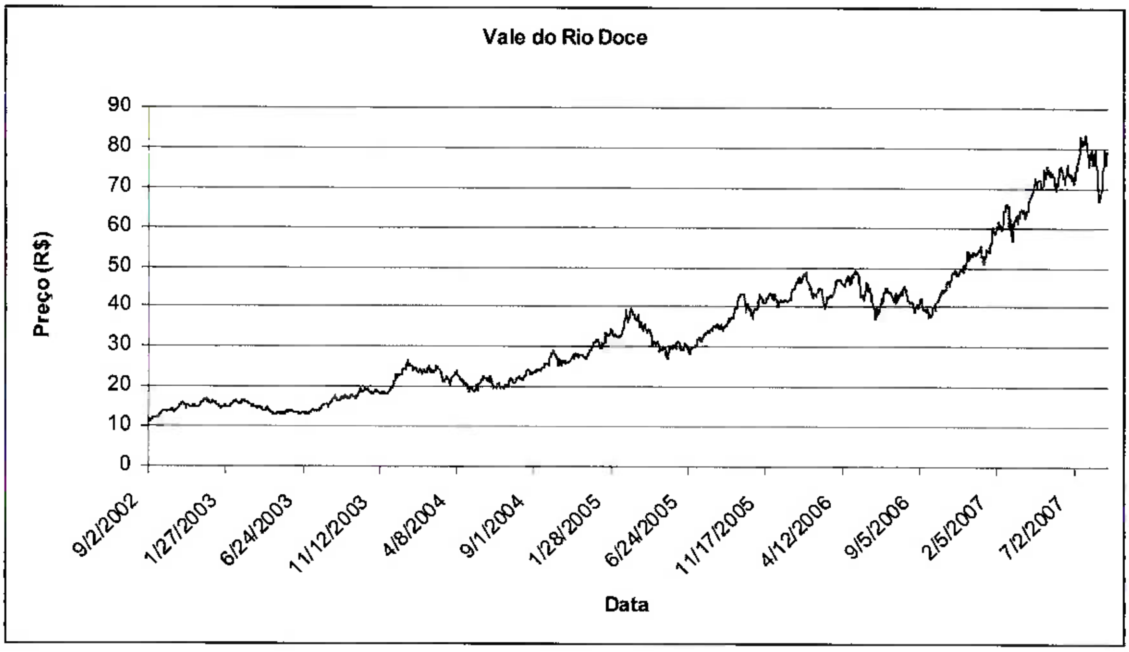

Figura 1.3 (A): Série Histórica do Preço da Ação VALE5

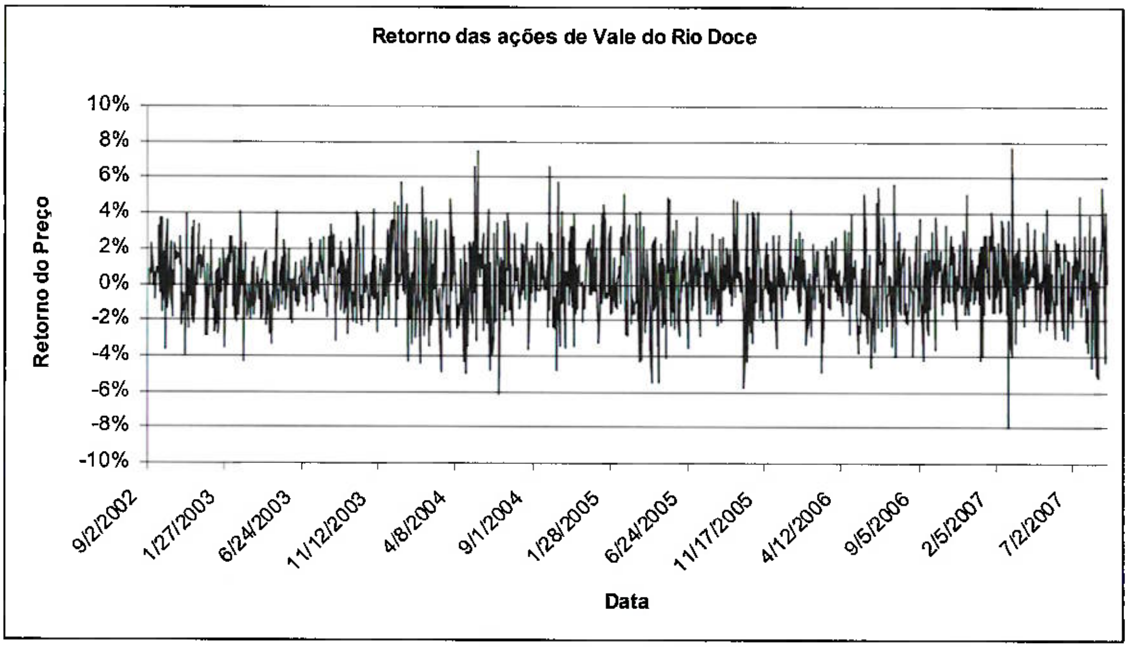

Figura 1.4 (A): Série do Retorno do Preço da Ação VALE5

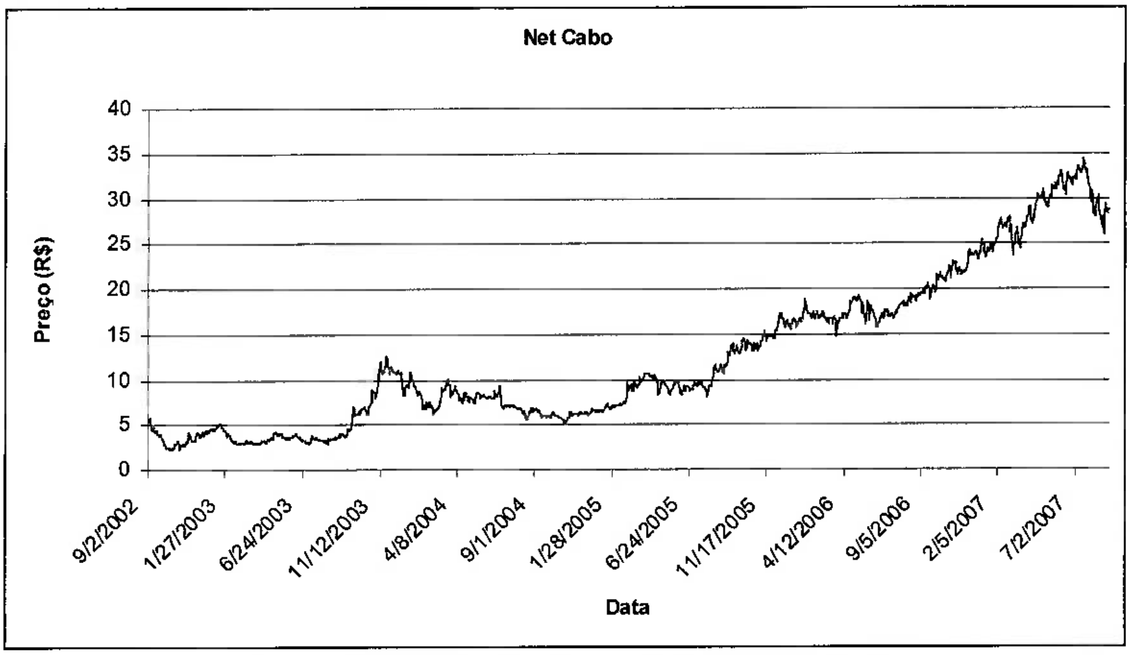

Figura 1.5 (A): Série Histórica do Preço da Ação NETC4

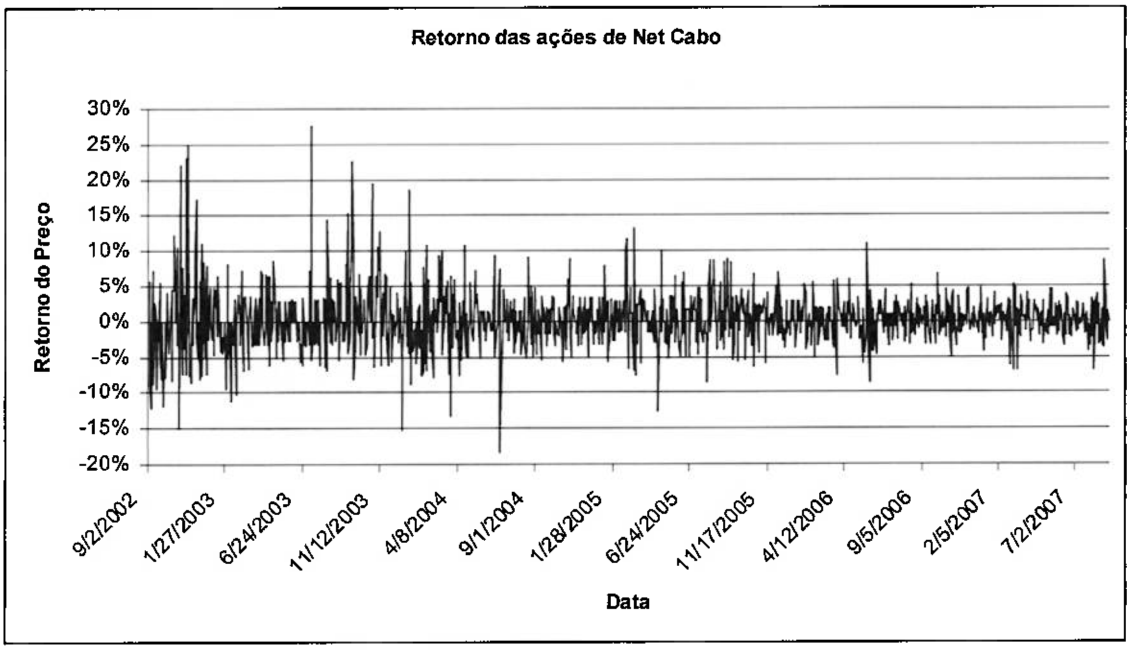

Figura 1.6 (A): Série do Retorno do Preço da Ação NETC4

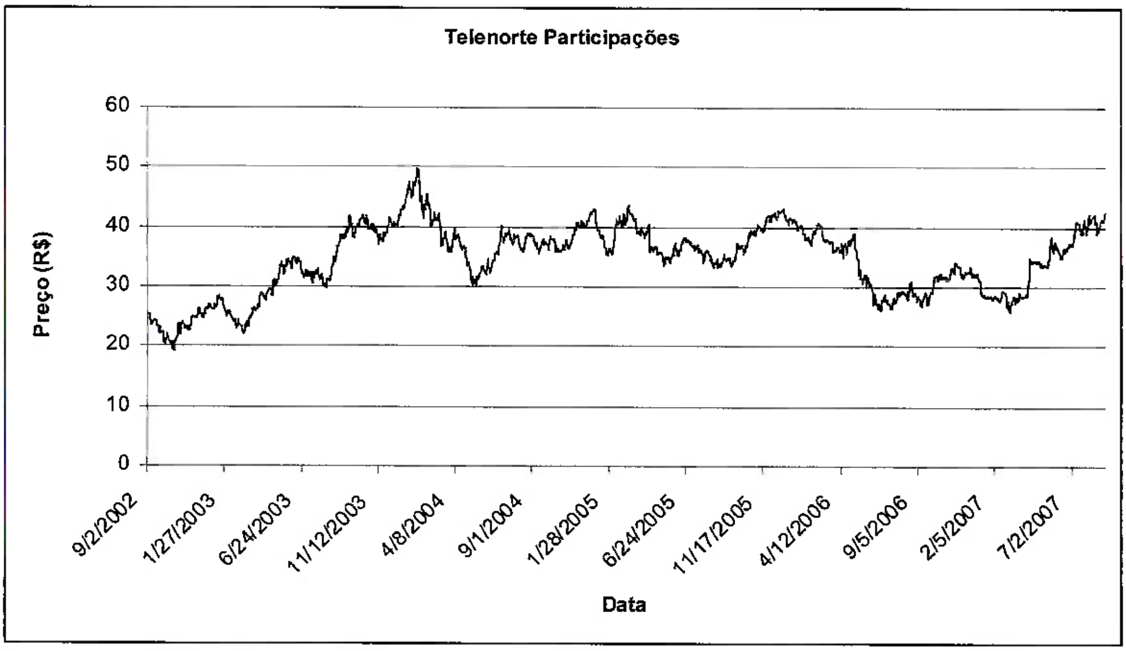

Figura 1.7 (A): Série Histórica do Preço da Ação TNLP4

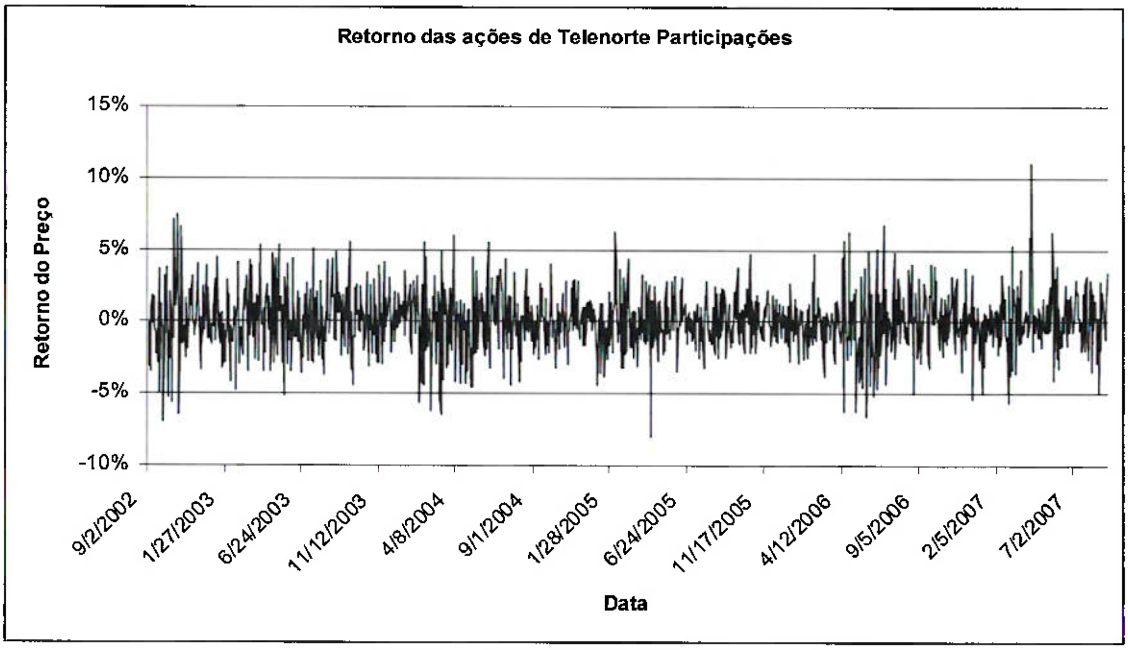

Figura 1.8 (A): Série do Retorno do Preço da Ação TNLP4

Anexo II Algoritmos do Software Matlab

1.1 Modelo de Markowitz

```
% Title Modelo Média Variância – Markowitz

% Abilita a matriz covariância
H=2*Matrizcov

coluna = 1

% Abilita o retorno esperado mínimo
ret_esp = 0.0008

% Incrementa o retorno esperado mínimo até um máximo estabelecido e roda o
% programa Markowitz
while ret_esp <= 0.0022

b=-ret_esp*beq

x = quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)

Portfolio(:,coluna)=x

Variancia(:,coluna)=x'*Matrizcov*x

retorno(:,coluna)=-A*x

ret_esp=ret_esp+0.00001

coluna=coluna+1

end
```

1.2 Modelo de Konno

```
% Title Desvio Padrão Absoluto – Konno

% Abilita a matriz covariância

coluna = 1

ret_esp = 0.0008

while ret_esp <= 0.0022

b=-ret_esp*100

x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)

Portfolio(:,coluna)=x(101:105)

Variancia(:,coluna)=x(101:105)'*Matrizcov*x(101:105)

retorno(:,coluna)=-A(101:105)*x(101:105)

ret_esp=ret_esp+0.00001

coluna=coluna+1

end
```

1.3 Modelo Minimax

```
%Matriz covariancia

matrizcov=covmat

invmatrizcov=inv(covmat)

% limite inferior  - Estimar

x=0.000449818

inf=[x;x;x;x;x;x;x];

% limite superir  - Estimar

sup =[1;1;1;1;1;1;1];

x=log(1.000449818)

livrederisco=[x;x;x;x;x;x;x];

Vcalc=2*invmatrizcov

fcalc=(-2)*(livrederisco')*invmatrizcov

[x,fval]=quadprog(Vcalc,fcalc,[],[],[],[],inf,sup);

retorno_otimo=x
w=0.1

a=1
```

```
a=retorno_otimo-livrederisco
b=((1-0.1)/(2*0.1))
y1=b*Vcalc*a

while w<=1
   Vcalc=(w/0.5)*matrizcov
   fcalc=-(1-w)*(retorno_otimo-livrederisco)
   [x,fval]=quadprog(Vcalc,fcalc)
   participacao(:,a)=x
   w=w+0.1
   a=a+1
end

w=0.1

a=1

while w<=1

   ret(:,a)=0.000449818+(((1-w)/(2*w))*((retorno_otimo-
livrederisco)'*invmatrizcov*(retorno_otimo-livrederisco)))
   var(:,a)=((((1-w)*(1-w))/(4*w*w))*((retorno_otimo-
livrederisco)'*invmatrizcov*(retorno_otimo-livrederisco)))
   w=w+0.1
   a=a+1
end
```

1.4 Modelo CVaR

```
function [RetornoCarteira, RiscoCarteira, CarteiraAcoes, CarteiraCalls, CarteiraPuts,
HistRetornosCarteira] = OtimizacaoUniCVaR(CodigosAcoes, ...
    ConfigCalls, ConfigPuts, NumeroSimulacoes, CaixaInicial, CustoTransacao, Alfa,
CarteiraInicial, RetornoMinimo, ...
    NumeroDeAcoes, NumeroDeCalls, NumeroDePuts, PrecosIniciaisAcoes,
PrecosIniciaisCalls, PrecosIniciaisPuts, ...
    PrecosHorizonteAcoes)

% Monta vetores e matrizes para formulação do problema de otimização linear
[f, A, b, Aeq, beq, lb, ub] = MontaProgLinearUniCVaR(NumeroSimulacoes,
NumeroDeAcoes, NumeroDeCalls, NumeroDePuts, ...
    Alfa, RetornoMinimo, CaixaInicial, PrecosIniciaisAcoes, PrecosIniciaisCalls,
PrecosIniciaisPuts, ...
    PrecosHorizonteAcoes, CodigosAcoes, ConfigCalls, ConfigPuts, CarteiraInicial,
CustoTransacao);

% Roda otimização utilizando o solver TomLab/XA
Name = 'Modelo_UniPeriodo_CVaR';
c = f;
AA = [A ; Aeq];
b_U = [b ; beq];
b_L = [(-Inf)*ones(size(b,1),1) ; beq];
x_L = lb;
x_U = ub;
x_0 = [];
Prob = lpAssign(c, AA, b_L, b_U, x_L, x_U, x_0, Name,[], [], [], [], [], [], []);
Result = tomRun('xa', Prob, 3);
x=Result.x_k;

%% Exibe Resultados
```

```
Z = x(1);
Ys = x(1+1:1+NumeroSimulacoes);
Bi = x(1+NumeroSimulacoes+1:1+NumeroSimulacoes+NumeroDeAcoes);
Wi =
x(1+NumeroSimulacoes+2*NumeroDeAcoes+1:1+NumeroSimulacoes+3*NumeroDeA
coes);
XCc =
x(1+NumeroSimulacoes+3*NumeroDeAcoes+1:1+NumeroSimulacoes+3*NumeroDeA
coes+NumeroDeCalls);
XPp =
x(1+NumeroSimulacoes+3*NumeroDeAcoes+NumeroDeCalls+1:1+NumeroSimulacoe
s+3*NumeroDeAcoes+NumeroDeCalls+NumeroDePuts);
Vs =
x(1+NumeroSimulacoes+3*NumeroDeAcoes+NumeroDeCalls+NumeroDePuts+1:1+2
*NumeroSimulacoes+3*NumeroDeAcoes+NumeroDeCalls+NumeroDePuts);
Rs =
x(1+2*NumeroSimulacoes+3*NumeroDeAcoes+NumeroDeCalls+NumeroDePuts+1:1
+3*NumeroSimulacoes+3*NumeroDeAcoes+NumeroDeCalls+NumeroDePuts);
R_medio =
x(1+3*NumeroSimulacoes+3*NumeroDeAcoes+NumeroDeCalls+NumeroDePuts+1);
Ls =
x(1+3*NumeroSimulacoes+3*NumeroDeAcoes+NumeroDeCalls+NumeroDePuts+1+1
:end);

HistRetornosCarteira = Rs;
RetornoCarteira = R_medio;
RiscoCarteira = Result.f_k;
CarteiraAcoes = Wi;
CarteiraCalls = XCc;
CarteiraPuts = XPp;
```

Fator de cholesky

```
%% Simula Retornos e Preços das Ações até a data do Horizonte

IntervaloRetornos = 1; %Positive scalar or number of observations (NUMOBS) by 1
vector of interval times between observations.
MetodoMonteCarlo = 'Expected';%String indicating the type of Monte Carlo simulation
NumeroObservacoes = Horizonte; %simulate for the next 21 days (1 month)
SimRetornosAcoes = portsim(RetornosMediosAcoes, CovarianciaAcoes,
NumeroObservacoes, IntervaloRetornos,3) %, MetodoMonteCarlo); %a NUMOBS-by-
NASSETS-by-NUMSIM three-dimensional array of correlated, normally distributed,
proportional asset returns
SimPrecosAcoes=zeros(NumeroObservacoes+1, NumeroDeAcoes,
NumeroSimulacoes);

for s = 1:1:NumeroSimulacoes
   SimPrecosAcoes(:,:,s) = ret2price(squeeze(SimRetornosAcoes(:,:,s)),
PrecosAcoes(end,:), IntervaloRetornos, [], 'Continuous');
end
PrecosHorizonteAcoes=squeeze(SimPrecosAcoes(end,:,:)); %a NASSETS-by-
NUMSIM array
clear 'SimRetornosAcoes'
clear 'SimPrecosAcoes'
```