

Adriano Buran Moala

**Estratégia Multimarcas: Maximização do Lucro e Controle da Competição na
Captura de Clientes**

Monografia apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo como
requisito da obtenção do título MBA em
Engenharia Financeira.

Orientador: Professor Doutor Roberto Moura Sales

São Paulo

2011

RESUMÓ

As empresas desenvolvem produtos para ocupar certos espaços no mercado, no entanto é preciso que estes espaços estejam bem delimitados através do preço para que os produtos lançados e aqueles já existentes não sofram canibalização. Neste caso os modelos de programação não-linear são ferramentas valiosas, pois permitem posicionar os preços maximizando o lucro e obedecendo restrições introduzidas.

Como objeto de estudo foi utilizada uma amostra de preços de seguro automóvel de duas marcas, com a finalidade de reposicioná-los para aumentar a lucratividade de ambas com uma restrição de demanda mínima. O primeiro modelo proposto reposicionou o preço de uma marca em torno de outra marca com preço fixo e o resultado foi um aumento significativo no lucro. Já no segundo modelo foi proposto o reposicionamento do preço das duas marcas, porém foram encontradas grandes dificuldades em limitar a região de otimização uma vez que a função objetivo não tinha ponto ótimo global, por conta disto o ponto de ótimo local encontrava-se na borda da região de restrição.

Palavras-chave: programação não linear, otimização, elasticidade cruzada, regressão logística, canibalismo, posicionamento de preço, multimarca, seguro automóvel.

ABSTRACT

Companies develop products to fill certain spaces in the market, however it is necessary these places be very delimited by the price for the new products and existing ones do not suffer a process of cannibalization. In this case the nonlinear programming models are valuable tools, because allow position the prices maximizing profit and obeying introduced constraints.

As study object was used a sample of vehicle insurance prices of two brands to reposition them to increase profitability of both with a minimum demand constraint. The first model repositioned the price of one brand around another which price was known and the result was significant increase on expected profit function. The second model tried reposition the price of both brands, but were found great difficulties to limit the optimization region because the objective function had no optimum global point, because of that the optimum local point was founded on the edge of constraints.

Keywords: nonlinear programming, optimization, cross elasticity, logistic regression, cannibalism, price positioning, multibrand, vehicle insurance.

SUMÁRIO

Capítulo 1.....	1
1. Introdução	1
Capítulo 2.....	3
2. Mercado de Seguros.....	3
Capítulo 3.....	6
3. Alguns Modelos Matemáticos da Literatura	6
3.1 Maximização da Utilidade de um Cliente.....	6
3.2 Maximização da Margem com Elasticidade Cruzada em um Supermercado	6
3.3 Maximização da Margem de uma Companhia Aérea	8
3.4 Maximização do Lucro na Renovação do Seguro	9
Capítulo 4.....	11
4. Modelo de elasticidade	11
4.1. Modelo de Elasticidade 1 – Razão de Preços	13
4.2. Modelo de Elasticidade 2 – Preços Aditivos.....	14
4.3. Estimação dos Modelos de Elasticidade.....	16
4.4. Desempenho dos Modelos de Elasticidade.....	21
Capítulo 5.....	23
5. Modelo de Otimização Não-Linear.....	23
5.1. Modelo de Otimização – Posicionamento do Preço da Marca B em torno de A.....	24
5.1.1. Simulação	29
5.2. Modelo de Otimização – Posicionamento de Ambas as Marcas	33
6. Conclusões.....	39
7. Bibliografia.....	40

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Modelo (1A) - Probabilidade de compra da marca A.	17
Tabela 2: Modelo (1B) - Probabilidade de compra da marca B.....	17
Tabela 3: Modelo (2A) - Probabilidade de compra da marca A.	19
Tabela 4: Modelo (2B) - Probabilidade de compra da marca B.....	19

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Evolução da arrecadação de prêmios do setor de seguros no Brasil em relação ao PIB. Fonte: FenSeg.	3
Figura 2: Participação do setor de seguros automóveis na arrecadação total de prêmios em 2010. Fonte: FenSeg.	4
Figura 3: Evolução da arrecadação de prêmios do seguro automóvel no Brasil (em bilhões de reais). Fonte: FenSeg.	4
Figura 4: Lista das 10 maiores seguradoras de automóvel em prêmios.	5
Figura 5: Composição das provisões técnicas em 2010 excluindo previdência e capitalização. Fonte: Susep.	5
Figura 6: Box-plot da razão entre os preços da marca A e B segundo a opção de compra do cliente.	16
Figura 7: Distribuição acumulada da razão entre os preços da marca A e B segundo a opção de compra do cliente.	17
Figura 8: Modelo (1A) - Probabilidade do i -ésimo Cliente Comprar o produto da Empresa A.	18
Figura 9: Modelo (1B) - Probabilidade do i -ésimo Cliente Comprar o produto da Empresa B.	18
Figura 10: Modelo (2A) - Probabilidade do i -ésimo Cliente Comprar o produto da Empresa A.	20
Figura 11: Modelo (2B): Probabilidade do i -ésimo Cliente Comprar o produto da Empresa B.	20
Figura 12: Curva ROC dos modelos de elasticidade (1A) e (1B), em que o logaritmo da razão de preços é utilizado como variável explicativa.	21
Figura 13: Curva ROC dos modelos de elasticidade (2A) e (2B), em que os logaritmos dos preços são utilizados como variáveis explicativas de forma aditiva.	22
Figura 14: Exemplo de curvas de nível da função lucro para dois clientes, cujos parâmetros são: $\delta_{B,1} = 0,80$, $\delta_{B,2} = 0,80$, $CB,1 = 800$, $CB,2 = 700$, $PA,1 = 1500$, $PA,2 = 1200$	28
Figura 15: Função lucro do exemplo anterior com as curvas de nível das restrições que representam as probabilidades esperadas de compra de cada marca.	29
Figura 16: Distribuição Beta teórica para o percentual do lucro, com parâmetros $a = 10$ e $b = 360$. ..	30
Figura 17: Box-plot da razão de preços entre as marcas B e A.	31
Figura 18: Box-plot da razão entre o preço otimizado e o preço atual da marca B.	32
Figura 19: Função lucro do i -ésimo cliente com $\delta_{A,i} = 0,75$, $CA,i = 1000$, $\delta_{B,i} = 0,80$ e $CB,i = 800$	33
Figura 20: Curvas de Nível da função lucro da Figura 3, curvas de nível da probabilidade de compra dos produtos A e B entre 1% e 10%.	35
Figura 21: Curvas de nível da função lucro, curvas de nível da probabilidade de compra dos produtos A e B entre 1% e 5% e sinalização do ponto ótimo quando $\pi_{A,0} = 5\%$ e $\pi_{B,0} = 5\%$	38

Capítulo 1

1. Introdução

Com o início do segundo trimestre de 2011 a empresa PwC já havia registrado 235 processos de fusões e aquisições (F&A) no Brasil, o que representou um recorde. Entre 2002 e 2010 a empresa já havia registrado 4.916 transações, sendo que 796 ocorreram em 2010, que corresponde a 16% neste período de 9 anos. Tanure (2005) destaca que a fusão é a união de duas ou mais empresas em que todas passam a não existir para que uma nova empresa seja criada, com uma nova cultura.

Wood (2003) pesquisou 54 processos de F&A ocorridos no Brasil e os 241 executivos entrevistados citaram como três principais fatores a reação ou antecipação de movimentos dos concorrentes, novos produtos ou produtos e serviços substitutos e a necessidade de economia de escala. Rosseti (2001), em um estudo também sobre F&A no Brasil, cita como motivação deste processo em 59% dos casos o aumento de market-share, aquisição de marcas e a entrada em novos segmentos, apenas 12% eram referentes a ganhos de escala.

Neste cenário, podemos ter duas empresas funcionando ainda sob marcas diferentes, mas com mesmo corpo direto, justamente para aproveitar as atuações em segmentos com necessidades diferentes. Assim, se um cliente for exposto às ofertas destas companhias, cujo produto tem a mesma finalidade, por exemplo, proteger o seu automóvel, mas com serviços agregados diferentes então certamente a resposta também será diferente dependendo do valor percebido pelo consumidor, fazendo com que ele se incline a comprar o mais caro ou a preferir o mais barato. Kotler (1998) definiu o valor percebido pelo cliente pela relação entre os benefícios da compra e o custo, comparada às ofertas da concorrência. Desta forma, a concretização da compra seria interpretada como uma situação de lucro na ótica do cliente.

Neste caso o ponto de atenção prevalece para o risco dos produtos entrarem em processo de canibalização, definido por Boone & Kurts (1998) pela situação em que um produto toma uma fatia de mercado de outro da mesma linha. Kerin (1978) cita como possíveis fontes de canibalismo a pressão para o crescimento de novos produtos, uma forte campanha de marketing sobre um produto que resultaria no esquecimento dos demais e o posicionamento inadequado da marca.

O foco deste trabalho será o aspecto do posicionamento ótimo de preço de duas marcas, que segundo Kerin (1978) contribui para redução do canibalismo, e com isso gerar mais valor para ambas as marcas. O posicionamento de preços será elaborado através da maximização do lucro dos

produtos, sendo um fator fundamental que cada uma deles mantenha um nível mínimo de captura de clientes.

O trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo 1 é feita a contextualização da proposta de estudo e no capítulo 2 são apresentados os números mais relevantes do mercado de seguros como receitas, custos, provisões e o forte crescimento dos últimos anos.

No capítulo 3 são revisitados alguns modelos que tratam do posicionamento ótimo de preços na presença de produtos concorrentes, embora haja pouca literatura envolvendo os produtos de seguro é possível fazer as analogias necessárias para o modelo de otimização.

No capítulo 4 são propostos dois modelos para medir a elasticidade dos clientes em relação aos preços das duas marcas, também são discutidas as interpretações dos coeficientes e por fim é analisado o desempenho de classificação.

No capítulo 5 são descritos os modelos de otimização que possuem dois formatos: o primeiro considera a otimização apenas de um produto deixando o outro preço fixado e o segundo trabalha a movimentação dos dois preços para maximizar o lucro. Nesse capítulo também são apresentadas simulações e as dificuldades de cada modelo.

Finalmente, no capítulo 6 são feitas as considerações finais e perspectivas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

2. Mercado de Seguros

O setor de seguros oferece proteção para diversos segmentos para que o cliente evite prejuízos financeiros devido à perda do bem segurado, seja ela parcial ou total. As modalidades de seguros mais conhecidas permitem proteção para automóveis, residências, empresas, obras de engenharia, atividade rural, saúde, vida, bem como o planejamento futuro por meio de previdência e títulos de capitalização.

O valor pago pelo cliente à seguradora para obter a proteção é chamado de *prêmio*, que geralmente tem período de vigência de 12 meses. Deste valor, a seguradora deduz suas despesas que em ordem crescente de volume são:

- Custo administrativo;
- Custo do corretor, que é o profissional que faz intermediação entre o cliente e a seguradora;
- Pagamento de indenizações, também chamado de *sinistro*;

Nos últimos 9 anos o valor arrecadado com prêmios no setor subiu de 4,1% do PIB para quase 5,2%, um crescimento de 27%. Especificamente em 2010 o volume arrecadado chegou a aproximadamente 184 bilhões de reais em todos os ramos.

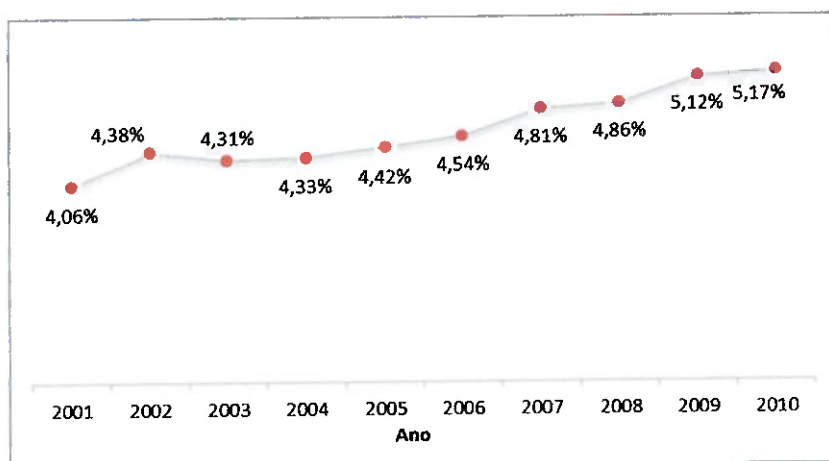


Figura 1: Evolução da arrecadação de prêmios do setor de seguros no Brasil em relação ao PIB.

Fonte: FenSeg.

Ainda referente a 2010, o seguro de automóveis, que é objeto de estudo deste trabalho, foi o ramo com o terceiro maior volume de prêmios arrecadados em relação aos demais ramos, ficando com 11% do total.

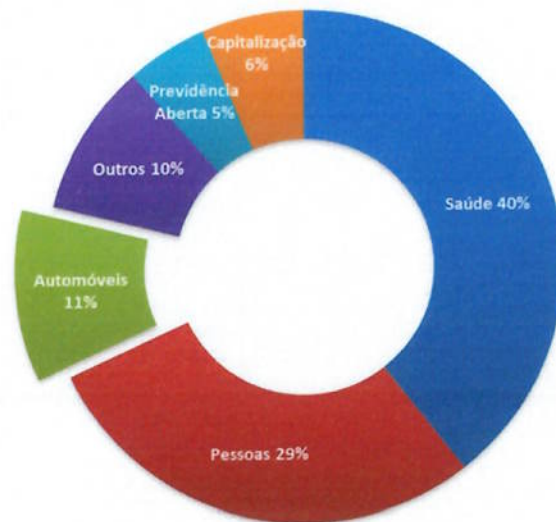


Figura 2: Participação do setor de seguros automóveis na arrecadação total de prêmios em 2010.
Fonte: FenSeg.

Analisando apenas a série histórica do ramo de seguros de automóveis a arrecadação com prêmios aumentou 175% em 10 anos chegando a um volume total de aproximadamente 20 bilhões de reais, tendo como facilitadores o aumento da renda da população brasileira e facilidade de crédito para compra de um veículo.

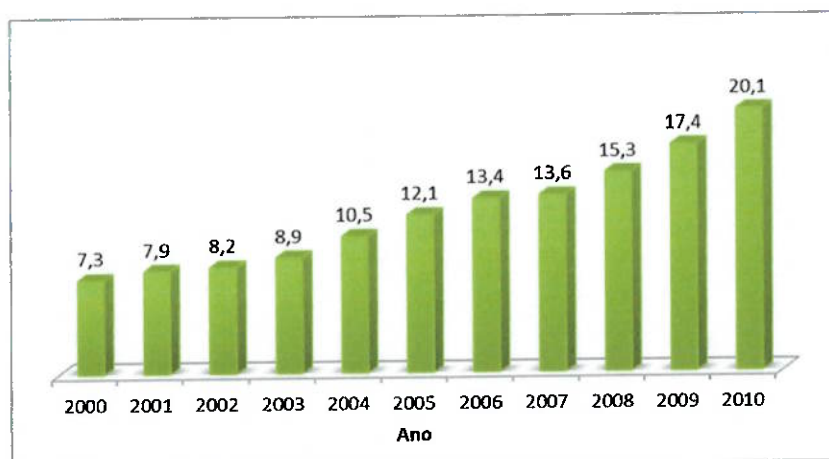


Figura 3: Evolução da arrecadação de prêmios do seguro automóvel no Brasil (em bilhões de reais).
Fonte: FenSeg.

Nesse último ano as empresas de seguro automóvel pagaram 14,4 bilhões de reais em indenizações aos segurados, valor que corresponde a aproximadamente 67% do prêmio arrecadado.

No quesito tamanho, a lista abaixo apresenta as 10 maiores seguradoras de automóvel em volume de prêmios, sendo que juntas totalizam 75% dos prêmios arrecadados e 73% das indenizações pagas.

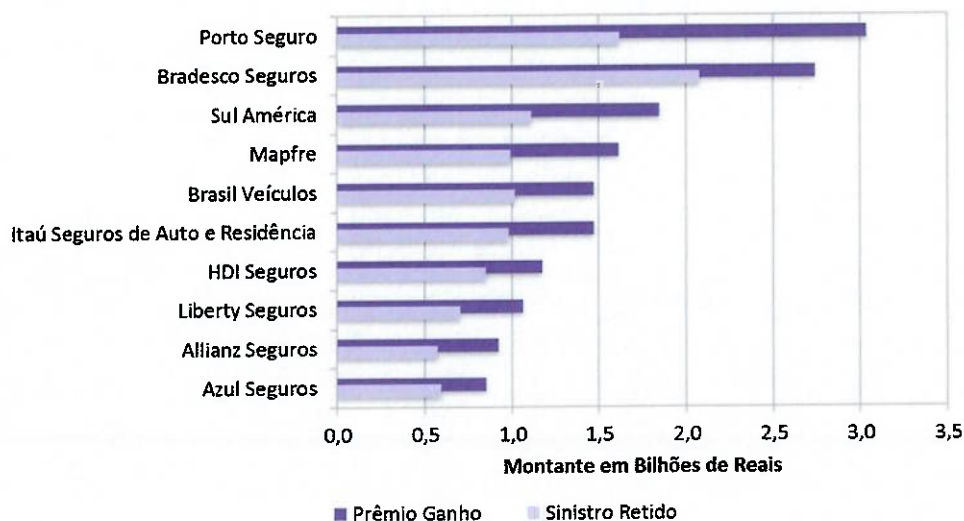


Figura 4: Lista das 10 maiores seguradoras de automóvel em prêmios.

Como citado anteriormente as empresas utilizam uma parcela grande do prêmio arrecado para pagamento de indenizações. No entanto, para manter a liquidez do setor é necessário que as companhias façam reservas para cobrir perdas inesperadas, cujo volume atingiu 120,2 bilhões de reais, eliminando previdência e capitalização. Deste montante, menos de 1,5% estava aplicado em renda variável e o restante em renda fixa.

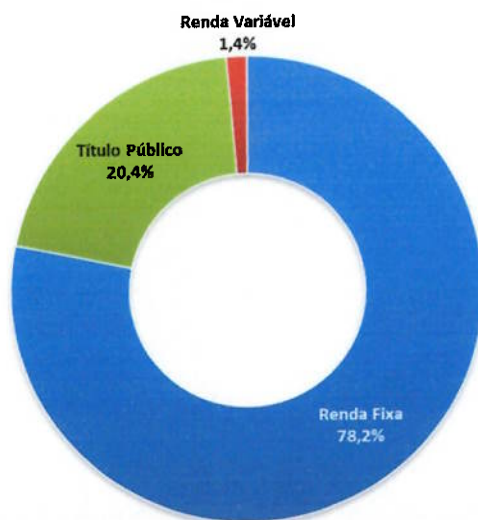


Figura 5: Composição das provisões técnicas em 2010 excluindo previdência e capitalização. Fonte: Susep.

Capítulo 3

3. Alguns Modelos Matemáticos da Literatura

3.1 Maximização da Utilidade de um Cliente

Little (1977) propôs a maximização da utilidade de um cliente que visita um supermercado adicionando uma restrição na função lucro. A construção deste problema foi baseada em funções que penalizam o excesso de itens comprados. O autor definiu como \mathbf{p} o vetor de preços unitários de cada item, \mathbf{s} o vetor de quantidades compradas de cada item e $t(\mathbf{p})$ o valor total gasto pelo cliente.

$$t(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\mathbf{s}^t \quad (1)$$

Seguindo a construção temos $s(\mathbf{p})$, uma função de demanda total, $s_i(\mathbf{p})$ a demanda do i -ésimo item quando os preços dos itens do supermercado é \mathbf{p} , e que tende a zero quando o preço do item tende ao infinito. Este modelo já utiliza o conceito de elasticidade cruzada, pois permite medir o quanto o preço de um item afeta a demanda dos demais.

Foram ainda definidas outras duas funções, a primeira foi $v(s(\mathbf{p}))$ para indicar que quanto mais itens o cliente compra menos valor adicional é agregada à utilidade e a segunda função foi $w(t(\mathbf{p}))$, de tal forma que quanto mais unidades monetárias o cliente gasta menos interesse ele tem de gastar. Por fim, foi introduzida uma restrição de lucro mínimo L_0 .

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{p}} \text{Lucro} &= v(s(\mathbf{p})) - w(t(\mathbf{p})) \\ \text{sujeito a } &\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n (p_i - c_i) s_i(\mathbf{p}) \geq L_0 \\ \mathbf{p} \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2)$$

3.2 Maximização da Margem com Elasticidade Cruzada em um Supermercado

Reibstein (1984), também utilizou o conceito de elasticidade cruzada no modelo de demanda para otimizar o preço de diferentes embalagens de ovos, desta forma a função de demanda de um produto era influenciada pelo preço dos outros.

$$\ln(S_{i,t}) = \beta_{i,0} + \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} \ln(P_{j,t}) + u_{i,t} \quad (3)$$

n quantidade de marcas

$S_{i,t}$ demanda da i -ésima marca no instante t

$P_{j,t}$ o preço da j -ésima marca no instante t

$\beta_{i,0}$ intercepto da i -ésima marca

$\beta_{i,j}$ elasticidade do preço da j -ésima marca na demanda da i -ésima marca

$u_{i,t}$ o erro com distribuição normal, variância σ_i^2 e covariância no mesmo instante t igual a $\sigma_{i,j}^2$

Agora, considerando que C_i é o custo do i -ésimo produto, então o respectivo lucro é expresso como:

$$Lucro_i = S_{i,t}(P_{i,t} - C_{i,t}) = \exp \left\{ \beta_{i,0} + \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} \ln(P_{j,t}) + u_{i,t} \right\} (P_{i,t} - C_{i,t}) \quad (4)$$

Utilizando as propriedades de esperança que é aplicada somente sobre a variável aleatória $u_{i,t}$ e lembrando que quando $u_{i,t}$ tem distribuição normal então $E(e^{u_{i,t}}) = \exp\left(\frac{\sigma_i^2}{2}\right)$. Com isto ficamos com a expressão:

$$\begin{aligned} E(Lucro_i) &= E \left[\exp \left\{ \beta_{i,0} + \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} \ln(P_{j,t}) + u_{i,t} \right\} (P_{i,t} - C_{i,t}) \right] \\ &= \exp \left\{ \beta_{i,0} + \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} \ln(P_{j,t}) \right\} (P_{i,t} - C_{i,t}) E(e^{u_{i,t}}) \\ &= \exp \left\{ \beta_{i,0} + \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} \ln(P_{j,t}) \right\} (P_{i,t} - C_{i,t}) e^{\frac{\sigma_i^2}{2}} \end{aligned} \quad (5)$$

Portanto, para maximizar o portfólio de n produtos basta maximizar o lucro total esperado, cuja única variável é $P_{j,t}$.

$$\max_{P_{j,t}} E(Lucro) = \sum_{i=1}^n \exp \left\{ \beta_{i,0} + \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} \ln(P_{j,t}) \right\} (P_{i,t} - C_{i,t}) e^{\frac{\sigma_i^2}{2}} \quad (6)$$

sujeito a $l_j \leq P_{j,t} \leq u_j$

Neste problema, o modelo de demanda estimado utilizando dados reais tinha os coeficientes de sensibilidade ao preço $\beta_{i,i} < 0$ e $\beta_{i,j} > 0$ para $i \neq j$. Ou seja, a demanda do i -ésimo produto aumenta se o seu preço diminui, por outro lado é possível obter o mesmo efeito aumentando o preço dos demais. Devido a esta estrutura a otimização só pode ser realizada com a introdução de restrições para que os preços variassem dentro de um intervalo estabelecido e a região viável ficasse limitada, caso contrário o lucro de um produto aumentaria quando os preços dos demais caminhassem para o infinito.

3.3 Maximização da Margem de uma Companhia Aérea

Carpenter (1994) otimizou a margem de uma companhia aérea que disponibilizava três tipos de passagens, para isto foram modelados a demanda total de passageiros em função do preço destes bilhetes e o percentual de assentos disponíveis na aeronave para cada tipo de passagem. O último modelo corresponde aos limites mínimos e máximos de vendas de cada tipo de passagem.

Durante o processo de modelagem foi detectada sazonalidade anual e por isso os dados foram defasados em 12 meses para eliminar este efeito. A elasticidade cruzada também está presentes nestes modelos, cuja demanda e o percentual de assentos disponíveis são funções dos preços dos três tipos de passagens.

$$\ln\left(\frac{Q_t}{Q_{t-12}}\right) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^3 \alpha_j (P_{j,t} - P_{j,t-12}) \quad (7)$$

- Q_t total de passagens vendidas no instante t
- Q_{t-12} total de passagens vendidas no instante t-12
- $P_{j,t}$ preço da j-ésima categoria de passagem no instante t
- $P_{j,t-12}$ preço da j-ésima categoria de passagem no instante t-12
- α_0 intercepto do modelo
- α_j coeficiente de elasticidade da j-ésima categoria de passagem

$$\ln\left(\frac{m_{i,t}}{m_{i,t-12}}\right) = \beta_{i,0} + \sum_{j=1}^3 \beta_{i,j} (P_{j,t} - P_{j,t-12}) \quad (8)$$

- $m_{i,t}$ percentual de ocupação da i-ésima categoria de passagem no instante t
- $m_{i,t-12}$ percentual de ocupação da i-ésima categoria de passagem no instante t-12
- β_0 intercepto do modelo
- β_j coeficiente de elasticidade da j-ésima categoria de passagem

Por fim, Carpenter propôs otimizar o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \max_{P_{1,t}, P_{2,t}, P_{3,t}} \text{Lucro}_t &= \sum_{j=1}^3 Q_t m_{j,t} (P_{j,t} - C_{j,t}) \\ \text{sujeito a } &\begin{cases} m_{j,t} \leq m_{j+} \\ m_{j,t} \geq m_{j-} \\ Q_t \leq Q_{t+} \\ \sum_{j=1}^3 m_{j,t} = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

- $C_{j,t}$ custo da j-ésima classe de passagem no instante t
- Q_{t+} quantidade máxima de assentos no voo
- m_{j+} percentual máximo de ocupação da j-ésima classe de passagem
- m_{j-} percentual mínimo de ocupação da j-ésima classe de passagem

3.4 Maximização do Lucro na Renovação do Seguro

Machado (2009) estudou o caso da maximização do lucro para apólices de seguros no momento da renovação do contrato. O modelo de demanda utilizado era uma regressão logística e indicava a probabilidade do cliente renovar em função do preço proposto, assim o aumento do preço do seguro ocasionava uma redução da probabilidade, fazendo com que a função lucro fosse côncava e tivesse um máximo global.

Mesmo sabendo da existência do ponto ótimo foram adicionadas restrições ao problema para que a empresa mantivesse um nível desejado de renovações e também para controlar o indicador de sinistralidade (razão entre a perda esperada com os pagamentos das indenizações e a receita total proveniente dos preços otimizados). A primeira condição tem grande importância para controlar a quantidade de clientes que podem ser perdidos para o mercado, pois o ponto ótimo pode ocasionar redução da carteira. Já a segunda condição tem como base o quanto a empresa está

disposta a lucrar em determinados segmentos. O problema de programação não-linear teve a formulação a seguir:

$$\begin{aligned} \max_{P_i} \text{Lucro} &= \sum_{i=1}^n (P_i - C_i) \pi(P_i) \\ \text{sujeito a } &\begin{cases} \sum_{i=1}^n \pi(P_i) \geq n\pi_0 \\ \frac{\sum_{i=1}^n C_i}{\sum_{i=1}^n P_i} \leq \theta_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

n quantidade de clientes com apólices a renovar

P_i preço do seguro automóvel do i -ésimo cliente

C_i custo total do i -ésimo cliente

$\pi(P_i)$ função que retorna a probabilidade do i -ésimo cliente renovar com preço P_i

π_0 índice de renovação mínimo estabelecido pela empresa

θ_0 sinistralidade máxima aceita pela empresa, razão entre os custos e as receitas

Capítulo 4

4. Modelo de elasticidade

Quando um cliente é exposto a duas marcas é importante medir a sua elasticidade ao preço, a distribuição de probabilidade deste evento é Bernoulli, em que o i -ésimo indivíduo compra o produto com probabilidade π_i e por isso $y_i = 1$ ou não compra com probabilidade $1 - \pi_i$ e por isso $y_i = 0$. A expressão abaixo, chamada de *logit* é a função que liga a informação conhecida representada pelo vetor $x_i = (x_{1,i}, \dots, x_{m,i})$ à probabilidade π_i do evento em estudo. Cada $x_{j,i}$ representa o j -ésimo atributo observado do i -ésimo cliente.

$$\ln\left(\frac{\pi_i}{1 - \pi_i}\right) = \beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \dots + \beta_m x_{m,i} \quad (11)$$

Da expressão podemos exponenciar os dois lados da igualdade:

$$\frac{\pi_i}{1 - \pi_i} = e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \dots + \beta_m x_{m,i}} \quad (12)$$

Multiplicando ambos os lados por $1 - \pi_i$:

$$\pi_i = e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \dots + \beta_m x_{m,i}} - \pi_i e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \dots + \beta_m x_{m,i}} \quad (13)$$

Mantendo o termo π_i no lado esquerdo da igualdade:

$$\pi_i [1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \dots + \beta_m x_{m,i}}] = e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \dots + \beta_m x_{m,i}} \quad (14)$$

Por fim, isolando π_i :

$$\pi_i = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \dots + \beta_m x_{m,i}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \dots + \beta_m x_{m,i}}} \quad (15)$$

Embora a forma acima seja a mais conhecida é conveniente reduzi-la dividindo o numerador e denominador pelo termo $e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \dots + \beta_m x_{m,i}}$.

$$\pi_i = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \dots + \beta_m x_{m,i}} / e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \dots + \beta_m x_{m,i}}}{(1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \dots + \beta_m x_{m,i}}) / e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \dots + \beta_m x_{m,i}}} \quad (16)$$

Com isto,

$$\pi_i = \frac{1}{\frac{1}{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \dots + \beta_m x_{m,i}}} + 1} \quad (17)$$

Portanto, a função que estima a probabilidade do evento em estudo é expressa como:

$$\pi_i = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \dots + \beta_m x_{m,i})}} \quad (18)$$

O vetor de parâmetros $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)$ pode ser estimado via máxima verossimilhança (Agresti, 2002 e Paula, 2004). Segundo Agresti (2002), dada uma amostra e adotando uma distribuição de probabilidade a função de verossimilhança corresponde à probabilidade desta amostra em função dos parâmetros. Portanto, a estimação por máxima verossimilhança, ou *maximum-likelihood estimation (MLE)*, consiste em obter os parâmetros que maximizam a probabilidade desta amostra ser proveniente da distribuição adotada.

A função de verossimilhança de n clientes é apresentada abaixo pelo produto da distribuição de probabilidade de cada cliente devido à independência entre eles. Note que para cada cliente a contribuição na função de verossimilhança será π_i se $y_i = 1$ ou $(1 - \pi_i)$ se $y_i = 0$.

$$L(\alpha, \beta | y_i, x_i) = \prod_{i=1}^n \pi_i^{y_i} (1 - \pi_i)^{1-y_i} \quad (19)$$

Ao invés de maximizar a função acima é usual maximizar a log-verossimilhança.

$$l(\alpha, \beta | y_i, x_i) = \sum_{i=1}^n y_i \ln(\pi_i) + (1 - y_i) \ln(1 - \pi_i) \quad (20)$$

Na função log-verossimilhança o vetor de parâmetros $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)$ é a única informação desconhecida, todo o restante é obtido da amostra. Desta forma, para maximizar esta função é necessário calcular as derivadas parciais em relação a cada parâmetro e igualar a zero. Para resolver o sistema de equações não-lineares utilizam-se os métodos iterativos de Newton-Raphson.

$$\begin{cases} \frac{\partial l(\beta | y_i, x_i)}{\partial \beta_0} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial l(\beta | y_i, x_i)}{\partial \beta_m} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Do modelo logístico é possível obter a chance da ocorrência do evento em relação ao não-evento apenas dividindo as probabilidades:

$$\gamma(x) = \frac{\pi(x)}{1 - \pi(x)} \quad (22)$$

Para o cálculo acima é importante indicar todos os atributos do vetor x , o que não facilitaria a interpretação dos parâmetros do modelo. Mas, desta chance é possível obter a razão de chances ou *odds ratio*, que mede o quanto a chance altera com a mudança em uma variável quando todas as outras são mantidas constantes, por exemplo, um aumento ou redução de preço em uma das marca.

$$\omega = \frac{\gamma(x_1, \dots, x_j k, \dots, x_m)}{\gamma(x_1, \dots, x_j, \dots, x_m)} = e^{\beta_j k} \quad (23)$$

4.1. Modelo de Elasticidade 1 – Razão de Preços

O primeiro modelo de elasticidade que será investigado tem como variável explicativa a razão de preços das duas marcas, sendo β_A e β_B os coeficientes que medem a sensibilidade ao preço das marcas A e B. Neste modelo α_A e α_B indicam a probabilidade de compra quando os preços são iguais, ou seja, quando o logaritmo dos preços for igual a zero.

Para medir a probabilidade do i -ésimo cliente comprar a marca A ($\pi_{1A,i}$) utilizaremos o modelo (1A).

$$\ln\left(\frac{\pi_{1A,i}}{1 - \pi_{1A,i}}\right) = \alpha_A + \beta_A \ln \frac{P_{B,i}}{P_{A,i}} \quad (1A)$$

E, para medir a probabilidade do i -ésimo cliente comprar a marca B ($\pi_{1B,i}$) utilizaremos o modelo (1B).

$$\ln\left(\frac{\pi_{1B,i}}{1 - \pi_{1B,i}}\right) = \alpha_B + \beta_B \ln \frac{P_{B,i}}{P_{A,i}} \quad (1B)$$

A influência do preço dos dois produtos na probabilidade de compra é a elasticidade cruzada que também foi utilizada por Reibstein (1984) e Carpenter (1994), uma vez que se tenta medir quanto a demanda de um produto é afetada pelo preço de outro.

Para o modelo (1A) pode-se medir a alteração na chance de compra para uma mudança de preço equivalente a fator k . Utilizando a expressão (23) temos que o odds ratio da marca A para uma alteração no seu preço fica:

$$\omega_A^{1A} = \frac{\exp\left\{\alpha_A + \beta_A \ln \frac{P_{B,i}}{kP_{A,i}}\right\}}{\exp\left\{\alpha_A + \beta_A \ln \frac{P_{B,i}}{P_{A,i}}\right\}} = \exp\{-\beta_A \ln(kP_{A,i}) + \beta_A \ln P_{A,i}\} = \exp\{-\beta_A \ln(k)\} \quad (24)$$

Para medir a sensibilidade da marca A ao preço de B fazemos de forma análoga.

$$\omega_B^{1A} = \frac{\exp\left\{\alpha_A + \beta_A \ln \frac{kP_{B,i}}{P_{A,i}}\right\}}{\exp\left\{\alpha_A + \beta_A \ln \frac{P_{B,i}}{P_{A,i}}\right\}} = \exp\{\beta_A \ln(kP_{B,i}) - \beta_A \ln P_{B,i}\} = \exp\{\beta_A \ln(k)\} \quad (25)$$

Agora, para medir a sensibilidade da marca B quando o preço de A é alterado parte-se do modelo (1B):

$$\omega_A^{1B} = \frac{\exp\left\{\alpha_B + \beta_B \ln \frac{P_{B,i}}{kP_{A,i}}\right\}}{\exp\left\{\alpha_B + \beta_B \ln \frac{P_{B,i}}{P_{A,i}}\right\}} = \exp\{-\beta_B \ln(kP_{B,i}) + \beta_B \ln P_{B,i}\} = \exp\{-\beta_B \ln(k)\} \quad (26)$$

Por fim, para medir a sensibilidade da marca B ao próprio preço:

$$\omega_B^{1B} = \frac{\exp\left\{\alpha_B + \beta_B \ln \frac{kP_{B,i}}{P_{A,i}}\right\}}{\exp\left\{\alpha_B + \beta_B \ln \frac{P_{B,i}}{P_{A,i}}\right\}} = \exp\{\beta_B \ln(kP_{B,i}) - \beta_B \ln P_{B,i}\} = \exp\{\beta_B \ln(k)\} \quad (27)$$

Para todos os casos, se $k = 1$ significa que o preço do produto não é alterado, então $\omega = 1$.

4.2. Modelo de Elasticidade 2 – Preços Aditivos

Nestes próximos modelos serão utilizados os preços de forma aditiva e para medir a probabilidade de compra da marca A teremos agora dois coeficientes de sensibilidade ao preço que introduzem assimetria na resposta, $\beta_{A,A}$ e $\beta_{A,B}$. No modelo anterior havia apenas um coeficiente, que tornava a sensibilidade simétrica.

$$\ln\left(\frac{\pi_{2A,i}}{1-\pi_{2A,i}}\right) = \alpha_{A,i} + \beta_{A,A}\ln P_{A,i} + \beta_{A,B}\ln P_{B,i} \quad (2A)$$

E, o modelo de probabilidade de compra da marca B também tem dois outros parâmetros de sensibilidade $\beta_{B,A}$ e $\beta_{B,B}$.

$$\ln\left(\frac{\pi_{2B,i}}{1-\pi_{2B,i}}\right) = \alpha_{B,i} + \beta_{B,A}\ln P_{A,i} + \beta_{B,B}\ln P_{B,i} \quad (2B)$$

Da mesma forma que calculamos a razão de chances dos modelos anteriores também podemos fazer o mesmo para estes dois novos modelos.

A razão de chances para uma variação equivalente a um fator k no preço de A tem a seguinte resposta para chance de compra da marca A:

$$\omega_A^{2A} = \frac{\exp\{\alpha_A + \beta_{A,A}\ln(kP_{A,i}) + \beta_{A,B}\ln P_{B,i}\}}{\exp\{\alpha_A + \beta_{A,A}\ln P_{A,i} + \beta_{A,B}\ln P_{B,i}\}} = \exp\{\beta_{A,A}\ln(k)\} \quad (28)$$

Agora, aplicando uma variação no preço da marca B a chance de compra da marca A tem a seguinte resposta:

$$\omega_B^{2A} = \frac{\exp\{\alpha_A + \beta_{A,A}\ln P_{A,i} + \beta_{A,B}\ln(kP_{B,i})\}}{\exp\{\alpha_A + \beta_{A,A}\ln P_{A,i} + \beta_{A,B}\ln P_{B,i}\}} = \exp\{\beta_{A,B}\ln(k)\} \quad (29)$$

Para o modelo de compra da marca B a razão de chances para uma variação no preço da marca A fica:

$$\omega_A^{2B} = \frac{\exp\{\alpha_B + \beta_{B,A}\ln(kP_{A,i}) + \beta_{B,B}\ln P_{B,i}\}}{\exp\{\alpha_B + \beta_{B,A}\ln P_{A,i} + \beta_{B,B}\ln P_{B,i}\}} = \exp\{\beta_{B,A}\ln(k)\} \quad (30)$$

Por fim, uma variação no preço da marca B tem o seguinte impacto na sua chance de compra:

$$\omega_B^{2B} = \frac{\exp\{\alpha_B + \beta_{B,A}\ln P_{A,i} + \beta_{B,B}\ln(kP_{B,i})\}}{\exp\{\alpha_B + \beta_{B,A}\ln P_{A,i} + \beta_{B,B}\ln P_{B,i}\}} = \exp\{\beta_{B,B}\ln(k)\} \quad (31)$$

4.3. Estimação dos Modelos de Elasticidade

Utilizando uma amostra de dados reais dos preços de duas seguradoras, coletados durante o ano de 2010, foi possível estimar a sensibilidade ao preço dos clientes. O banco de dados contém informação de ambas as marcas para 2.000 clientes com diferentes riscos (idade, sexo, classe de bônus, região, veículo, valor do veículo etc), porém a disponibilidade da informação é apenas dos preços. Além disso, foi coletada qual seguradora cada cliente contratou, sendo que a preferência pela marca A ocorreu em 4,70% dos casos e a preferência pela marca B foi 2,15%. Abaixo é apresentado o box-plot dos preços segundo a opção de compra dos clientes.

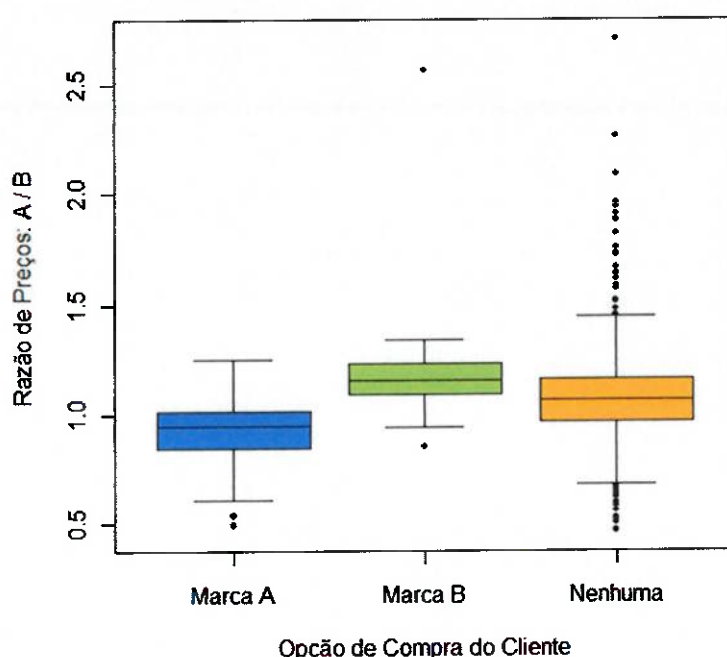


Figura 6: Box-plot da razão entre os preços da marca A e B segundo a opção de compra do cliente.

Do box-plot acima nota-se que os clientes que optaram pela marca A aceitaram pagar mais pelo produto, cerca de 30% deles aceitaram pagar até 40% mais caro que o preço da Marca B. Também nota-se que os clientes preferiram a marca B quando ela estava com preço inferior ao da marca A. Utilizando a distribuição acumulada temos que 95% dos clientes que compraram a marca B pagaram mais barato por ela.

Já sobre os clientes que não compraram é mais complexo inferir, pois ainda há as ofertas de outras seguradoras cujos preços são desconhecidos neste trabalho.

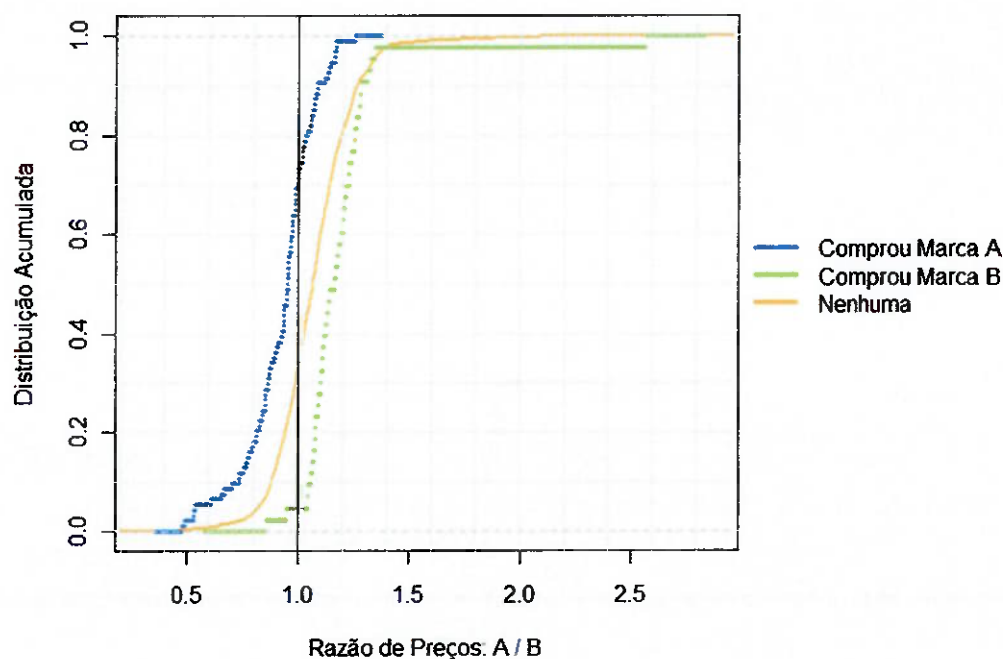


Figura 7: Distribuição acumulada da razão entre os preços da marca A e B segundo a opção de compra do cliente.

A partir dos dados apresentados foram estimados os modelos de regressão logística via máxima verossimilhança conforme descrito no início do capítulo.

Tabela 1: Modelo (1A) - Probabilidade de compra da marca A.

Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	P-Valor
Intercepto	-3,0553	0,1146	< 0,001
Log(Preço B/Preço A)	4,4017	0,5263	< 0,001

Tabela 2: Modelo (1B) - Probabilidade de compra da marca B.

Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	P-Valor
Intercepto	-4,1919	0,1984	< 0,001
Log(Preço B/Preço A)	-3,7825	0,8289	< 0,001

Dos modelos (1A) e (1B) apresentados acima podemos calcular os *odds ratios* para comparar a sensibilidade dos preços nas chances de compras das marcas A e B. Primeiramente serão analisados os impactos sobre a compra da marca A:

- Para um aumento de 5% no preço da marca A temos uma redução na chance de 19%;

- Para o mesmo aumento no preço, mas agora na marca B, a chance de compra da marca A sobe 24%;

Analisando os impactos sobre a compra da marca B temos:

- Para um aumento de 5% no preço da marca A, a chance de compra de B cresce 20%;
- E, para um aumento de 5% no preço da marca B a chance de compra de B cai 17%.

Destas informações nota-se que este tipo de modelo torna a marca A tão sensível ao preço quanto B, pois enquanto uma aumento de 5% na marca A faz a chance de compra de A cair 19% o mesmo efeito sobre a marca B causa uma redução de 17%.

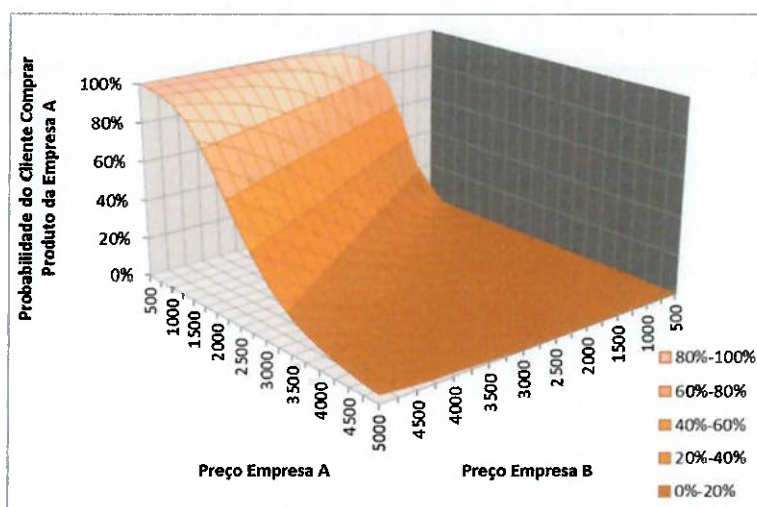


Figura 8: Modelo (1A) - Probabilidade do i-ésimo Cliente Comprar o produto da Empresa A.

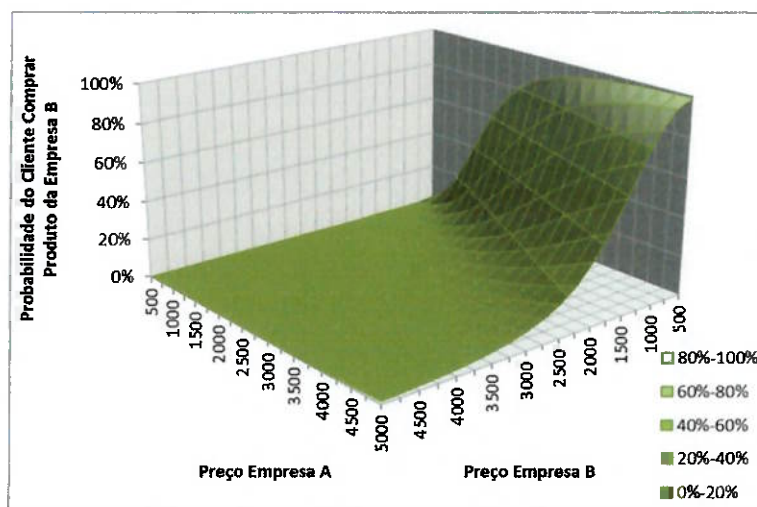


Figura 9: Modelo (1B) - Probabilidade do i-ésimo Cliente Comprar o produto da Empresa B.

As estimativas dos parâmetros dos modelos (2A) e (2B) são apresentadas a seguir.

Tabela 3: Modelo (2A) - Probabilidade de compra da marca A.

Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	P-Valor
Intercepto	11,765	1,925	< 0,001
Log(Preço A)	-3,562	0,558	< 0,001
Log(Preço B)	1,555	0,644	0,016

Tabela 4: Modelo (2B) - Probabilidade de compra da marca B.

Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	P-Valor
Intercepto	9,3111	2,5525	< 0,001
Log(Preço A)	4,5864	0,8481	< 0,001
Log(Preço B)	-6,4058	0,9918	< 0,001

Dos modelos (2A) e (2B) apresentados acima também podemos obter os *odds ratios* para comparar o efeito dos preços nas chances de compras das marcas. Inicialmente serão analisados os impactos sobre a compra da marca A:

- Se o preço da marca A aumentar em 5% então sua chance de compra reduz 16%;
- Já um aumento de 5% no preço da marca B faz a chance de compra da marca A subir 8%.

Agora, analisando os efeitos dos preços sobre a chance de compra da marca B temos:

- Para um aumento de 5% no preço da marca A, a chance de compra de B sobe 25%;
- E, para um aumento de 5% no preço da marca B, a sua chance de compra reduz 27%.

Ao contrário do que ocorreu no modelo anterior, as chances calculadas acima indicam que a marca B é muito sensível ao próprio preço e também ao preço da marca concorrente, o que seria esperado.

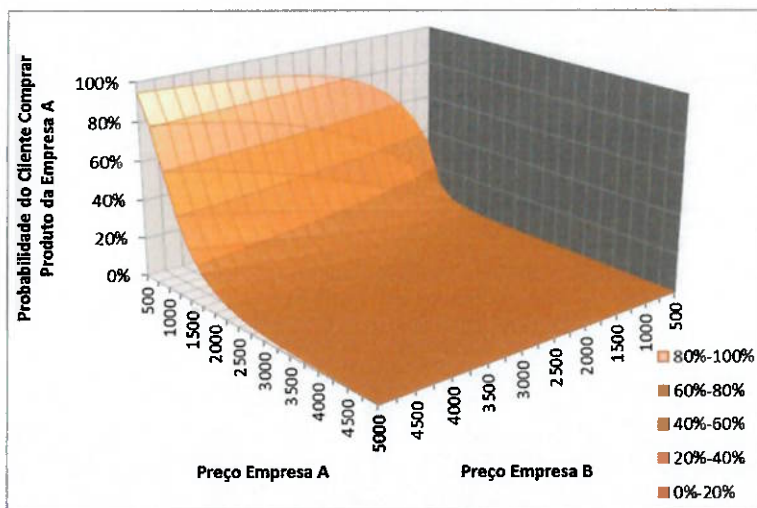


Figura 10: Modelo (2A) - Probabilidade do i -ésimo Cliente Comprar o produto da Empresa A.

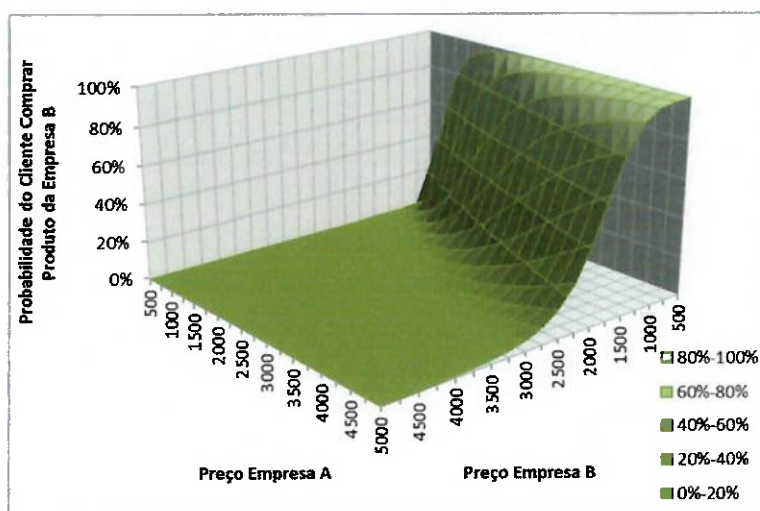


Figura 11: Modelo (2B): Probabilidade do i -ésimo Cliente Comprar o produto da Empresa B.

4.4. Desempenho dos Modelos de Elasticidade

Após a estimação foram construídas as curvas ROC de cada modelo e calculada a área abaixo de cada uma delas para avaliar o desempenho dos modelos simplificados. O gráfico é formado pelo eixo X contendo a taxa de falso positivo e do eixo Y contendo a taxa de verdadeiro positivo para cada possível ponto de corte.

Os melhores modelos são aqueles que ficam com alta taxa de verdadeiro positivo e baixa taxa de falsos negativos para uma grande quantidade de pontos de cortes, assim o gráfico fica com a curvatura para o canto superior esquerdo. Uma possível medida resumo para a curva ROC é obter a área abaixo do gráfico, chamada de *Area Under ROC* (Martinez, 2003). Assim, a área é igual a 1 quando discrimina perfeitamente o evento em estudo e é igual a 0,5 quando o modelo é aleatório.

Na primeira estrutura de modelo de sensibilidade ao preço em que apenas a razão deles é utilizada a área abaixo da curva ROC para o modelo de compra da marca A é de 73% e para marca B é de 71%. Já na segunda estrutura de modelo de sensibilidade, a área abaixo da curva ROC para o modelo de compra da marca A é de 81% e da marca B é de 79%. O resultado indica desempenho melhor quando os preços são introduzidos como variáveis aditivas e não apenas a razão entre eles.

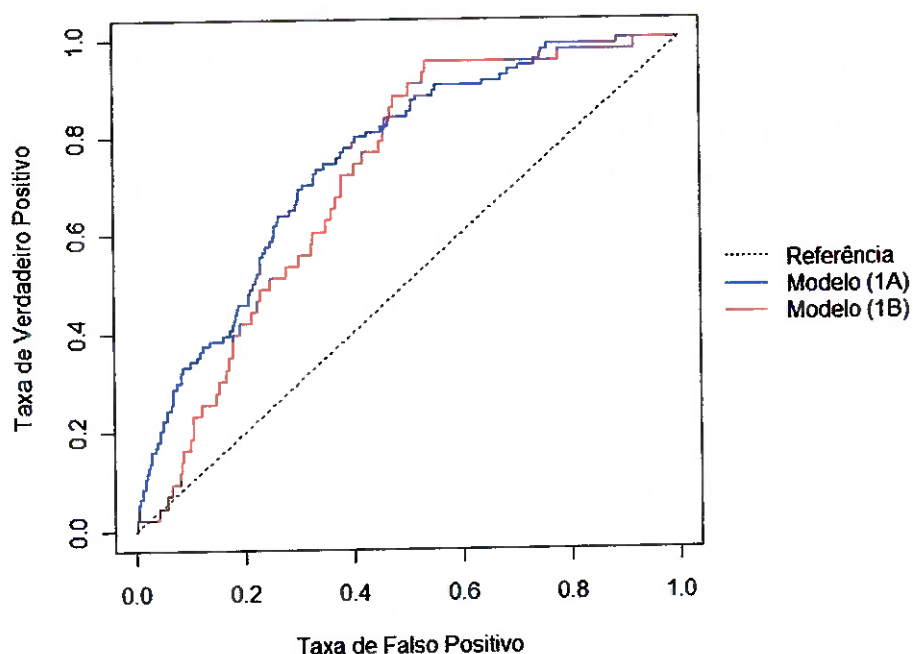


Figura 12: Curva ROC dos modelos de elasticidade (1A) e (1B), em que o logaritmo da razão de preços é utilizado como variável explicativa.

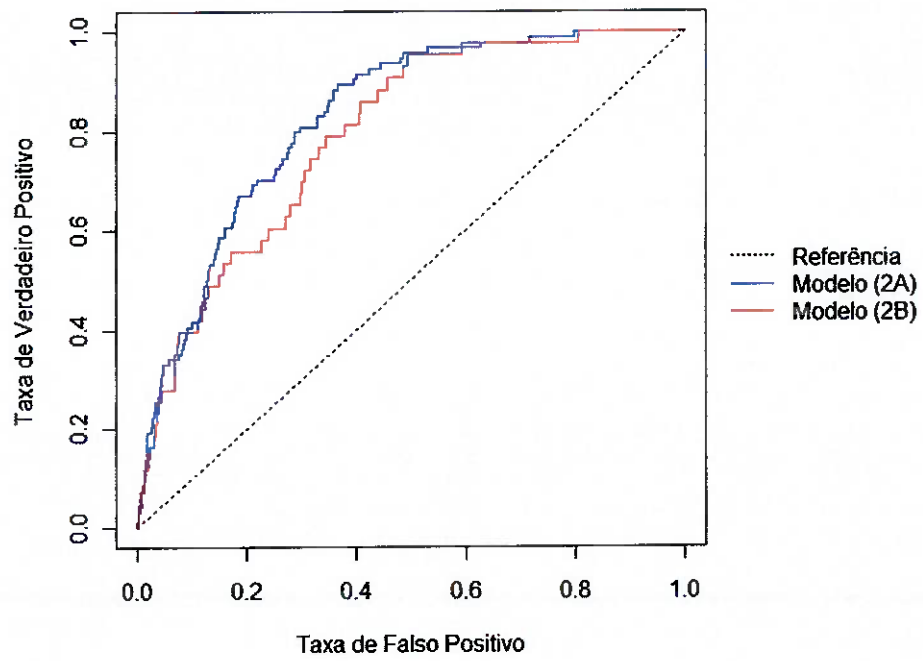


Figura 13: Curva ROC dos modelos de elasticidade (2A) e (2B), em que os logaritmos dos preços são utilizados como variáveis explicativas de forma aditiva.

Capítulo 5

5. Modelo de Otimização Não-Linear

Neste problema muitos clientes são expostos a dois produtos rivais que pertencem à mesma empresa, no entanto ofertados sob marcas diferentes. O objetivo é posicionar os preços das marcas para reduzir o efeito da canibalização e que a companhia obtenha lucro máximo tendo como variável de controle a demanda, que sofrerá influência dos preços.

Para estudá-lo serão utilizadas duas abordagens, a primeira consiste em reposicionar o preço da marca B considerando que o preço da marca A está bem posicionado. Já na outra abordagem os preços de ambas as marcas serão reposicionados para maximizar o lucro total.

Um fator importante que controlará a otimização será a função de demanda, que será representada pelos modelos de elasticidades que foram estimados anteriormente. Cada um deles será utilizado em uma estrutura de otimização para que o problema tenha solução viável e formem uma região de restrição fechada.

Sabendo que o problema em estudo trata-se de um problema de programação não linear será necessário utilizar as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para resolvê-lo. Estas condições partem do seguinte problema geral:

$$\begin{aligned} & \max_{x_1, \dots, x_n} f(x_1, \dots, x_n) \\ & \text{sujeito a } \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_m) \leq b_1 \\ \vdots \\ g_k(x_1, \dots, x_m) \leq b_k \end{cases} \end{aligned} \quad (32)$$

A partir do sistema acima Karush-Kuhn-Tucker dá as seguintes condições necessárias para que o ponto $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ seja solução ótima.

$$\begin{cases} \frac{\partial f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^k \bar{\lambda}_j \frac{\partial g_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{\partial x_i} = 0 & i = 1, \dots, n \\ \bar{\lambda}_j [b_j - g_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)] = 0 & j = 1, \dots, k \\ \bar{\lambda}_j \geq 0 & j = 1, \dots, k \end{cases} \quad (33)$$

É necessário ter cautela no número de variáveis a serem otimizadas, pois isto aumenta a complexidade da solução. Além disso, é possível esbarrar em limites computacionais para armazenar um número muito grande de variáveis.

5.1. Modelo de Otimização – Posicionamento do Preço da Marca B em torno de A

Neste primeiro problema apenas o preço da marca B será reposicionado para maximizar o lucro da companhia. No entanto, introduziremos uma função que afetará a demanda da marca A quando o preço de B for reposicionado, assim é possível controlar a canibalização de A por parte de B se isso vier a acontecer.

$$\begin{aligned} \max_{P_{B,i}} \text{Lucro} &= \sum_{i=1}^n (\delta_{B,i} P_{B,i} - C_{B,i}) \pi_{1B,i} \\ \text{sujeito a } &\begin{cases} \sum_{i=1}^n \pi_{1A,i} \geq n\pi_{1A,0} \\ \sum_{i=1}^n \pi_{1B,i} \geq n\pi_{1B,0} \end{cases} \end{aligned} \quad (34)$$

- n quantidade de clientes
- $P_{B,i}$ preço do seguro automóvel do i -ésimo cliente para marca B
- $C_{B,i}$ custo total do i -ésimo cliente para marca B
- $\pi_{1A,i}$ função de probabilidade do i -ésimo cliente comprar a marca A sabendo os preços $P_{A,i}$ e $P_{B,i}$
- $\pi_{1B,i}$ função de probabilidade do i -ésimo cliente comprar a marca B sabendo os preços $P_{A,i}$ e $P_{B,i}$
- $\pi_{A,0}$ demanda mínima desejada para a marca A
- $\pi_{B,0}$ demanda mínima desejada para a marca B

Neste modelo não foi introduzido o lucro da marca A, pois desta forma a função não tem ponto de máximo global.

Retornando ao modelo proposto podemos expandir a função de demanda, que corresponde à probabilidade de compra:

$$\begin{aligned} \max_{P_{B,i}} \text{Lucro} &= \sum_{i=1}^n (\delta_{B,i} P_{B,i} - C_{B,i}) \frac{1}{1 + \exp\left(-\alpha_B - \beta_B \ln \frac{P_{B,i}}{P_{A,i}}\right)} \\ \text{sujeito a } &\begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \exp\left(-\alpha_A - \beta_A \ln \frac{P_{B,i}}{P_{A,i}}\right)} \geq n\pi_{1A,0} \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \exp\left(-\alpha_B - \beta_B \ln \frac{P_{B,i}}{P_{A,i}}\right)} \geq n\pi_{1B,0} \end{cases} \end{aligned} \quad (35)$$

Para facilitar as operações a seguir será adotada a relação $P_{B,i} = e^{\rho_i}$.

$$\begin{aligned} \max_{\rho_i} \text{Lucro} &= \sum_{i=1}^n (\delta_{B,i} e^{\rho_i} - C_{B,i}) \frac{1}{1 + \exp\left(-\alpha_B - \beta_B \ln \frac{e^{\rho_i}}{P_{A,i}}\right)} \\ \text{sujeito a } &\begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \exp\left(-\alpha_A - \beta_A \ln \frac{e^{\rho_i}}{P_{A,i}}\right)} \geq n\pi_{1A,0} \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \exp\left(-\alpha_B - \beta_B \ln \frac{e^{\rho_i}}{P_{A,i}}\right)} \geq n\pi_{1B,0} \end{cases} \end{aligned} \quad (36)$$

Finalmente ficamos com o modelo de otimização a seguir, em que $P_{B,i} > 0$.

$$\begin{aligned} \max_{\rho_i} \text{Lucro} &= \sum_{i=1}^n (\delta_{B,i} e^{\rho_i} - C_{B,i}) \frac{1}{1 + \exp(-\alpha_B - \beta_B \rho_i + \beta_B \ln P_{A,i})} \\ \text{sujeito a } &\begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \exp(-\alpha_A - \beta_A \rho_i + \beta_A \ln P_{A,i})} \geq n\pi_{1A,0} \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \exp(-\alpha_B - \beta_B \rho_i + \beta_B \ln P_{A,i})} \geq n\pi_{1B,0} \end{cases} \end{aligned} \quad (37)$$

Antes de expandir as condições de KKT colocaremos a expressão acima na forma padrão:

$$\begin{aligned} \max_{\rho_i} \text{Lucro} &= \sum_{i=1}^n (\delta_{B,i} e^{\rho_i} - C_{B,i}) \frac{1}{1 + \exp(-\alpha_B - \beta_B \rho_i + \beta_B \ln P_{A,i})} \\ \text{sujeito a} &\begin{cases} -\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \exp(-\alpha_A - \beta_A \rho_i + \beta_A \ln P_{A,i})} < -n\pi_{1A,0} \\ -\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \exp(-\alpha_B - \beta_B \rho_i + \beta_B \ln P_{A,i})} < -n\pi_{1B,0} \end{cases} \end{aligned} \quad (38)$$

Seja então

$$g_1(\rho_1, \dots, \rho_n) = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \exp(-\alpha_A - \beta_A \rho_i + \beta_A \ln P_{A,i})} \quad (39)$$

E,

$$g_2(\rho_1, \dots, \rho_n) = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \exp(-\alpha_B - \beta_B \rho_i + \beta_B \ln P_{A,i})} \quad (40)$$

Agora, calculando as derivadas parciais de g_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1(\rho_1, \dots, \rho_n)}{\partial \rho_i} &= -\frac{\partial}{\partial \rho_i} [1 + \exp(-\alpha_A - \beta_A \rho_i + \beta_A \ln P_{A,i})]^{-1} \\ &= -\frac{\beta_A \exp(-\alpha_A - \beta_A \rho_i + \beta_A \ln P_{A,i})}{[1 + \exp(-\alpha_A - \beta_A \rho_i + \beta_A \ln P_{A,i})]^2} \\ &= -\beta_A (1 - \pi_{A,i}) \pi_{A,i} \end{aligned} \quad (41)$$

Fazendo o mesmo para g_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_2(\rho_1, \dots, \rho_n)}{\partial \rho_i} &= -\frac{\partial}{\partial \rho_i} [1 + \exp(-\alpha_B - \beta_B \rho_i + \beta_B \ln P_{A,i})]^{-1} \\ &= -\frac{\beta_B \exp(-\alpha_B - \beta_B \rho_i + \beta_B \ln P_{A,i})}{[1 + \exp(-\alpha_B - \beta_B \rho_i + \beta_B \ln P_{A,i})]^2} \\ &= -\beta_B (1 - \pi_{B,i}) \pi_{B,i} \end{aligned} \quad (42)$$

E, por fim as derivadas parciais da função objetivo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(\rho_1, \dots, \rho_n)}{\partial \rho_i} &= \frac{\partial}{\partial \rho_i} (\delta_{B,i} e^{\rho_i} - C_{B,i}) [1 + \exp(-\alpha_B - \beta_B \rho_i + \beta_B \ln P_{A,i})]^{-1} \\
&= \frac{\delta_{B,i} e^{\rho_i}}{1 + \exp(-\alpha_B - \beta_B \rho_i + \beta_B \ln P_{A,i})} - \frac{\beta_B (\delta_{B,i} e^{\rho_i} - C_{B,i}) \exp(-\alpha_B - \beta_B \rho_i + \beta_B \ln P_{A,i})}{[1 + \exp(-\alpha_B - \beta_B \rho_i + \beta_B \ln P_{A,i})]^2} \\
&= \frac{\delta_{B,i} e^{\rho_i} [1 + \exp(-\alpha_B - \beta_B \rho_i + \beta_B \ln P_{A,i})] - \beta_B (\delta_{B,i} e^{\rho_i} - C_{B,i}) \exp(-\alpha_B - \beta_B \rho_i + \beta_B \ln P_{A,i})}{[1 + \exp(-\alpha_B - \beta_B \rho_i + \beta_B \ln P_{A,i})]^2} \\
&= \frac{\delta_{B,i} e^{\rho_i} + \delta_{B,i} e^{\rho_i} \exp(-\alpha_B - \beta_B \rho_i + \beta_B \ln P_{A,i}) - \beta_B (\delta_{B,i} e^{\rho_i} - C_{B,i}) \exp(-\alpha_B - \beta_B \rho_i + \beta_B \ln P_{A,i})}{[1 + \exp(-\alpha_B - \beta_B \rho_i + \beta_B \ln P_{A,i})]^2} \\
&= \frac{\delta_{B,i} e^{\rho_i} + \exp(-\alpha_B - \beta_B \rho_i + \beta_B \ln P_{A,i}) [\delta_{B,i} e^{\rho_i} - \beta_B (\delta_{B,i} e^{\rho_i} - C_{B,i})]}{[1 + \exp(-\alpha_B - \beta_B \rho_i + \beta_B \ln P_{A,i})]^2} \\
&= \frac{\delta_{B,i} e^{\rho_i} + \exp(-\alpha_B - \beta_B \rho_i + \beta_B \ln P_{A,i}) [\delta_{B,i} e^{\rho_i} - \beta_B \delta_{B,i} e^{\rho_i} + \beta_B C_{B,i}]}{[1 + \exp(-\alpha_B - \beta_B \rho_i + \beta_B \ln P_{A,i})]^2} \\
&= \frac{\delta_{B,i} e^{\rho_i} + \exp(-\alpha_B - \beta_B \rho_i + \beta_B \ln P_{A,i}) [\delta_{B,i} e^{\rho_i} (1 - \beta_B) + \beta_B C_{B,i}]}{[1 + \exp(-\alpha_B - \beta_B \rho_i + \beta_B \ln P_{A,i})]^2} \\
&= \delta_{B,i} e^{\rho_i} \pi_{B,i}^2 + (1 - \pi_{B,i}) \pi_{B,i} [\delta_{B,i} e^{\rho_i} (1 - \beta_B) + \beta_B C_{B,i}]
\end{aligned} \tag{43}$$

Com isso a função de Lagrange fica:

$$L = \delta_{B,i} e^{\rho_i} \pi_{B,i}^2 + (1 - \pi_{B,i}) \pi_{B,i} [\delta_{B,i} e^{\rho_i} (1 - \beta_B) + \beta_B C_{B,i} + \lambda_2 \beta_B] + \lambda_1 \beta_A (1 - \pi_{A,i}) \pi_{A,i} \tag{44}$$

Portanto, o sistema de KKT a ser resolvido é:

$$\begin{cases}
\delta_{B,i} e^{\rho_i} \pi_{B,i}^2 + (1 - \pi_{B,i}) \pi_{B,i} [\delta_{B,i} e^{\rho_i} (1 - \beta_B) + \beta_B C_{B,i} + \lambda_2 \beta_B] + \lambda_1 \beta_A (1 - \pi_{A,i}) \pi_{A,i} = 0 \\
\lambda_1 \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \exp(-\alpha_A - \beta_A \rho_i + \beta_A \ln P_{A,i})} - n \pi_{1A,0} \right] = 0 \\
\lambda_2 \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \exp(-\alpha_B - \beta_B \rho_i + \beta_B \ln P_{A,i})} - n \pi_{1B,0} \right] = 0 \\
\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0
\end{cases} \tag{45}$$

Considere um exemplo com dois clientes que receberam ofertas para contratar o seguro da empresa A. O cliente 1 recebeu uma proposta de R\$1.500,00 para fazer seguro do seu veículo na empresa A, que tem custo fixo de R\$800,00 e uma taxa de 20% de corretagem sobre o preço oferecido, por isso a empresa tem um custo total de R\$1.100,00. Já o cliente 2 recebeu também da empresa A o valor de R\$1.200,00 para contratar o seguro, que neste caso também possuía taxa de corretagem de 20% sobre o valor oferecido mais um custo fixo de \$700,00, totalizando um custo de

R\$940,00. O gráfico a seguir ilustra a função lucro da empresa B para diversas possibilidades de preços considerando os preços da marca A citados anteriormente.

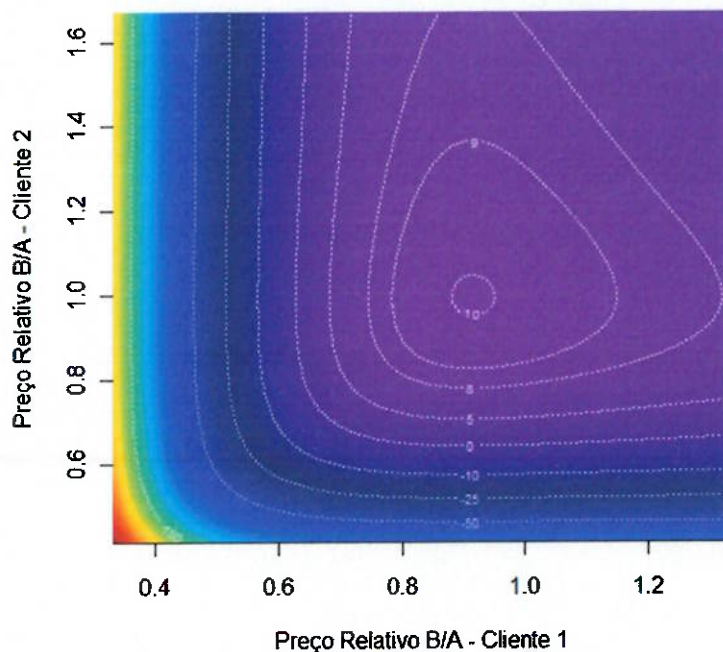


Figura 14: Exemplo de curvas de nível da função lucro para dois clientes, cujos parâmetros são: $\delta_{B,1} = 0,80$, $\delta_{B,2} = 0,80$, $C_{B,1} = 800$, $C_{B,2} = 700$, $P_{A,1} = 1500$, $P_{A,2} = 1200$.

Na figura acima é possível notar que para a empresa B obter lucro máximo é preciso que o seu preço para o cliente 1 seja aproximadamente 90% da marca A, ao passo que para o cliente 2 o preço da marca B precisa ser quase 100% da marca A.

Adicionando as curvas de nível das restrições que indicam as probabilidades de compras ficamos com a nova figura a seguir. Nela nota-se que o ponto de máximo está entre duas curvas de nível das restrições que foram apresentadas, assim é possível obter lucro máximo com uma demanda de até 4% para empresa A e de até 2% para empresa B.

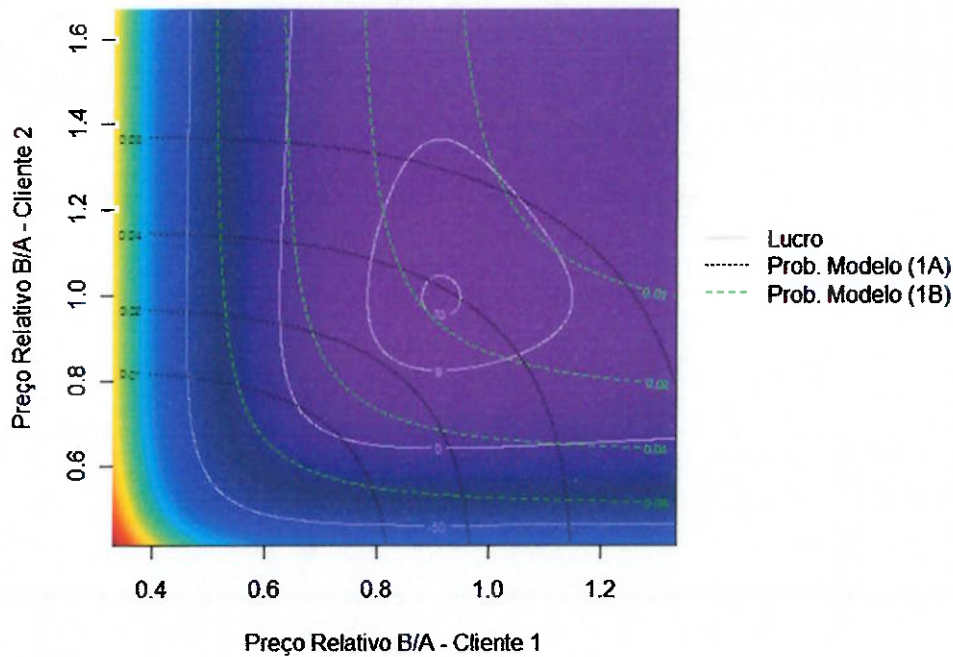


Figura 15: Função lucro do exemplo anterior com as curvas de nível das restrições que representam as probabilidades esperadas de compra de cada marca.

5.1.1. Simulação

Para evitar o custo computacional alto podemos considerar o problema de otimização com 500 clientes. Para isto, além dos preços será necessário obter os custos que neste caso serão simulados, pois não havia disponibilidade da informação real. Para obter o lucro percentual, que corresponde ao lucro em relação à receita podemos utilizar a expressão abaixo:

$$L_{\%} = \frac{\delta P - C}{P} \quad (46)$$

Agora, a partir dela podemos obter qual o valor do custo fixo em função da receita (P), do lucro simulado ($L_{\%}$) e do custo da comissão ($1 - \delta$):

$$C = (1 - L_{\%})\delta P \quad (47)$$

Para simular o lucro percentual foi utilizada a distribuição Beta, com parametrização a seguir.

$$F_{Beta}(x, a, b) = \int_0^x \frac{\Gamma(a, b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} y^{a-1}(1-y)^{b-1} dy \quad (48)$$

Desta distribuição, sabe-se que o valor médio corresponde a:

$$E(L_{\%}) = \frac{a}{a+b} \quad (49)$$

Portanto, fixado um valor para a podemos obter $b = a[1 - E(L_{\%})]/E(L_{\%})$ e assim definimos completamente a distribuição Beta. Se escolhermos $a = 40$, e $E(L_{\%}) = 10\%$ temos de $b = 360$, cuja função densidade de probabilidade é apresentada na figura a seguir em que os lucros se concentram entre 5% e 15%.

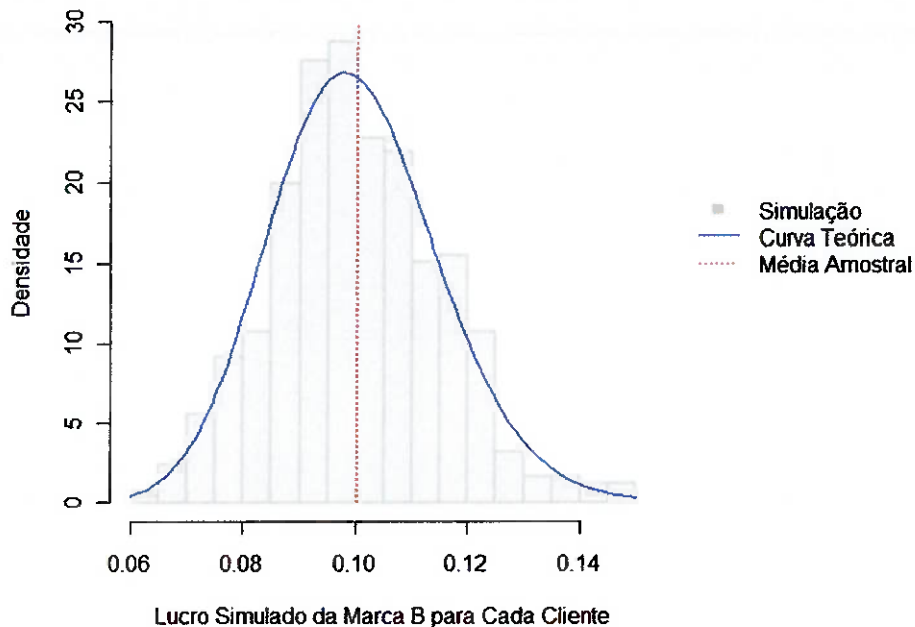


Figura 16: Distribuição Beta teórica para o percentual do lucro, com parâmetros $a = 10$ e $b = 360$.

Portanto, o algoritmo para simular o custo de 500 clientes fica:

$$\begin{aligned}
 & a \leftarrow 40 \\
 & b \leftarrow a(1 - 0.10)/0.10 \\
 & \text{Repetir 500 vezes} \\
 & u_i \leftarrow \text{Uniforme}(0,1) \\
 & L_{\%,i} \leftarrow F_{Beta}^{-1}(u_i; a; b) \\
 & C_{B,i} \leftarrow (1 - L_{\%,i})0,8P_{B,i} \\
 & \text{Fim}
 \end{aligned} \quad (50)$$

Considerando os custos simulados, o lucro após a otimização para o conjunto de 500 clientes aumentou em 52,8%, sem considerar as restrições. Para isto a demanda inicial da marca A que era de 4,1% subiu para 9,4% e a demanda inicial da marca B que era de 2,1% caiu para 1,0%. Embora este seja o máximo global, esta prática de apreçamento reduziria muito a demanda pela marca B, sendo necessário o uso efetivo das restrições para controlar a demanda de cada uma.

Na simulação seguinte foram utilizados níveis mínimos de compra de 2% para cada companhia, cujo ponto ótimo elevou o lucro em 21,7%, a demanda final para marca A subiu de 4,1% para 4,8% e a demanda da marca B atingiu o piso de 2,0%. O box-plot abaixo indica a distribuição dos preços do novo posicionamento em relação ao preço da marca A.

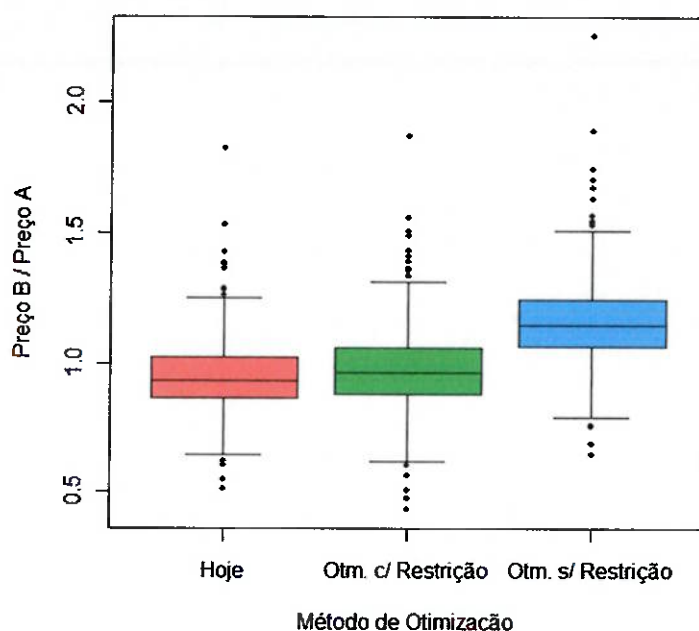


Figura 17: Box-plot da razão de preços entre as marcas B e A.

Embora a figura acima pareça indicar que a distribuição de preços da marca B sob o modelo otimizado com restrição seja muito semelhante à distribuição atual, o box-plot a seguir indica que o preço otimizado precisa quase que na totalidade dos casos sofrer desde uma redução de 20% até um aumento de 20% para que o lucro ótimo seja alcançado. O mesmo não ocorre com a otimização sem restrição, em que os preços precisam ser aumentados de 16% a 27% em relação ao padrão de preço atual para atingir o lucro ótimo. Além disso, esta prática faria com que a marca B ficasse mais cara que A em mais de 75% dos casos.

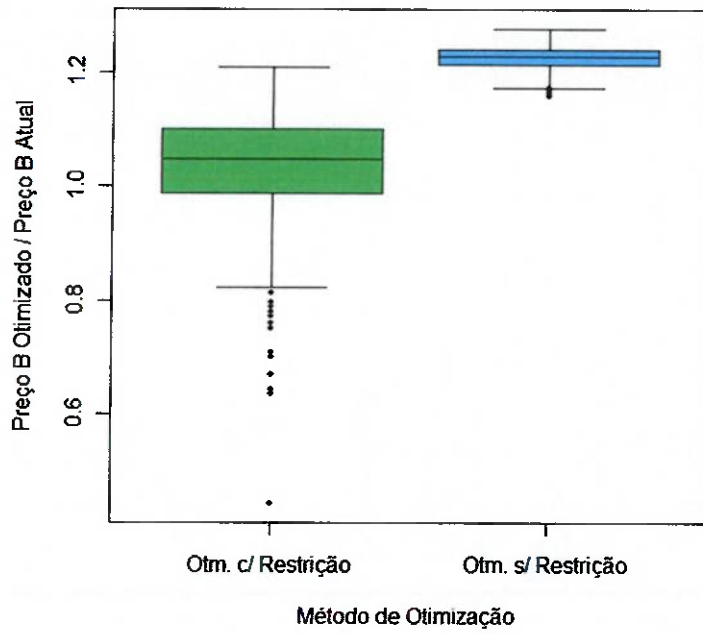


Figura 18: Box-plot da razão entre o preço otimizado e o preço atual da marca B.

5.2. Modelo de Otimização – Posicionamento de Ambas as Marcas

Neste modelo é de interesse maximizar a função de lucro que combina as duas marcas, em que P indica o preço do seguro de cada empresa, C os custos, δ o coeficiente que torna o preço líquido da comissão do agente que faz intermediação da venda entre o cliente e a seguradora e π a função que mede a probabilidade do cliente adquirir o produto.

$$\max_{P_{A,i}, P_{B,i}} \text{Lucro}_i = (\delta_{A,i}P_{A,i} - C_{A,i})\pi_{2A,i} + (\delta_{B,i}P_{B,i} - C_{B,i})\pi_{2B,i} \quad (51)$$

Da expressão acima, a corporação lucra sobre cada cliente $\delta_A P_A - C_A$ unidades monetárias com probabilidade π_{2A} e ganha $\delta_B P_B - C_B$ unidades monetárias com probabilidade π_{2B} . A figura abaixo ilustra o comportamento do lucro em função dos preços.

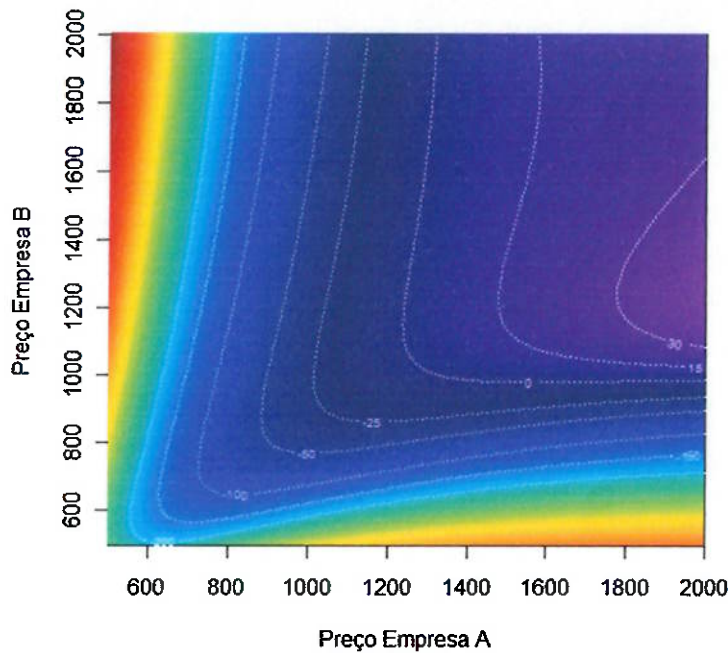


Figura 19: Função lucro do i -ésimo cliente com $\delta_{A,i} = 0,75$, $C_{A,i} = 1000$, $\delta_{B,i} = 0,80$ e $C_{B,i} = 800$.

De acordo com a ilustração é possível notar que o lucro máximo não existe para uma combinação de preços de A e B e que ele aumenta indefinidamente quando o preço de A vai para o infinito. Isto ocorre devido ao próprio modelo de sensibilidade ao preço, pois é possível maximizar o lucro de um produto fazendo com que o preço do outro aumente. Tal situação também ocorreu nos modelos de demanda de Reibstein (1994) e não foi possível maximizar o lucro de alguns produtos, para contornar o problema o autor estabeleceu limites de preços entre cada um deles.

Além de maximizar o lucro sobre os seguros que serão vendidos é necessário garantir um nível de compra mínimo em cada uma das empresas para que as elas coexistam, que pode ser feito adicionando restrições que levam em consideração a probabilidade de aquisição dos produtos.

$$\begin{aligned} \max_{P_{A,i}, P_{B,i}} \text{Lucro} &= (\delta_{A,i}P_{A,i} - C_{A,i})\pi_{2A,i} + (\delta_{B,i}P_{B,i} - C_{B,i})\pi_{2B,i} \\ \text{sujeito a } &\begin{cases} \pi_{2A,i} \geq \pi_{A,0} \\ \pi_{2B,i} \geq \pi_{B,0} \end{cases} \end{aligned} \quad (52)$$

Onde $\pi_{2A,0}$ e $\pi_{2B,0}$ são os percentuais mínimos e conhecidos de compra de cada empresa. Expandindo a função de probabilidade $\pi_{2A,i}$ e $\pi_{2B,i}$ na expressão acima:

$$\begin{aligned} \max_{P_{A,i}, P_{B,i}} \text{Lucro} &= \frac{\delta_{A,i}P_{A,i} - C_{A,i}}{1 + e^{-\alpha_{A,i} - \beta_{A,A} \ln P_{A,i} - \beta_{A,B} \ln P_{B,i}}} + \frac{\delta_{B,i}P_{B,i} - C_{B,i}}{1 + e^{-\alpha_{B,i} - \beta_{B,A} \ln P_{A,i} - \beta_{B,B} \ln P_{B,i}}} \\ \text{sujeito a } &\begin{cases} \frac{1}{1 + e^{-\alpha_{A,i} - \beta_{A,A} \ln P_{A,i} - \beta_{A,B} \ln P_{B,i}}} \geq \pi_{A,0} \\ \frac{1}{1 + e^{-\alpha_{B,i} - \beta_{B,A} \ln P_{A,i} - \beta_{B,B} \ln P_{B,i}}} \geq \pi_{B,0} \end{cases} \end{aligned} \quad (53)$$

Para tornar as futuras derivadas mais simples podemos adotar mudança de variável abaixo:

$$P_{A,i} = e^{\omega_i} \quad (54)$$

E também adotar que:

$$P_{B,i} = e^{\rho_i} \quad (55)$$

Devido às duas parametrizações garantimos que $P_{A,i} > 0$ e $P_{B,i} > 0$, e a função objetivo fica:

$$\begin{aligned} \max_{\omega_i, \rho_i} \text{Lucro} &= \frac{\delta_{A,i}e^{\omega_i} - C_{A,i}}{1 + e^{-\alpha_{A,i} - \beta_{A,A} \ln(e^{\omega_i}) - \beta_{A,B} \ln(e^{\rho_i})}} + \frac{\delta_{B,i}e^{\rho_i} - C_{B,i}}{1 + e^{-\alpha_{B,i} - \beta_{B,A} \ln(e^{\omega_i}) - \beta_{B,B} \ln(e^{\rho_i})}} \\ \text{sujeito a } &\begin{cases} \frac{1}{1 + e^{-\alpha_{A,i} - \beta_{A,A} \ln(e^{\omega_i}) - \beta_{A,B} \ln(e^{\rho_i})}} \geq \pi_{A,0} \\ \frac{1}{1 + e^{-\alpha_{B,i} - \beta_{B,A} \ln(e^{\omega_i}) - \beta_{B,B} \ln(e^{\rho_i})}} \geq \pi_{B,0} \end{cases} \end{aligned} \quad (56)$$

Sabendo que $\ln(e^{\omega_i}) = \omega_i$ e $\ln(e^{\rho_i}) = \rho_i$, o problema final é:

$$\begin{aligned} \max_{\omega_i, \rho_i} \text{Lucro} &= \frac{\delta_{A,i} e^{\omega_i} - C_{A,i}}{1 + e^{-\alpha_{A,i} - \beta_{A,A} \omega_i - \beta_{A,B} \rho_i}} + \frac{\delta_{B,i} e^{\rho_i} - C_{B,i}}{1 + e^{-\alpha_{B,i} - \beta_{B,A} \omega_i - \beta_{B,B} \rho_i}} \\ \text{sujeito a} &\begin{cases} \frac{1}{1 + e^{-\alpha_{A,i} - \beta_{A,A} \omega_i - \beta_{A,B} \rho_i}} \geq \pi_{A,0} \\ \frac{1}{1 + e^{-\alpha_{B,i} - \beta_{B,A} \omega_i - \beta_{B,B} \rho_i}} \geq \pi_{B,0} \end{cases} \end{aligned} \quad (57)$$

Da estrutura acima as únicas variáveis desconhecidas que precisam ser posicionadas são (ω_i, ρ_i) , as demais componentes são conhecidas para cada cliente. Considerando as restrições e o caso exemplificado anteriormente de um cliente teríamos as curvas de nível representadas na figura abaixo para o lucro e as restrições de venda mínima das duas marcas.

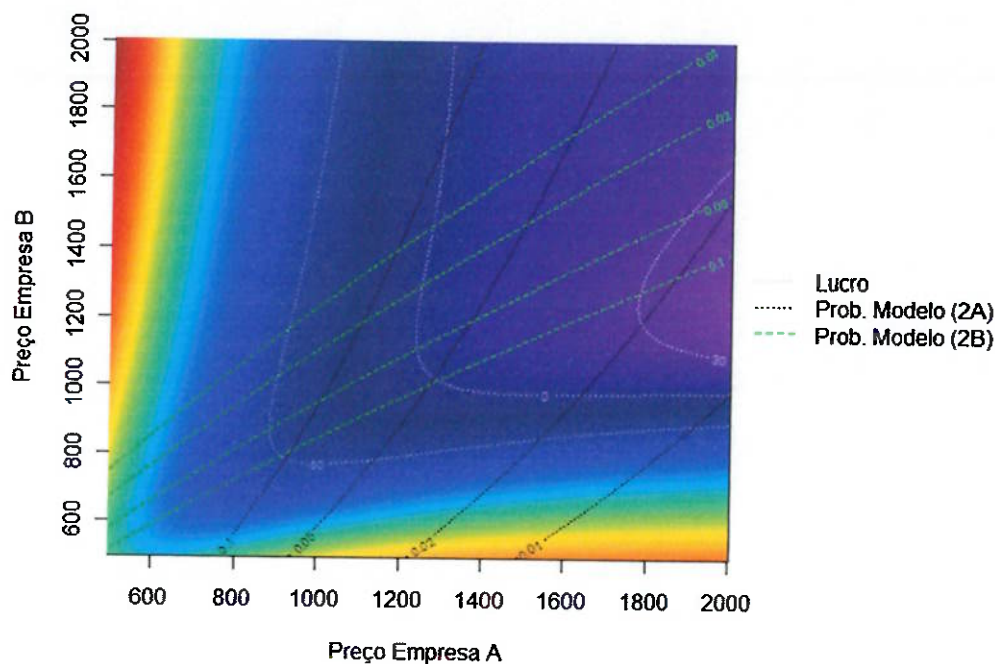


Figura 20: Curvas de Nível da função lucro da Figura 3, curvas de nível da probabilidade de compra dos produtos A e B entre 1% e 10%.

Se considerarmos um nível de compra mínimo de 5% para ambas as marcas então a região viável, agora limitada, corresponde à área entre as restrições em que ambas as marcas atingem probabilidade de compra de 5% sobre a qual podemos ter uma solução viável. O problema na forma padrão é:

$$\begin{aligned} \max_{\omega, \rho} \text{Lucro} &= \frac{\delta_A e^{\omega} - C_A}{1 + e^{-\alpha_A - \beta_{A,A} \omega - \beta_{A,B} \rho}} + \frac{\delta_B e^{\rho} - C_B}{1 + e^{-\alpha_B - \beta_{B,A} \omega - \beta_{B,B} \rho}} \\ \text{sujeito a} &\begin{cases} \frac{1}{1 + e^{-\alpha_A - \beta_{A,A} \omega - \beta_{A,B} \rho}} \leq -\pi_{A,0} \\ \frac{1}{1 + e^{-\alpha_B - \beta_{B,A} \omega - \beta_{B,B} \rho}} \leq -\pi_{B,0} \end{cases} \end{aligned} \quad (58)$$

Aplicando as condições de KKT descritas no sistema (33) precisamos calcular as derivadas parciais conforme a seguir. Primeiramente, a derivada do lucro do produto A em relação a ω :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Lucro_A}{\partial \omega} &= \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\delta_A e^\omega - C_A}{1 + e^{-\alpha_A - \beta_{A,A}\omega - \beta_{A,B}\rho}} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \omega} \left[(\delta_A e^\omega - C_A) (1 + e^{-\alpha_A - \beta_{A,A}\omega - \beta_{A,B}\rho})^{-1} \right] \\
 &= \frac{\delta_A e^\omega}{1 + e^{-\alpha_A - \beta_{A,A}\omega - \beta_{A,B}\rho}} - \frac{\beta_{A,A}(\delta_A e^\omega - C_A) e^{-\alpha_A - \beta_{A,A}\omega - \beta_{A,B}\rho}}{(1 + e^{-\alpha_A - \beta_{A,A}\omega - \beta_{A,B}\rho})^2} \\
 &= \frac{\delta_A e^\omega + [\delta_A e^\omega - \beta_{A,A}(\delta_A e^\omega - C_A)] e^{-\alpha_A - \beta_{A,A}\omega - \beta_{A,B}\rho}}{(1 + e^{-\alpha_A - \beta_{A,A}\omega - \beta_{A,B}\rho})^2}
 \end{aligned} \tag{59}$$

Agora, a derivada do lucro do produto B também em relação a ω :

$$\frac{\partial Lucro_B}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\delta_B e^\rho - C_B}{1 + e^{-\alpha_B - \beta_{B,A}\omega - \beta_{B,B}\rho}} \right) = - \frac{\beta_{B,A}(\delta_B e^\rho - C_B) e^{-\alpha_B - \beta_{B,A}\omega - \beta_{B,B}\rho}}{(1 + e^{-\alpha_B - \beta_{B,A}\omega - \beta_{B,B}\rho})^2} \tag{60}$$

E também a derivada da restrição de compra do produto A em relação a ω :

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left(\pi_{A,0} + \frac{1}{1 + e^{-\alpha_A - \beta_{A,A}\omega - \beta_{A,B}\rho}} \right) = \frac{-\beta_{A,A} e^{-\alpha_A - \beta_{A,A}\omega - \beta_{A,B}\rho}}{(1 + e^{-\alpha_A - \beta_{A,A}\omega - \beta_{A,B}\rho})^2} \tag{61}$$

Para finalizar a primeira equação do sistema, a derivada da restrição de compra do produto B em relação a ω :

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left(\pi_{B,0} + \frac{1}{1 + e^{-\alpha_B - \beta_{B,A}\omega - \beta_{B,B}\rho}} \right) = \frac{-\beta_{B,A} e^{-\alpha_B - \beta_{B,A}\omega - \beta_{B,B}\rho}}{(1 + e^{-\alpha_B - \beta_{B,A}\omega - \beta_{B,B}\rho})^2} \tag{62}$$

Agora, iniciando a segunda equação do sistema a derivada do lucro do produto A em relação a ρ :

$$\frac{\partial Lucro_A}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\delta_A e^\omega - C_A}{1 + e^{-\alpha_A - \beta_{A,A}\omega - \beta_{A,B}\rho}} \right) = \frac{-\beta_{A,B}(\delta_A e^\omega - C_A) e^{-\alpha_A - \beta_{A,A}\omega - \beta_{A,B}\rho}}{(1 + e^{-\alpha_A - \beta_{A,A}\omega - \beta_{A,B}\rho})^2} \tag{63}$$

Em seguida, a derivada do lucro do produto B em relação a ρ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \text{Lucro}_B}{\partial \rho} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\delta_B e^\rho - C_B}{1 + e^{-\alpha_B - \beta_{B,A}\omega - \beta_{B,B}\rho}} \right) \\
 &= \frac{\delta_B e^\rho}{1 + e^{-\alpha_B - \beta_{B,A}\omega - \beta_{B,B}\rho}} - \frac{\beta_{B,B}(\delta_B e^\rho - C_B)e^{-\alpha_B - \beta_{B,A}\omega - \beta_{B,B}\rho}}{(1 + e^{-\alpha_B - \beta_{B,A}\omega - \beta_{B,B}\rho})^2} \\
 &= \frac{\delta_B e^\rho (1 + e^{-\alpha_B - \beta_{B,A}\omega - \beta_{B,B}\rho}) - \beta_{B,B}(\delta_B e^\rho - C_B)e^{-\alpha_B - \beta_{B,A}\omega - \beta_{B,B}\rho}}{(1 + e^{-\alpha_B - \beta_{B,A}\omega - \beta_{B,B}\rho})^2} \\
 &= \frac{\delta_B e^\rho + [\delta_B - \beta_{B,B}(\delta_B e^\rho - C_B)]e^{-\alpha_B - \beta_{B,A}\omega - \beta_{B,B}\rho}}{(1 + e^{-\alpha_B - \beta_{B,A}\omega - \beta_{B,B}\rho})^2}
 \end{aligned} \tag{64}$$

A derivada da restrição de compra do produto A em relação a ρ :

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\pi_{A,0} + \frac{1}{1 + e^{-\alpha_A - \beta_{A,A}\omega - \beta_{A,B}\rho}} \right) = \frac{-\beta_{A,B}e^{-\alpha_A - \beta_{A,A}\omega - \beta_{A,B}\rho}}{(1 + e^{-\alpha_A - \beta_{A,A}\omega - \beta_{A,B}\rho})^2} \tag{65}$$

E, por fim, a derivada da restrição de compra do produto B em relação a ρ :

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\pi_{B,0} + \frac{1}{1 + e^{-\alpha_B - \beta_{B,A}\omega - \beta_{B,B}\rho}} \right) = \frac{-\beta_{B,B}e^{-\alpha_B - \beta_{B,A}\omega - \beta_{B,B}\rho}}{(1 + e^{-\alpha_B - \beta_{B,A}\omega - \beta_{B,B}\rho})^2} \tag{66}$$

Portanto, reagrupando os termos semelhantes, o sistema de KKT a ser resolvido para o caso de um cliente é:

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\frac{\delta_A e^\omega + [\delta_A e^\omega - \beta_{A,A}(\delta_A e^\omega - C_A - \lambda_A)]e^{-\alpha_A - \beta_{A,A}\omega - \beta_{A,B}\rho}}{(1 + e^{-\alpha_A - \beta_{A,A}\omega - \beta_{A,B}\rho})^2} - \frac{\beta_{B,A}(\delta_B e^\rho - C_B - \lambda_B)e^{-\alpha_B - \beta_{B,A}\omega - \beta_{B,B}\rho}}{(1 + e^{-\alpha_B - \beta_{B,A}\omega - \beta_{B,B}\rho})^2} \\
 &\frac{\delta_B e^\rho + [\delta_B e^\rho - \beta_{B,B}(\delta_B e^\rho - C_B - \lambda_B)]e^{-\alpha_B - \beta_{B,A}\omega - \beta_{B,B}\rho}}{(1 + e^{-\alpha_B - \beta_{B,A}\omega - \beta_{B,B}\rho})^2} - \frac{\beta_{A,B}(\delta_A e^\omega - C_A - \lambda_A)e^{-\alpha_A - \beta_{A,A}\omega - \beta_{A,B}\rho}}{(1 + e^{-\alpha_A - \beta_{A,A}\omega - \beta_{A,B}\rho})^2} \\
 &\lambda_A \left(\pi_{A,0} + \frac{1}{1 + e^{-\alpha_A - \beta_{A,A}\omega - \beta_{A,B}\rho}} \right) = 0 \\
 &\lambda_B \left(\pi_{B,0} + \frac{1}{1 + e^{-\alpha_B - \beta_{B,A}\omega - \beta_{B,B}\rho}} \right) = 0 \\
 &\lambda_A \geq 0, \lambda_B \geq 0
 \end{aligned} \right. \tag{67}$$

Utilizando o pacote *Rsolnp* do software R e adicionando restrições de vendas mínimas $\pi_{A,0} = 5\%$ e $\pi_{B,0} = 5\%$, os preços ótimos obtidos são $P_A = R\$1.368,00$ e $P_B = R\$1.192,00$, com $\pi_A = 5\%$ e $\pi_B = 5\%$ e ainda os multiplicadores de Lagrange $\lambda_A = 708,40$ e $\lambda_B = 181,48$. O ponto ótimo pode ser visualizado no gráfico a seguir.

Considerando que os preços atuais das marcas A e B são R\$1.500,00 e R\$1.200,00, respectivamente, então o algoritmo propôs uma redução no preço de A de 8,8%, enquanto que no

preço de B foi inferior a 1%. Embora esta posição tenha reduzido o lucro em 44% a demanda por A subiu de 3,7% para 5,0%, já a demanda por B caiu de 7,1% para 5,0%.

Note que mesmo com redução no preço da marca B a demanda caiu, este fato é decorrente da elasticidade cruzada, pois a redução acentuada da marca A torna o produto mais atrativo afetando assim a preferência por B.

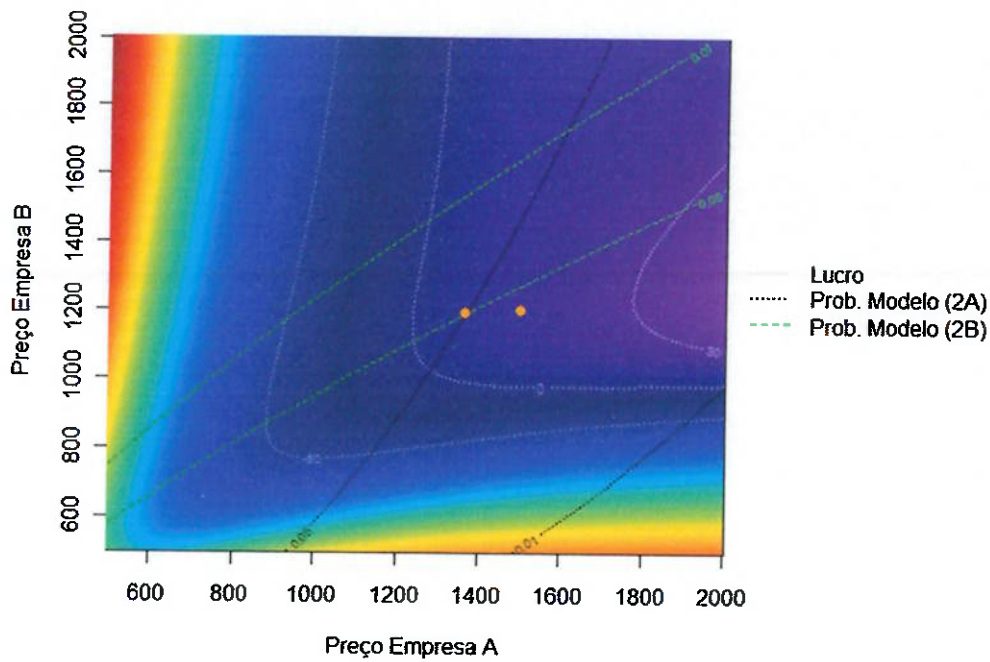


Figura 21: Curvas de nível da função lucro, curvas de nível da probabilidade de compra dos produtos A e B entre 1% e 5% e sinalização do ponto ótimo quando $\pi_{A,0} = 5\%$ e $\pi_{B,0} = 5\%$.

6. Conclusões

Ao posicionar o preço de apenas uma marca não foi possível incluir na função objetivo o lucro da marca A, pois assim o lucro total cresce indefinidamente devido ao coeficiente de elasticidade da marca A. No entanto, seria possível colocá-lo como uma restrição do modelo para não depender apenas da demanda ao posicionar os preços. Um ponto desfavorável deste modelo foi a elasticidade em que ambas as marcas ficaram com sensibilidade ao preço muito semelhante.

Já no modelo seguinte observou-se que maximizar o lucro simultâneo de duas marcas eleva o grau de complexidade, pois a função não tem ponto ótimo global, característica que também era presente no estudo de outros autores. Dependendo dos custos adotados foi possível observar inclusive dois máximos locais, que nos levaria a fazer testes partindo de pontos iniciais distintos para garantir o máximo local. Por causa disso, a única forma de obter o ponto de máximo foi atingindo uma das restrições. Também foi possível identificar grande dificuldade de convergência quando as restrições de demandas eram altas, que ocorre basicamente por não haver intersecção entre elas.

Após inúmeros testes ficou claro que grande parte dificuldade foi devido aos modelos de elasticidade, assim uma possível maneira de contornar os problemas acima seria introduzir o próprio custo dentro do modelo de sensibilidade, o resultado esperado seria um controle maior do afastamento do preço do seu valor mínimo e como alternativa o uso do valor do veículo. Como este trabalho utilizou custos simulados a introdução deles nos modelos de elasticidade gerou perda de informação por causa da aleatoriedade, por isso esta variável não permaneceu no modelo.

Além disso, é possível introduzir melhorias na contabilização dos custos fixos uma vez que o custo unitário apenas ponderado pela probabilidade pode não refletir o total de despesas. Isto porque quanto mais clientes a empresa adquire menor é a relação custo por cliente, por outro lado se ela pratica preços elevados então ela terá uma demanda menor e por consequência a relação custo por cliente também será elevada. Isto deve ser feito incluindo um termo na função objetivo para que cada cliente absorva uma parcela do custo fixo total, como a demanda esperada varia com o preço então para cada novo posicionamento o custo fixo seria diferente. Desta forma o lucro ótimo não seria obtido à custa de uma redução demasiada de clientes.

7. Bibliografia

- Agresti A., *Categorical Data Analysis*. Wiley-Interscience: 2nd edition, 2002.
- Boone, L. E., Kurtz, D. L., *Marketing contemporâneo*. Rio de Janeiro: LTC, 1998.
- Carpenter G. S., Hanssens D. M., *Market Expansion, Cannibalization, and International Airline Pricing Strategy*. International Journal of Forecasting 10, 1994, pp. 313-326.
- Conn A. R., Gould N. I. M., Toint Ph. L., *Large-scale nonlinear constrained optimization: a current survey*. CERFACS Report TR/PA/94/03, 1994.
- Friedlander A., *Elementos de Programação Não-Linear*. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/~friedlan/>>. Acesso em: 24/06/2011.
- Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N., *Continuous Univariate Distributions*, volume 2. New York: Wiley, 1995.
- Kerin, R. A., Harvey M. G., Rothe J. T., *Cannibalism and new product development*. Business Horizons, Greenwich, 1978, v. 21, n. 5, pp. 25-31.
- Kotler, P., *Administração de marketing: análise, planejamento, implementação e controle*. São Paulo: Atlas 1998.
- Little J. D., Shapiro J. F., *A Theory For Pricing Non-Featured Products In Supermarkets*. Working, 1997, pp. 931-987.
- Machado P. F. O., *Aplicações de programação não-linear ao aporeamento de apólices de seguro*. 2009. 110p. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Martinez, E. Z., Louzada-Neto F. e Pereira B. B., *A Curva ROC para Testes Diagnósticos*. Cadernos Saúde Coletiva, 2003, Rio de Janeiro, pp. 7-31. Disponível em: <http://www.po.ufrj.br/basilio/publicacoes/artigos/2003_a_curva_ROC_para_testes_diagnosticos_cadernos_saude_coletiva_vol11_JanJun.pdf>. Acesso em: 17/06/2011
- Morettin P., Bussab W., *Estatística Básica 6ª ed*. São Paulo: Saraiva, 2010.
- Oliveira B. A. C., Mattar F. N., *Canibalismo entre Produtos: Um estudo de múltiplos casos na indústria alimentícia*. Revista de Administração Mackenzie, 2004, Ano 5, n.1, p. 57-81.

- Paula, G. A., *Modelos de Regressão com Apoio Computacional*, 2004. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~giapaula/texto_2010.pdf>. Acesso em: 24/06/2011.
- Pillo G. D., Palagi L., *Nonlinear Programming: Introduction, Unconstrained and Constrained Optimization*, 2000. In Handbook of Applied Optimization, Springer Verlag, P. Pardalos and M. Resende, 2001, pp.263-298.
- PwC. Empresa de Consultoria. *Relatório de pesquisa: Fusões e Aquisições no Brasil*. São Paulo, abril de 2011. Disponível em: <<http://www.pwc.com/br/pt/estudos-pesquisas/fusoes-aquisicoes.jhtml>>. Acesso em: 24/06/2011.
- Reibstein D. J., Gatignon H. (1994), *Optimal Product Line Pricing: The Influence of Elasticities and Cross-Elasticities*. Journal of Marketing Research, 1994, v. 21, n.3, p. 259-267.
- Rossetti, J. P., *Fusões e aquisições no Brasil: as razões e os impactos*. São Paulo: Atlas, 2001, pp. 67-87.
- Tanure, B., Cançado, V. *Fusões e aquisições: aprendendo com a experiência brasileira*. Revista de Administração de Empresas, v. 45, n.2, pp. 10-22, abr/jun 2005.
- Wood Jr. W., Vasconcelos F. C., Caldas M. P., *Fusões e Aquisições no Brasil*. Loyola University: RAE Executiva VOL.2, Nº4, Nov 2003 a Jan 2004.
- R Development Core Team (2011). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.