WU JUN MING

UM MODELO PARA GESTÃO DE RISCO DE *COMMODITIES*

São Paulo

2011

WU JUN MING

UM MODELO PARA GESTÃO DE RISCO DE *COMMODITIES*

Projeto de Formatura apresentado à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, no âmbito do Curso de Engenharia de Produção.

São Paulo

2011

WU JUN MING

UM MODELO PARA GESTÃO DE RISCO DE *COMMODITIES*

Projeto de Formatura apresentado à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, no âmbito do Curso de Engenharia de Produção.

Orientadora:

Profª Dra Celma de Oliveira Ribeiro

São Paulo

2011

FICHA CATALOGRÁFICA

Ming, Wu Jun
Um modelo para gestão de risco de commodities / W.J. Ming.
-- São Paulo, 2011.
92 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Produção.

1. Gestão de risco de commodities I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Produção II. t.

Dedicatória

Dedico este trabalho a todos os meus amigos, à minha família e aos meus professores.

Agradecimentos

Primeiramente, quero agradecer à professora Celma de Oliveira Ribeiro pela atenção despendida. Sua orientação foi essencial para o desenvolvimento do trabalho, pois foi ela quem me transmitiu a maior parte dos conhecimentos aqui presentes.

Quero agradecer também todos os meus colegas de faculdade e de trabalho que contribuíram com o desenvolvimento deste estudo.

Por fim, agradeço a todos os meus amigos e familiares que deram todo suporte para eu realizar este trabalho.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo desenvolver uma gestão de risco para portfólios de *commodities*. Para mensurar as incertezas dos portfólios, foram utilizadas medidas de risco comuns na indústria financeiras, como a variância, VaR (*Value-at-Risk*) e CVaR (*Condicional Value-at-Risk*). Os portfólios ótimos foram obtidos pela otimização do modelo de seleção de portfólio de Markowitz e do modelo de minimização do CVaR. Por fim, foi proposto um modelo de gestão de risco, que faz uma previsão dos portfólios ótimos e de seus riscos para um mês, utilizando o movimento geométrico *browniano* para estimar os preços futuros.

Palavras-chave: Risco. CVaR. Portfólio. Markowitz

Abstract

The objective of this project is developing a risk management of commodities portfolios. To measure the uncertainties from commodities portfolios it was used risk measures commonly used on the financial industry, such variance, VaR (*Value-at-Risk*) and CVaR (*Conditional Value-at-Risk*). The optimal portfolios were obtained by optimization of Markowitz's selection portfolio model and by minimizing CVaR model. There was proposed a model of risk management that makes prediction of optimal portfolios and their risk for one fore month, it was used a geometric Brownian motion to predict the forward prices.

Keywords: Optimization. CVaR. Commodities. Risk.

Lista de Gráficos

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Sumário

1. Introdução

O Brasil é atualmente um dos principais produtores mundiais de *commodities*, ocupando a posição de terceiro maior exportador de produtos agrícolas do mundo, com liderança absoluta em produtos como café, suco de laranja e açúcar. Além dos produtos agrícolas, o Brasil é um grande produtor de combustível e de matérias-primas para a indústria de base, por meio de duas grandes empresas, a Vale e a Petrobras.

Apesar de o Brasil ocupar essa posição de destaque no setor, não existe dentro do país um sistema amplo para negociar todas essas *commodities*. A BM&F Bovespa oferece negociação de café, boi, etanol, açúcar, milho e soja, enquanto produtos das classes óleos crus e metais são negociados, principalmente, nas bolsas dos Estados Unidos e da Europa.

Porém muitas instituições financeiras do país oferecem serviços para os produtores negociarem produtos tanto fora como dentro do país. As negociações fora do país ocorrem principalmente nos mercados de Nova Iorque, Chicago e Londres. As operações de *swap*, futuro e opção são as mais recorrentes, é por meio delas que os produtores buscam proteger sua produção, ou seja, firmam contratos de venda ou de compra por valores que consideram justos, evitando assim não só a variação do preço do produto dentro de um período, mas também perdas ocasionadas pelas variações das cotações das moedas estrangeiras.

Como esse mercado não é consolidado no Brasil, as empresas e os produtores de médio porte têm grande dificuldade em lidar com as operações de *commodities*, seja pela falta de conhecimento técnico e do comportamento peculiar dos preços desses produtos, seja pela falta de instituições que façam a intermediação das operações de *commodities*.

Por essa situação e pela grande variação (sazonalidade) na produção das *commodities*, produtores e empresas de médio e pequeno portes encontram muitas dificuldades em conseguir crédito para realizar esse tipo de negociação, pois as instituições financeiras julgam as operações que envolvem *commodities* como de alto risco. Além disso enfrentam dificuldade para compor um portfólio que tenha os menores riscos possíveis, tanto de crédito quanto de mercado.

1.2 Objetivo do trabalho

Este trabalho tem como objetivo apresentar um modelo de análise de riscos para um portfólio composto de *commodities*, para que se tenha um dimensionamento mais preciso dos riscos e assim minimizá-los.

Incialmente, haverá um estudo sobre a teoria da composição de portfólio que minimize os riscos de mercado. Será aplicada a teoria de portfólio de Markowitz e da metodologia CVaR para definir os portfólios de *commodities* que apresentem o menor risco segundo um retorno esperado.

Após definir o portfólio de menor risco, será feita uma estimativa dos preços futuros das *commodities* no portfólio, para reavaliar sua composição no futuro, além de calcular o potencial risco de crédito do portfólio no futuro e mitigá-lo com a chamada de garantias.

2. Conceitos

Serão apresentados a seguir alguns conceitos básicos para entender o trabalho apresentado.

2.1 Estimação de parâmetros

As distribuições de probabilidades dependem de alguns parâmetros para serem perfeitamente caracterizadas. Por exemplo, uma distribuição normal só pode ser caracterizada se houver o conhecimento de seus dois parâmetros básicos, a média e o desvio padrão. Porém, quando se descreve uma amostra estatística, usa-se algum modelo teórico de distribuição, cujos parâmetros não são conhecidos e precisam ser estimados da melhor forma possível.

Uma boa previsão dos valores reais dos parâmetros pode ser feita por estimativa pontual, por meio de estimadores. O objetivo da estimativa pontual é determinar um valor, com base em dados amostrais, que represente o parâmetro de interesse.

Os parâmetros, média e variância, podem ser estimados, respectivamente pelos seguintes estimadores.

$$\bar{x} = \frac{\sum_i^n x_i}{n}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_i^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

em que:

n= tamanho da amostra

x_i= valor da amostra i.

A covariância entre duas amostras (x e y) pode ser estimada da seguinte maneira:

$$cov(x,y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) * (y_i - \bar{y})}{n-1}$$

em que:

$\bar{x}$= média da variável x.

$\bar{y}$= média da variável y.

n= tamanho da amostra.

2.2 Movimento geométrico *browniano*

A variação dos preços das ações e das *commodities* ao longo do tempo ocorre de maneira incerta e segue um processo estocástico (HULL, 2006). Partindo do pressuposto de Black Fischer e Myron Scholes, o preço de uma ação ou *commodities* segue um processo estocástico específico – o movimento geométrico *browniano*, também conhecido como processo de Wiener. Trata-se de um processo aleatório contínuo que tem três propriedades importantes:

1. é um Processo de *Markov*, ou seja, basta saber o valor atual para fazer uma estimativa da distribuição de probabilidade dos preços futuros das *commodities*. Assim desconsideram-se os valores passados;
2. possui incrementos independentes, ou seja, a distribuição de probabilidade em um determinado intervalo de tempo não é afetada por outro intervalo de tempo, desde que não haja sobreposição dos intervalos de tempo;
3. as mudanças no processo, em determinado intervalo de tempo, são normalmente distribuídas e com variância que cresce linearmente com o intervalo de tempo.

A variação de uma variável z que segue o processo de Wiener pode ser equacionada da seguinte maneira:

$$\Delta z = \varepsilon_t * \sqrt{\Delta t}$$

em que:

Δz= variação de variável z

ε_t= variável aleatória

Δt= intervalo de tempo.

A variável aleatória ε_t tem distribuição probabilidade normal de média zero e desvio padrão um.

Para intervalo de tempo infinitesimalmente pequeno, tendendo a zero, a equação da variação do processo de Wiener pode ser assim reescrita:

$$dz = \varepsilon_t * \sqrt{dt}$$

O processo de Wiener generalizado, conhecido também como movimento *browniano* com tendência para uma variável x de um processo estocástico, pode ser definido por:

$$dx = \alpha * dt + \sigma * dz$$

em que:

α= parâmetro de tendência ou crescimento

σ= parâmetro de variância.

A variação de x possui distribuição normal com média (α*Δt) e variância (σ^2* Δt).

Por fim, o movimento geométrico *browniano* pode ser definido por:

$$dx = \alpha * x * dt + \sigma * x * dz$$

2.2.1 Processo de Itô

O processo de Itô é um processo estocástico contínuo definido por:

$$dx = a(x,t) * dt + b(x,t) * dz$$

em que:

$x(t)$= variável estocástica contínua

$z(t)$= variável estocástica do processo de Wiener

$a(x, t)$= função não aleatória de tendência *b(x, t)*= função não aleatória da variância.

Nota-se que o movimento geométrico *browniano* é um caso particular do processo de Itô, em que *a(x, t)* é igual $\alpha * x$ e *b(x, t)* é igual a $\sigma * x$.

Suponha-se uma função estocástica *u(x,t)*, em que *x* seja uma variável estocástica, o processo de Itô demostra que:

$$du(x,t) = \left\{\frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t) * \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} * [b(x,t)]^2 * \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} dt + b(x,t) * \frac{\partial u}{\partial x} dz$$

Considerando a variável *x* como o movimento geométrico *browniano* para o preço de uma *commodity* e a função $u(x,t)=ln(x_t)$, as derivadas parciais são:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-1}{x^2}$$

Pelo processo de Itô, tem-se:

$$du(x,t) = \left(\alpha * x * \frac{1}{x} + \frac{1}{2} * \sigma^2 * x^2 * \frac{-1}{x^2}\right) dt + \left(\sigma * x * \frac{1}{x}\right) dz = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dz$$

em que:

$$dz = \varepsilon_t * \sqrt{dt}$$

Segundo o processo de Itô e a análise do processo de Wiener generalizado para um intervalo de tempo T, a função *u(x)=ln(x)* tem média e variância definida, respectivamente, por:

$$\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) * T$$

$$\sigma^2 * T$$

A equação estocástica discreta do preço de uma *commodity* pode ser escrita desta forma:

$$\ln\left(\frac{x_t}{x_0}\right) = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) * \Delta t + \sigma * \varepsilon_t * \sqrt{\Delta t}$$

ou:

$$x_t = x_0 * e^{\left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) * \Delta t + \sigma * \varepsilon_t * \sqrt{\Delta t}\right]}$$

Em que:

x_t= preço da *commodity* no tempo futuro *t*

x_0= preço atual da *commodity*

α= parâmetro de tendência ou crescimento

σ= parâmetro de variância

ε_t= variável aleatória de média zero e desvio padrão um no tempo futuro *t*

2.3 Retorno relativo diário

O retorno relativo diário é a variação do preço da *commodity* em um dia. Pode-se definir o retorno diário como:

$$Retorno\ relativo\ diário = \frac{S_t}{S_{t-1}}$$

em que:

S_t= preço do dia

S_{t-1}= preço do dia anterior

2.4 Distribuição dos preços

O preço das ações e das *commodities* tem comportamento de uma variável aleatória contínua e distribuição lognormal. Não se pode assumir uma distribuição normal para os preços das ações e das *commodities*, pois variáveis com distribuição normal podem assumir valores positivos e negativos.

O preço das ações e das *commodities* nunca pode ser negativo, por isso a distribuição lognormal é a mais adequada para descrevê-lo, pois essa distribuição assume apenas valores positivos.

O logaritmo natural da variável que tem distribuição lognormal, é normalmente distribuído. Portanto o $ln(S_t)$ tem distribuição normal, em que S_t representa o preço das ações ou *commodities* em data futura t.

Segundo o processo de Wiener, a média e o desvio padrão de $ln(S_t)$, respectivamente, são iguais a:

$$ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) * T$$

$$\sigma * \sqrt{T}$$

em que:

S_0= preço corrente

T= data futura

μ= retorno esperado

σ= desvio padrão.

O uso do retorno logarítmico diário é mais adequado do que o retorno relativo diário, pois os preços das ações e das *commodities* apresentam uma distribuição lognormal,

$$Retorno\ Logarítmico\ diário = Ln(\frac{S_t}{S_{t-1}})$$

2.5 Volatilidade

A volatilidade do preço de uma ação, *commodity* ou indexador é a medida de incerteza sobre os retornos proporcionados por eles. A volatilidade é o desvio padrão do retorno proporcionado pela ação, *commodity* ou indexador em um intervalo de tempo.

O desvio padrão dos retornos logarítmicos diários do preço das ações e *commodities*, segundo o processo de Wiener, pode ser definido como $\sigma * \sqrt{T}$. Note-se que a incerteza sobre o preço futuro medido pelo desvio padrão é proporcional à raiz quadrada do prazo analisado. Por exemplo, supondo-se que a volatilidade anual de uma ação seja 20%, a volatilidade mensal é dada por:

$$20\% * \sqrt{\frac{1}{12}} = 5{,}77\%$$

Os movimentos históricos dos preços das *commodities* podem ser usados para estimar a volatilidade. O preço da *commodity* é observado em intervalos de tempos fixos. Seja:

n= número de observações

S_t= preço da *commodity* no tempo t (t=0,1,2,...,n)

τ: extensão do intervalo de tempo em anos.

E seja também u_t o retorno logarítmico diário dos preços.

$$u_t = Ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$$

Usando o estimador do desvio padrão, uma estimativa do desvio padrão (s) de u_i é dada por:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} * \sum_{t=1}^{n} {u_i}^2 - \frac{1}{n*(n-1)} * \left(\sum_{t=1}^{n} u_t\right)^2}$$

O desvio padrão de u_t é $\sigma * \sqrt{\tau}$, pois u_t é uma distribuição lognormal. Logo, s é uma estimativa de $\sigma * \sqrt{\tau}$, e σ pode ser estimado como σ':

$$\sigma' = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

Considere-se o seguinte conjunto de preços de açúcar, relativo ao período de 01/10/2010 até 31/10/2011 (22 dias úteis). A volatilidade histórica pode ser assim calculada:

Tabela 1 – Preço do açúcar e o retorno logarítmico diário

Dia	Preço do açúcar (US$/100 *bushels*)	Retorno logarítmico diário ($u_t = Ln(\frac{S_t}{S_{t-1}})$)
1/10/2010	27,54	
4/10/2010	27,58	-0,00145
5/10/2010	27,23	0,01277
6/10/2010	27,49	-0,0095
7/10/2010	27,47	0,00073
8/10/2010	26,37	0,04087
11/10/2010	25,92	0,01721
12/10/2010	25,08	0,03294
13/10/2010	25,15	-0,00279
14/10/2010	25,59	-0,01734
15/10/2010	25,64	-0,00195
18/10/2010	24,84	0,0317
19/10/2010	24,95	-0,00442
20/10/2010	24,35	0,02434
21/10/2010	23,59	0,03171
22/10/2010	23,95	-0,01515
25/10/2010	23,52	0,01812
26/10/2010	22,46	0,04612
27/10/2010	23,18	-0,03155
28/10/2010	22,99	0,00823
29/10/2010	22,69	0,01314
1/11/2010	22,64	0,00221
3/11/2010	21,91	0,03278

O desvio padrão estimado dos retornos logarítmico diários é:

$$s = \sqrt{\frac{0{,}0112}{21} - \frac{0{,}2287}{21 * 22}} = 0{,}0205$$

Assumindo que o açúcar é negociado 252 dias por ano, uma estimativa para a volatilidade anual é de 0,0205*$\sqrt{252}$ = 0,3254 ou 35,54%.

2.6 Média ou esperança matemática ou valor esperado

Os preços das ações e *commodities* são variáveis aleatórias, portanto os retornos também o são. Assim, os retornos podem ser descritos por suas distribuições de probabilidade.

A função distribuição de probabilidade fornece, para qualquer ponto considerado, a probabilidade de que a variável aleatória tenha um valor menor ou igual que o correspondente a esse ponto.

A função de distribuição de probabilidade para variáveis aleatórias discretas é descrita por:

$$F(a) = \sum_{x_i \leq \alpha} p(x_i)$$

em que:

$p(x_i)$= função densidade de probabilidade

Já para variáveis contínuas, a função de distribuição de probabilidade é dada por:

$$F(a) = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx$$

em que:

$f(x)$= função densidade de probabilidade

A média para variáveis discretas é definida por:

$$\mu = E(X) = \sum_{i} x_i * p(x_i)$$

e para variáveis contínuas:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f(x)dx$$

2.7 Variância

A variância mede a variabilidade e a dispersão das variáveis aleatórias em torno da média.

A variância da variável aleatória *X* é definida genericamente por:

$$\sigma^2(X) = E[(X - \mu)^2]$$

Para variáveis aleatórias discretas é definida por:

$$\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 * p(x_i)$$

E para variáveis aleatórias contínuas é definida por:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 * f(x)dx$$

O desvio padrão é a raiz quadrada da variância e mede também a dispersão das variáveis. Porém possui vantagens sobre a variância, pois é mais representativo ao se compararem dispersões, e é expresso na mesma unidade da medida da variável:

$$Desvio\ Padrão = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$$

2.8 Covariância

A covariância entre duas variáveis aleatórias não independentes avalia como elas estão se relacionando entre si.

Suponham-se duas variáveis *X* e *Y* não independentes. Se as variáveis X e Y tiverem uma relação positiva forte entre si, para valores grandes de *X*, há tendência de se obterem maiores valores de *Y*. E para valores pequenos de *X*, há tendência de se obterem valores pequenos de *Y*. A covariância entre *X* e *Y* deve ser positiva, quando há uma relação positiva forte.

Se *X* e *Y* não forem fortemente relacionadas, para maiores valores de *X*, observa-se a tendência de menores valores de *Y*. Neste caso, a covariância pode ser negativa ou próxima de zero.

A covariância entre duas variáveis aleatórias *X* e *Y* é definida genericamente por:

$$Cov(X,Y) = E\left[(X-\mu_x) * \left(Y-\mu_y\right)\right]$$

Para variáveis aleatórias *X* e *Y* discretas, a covariância é definida por:

$$Cov(X,Y) = \sum_i \sum_i (x_i - \mu_x) * \left(y_i - \mu_y\right) * p(x,y)$$

Já para variáveis aleatórias *X* e *Y* contínuas, a covariância é definida por:

$$Cov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x) * \left(y-\mu_y\right) * f(x,y)dxdy$$

2.9 Correlação

A correlação é uma medida do grau da relação linear entre as variáveis aleatórias não independentes. Em geral, usa-se, para a medida do grau de correlação, o coeficiente de correlação linear de *Pearson* que pode ser chamado de coeficiente de correlação, definido pela equação:

$$\rho_{xy} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x * \sigma_y}$$

em que:

σ_x= desvio padrão da variável *x*.

σ_y= desvio padrão da variável *y*.

2.10 Variância do Portfólio

A variância da taxa de retorno do portfólio não é obtida unicamente pela soma das variâncias de cada ativo. A equação de cálculo da variância considera a covariância entre os ativos do portfólio, de forma a expressar a contribuição da diversificação sobre o risco do portfólio.

A covariância entre dois ativos é definida pelo produto dos desvios padrões com o coeficiente de correlação. Nota-se pela equação que a covariância do próprio ativo é sua variância.

$$cov(x, y) = corr(x, y) * \sigma_x * \sigma_y$$

A covariância dos ativos em um portfólio pode ser expressa por meio de uma matriz de covariância, em que os valores da diagonal da matriz são as próprias variâncias dos retornos dos ativos.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix}$$

A equação da variância do portfólio é definida pela multiplicação dos pesos dos ativos pelas variâncias e covariâncias entre os retornos dos ativos.

$$\sigma^2 = \sum_{i,j=1}^{n} w_i * w_j * \sigma_{ij}$$

em que:

w_i= peso do ativo i no portfólio

w_j= peso do ativo j no portfólio

n= número de ativos no portfólio

σ_{ij}= covariância entre os ativos i e j.

O objetivo da diversificação é combinar ativos de forma que se reduza o risco do portfólio, pois, com a composição de vários ativos, é possível reduzir a variância da taxa de retorno do portfólio.

2.11 Medida de risco

As decisões de investimentos não são tomadas com total certeza sobre seus resultados. Essa incerteza é um dos aspectos mais significativos do estudo das operações do mercado financeiro.

Segundo Assaf Neto (2009, p. 218), assim pode ser definido o risco:

> "[...] quando a incerteza pode ser quantificada por meio de uma distribuição de probabilidades dos diversos resultados previstos, diz-se que a decisão de investimento está sendo avaliada sob uma situação de risco. Desta maneira, o risco pode ser entendido pela capacidade de se mensurar o estado de incerteza de uma decisão mediante o conhecimento das probabilidades associadas à ocorrência de determinados resultados."

Ainda na definição do risco, Marins (2004, p. 283) o conceitua como a incerteza, que pode ser medida, ou seja, cuja probabilidade de ocorrência pode ser estimada.

Há inúmeras definições sobre risco, porém a maioria delas refere-se à probabilidade da ocorrência da incerteza, que pode trazer resultados inesperados.

O risco no mercado financeiro pode ser divido em risco sistemático e risco não sistemático.

Assaf Neto (2009, p. 220) define o risco sistemático como aquele que é "inerente a todos os ativos do mercado, sendo determinado por eventos de cunho político, econômico e social. Cada ativo reage de uma maneira frente a esses eventos conjunturais, por isso é indicada a diversificação do portfólio de ativos para mitigar e prevenir este risco".

Já o risco não sistemático, segundo Assaf Neto (2009, p. 221), é "identificado nas características do próprio ativo, não é associado aos demais ativos do portfólio. É um risco intrínseco, próprio de cada investimento, e pode ser mitigado com a inclusão de ativos que não tenham correlação linear positiva entre si no portfólio".

Assim como há inúmeras definições de risco, há várias medidas de risco. Este trabalho pretende expor a medida de risco pela variância, VaR (*Value at Risk*) e CVaR (*Conditional Value at Risk*).

2.11.1 Tipos de riscos nas operações financeiras

Os tipos de riscos variam conforme os ramos de atuação das empresas, portanto há uma grande variedade de riscos; um agricultor rural, por exemplo, sofre com os riscos climáticos. Neste trabalho serão abordados três tipos principais de riscos que envolvem as operações financeiras: risco operacional, risco de crédito e risco de mercado.

2.11.2 Risco Operacional

O risco operacional decorre da possibilidade de perdas de capital ou de custo de oportunidade decorrente da falta de capacidade das instituições de conhecer, controlar e mensurar os riscos existentes nos processos internos de realização das operações financeiras.

Por exemplo, registros de montantes das operações errados, falha nos equipamentos (computadores, telefones, programas, etc.) na hora de realizar as operações, fazendo com que a empresa perca a oportunidade do negócio. Há ainda as ações dos funcionários mal-intencionados que sabotam as operações de propósito para levarem alguma vantagem.

Muitas fraudes financeiras decorrem da falta de capacidade das instituições em identificar e controlar esse tipo de risco.

2.11.3 Risco de Crédito

O risco de crédito é a possibilidade de perda decorrente de as partes envolvidas não honrarem seus compromissos de pagamento das operações, ou seja, o não recebimento dos recursos, quando se tem direito a recebê-los. O atraso e as condições de pagamento também são considerados risco de crédito.

O risco de crédito das contrapartes envolvidas nas operações financeiras depende de variáveis quantitativas e qualitativas.

Os aspectos quantitativos, também conhecidos como aspectos objetivos, são assim definidos por Marins (2004, p. 285):

> "[...]- situação econômica e financeira das contrapartes;
> - cálculo de índices e de valores relevantes, a partir dos valores do balanço patrimonial;
> - confiabilidade das informações contábeis, por meio de avaliação de auditorias internas e auditorias independentes;
> - análise do tamanho do crédito oferecido com os valores econômicos e financeiros do solicitador, ou seja, uma empresa que gera um milhão de reais por ano pode não honrar uma operação financeira de dez milhões de reais;
> - perspectivas de geração de renda;
> - qualidade das garantias oferecidas;
> - desempenho e perspectivas futuras do setor da atividade das contrapartes".

Os aspectos qualitativos, também conhecidos como subjetivos, são, segundo Marins (2004, p. 286):

> "- experiências das instituições com as operações financeiras;
> - idoneidade dos controladores das instituições;
> - tradição da empresa solicitante de crédito".

A análise dos aspectos objetivos e subjetivos fornece os parâmetros necessários para decidir a concessão de crédito e seu tamanho para as instituições.

2.11.4 Risco de Mercado

O risco de mercado é a possibilidade de perda decorrente das mudanças adversas nos preços ou cotações dos ativos e passivos nas operações financeiras.

O risco de mercado é estimado a partir de volatilidades, correlações, distribuições de probabilidade dos retornos dos ativos e prazo das operações. Os principais elementos do risco de mercado relacionado ao mercado financeiro são taxas de juros, taxas de câmbio, preço das ações e preço das *commodities*. Quanto mais voláteis forem os ativos (taxa de juros, taxas de câmbio, preços das ações e preço das *commodities*), mais alto será o risco de mercado.

Por exemplo, um banco comprou um milhão de ações de uma empresa X por R$ 100 reais cada ação, ou seja, o total que o banco investiu nas ações foi de R$ 100 milhões reais. Por algum evento adverso, as ações da empresa X sofreram uma queda depois de um mês e estão sendo negociadas a um preço de R$ 80 reais por ação. Logo, o banco teve uma perda de R$ 20 milhões de reais, pois o total de ações que ela comprou não valem mais R$ 100 milhões de reais, mas sim R$ 80 milhões.

2.12 Principais Operações

As principais operações negociadas no mercado das *commodities* são os contratos futuros e a termo e *swaps*.

2.12.1 Contratos futuros e a termo

Os contratos futuros são contratos padronizados negociados entre duas contrapartes por meio de uma bolsa para um vencimento futuro. Ou seja, os compradores e vendedores negociam determinada quantidade de uma mercadoria por um preço acordado entre eles, para liquidação física (entrega da mercadoria) ou financeira (entrega do dinheiro) em data futura previamente definida.

Os montantes de compra e venda, bem como as características da mercadoria negociada, são padronizados nos contratos futuros pela bolsa de valores.

Por exemplo, um contrato futuro de açúcar cristal especial negociado na Bolsa de Mercadorias e Futuros de São Paulo (BM&F) possui o montante de 270 sacas de 50 quilos líquidos. O açúcar cristal especial negociado nesse contrato precisa ter no mínimo de 99,7 graus de polarização, máximo de 0,08% de umidade, máximo de 0,07% de cinzas e máximo de 150 cor ICUMSA (medida de cor do açúcar). Os meses de vencimento dos contratos futuros de açúcar cristal ocorrem em fevereiro, abril, julho, setembro e novembro.

Os contratos a termo também são contratos de compra e venda de uma mercadoria com quantidade, preço e prazos de entrega definidos pelos compradores e vendedores. Porém esses contratos não precisam ser padronizados, os montantes e os vencimentos são definidos pelos compradores e vendedores, por isso os contratos a termo não são negociados nas bolsas de valores. A negociação dos contratos a termo é feita, exclusivamente, entre duas contrapartes, ou seja, sem o intermédio da bolsa. As negociações que não têm o intermédio da bolsa de valores são denominadas transações ou operações de balcão.

Os contratos futuros e a termo permitem que os produtores de *commodities* fixem um preço de venda, que eles acham "justo" para seus produtos em uma data futura, evitando a incerteza sobre o preço de seus produtos. Os compradores de *commodities* também utilizam os contratos futuros e a termo para fixar o preço de compra, que acham "justo" pagar pelos produtos.

2.12.2 Operação de *swap*

A operação de *swap* é um acordo entre duas contrapartes para trocar fluxos de caixa no futuro, que define o montante e as datas dos fluxos de caixa a serem pagos e também a forma como esses fluxos serão calculados.

Os contratos futuros e a termo são exemplos simples de *swap*, pois os compradores e os vendedores dos contratos fazem uma troca de fluxo de caixa no futuro.

Por exemplo, uma empresa *A* compra um contrato futuro de 270 sacas de açúcar a um preço de R$ 50 reais por saca, para liquidação daqui a um ano. A empresa *A* poderá vender as 270 sacas de açúcar daqui a um ano, tão logo as receba por um preço *S*, de mercado, no momento da venda.

O contrato futuro equivale a uma operação de *swap*, pois a empresa *A* concordou em pagar R$ 13.500 daqui a um ano e receber R$ 270*S.

Enquanto os contratos futuros e a termo estabelecem a troca de fluxo de caixa em uma única data, as operações de *swap* implicam a ocorrência de várias trocas de fluxos de caixa em datas futuras. As trocas podem ocorrer mensal, semestral, anualmente, ou em qualquer outro prazo estipulado pelas duas contrapartes da operação

2.13 Fatores que mitigam o risco de crédito

As operações na bolsa de valores são mais seguras, pois essa instituição garante sua liquidação. Além disso, todos seus participantes são registrados e aqueles que não cumprem as obrigações de pagamento e entrega das operações são punidos e até proibidos de ali operar.

Diferentemente das operações na bolsa de valores, as operações de balcão são feitas por duas contrapartes, sem seu intermédio. Assim, nessas operações incorre-se em mais risco de inadimplência. Por isso, há uma documentação específica para realização e registro desse tipo de operação.

Os contratos legais para realização das operações de balcão de contratos a termo, *swaps* e opções são padronizados mundialmente. No Brasil, o contrato legal para realizar essas operações chama-se Contrato Global de Derivativos (CGD). É imprescindível que as duas entidades envolvidas nas operações de balcão tenham esse contrato assinado, pois ele garante o cumprimento das obrigações de ambas as partes.

O CGD possui parâmetros de garantias em sua estrutura, que têm a função de mitigar as perdas de um possível evento de inadimplência. O mecanismo de depósito de margem é a forma mais usual de chamada de garantia nas operações de contratos a termo, *swaps* e opções.

2.13.1 Marcação ao mercado

A marcação ao mercado é uma medida para quantificar o valor da operação em um momento do tempo, ou seja, ela indica quanto vale a operação segundo o preço de mercado do ativo no dia de seu cálculo. Em geral, o valor da marcação ao mercado é calculado diariamente.

Suponha que no dia 1º de janeiro um produtor de *commodity* negocie um contrato a termo de uma tonelada de cobre com um banco, estabelecendo a venda pelo preço de R$ 10 mil reais a tonelada do cobre, para vencimento no dia 6 de janeiro. Nessas condições, o produtor venderá o cobre por R$ 10 mil reais a tonelada para o banco no dia 6 de janeiro.

Suponha-se também que o preço de mercado da tonelada de cobre no momento (janeiro) do fechamento da operação sejam os mesmos R$ 10 mil reais.

Porém, o preço de mercado da tonelada do cobre não é constante (R$ 10 mil reais por tonelada) durante a vigência do contrato. A marcação ao mercado quantifica o valor da operação segundo a mudança diária do preço do ativo.

Suponha-se que no dia 2 de janeiro o preço de mercado do cobre seja de R$ 9 mil reais. O valor da marcação ao mercado do contrato a termo para o banco é de R$ 1 mil reais negativo, pois nesse dia o banco estaria comprando uma tonelada de cobre por R$ 10 mil reais, segundo acordado no contrato a termo, mas o mercado paga somente R$ 9 mil reais.

O valor da marcação ao mercado para o produtor da *commodity* é de R$ 1 mil reais positivo, pois ele estaria vendendo uma tonelada de cobre por R$ 10 mil reais, mas o mercado paga somente R$ 9 mil reais.

A tabela, a seguir, mostra a evolução do preço de mercado da tonelada de cobre e o valor da marcação ao mercado para o banco. A liquidação da operação ocorre no dia 6 de janeiro, nesse dia o banco tem um ganho de R$ 2 mil reais, pois está comprando uma tonelada de cobre por R$ 10 mil reais e consegue vendê-lo no mercado por R$ 12 mil reais.

Tabela 2 – Valor da marcação ao mercado para o banco

Preço do contrato a termo R$ 10.000		
Dia	**Preço de mercado**	**Marcação ao mercado**
1º	R$ 10.000	R$ 0
2º	R$ 9.000	-R$ 1.000
3º	R$ 11.000	R$ 1.000
4º	R$ 8.000	-R$ 2.000
5º	R$ 7.000	-R$ 3.000
6º	R$ 12.000	R$ 2.000

Para a *commodity*, os valores da marcação ao mercado são os opostos dos valores referentes ao banco. No dia da liquidação da operação, o produtor terá uma perda de R$ 2 mil reais, pois está vendendo uma tonelada por R$ 10 mil reais, porém o mercado paga R$ 12 mil reais.

Tabela 3 – Valor da marcação ao mercado para o produtor de *commodity*

Preço do contrato a termo R$ 10.000		
Dia	**Preço de mercado**	**Marcação ao mercado**
1º	R$ 10.000	R$ 0
2º	R$ 9.000	R$ 1.000
3º	R$ 11.000	-R$ 1.000
4º	R$ 8.000	R$ 2.000
5º	R$ 7.000	R$ 3.000
6º	R$ 12.000	-R$ 2.000

A liquidação das operações de contratos futuro e a termo, assim como os *swaps* e opções, é feita apenas no resultado financeiro, ou seja, no dia do vencimento o banco recebe R$ 2 mil reais do produtor (o banco paga R$ 10 mil por uma tonelada de cobre que vale R$ 12 mil naquele momento).

Portanto, a marcação ao mercado é o valor financeiro da operação, caso ela seja liquidada no momento do cálculo. Valores positivos de marcação ao mercado indicam que a contraparte terá ganhos na operação; quando a marcação ao mercado é negativa, indica prejuízo na operação.

O risco de crédito é medido pela marcação ao mercado das operações, quando a marcação ao mercado estiver positiva, tem-se o direito de receber determinada quantia pela operação. Logo há o risco de crédito, ou seja, há probabilidade de não recebimento da quantia devida.

O termo exposição de crédito é usado pelo mercado financeiro para denominar os valores positivos de marcação ao mercado que se tem direito a receber.

2.13.2 Parâmetros de garantias

Os parâmetros de garantias são construídos para reduzir a exposição de crédito das entidades envolvidas nas operações financeiras, ou seja, para chamar garantias, quando a marcação ao mercado estiver muito alta e assim procurar para reduzir a perda caso haja um evento de inadimplência.

Os principais parâmetros de garantia são:

- limite da marcação ao mercado: valor máximo de tolerância da exposição de crédito, quando a exposição atingir valores acima desse valor, será chamado garantias;

- transferência mínima: valor mínimo para fazer as transferências de garantias, ou seja, valores de garantias abaixo desse valor não serão transferidos para evitar custos de transferência de valores muito baixos;

- margem: valor depositado para reduzir a exposição de crédito;

- depósito inicial: montante de garantia depositada no início da operação, independentemente do valor da marcação ao mercado. Esse montante não sofre alterações durante a vigência da operação.

O dimensionamento dos valores desses parâmetros é feito segundo a qualidade de crédito das contrapartes envolvidas nas operações. Entidades com boa qualidade de crédito, quer dizer, baixa probabilidade de não arcar com os pagamentos, têm um limite da marcação ao mercado maior, assim como o valor de transferência mínima.

O depósito inicial é cobrado das contrapartes que têm péssima qualidade de crédito, ou seja, que apontam uma alta probabilidade de serem inadimplentes. Essa cobrança também é feita para os *hedge funds*, que são fundos de investimentos de alto risco.

2.13.3 Mecanismo de Depósito de Margem

O mecanismo de depósito de margem usa os parâmetros de garantias para definir o valor a ser depositado de garantia. Segundo os valores dos parâmetros de garantia, há a chamada de depósito de margem quando:

$$Marcação\ ao\ mercado \geq Limite\ da\ marcação\ ao\ mercado + Transferência\ mínima$$

A margem a ser depositada é igual à diferença entre o valor da marcação ao mercado e o limite da marcação ao mercado, assim se reduz a exposição de crédito. A margem depositada é corrigida e devolvida no final da operação, quando ocorre sua liquidação.

O mecanismo de depósito de margem pode ser unilateral ou bilateral. Em acordos unilaterais, apenas uma entidade faz depósito de margem. Já em acordos bilaterais, as duas contrapartes fazem depósito de margem, quando a margem é requerida.

Os acordos unilaterais são feitos quando uma contraparte, muitas vezes um banco, possui qualidade de crédito muito superior à da outra entidade envolvida na operação. Por negociar com uma entidade de qualidade de crédito pior, o banco não deseja depositar garantias para essa entidade, pois elas podem ser perdidas em caso de falência ou insolvência da entidade de qualidade de crédito inferior.

Tomando o exemplo anterior do produtor de cobre, que fecha um contrato a termo de venda de uma tonelada de cobre por um preço de R$ 10 mil reais, suponha-se que o produtor e o banco tenham um acordo bilateral de depósito de margem, os limites de marcação ao mercado sejam iguais para ambos, R$ 500 reais, e a transferência mínima seja de R$ 100 reais:

Tabela 4 – Depósitos de margens do banco em um acordo bilateral.

Preço do contrato a termo R$ 10.000						
Dia	**Preço de mercado**	**Marcação ao mercado**	**Limite da marcação ao mercado**	**Transferência mínima**	**Margem**	**Liquidação da operação**
1º	R$ 10.000	R$ 0	R$ 500	R$ 100	R$ 0	
2º	R$ 9.000	-R$ 1.000	R$ 500	R$ 100	-R$ 500	
3º	R$ 11.000	R$ 1.000	R$ 500	R$ 100	R$ 500	
4º	R$ 8.000	-R$ 2.000	R$ 500	R$ 100	-R$ 1.500	
5º	R$ 7.000	-R$ 3.000	R$ 500	R$ 100	-R$ 2.500	
6º	R$ 12.000	R$ 2.000			R$ 0	R$ 2.000
				Total	-R$ 4.000	R$ 2.000

Tabela 5 – Depósitos de margens do produtor em um acordo bilateral.

Preço do contrato a termo R$ 10.000						
Dia	**Preço de mercado**	**Marcação ao mercado**	**Limite da marcação ao mercado**	**Transferência mínima**	**Margem**	**Liquidação da operação**
1º	R$ 10.000	R$ 0	R$ 500	R$ 100	R$ 0	
2º	R$ 9.000	R$ 1.000	R$ 500	R$ 100	R$ 500	
3º	R$ 11.000	-R$ 1.000	R$ 500	R$ 100	-R$ 500	
4º	R$ 8.000	R$ 2.000	R$ 500	R$ 100	R$ 1.500	
5º	R$ 7.000	R$ 3.000	R$ 500	R$ 100	R$ 2.500	
6º	R$ 12.000	-R$ 2.000			R$ 0	-R$ 2.000
				Total	R$ 4.000	-R$ 2.000

No segundo dia, a marcação ao mercado está negativa para o banco, isto é, se a operação terminar nesse dia, o banco terá de pagar R$ 1 mil reais para o produtor, cuja marcação ao mercado, por sua vez, é de R$ 1 mil positivo. Logo, o banco tem de depositar R$ 500 (marcação ao mercado – limite da marcação ao mercado) de margem para o produtor.

No terceiro dia, a situação inverte-se, a marcação ao mercado é de R$ 1 mil reais para o banco e menos R$ 1 mil reais para o produtor. Logo o produtor tem de depositar R$ 500 reais (marcação ao mercado – limite da marcação ao mercado) de margem para o banco.

Essa dinâmica de chamada de margem segue até o dia da liquidação (sexto dia). No dia da liquidação, o banco depositou de margem um total de R$ 4 mil reais para o produtor e precisa receber R$ 2 mil reais pela liquidação da operação. O produtor tem com ele depositados R$ 4 mil reais de margem do banco e precisa pagar R$ 2 mil reais para liquidar a operação. Logo, o banco recebe o total de sua margem depositada (R$ 4 mil reais) corrigido por uma taxa básica de juros e mais o valor da operação (R$ 2 mil reais).

Neste exemplo, caso o produtor declare falência no dia da liquidação, o banco teria perdido R$ 2 mil reais da operação e os R$ 4 mil reais de margem, também. Por isso, o receio dos bancos em fazer contratos bilaterais com contrapartes que têm qualidade de crédito inferior à deles.

Repetindo o mesmo exemplo anterior, mas sendo agora o contrato de depósito de margem unilateral para o produtor, ou seja, apenas o produtor deposita margem. Portanto, o limite de marcação ao mercado do banco é infinito.

Tabela 6 – Depósito de margem do banco em um acordo unilateral

Preço do contrato a termo R$ 10.000						
Dia	**Preço de mercado**	**Marcação ao mercado**	**Limite da marcação ao mercado**	**Transferência mínima**	**Margem**	**Liquidação da operação**
1º	R$ 10.000	R$ 0	Infinito	R$ 100	R$ 0	
2º	R$ 9.000	-R$ 1.000	Infinito	R$ 100	R$ 0	
3º	R$ 11.000	R$ 1.000	Infinito	R$ 100	R$ 500	
4º	R$ 8.000	-R$ 2.000	Infinito	R$ 100	R$ 0	
5º	R$ 7.000	-R$ 3.000	Infinito	R$ 100	R$ 0	
6º	R$ 12.000	R$ 2.000			R$ 0	R$ 2.000
				Total	R$ 500	R$ 2.000

Tabela 7 – Depósito de margem do produtor em um acordo unilateral.

Preço do contrato a termo R$ 10.000						
Dia	**Preço de mercado**	**Marcação ao mercado**	**Limite da Marcação ao Mercado**	**Transferência Mínima**	**Margem**	**Liquidação da operação**
1º	R$ 10.000	R$ 0	R$ 500	R$ 100	R$ 0	
2º	R$ 9.000	R$ 1.000	R$ 500	R$ 100	R$ 0	
3º	R$ 11.000	-R$ 1.000	R$ 500	R$ 100	-R$ 500	
4º	R$ 8.000	R$ 2.000	R$ 500	R$ 100	R$ 0	
5º	R$ 7.000	R$ 3.000	R$ 500	R$ 100	R$ 0	
6º	R$ 12.000	-R$ 2.000			R$ 0	-R$ 2.000
				Total	-R$ 500	-R$ 2.000

Apenas o produtor deposita R$ 500 reais de margem para o banco no terceiro dia da operação. No dia da liquidação, o banco devolve os R$ 500 reais de margem depositada pelo produtor e recebe R$ 2000 reais pela liquidação da operação.

Neste exemplo de acordo unilateral, caso o produtor declare falência, o banco tem um prejuízo de R$ 1500 reais, pois tem R$ 500 de margem depositada, contra um prejuízo de R$ 6000 reais em um acordo bilateral para a mesma operação.

3 Teoria de Portfólio

A combinação de ativos com riscos, por meio de um carteira ou portfólio, pode resultar em um risco menor do que aquele calculado para cada ativo individualmente.

Desde que os retornos dos ativos não sejam perfeita e positivamente correlacionados entre si, há sempre a redução de risco com composição de um portfólio diversificado. Porém a redução tem um limite, não é possível reduzir totalmente os riscos. Ou seja, o risco de um portfólio não depende apenas do risco de cada ativo isolado, mas também da correlação entre os ativos.

3.1 Retorno esperado do portfólio

A taxa de retorno de um ativo é a diferença entre o valor recebido no final operação pelo valor investido sobre o valor investido. Ela pode ser definida como:

$$Taxa\ de\ Retorno = \frac{Valor\ Recebido - Valor\ Investido}{Valor\ Investido}$$

Adotando r como a taxa de retorno, X_0 como valor investido inicialmente e X_1 como valor recebido no final da operação, pode-se reescrever a equação da seguinte forma:

$$r = \frac{X_1 - X_0}{X_0}$$

Como exemplo, suponha-se que uma indústria compre um contrato de *commodity* (ativo) por R$ 90 reais hoje e depois de um mês o mesmo contrato está valendo no mercado R$ 100 reais. Ele teve um retorno de 11,11% sobre o capital investido incialmente.

$$r = \frac{100 - 90}{90} = 0{,}111$$

A taxa de retorno de um portfólio é dada pela multiplicação dos retornos de cada ativo por seus respectivos pesos. Entende-se como peso do ativo sua fração no portfólio. Suponha-se um portfólio que tenha valor total de X_0, o peso de cada ativo é dado pela relação do valor do ativo pelo valor total do portfólio:

$$w_i = \frac{X_{0i}}{X_0}$$

$$i = 1,2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

em que:

n= número de ativos no portfólio

X_{oi}= valor do ativo i no portfólio

w_i= peso do ativo i no portfólio.

A taxa de retorno do portfólio (r) é definida por:

$$r = \sum_{i=1}^{n} w_i * r_i$$

em que:

w_i= peso do ativo i

r_i= retorno do ativo i

n= número de ativos no portfólio.

Suponha-se, por exemplo, que haja três ativos no portfólio e seu retorno seja conhecido:

Tabela 8 – Preço e peso dos ativos

Ativo	Número de Contratos	Preço	Total	Peso
Cobre	2	R$ 10,00	R$ 20,00	0,1
Prata	3	R$ 12,00	R$ 36,00	0,17
Ouro	5	R$ 30,00	R$ 150,00	0,73
		Total	R$ 206,00	1

Tabela 9 – Taxa de retorno do portfólio

Ativo	Peso	Taxa de Retorno	Peso*Taxa de Retorno
Cobre	0,10	10%	0,97%
Prata	0,17	12%	2,10%
Ouro	0,73	15%	10,92%
		Taxa de Retorno do Portfólio	13,99%

O portfólio composto pelas *commodities* cobre, prata e ouro tem uma taxa de retorno de 13,99%. O retorno esperado do portfólio é determinado por:

$$E(r) = \sum_{i=1}^{n} w_i * E(r_i)$$

em que:

$E(r_i)$= retorno esperado do ativo i

n= número de ativos no portfólio

w_i= peso do ativo i no portfólio.

4. Modelo de Markowitz

Harry Markowitz apresentou o modelo de Markowitz de seleção de portfólio no artigo *Portfólio Selection*, em 1952, mesmo assim as teorias presentes nesse artigo ainda são aplicadas nos modelos financeiros dos bancos e dos fundos de investimentos.

O modelo de Markowitz adota a variância como medida de risco e busca encontrar o portfólio de mínimo risco. O modelo permite verificar que um portfólio formado por ativos pode resultar em um risco menor do que a soma dos riscos de cada ativo.

O retorno dos ativos é outro fator relevante para composição do portfólio, pois de nada adianta obter um portfólio que forneça um risco baixo, se o retorno esperado do portfólio não for satisfatório.

O modelo de Markowitz utiliza o retorno esperado do portfólio:

$$R = \sum_{i=1}^{n} w_i * r_i$$

em que:

w_i= peso do ativo i no portfólio

r_i= retorno esperado do ativo i

n= número de ativos no portfólio.

A variância do portfólio no modelo de Markowitz é dada por:

$$\sigma^2 = \sum_{i,j=1}^{n} w_i * w_j * \sigma_{ij}$$

em que:

w_i= peso do ativo i no portfólio

w_j= peso do ativo j no portfólio

n= número de ativos no portfólio

σ_{ij}= covariância entre os ativos *i* e *j*.

O modelo de Markowitz permite que se construa uma fronteira eficiente, ou fronteira de risco-retorno de investimento. Na fronteira eficiente, é possível identificar um portfólio que apresente, para determinado retorno esperado, o menor risco possível.

Segue-se um exemplo para ilustrar o conceito de fronteira eficiente. Suponha-se um portfólio de dois ativos: ativo A e ativo B. Os retornos de dez períodos para os dois ativos são:

Tabela 10 – Retorno dos ativos A e B.

Período	Retorno do Ativo A	Retorno do Ativo B
1	10	2
2	5	6
3	-2	7
4	-7	-2
5	3	-3
6	4	4
7	6	5
8	-1	8
9	3	6
10	2	9

A partir da tabela dos retornos dos ativos A e B, é possível estimar os retornos esperados dos ativos A e B como sendo a média dos retornos nos dez períodos. As variâncias dos retornos e as covariâncias entre os retornos dos ativos A e B foram também obtidas a partir da tabela dos retornos dos ativos A e B. As variâncias e as covariâncias foram calculadas segundo os estimadores:

$$s_{R_A}^2 = \frac{\sum_i^n \left(R_{A_i} - \overline{R_A}\right)^2}{n-1}$$

$$s_{R_B}^2 = \frac{\sum_i^n \left(R_{B_i} - \overline{R_B}\right)^2}{n-1}$$

$$cov(R_A, R_B) = \frac{\sum_{i=1}^n \left(R_{A_i} - \overline{R_A}\right) * \left(R_{B_i} - \overline{R_B}\right)}{n-1}$$

em que:

R_{A_i}= retorno do ativo *A* no período *i*

$\overline{R_A}$= retorno esperado do ativo *A*

R_{B_i}= retorno do ativo *B* no período *i*

$\overline{R_B}$= retorno esperado do ativo *B*

N= número de períodos.

Foram obtidos os seguintes retornos esperados dos ativos A e B, e também a matriz de covariância entre os ativos A e B:

Tabela 11 – Retorno esperado dos ativos A e B.

	Retorno Esperado
Ativo A	2,3
Ativo B	4,2

Tabela 12 – Matriz de covariância entre os ativos A e B

	Ativo A	Ativo B
Ativo A	4,72	1,84
Ativo B	1,84	4,05

Aplicando o modelo de Markowitz, foram calculados o retorno esperado e a variância do portfólio para 11 composições diferentes de portfólio.

Tabela 13 – Retorno esperado e variância do portfólio com os ativos A e B.

Portfólio	Peso do Ativo A	Peso do Ativo B	Retorno Esperado do Portfólio	Variância do Portfólio
1	0%	100%	4,05	16,40
2	10%	90%	4,12	13,84
3	20%	80%	4,18	11,97
4	30%	70%	4,25	10,81
5	40%	60%	4,32	10,34
6	50%	50%	4,38	10,58
7	60%	40%	4,45	11,51
8	70%	30%	4,52	13,14
9	80%	20%	4,58	15,47
10	90%	10%	4,65	18,50
11	100%	0%	4,72	22,23

Os valores dos retornos esperados e da variância do portfólio, para o conjunto de combinações dos ativos A e B, são representados no gráfico 1.

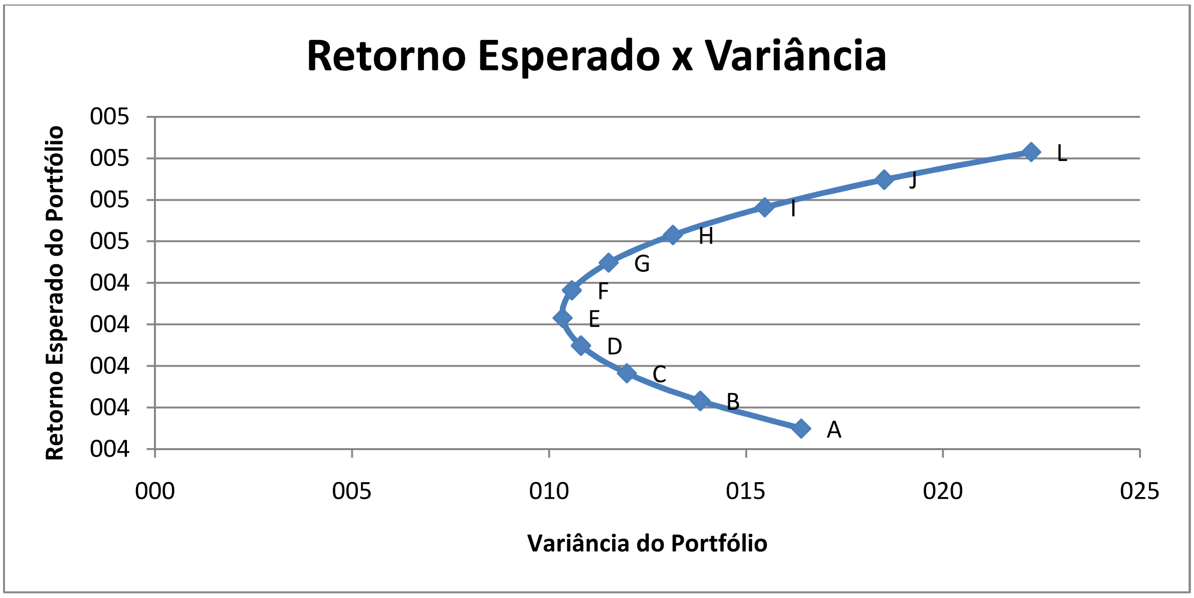

Gráfico 1 – Retorno esperado e variância do portfólio para o conjunto de combinações dos ativos A e B

No gráfico, o portfólio E é o de menor risco (variância) e domina todos os demais formados abaixo do ponto E, pois apresenta menor risco para um retorno esperado maior. Logo, a fronteira eficiente é definida pela curva EL.

Um investidor racional, que avalia a relação risco e retorno na decisão de seus investimentos, fica restrito aos portfólios disponíveis no trecho da curva EL. Pois, na fronteira eficiente, é possível selecionar um portfólio que apresenta, para um determinado retorno esperado, o menor risco possível.

O problema de determinar um portfólio ótimo de investimento, que satisfaça o retorno esperado mínimo e minimize o risco, pode ser resolvido por meio de uma otimização do modelo de Markowitz.

A função objetivo a ser minimizada é a variância do portfólio, ou seja, o risco do portfólio.

$$Minimizar \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} w_i * w_j * \sigma_{ij}$$

Sujeito a restrições:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i * r_i = R$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$w_i \geq 0\,;\, i = 1, 2, \ldots, n$$

em que

w_i= peso do ativo i no portfólio

r_i= retorno esperado do ativo i

R= retorno esperado do portfólio

σ_{ij}= covariância os ativos i e j

n= número total de ativos no portfólio.

4.1 Aplicação do Modelo de Markowitz

Foi aplicado o modelo de Markowitz para avaliar a composição do portfólio de três *commodities*: açúcar, cobre e petróleo. A escolha dessas três *commodities* para análise não foi aleatória, pois procurou-se analisar três grupos diferentes de *commodity*: agrícola (açúcar), de metal (cobre) e de energia (petróleo). Além disso, essas três *commodities* são muito utilizadas nas indústrias. O açúcar, por exemplo, é a *commodity* amplamente utilizada na indústria alimentícia, pois está presente em quase todos os alimentos industrializados. O cobre é muito utilizado na indústria de base e de construção. Já o petróleo é uma *commodity* presente em várias indústrias, como a química, a automobilística e a de transporte aéreo. Por isso, com a escolha dessas três *commodities*, procurou-se, também, englobar o máximo possível de indústrias e setores econômicos da economia brasileira e mundial.

Normalmente, as *commodities* dentro do mesmo grupo possuem fortes correlações positivas. No entanto, analisando as *commodities* dos três grupos diferentes, verificou-se que há correlação negativa entre açúcar e cobre.

Os retornos esperados das *commodities* foram obtidos pela média aritmética dos retornos logarítmicos diários de seus preços. Foi usada uma série histórica dos preços das três *commodities* de dois anos (525 dias úteis).

$$r_i = \frac{\left(\sum_{t=1}^{n} Ln(\frac{P_t}{P_{t-1}})\right)}{n}$$

em que:

r_i= retorno esperado da *commodity* i

n= número de dias

P_t= preço da *commodity* no dia t

P_{t-1}= preço da *commodity* no dia $t-1$.

Tabela 14 – Retorno esperado do açúcar, cobre e petróleo.

Retorno Esperado	
Açúcar	0,157%
Cobre	0,035%
Petróleo	0,154%

As covariâncias foram obtidas entre os retornos logarítmicos diários das três *commodities*.

Tabela 15 – Matriz de covariância entre açúcar, petróleo e cobre.

Matriz de Covariância			
	Açúcar	**Cobre**	**Petróleo**
Açúcar	0.0008573	-0,000016	0,000054
Cobre	-0,000016	0.0003234	0,000026
Petróleo	0,000054	0,000026	0.0003955

Adotou-se um retorno esperado do portfólio de 0.1%. Foi utilizado o modelo de Markowitz para definir a composição ótima do portfólio, ou seja, de menor risco e que satisfaça o retorno esperado do portfólio, obtendo-se os resultados que seguem.

Tabela 16 – Resultado do modelo de Markowitz para o portfólio de açúcar, cobre e petróleo.

Resultados			
	Açúcar	**Cobre**	**Petróleo**
Pesos	62%	2%	36%
Variância do portfólio	0,015%		

5. Value at Risk (VaR)

O *Value at Risk* (VaR) é uma medida de risco que tenta definir o valor da perda máxima que o portfólio pode ter em determinado período do tempo, segundo um nível de confiança. Ou seja, o VaR é o valor com *X*% de certeza (nível de confiança) de que não haja perdas maiores que *Y* reais em um horizonte de tempo de *N* dias.

Segundo Quaranta e Zaffaroni (2008), considere-se *X* uma variável que tem retorno aleatório, e *F* sua função de distribuição, em que:

$$F(a) = P\{X \leq a\}\ e\ F^{-1}(b) = \min\{a: F(a) \geq b\}$$

O valor de VaR com nível de confiança α pode ser obtido por:

$$VaR_{\alpha}(X) = F^{-1}(\alpha)$$

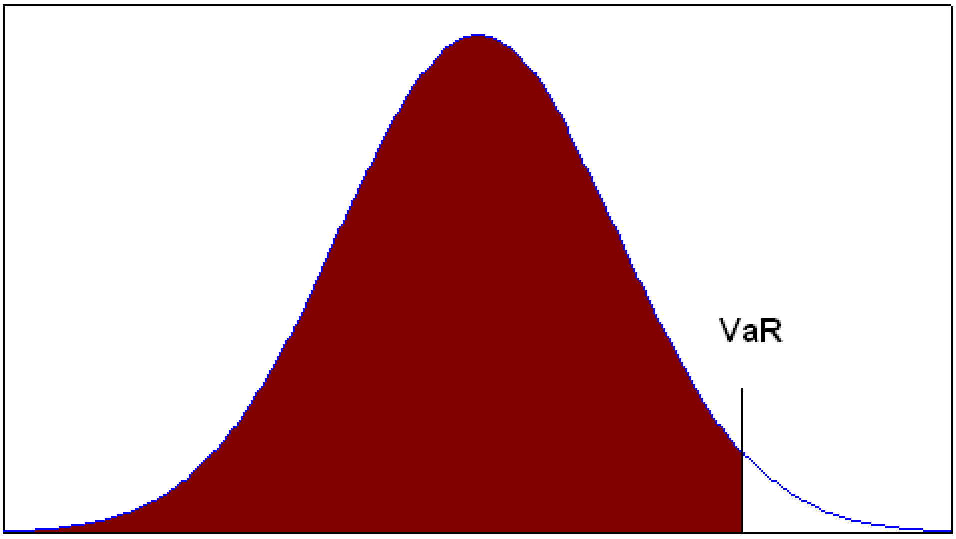

Figura 1 – Distribuição de probabilidade de perda e o VaR

O VaR é calculado pelos reguladores e administradores de instituições financeiras para controlar a exposição de risco de mercado dos portfólios. Ele define a perda máxima do portfólio, para dado nível de confiança e horizonte de tempo, caso haja uma grande movimentação dos preços dos ativos. Portanto mede a volatilidade dos ativos financeiros: quanto maior a volatilidade, maior será o risco de perda ou de ganho. Para estimar o VaR, é preciso especificar o intervalo de tempo, nível de confiança, volatilidade e a correlação entre os ativos. O intervalo de tempo varia bastante, dependendo da liquidez dos ativos do portfólio.

Os ativos que têm mais liquidez são mais fáceis de serem vendidos ou comprados no mercado. Já os ativos que têm menos liquidez são mais difíceis de serem comercializados no mercado, às vezes, não é possível comercializar dentro de um dia. Por exemplo, os contratos futuros de moeda e de juros são ativos muito líquidos, pois há muitos compradores e vendedores no mercado. No entanto, os contratos futuros e a termo de *commodities* não são tão líquidos, pois não há muitos compradores nem vendedores para eles no mercado brasileiro.

Foi convencionado pelo Comitê de Basileia (comitê que faz regras de supervisão e regulamentação dos bancos) que, para ativos líquidos, a estimação do VaR é feita com intervalo de tempo de um dia. Já para ativos menos líquidos, o intervalo de tempo de 10 dias é mais adequado. O valor estimado do VaR é diretamente proporcional ao intervalo de tempo dos ativos no portfólio.

O nível de confiança também é diretamente proporcional ao valor do VaR. O comitê de Basileia determinou 99% de nível de confiança nas estimativas de VaR.

Há várias maneiras para calcular o VaR, dentre elas estão a simulação por série histórica, método das variâncias-covariâncias e simulação de Monte Carlo.

A simulação por série histórica utiliza os dados do passado para projetar cenários no futuro e com isso pode estimar os preços futuros. A série com *N* cenários do retorno histórico do portfólio é ordenada, e define-se o VaR como o α*N-ésimo maior valor da série, em que α é o nível de confiança. A quantidade de dados históricos influencia, diretamente, a qualidade do valor do VaR para esse método de cálculo.

Na abordagem por variância-covariância, os parâmetros usados para calcular o VaR são volatilidade e matriz de covariância. Supondo-se que o preço do ativo seja uma distribuição normal, o VaR pode ser calculado da seguinte maneira para um portfólio de um ativo (JP MORGAN, 1994):

$$VaR = V_m * Z_\alpha * \sigma * \sqrt{N}$$

em que:

V_m= valor de mercado do portfólio

Z_α= número de desvios padrão

Σ= volatilidade diária do ativo

N= intervalo de tempo.

Para um portfólio com mais de um ativo, o VaR pode ser obtido da mesma maneira. Mas a volatilidade diária (desvio padrão) precisa ser calculada para o portfólio. Segundo a Teoria do Portfólio, a variância do portfólio é definida por:

$$\sigma^2 = \sum_{i,j=1}^{n} w_i * w_j * \sigma_{ij}$$

Logo, a volatilidade diária (desvio padrão) do portfólio é a raiz quadrada da variância:

$$Volatilidade = \sigma_p = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} w_i * w_j * \sigma_{ij}}$$

O VaR do portfólio é definido por:

$$VaR_p = V_{m_p} * Z_\alpha * \sigma_p * \sqrt{N}$$

em que:

V_{m_p}= valor de mercado do portfólio

Z_α= número de desvios padrão

σ_p= volatilidade diária do portfólio

N= intervalo de tempo.

A abordagem por variância-covariância é apropriada quando a distribuição da taxa de retorno do ativo é aproximadamente normal.

Por fim, no cálculo do VaR pela simulação de Monte Carlo, vários cenários aleatórios de mercado – como taxa de juros, taxas de câmbio, preço dos ativos, etc. – são gerados e usados para precificar os ativos no portfólio. Os portfólios são precificados e ordenados em cada um desses cenários aleatórios e define-se o VaR segundo um nível de confiança.

Embora seja uma medida de risco bastante difundida no mercado financeiro, o VaR não é uma medida coerente de risco, segundo Artzner *et al.* (1998). Para esses autores, o conceito de medida coerente de risco deve obedecer a um conjunto de quatro propriedades: subaditividade, monotonicidade, homogeneidade positiva e invariância de translação.

O VaR não é uma medida coerente, pois não atende à propriedade da subaditividade. Essa propriedade indica que a soma das medidas de risco dos ativos individualmente deve ser sempre maior ou igual à medida de risco do portfólio formado por esses ativos, refletindo assim o efeito da diversificação.

6. Conditional Value at Risk (CVaR)

O cálculo de risco de um portfólio usando a abordagem VaR apresenta algumas limitações, pois essa medida de risco não é convexa e não há subaditividade (ARTZNER *et al.*, 1998).

O VaR é uma boa medida de risco, somente, quando é usado um desvio padrão de uma distribuição normal, porém a distribuição de probabilidade do retorno dos ativos nem sempre é uma distribuição normal (ROCKAFELLAR e URYASEV, 2000). Além disso, a minimização do VaR para um portfólio pode encontrar apenas mínimos locais, pois a função do portfólio pode ter vários mínimos locais (MAUSER e ROSEN, 1999).

Para suprir esses problemas de coerência na medida de risco da metodologia VaR, os estudos têm se voltado para a abordagem *Conditional Value at Risk* (CVaR), que é uma medida coerente de risco.

O modelo de cálculo de risco CVaR apresentado por Rockafellar e Uryasev (2000) define o CVaR como o valor médio da cauda da distribuição do retorno do ativo para um dado valor de nível de confiança. Em outras palavras, dado um nível de confiança β, o VaR para ele é α, ou seja, há a probabilidade β de que não haja valores de perdas (risco) superiores a α. O CVaR é a média dos valores acima de α com um nível de confiança β.

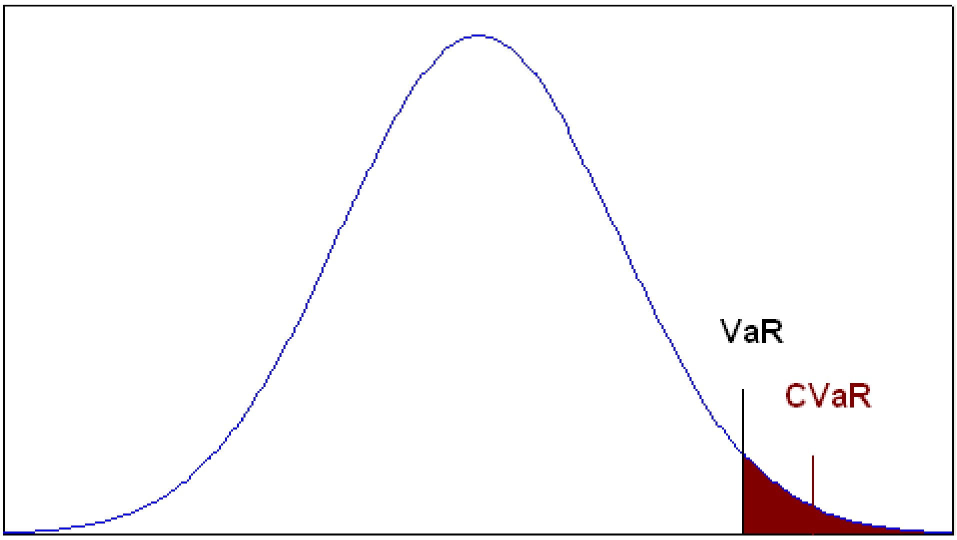

Figura 2 – Distribuição de probabilidade de perda com VaR e CVaR

A medida de risco fornecida pelo CVaR corrige os problemas apresentados pela medida do VaR, pois resolve o problema da convexidade (OGRYCZAK e RUSZCZYNSKI, 2002). Além disso, resolvendo os problemas de minimização de risco de portfólio por CVaR, os resultados fornecerão tanto o CVaR mínimo, como o VaR mínimo. E por definição o VaR mínimo nunca pode ser maior do que o CVaR mínimo.

Para um horizonte de tempo *t*, a função *f*(*x*, *y*) representa a função de perdas do portfólio, tendo como variável de decisão $x \in R^d$ e variável aleatória $y \in R^d$, que representa o valor dos ativos nos cenários futuros. Assim, para um dado portfólio *x*, a função de distribuição acumulada para a probabilidade de ter perdas menores que *α* é definida por:

$$\Psi(x, \alpha) = \int_{f(x,y) \leq \alpha} p(y) dy$$

em que:

p(y)= função densidade de probabilidade da variável aleatória *y*.

O VaR do portfólio *x* com um nível de confiança *β* é definido por:

$$\alpha_\beta(x) = \min \{\alpha \in R : \Psi(x, \alpha) \geq \beta\}$$

O CVaR é a média dos valores que estão acima de *α* e pode ser definido da seguinte maneira, segundo Rockafellar e Uryasev (2002):

$$F_\beta(x, \alpha) = \alpha + (1 - \beta)^{-1} * \int_{S \in R^d} [f(x, S) - \alpha]^+ * p(S) dS$$

em que:

$$[f(x, y) - \alpha]^+ = \begin{cases} f(x, y) - \alpha, & f(x, y) - \alpha > 0 \\ 0, & f(x, y) - \alpha \leq 0 \end{cases}$$

em que:

A= valor da perda máxima (VaR)

β= nível de confiança

S= vetor dos preços dos ativos

f(x,S)= função de perdas do portfólio

p(S)= função densidade de probabilidade do preço do ativo.

Segundo esse modelo de Rockafellar e Uryasev (2002), a otimização do risco do portfólio usando CVaR fornece tanto o CVaR ótimo, como o VaR ótimo do portfólio. Portanto é possível calcular o CVaR de um portfólio de ativos sem conhecer o valor do VaR.

A função do CVaR pode ainda ser aproximada desta maneira:

$$F_\beta(x,\alpha) = \alpha + \frac{1}{q(1-\beta)} * \sum_{k=1}^{q} [f(x,y_k) - \alpha]^+$$

em que:

$$[f(x,y_k) - \alpha]^+ = \begin{cases} f(x,y_k) - \alpha, & f(x,y_k) - \alpha > 0 \\ 0, & f(x,y_k) - \alpha \leq 0 \end{cases}$$

em que:

q= número de cenários

y_k= vetor dos preços dos ativos no cenário k

α= valor da perda máxima (VaR)

β= nível de confiança

Uma grande vantagem da utilização do CVaR é a possibilidade de usar programação linear para otimizar o risco do portfólio, além de ser uma medida de risco mais coerente. Porém, a metodologia VaR ainda é a mais popular e a mais usada no mercado financeiro.

6.1 Aplicação do modelo CVaR

O modelo CVaR foi aplicado para um portfólio de três *commodities*. Foram usadas as mesmas *commodities* do modelo de Markowitz, e a base de dados também foi a mesma (histórico de preço de dois anos).

O objetivo do modelo é encontrar o menor CVaR para um dado retorno esperado do portfólio e nível de confiança. Consequentemente, o modelo dará também o menor VaR do portfólio.

Foi aplicado o seguinte modelo e restrições:

$$minimizar \quad F_\beta(x,\alpha) = \alpha + \frac{1}{q(1-\beta)} * \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{q}[x_i * y_{i_k} - \alpha]^+$$

Restrições:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i * E(y_i) = R$$

em que:

$$[x_i * y_{i_k} - \alpha]^+ = \begin{cases} x_i * y_{i_k} - \alpha, & x_i * y_{i_k} - \alpha > 0 \\ 0, & x_i * y_{i_k} - \alpha \leq 0 \end{cases}$$

em que:

α= valor da perda máxima do portfólio (VaR)

β= nível de confiança

$E(y_i)$= retorno esperado da *commodity i*

n= número de *commodity*

q= número de dias (cenários)

R= retorno esperado do portfólio

x_i= peso da *commodity i* no portfólio

y_{i_k}= preço da *commodity i* no dia (cenário) *k*

Incialmente, o modelo foi aplicado para os preços à vista das três *commodities*, ou seja, o retorno logarítmico diário foi obtido usando os preços à vista. Em seguida foi aplicado o mesmo modelo para os preços futuros.

Foi determinado um retorno esperado do portfólio de 0,09%, um histórico de 525 dias (cenários) e nível de confiança de 99%.

Os retornos esperados das *commodities* foram obtidos pela média aritmética dos retornos logaritmos diários dos preços à vista e futuros das *commodities*.

Tabela 17 – Retorno esperado das *commodities* para preço à vista

Preço à Vista	
Retorno Esperado (*E(y)*)	
Açúcar	0,098%
Petróleo	0,045%
Cobre	0,130%

Tabela 18 – Retorno esperado das *commodities* para preço futuro

Preço Futuro	
Retorno Esperado (*E(y)*)	
Açúcar	0,104%
Petróleo	0,072%
Cobre	0,129%

Os resultados de VaR e CVaR obtidos com o modelo tanto para os preços à vista, como preços futuros são bem parecidos devido aos retornos esperados das *commodities* serem bem próximos.

Tabela 19 – Resultados do modelo CVaR

	Preço Futuro			Preço à Vista		
	Pesos	**VaR**	**CVaR**	**Pesos**	**VaR**	**CVaR**
Açúcar	13,5%			22,5%		
Petróleo	9,7%	4,37%	4,59%	15,8%	4,33%	4,52%
Cobre	76,8%			61,6%		

As mesmas variáveis foram replicadas para o modelo de otimização de Markowitz, que também procura o portfólio que minimiza o risco para um dado retorno esperado.

Tabela 20 – Resultados do modelo de Markowitz

	Modelo de Markowitz			
	Preço Futuro		Preço à Vista	
	Pesos	Risco(σ)	Pesos	Risco(σ)
Açúcar	13,1%	0,0103%	24,8%	0,0060%
Petróleo	62,5%		37,9%	
Cobre	24,4%		37,3%	

Os resultados de composição de portfólio são bem distintos em relação ao modelo CVaR (ROCKAFELLAR e URYASEV, 2002). Essa diferença nos resultados da composição deve-se ao fato de o modelo de Markowitz focar na minimização das variâncias dos retornos dos ativos, o que resulta em um portfólio com menor variância possível. Já o modelo de CVaR foca na cauda da distribuição dos retornos, ou seja, nos valores mais distantes da média.

Nos exemplos calculados, o petróleo é o ativo que tem mais peso no modelo de Markowitz, enquanto o peso do açúcar não é tão alto para o portfólio. Pode-se verificar, nos gráficos dos retornos diários dos dois ativos, que a distribuição do açúcar é mais dispersa e tem valores mais longe da média do que a do petróleo. Isso explica por que o peso do petróleo no portfólio, segundo o modelo de Markowitz, é maior do que o do açúcar.

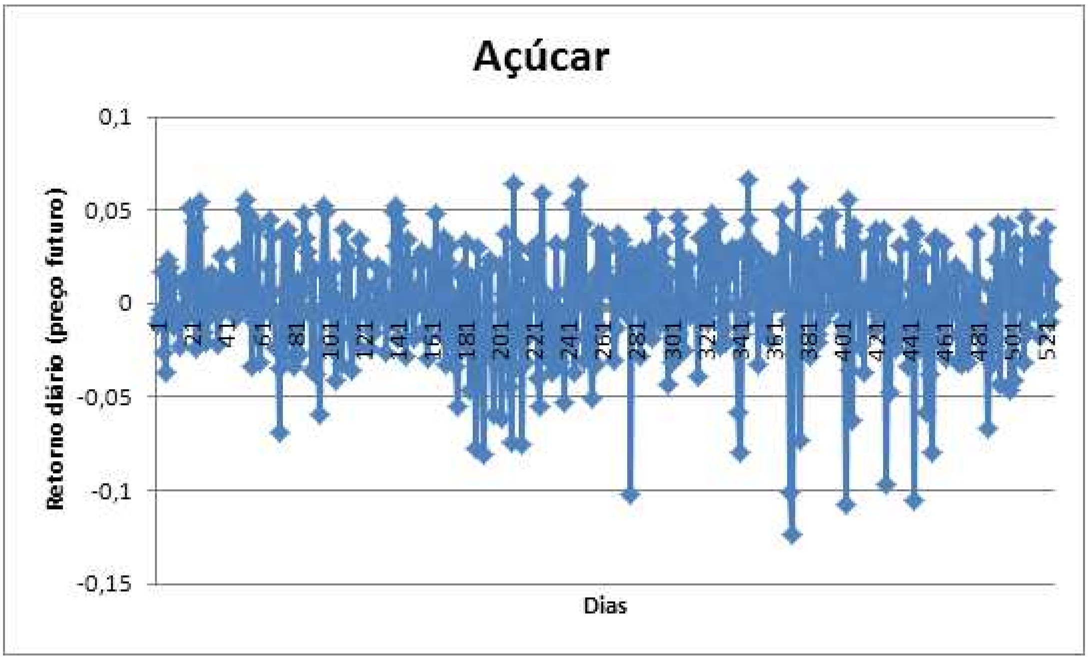

Gráfico 2 – Retorno diário do açúcar

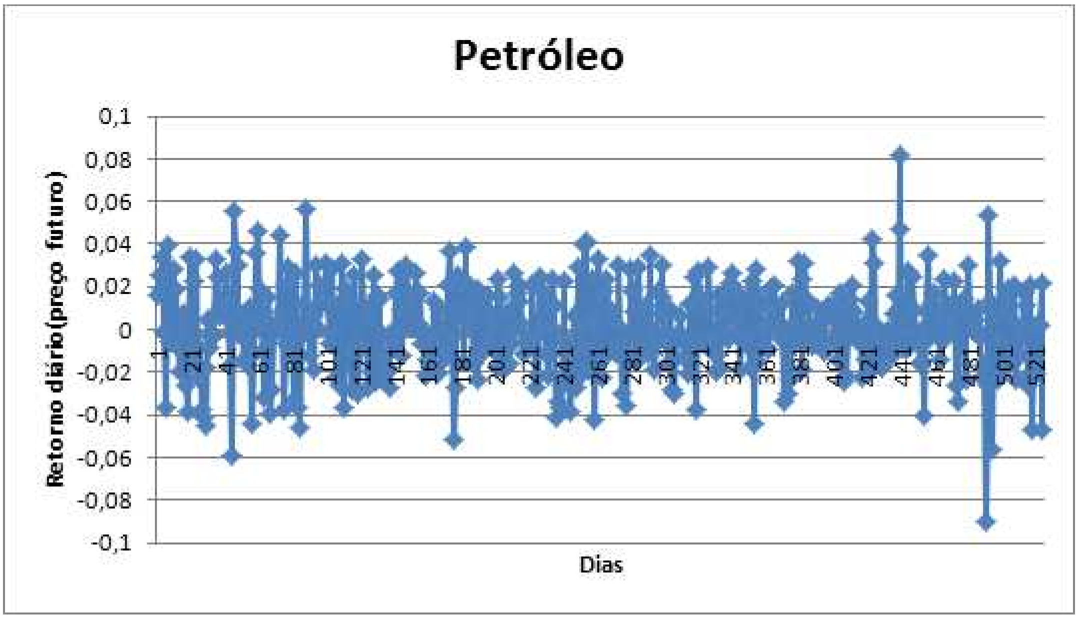

Gráfico 3 – Retorno diário do petróleo

7. Rebalanceamento do Portfólio

O portfólio encontrado usando os modelos de Markowitz e CVaR pode ser rebalanceado periodicamente, pois as condições de mercado mudam constantemente. O portfólio ótimo encontrado num instante de tempo t_0 pode não ser o melhor em t_1, ou seja, o cálculo do melhor portfólio pode ser feito regularmente. Porém é preciso levar em conta o custo operacional para modificar a composição do portfólio.

Usando a base de dados dos preços futuros das mesmas *commodities* (açúcar, petróleo e cobre), foram calculados portfólios para cada mês, segundo o modelo de Markowitz e o modelo de otimização CVaR. Ou seja, aplicou-se um modelo dinâmico de rebalancear o portfólio.

Foram aplicados os modelos de Markowitz e CVaR para selecionar os portfólios mensalmente. Os retornos esperados das *commodities*, as variâncias e as covariâncias entre elas foram obtidos com uma base de preços diários históricos das *commodities* de 252 dias.

Aplicando o modelo de otimização CVaR foram obtidos os seguintes portfólios mensais:

Tabela 21 – Portfólio obtido pelo modelo de otimização CVaR

CVaR			
	Pesos		
	Açúcar	Petróleo	Cobre
1/7/2011	0,151	0,256	0,594
1/6/2011	0,054	0,882	0,063
1/5/2011	0,09	0,695	0,215
1/4/2011	0,056	0,453	0,491
1/3/2011	0,2	0,299	0,501
1/2/2011	0,005	0,003	0,992
1/1/2011	0,461	0,08	0,46
1/12/2010	0,206	0,022	0,771
1/11/2010	0	0,112	0,888
1/10/2010	0,005	0,431	0,564
1/9/2010	0	0,189	0,811
1/8/2010	0	0,031	0,969
1/7/2010	0,097	0,163	0,74

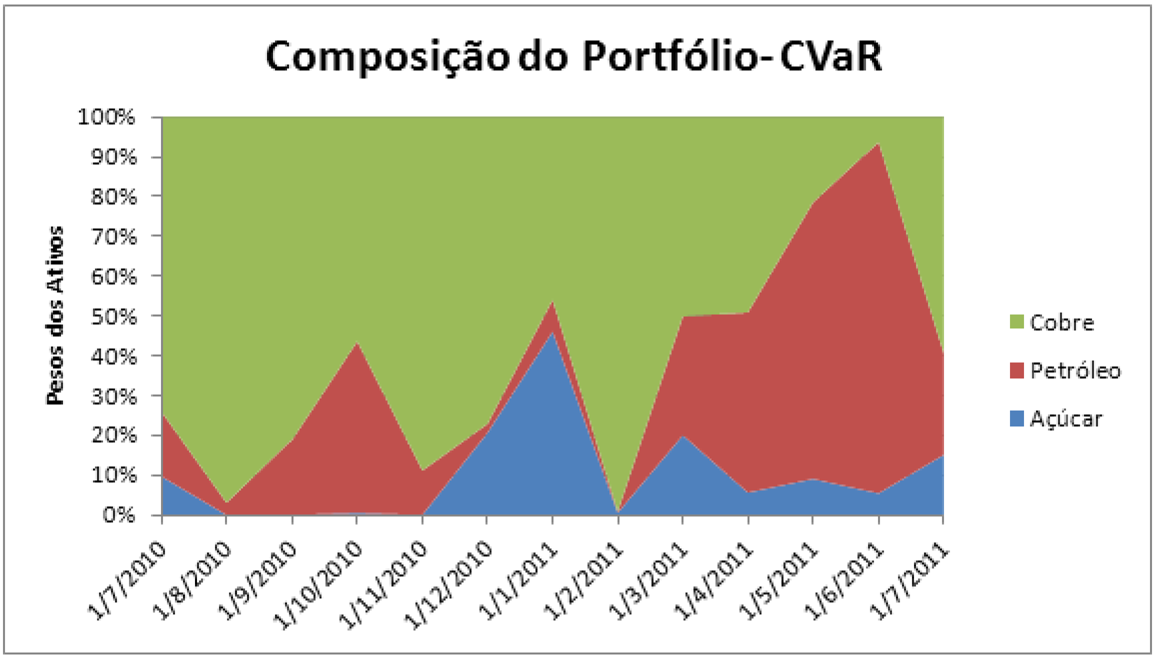

Gráfico 4 – Portfólios obtidos pelo modelo de otimização CVaR

Usando o modelo de Markowitz os resultados dos portfólios mensais foram os seguintes:

Tabela 22 - Portfólio obtido pela teoria de portfólio de Markowitz

Markowitz			
	Pesos		
	Açúcar	Petróleo	Cobre
1/7/2011	0,0127	0,4984	0,4889
1/6/2011	0,0653	0,3276	0,6071
1/5/2011	0,0267	0,3994	0,574
1/4/2011	0,1057	0,3847	0,5096
1/3/2011	0,1464	0,4231	0,4305
1/2/2011	0,0759	0,3618	0,5623
1/1/2011	0,1317	0	0,8683
1/12/2010	0,1571	0,3124	0,5305
1/11/2010	0,8189	0	0,1811
1/10/2010	0	0,1243	0,8757
1/9/2010	0	0,1061	0,8939
1/8/2010	0	0,1881	0,8119
1/7/2010	0	0,2195	0,7805

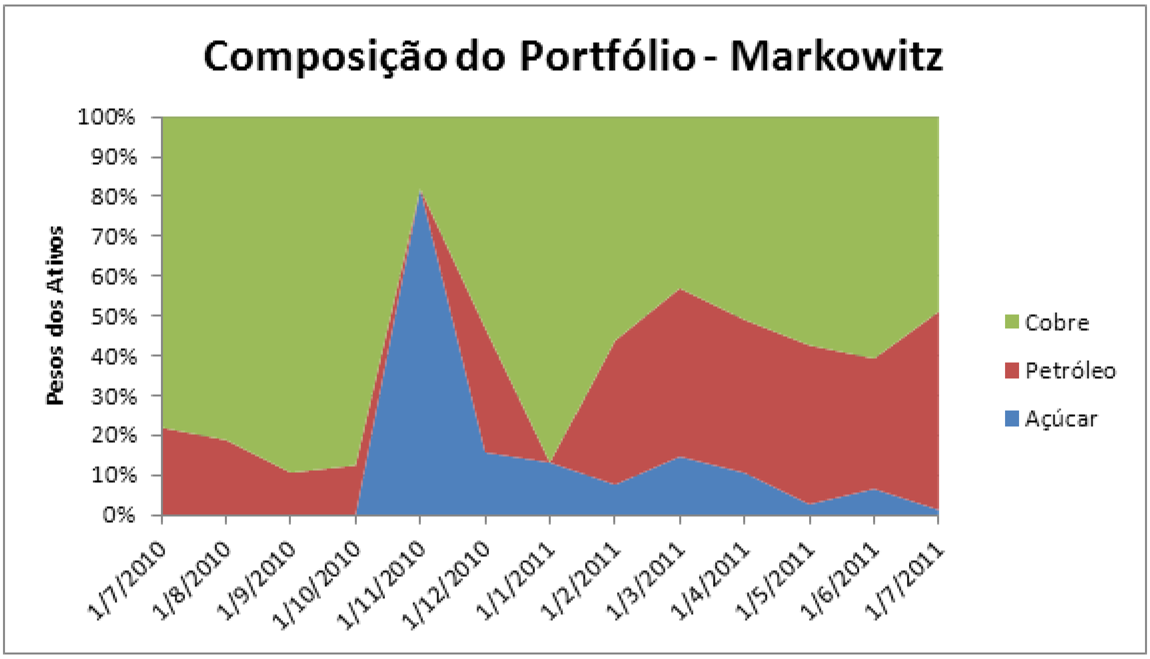

Gráfico 5 - Portfólio obtido pela teoria de portfólio de Markowitz

Os resultados dos dois modelos são distintos, porém o peso do ativo predominante, para ambos, é o do cobre e menos predominante é o do açúcar. Esse fato deve se aos retornos distintos das duas *commodities*: o retorno do açúcar foi negativo em certos períodos, por isso não valeria a pena tê-lo no portfólio, já que não contribuiria para alcançar o retorno esperado; o peso do cobre no portfólio foi maior por ter um retorno sempre estável.

Tabela 23 – Retorno logarítmico diário das commodities.

Retorno			
	Açúcar	**Petróleo**	**Cobre**
1/7/2011	0,00209	0,00069	0,00128
1/6/2011	0,00182	0,00128	0,00109
1/5/2011	0,00146	0,00109	0,00092
1/4/2011	0,00199	0,00095	0,00083
1/3/2011	0,00076	0,00093	0,00115
1/2/2011	0,00050	0,00078	0,00121
1/1/2011	0,00055	0,00036	0,00107
1/12/2010	0,00089	0,00046	0,00079
1/11/2010	0,00101	0,00034	0,00096
1/10/2010	-0,00013	0,00055	0,00106
1/9/2010	-0,00069	0,00039	0,00074
1/8/2010	0,00013	0,00068	0,00107
1/7/2010	-0,00013	0,00016	0,00093

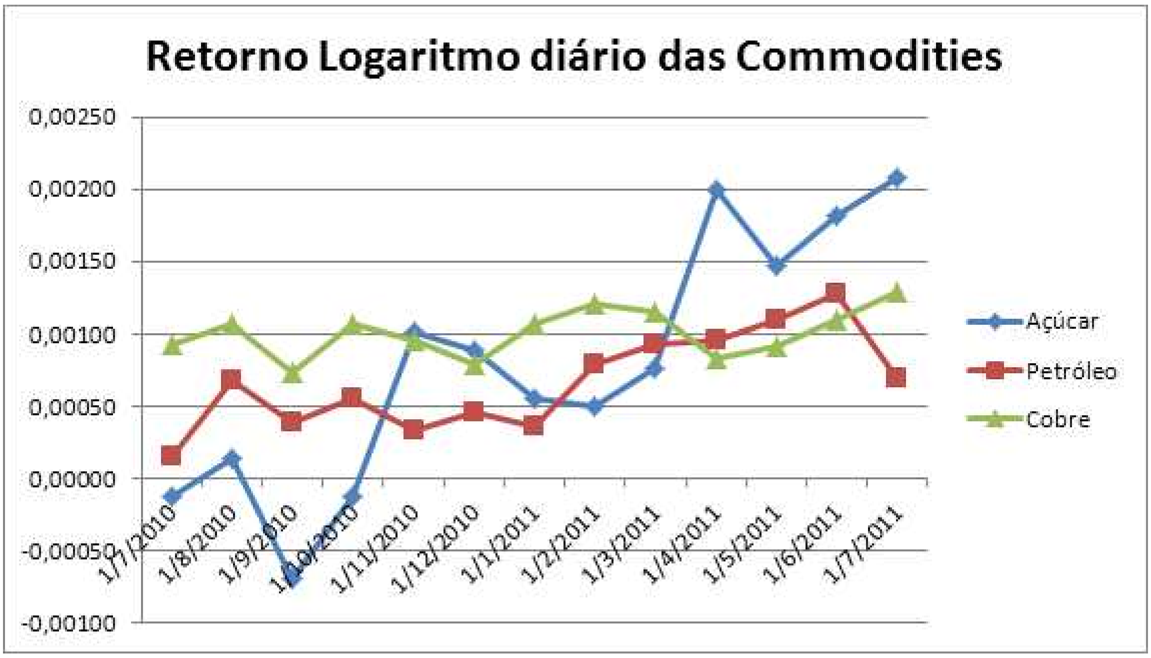

Gráfico 6 – Retorno logarítmico diário das *commodities*

8. Modelo Proposto

Os portfólios ótimos (menor risco) obtidos pelos modelos de Markowitz e CVaR foram calculados por meio de uma base de dados históricos. Porém o atual portfólio ótimo pode não ser o melhor portfólio depois de um mês ou mais, sendo necessário ter uma estimativa dos preços futuros das *commodities* para poder estimar o melhor portfólio numa data futura.

O grande desafio para obter portfólios ótimos numa data futura é fazer uma boa estimativa dos preços futuros das *commodities*. Quanto maior for o intervalo de tempo de estimativa dos preços futuros, maior será a incerteza envolvida e menos precisa será a estimativa.

Para intervalos de tempos curtos, os preços seguem um processo estocástico conhecido como movimento geométrico *browniano*, cuja equação (HULL, 2006) para estimar o preço futuro das *commodities* é a seguinte:

$$x_t = x_0 * e^{\left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) * \Delta t + \sigma * \varepsilon_t * \sqrt{\Delta t}\right]}$$

em que:

x_t= preço da *commodity* no tempo futuro t

x_0= preço atual da *commodity*

α= taxa de juros

σ= variância do preço da *commodity*

ε_t= variável aleatória de média zero e desvio padrão um no tempo futuro t.

No entanto a previsão dos preços das commodities para intervalos de tempos muito longos é mais complexa, pois envolve fatores peculiares, como a sazonalidade e a lógica da microeconomia. Essa lógica baseia-se no ponto de equilíbrio entre a demanda e a oferta, ou seja, quando o preço da *commodity* está muito baixo, a demanda por ela aumenta, porém a oferta diminui, já que o baixo preço a torna menos atrativa para o produtor. O oposto também ocorre, ou seja, quando o preço da *commodity* está muito alto, a oferta aumenta, pois é atrativo para os produtores produzirem-na.

O modelo proposto pretende calcular o portfólio ótimo para intervalos de tempo de até um mês, por meio dos modelos CVaR e de Markowitz. Os preços futuros das *commodities* serão calculados pela equação do movimento geométrico *browniano*, usando o preço atual da *commodity* e sua volatilidade histórica como base de dado.

O modelo proposto pretende também calcular marcação ao mercado do portfólio atual com base nos preços futuros. Desta maneira será possível estimar também a exposição ao risco de crédito que ocorrerá no futuro: dependendo do valor da exposição, é possível rever os parâmetros de garantia e cobrar depósito de garantias iniciais, para que se mitigue o potencial risco de crédito no futuro. A definição do montante da garantia inicial será baseada no risco do portfólio segundo os modelos de Markowitz e CVaR.

8.1 Estimativa do preço futuro

Foi feita uma estimativa dos preços futuros de mês para as mesmas *commodities* (açúcar, petróleo, cobre) analisadas nos modelos de Markowitz e CVaR. Aplicou-se a equação do movimento geométrico *browniano* para obter os preços das *commodities* dentro de um mês.

Na equação do movimento geométrico *browniano*, adotou-se a taxa de juros de 11% que é próxima da taxa básica de juros (Selic). A variável aleatória ε será gerada por um gerador de números aleatórios. Foi adotado o dia 23/06/2011 como sendo a data atual, logo o preço atual das *commodities* é do dia 23/06/2011. A equação resultante desses pressupostos é:

$$x_t = x_{t-1} * e^{\left[\left(0.11-\frac{\sigma^2}{2}\right)*\left(\frac{1}{360}\right)+\sigma*\varepsilon_t*\sqrt{\left(\frac{1}{360}\right)}\right]}$$

em que:

σ= volatilidade histórica de um ano

ε_t= variável aleatória no tempo *t*

x_{t-1}= preço da commodity na data *t*

x_t= preço da commodity na data *t-1*.

8.1.1 Gerador de números aleatórios

Para obter uma boa estimativa dos preços futuros das *commodities*, é necessário que haja um bom gerador de números aleatórios, os quais precisam ser gerados obedecendo às correlações entre os retornos logarítmicos diários das *commodities* do portfólio. A correlação dos números aleatórios será feita pela decomposição de Cholesky da matriz de variância-covariância.

A seguir serão apresentados os passos para gerar os números aleatórios correlacionados (ε_i) (INOUE, 1998):

1. geração de um conjunto de n números aleatórios independentes normalmente distribuídos (Z_i), cujos desvios padrões média são, respectivamente, um e zero;
2. construção da matriz de variância-covariância **V**:

$$V = \begin{bmatrix} {\sigma_1}^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{1,2} & \cdots & \sigma_1\sigma_n\rho_{1,n} \\ \sigma_1\sigma_2\rho_{1,2} & {\sigma_2}^2 & \cdots & \sigma_2\sigma_n\rho_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1\sigma_n\rho_{1,n} & \sigma_2\sigma_n\rho_{1,n} & \cdots & {\sigma_n}^2 \end{bmatrix}$$

em que:

σ_i = desvio padrão da variável independente i

$\rho_{i,j}$= correlação entre as variáveis independentes i e j

n= total de variáveis independentes;

3. decomposição de Cholesky para construir a matriz diagonal inferior (**A**), a partir da matriz **V**, em que **A . A^T=V**, em que **A^T** é a matriz transposta de **A.**

$$A\,.\,A^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} = V$$

4. obtenção dos números aleatórios correlacionados (ε_i) pela multiplicação da matriz **A** pelo conjunto de *n* números aleatórios independentes normalmente distribuídos (Z_i):

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix}$$

Segue um exemplo para melhor compreensão da geração de números aleatórios correlacionados pela decomposição de Cholesky, supondo-se um portfólio de três *commodities*.

Os números aleatórios correlacionados usados para estimar os preços futuros das três *commodities* podem ser obtidos pela seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}$$

A matriz **A** pode ser obtida pela decomposição de Cholesky da matriz de variância-covariância dessas *commodities*.

$$A . A^T = V = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ 0 & a_{2,2} & a_{3,2} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {\sigma_1}^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{1,2} & \sigma_1\sigma_3\rho_{1,3} \\ \sigma_1\sigma_2\rho_{1,2} & {\sigma_2}^2 & \sigma_2\sigma_3\rho_{2,3} \\ \sigma_1\sigma_3\rho_{1,3} & \sigma_2\sigma_3\rho_{2,3} & {\sigma_3}^2 \end{bmatrix}$$

em que:

σ_i= desvio padrão da *commodity i*

$\rho_{i,j}$= correlação entre as *commodities i* e *j*.

Resolvendo a equação acima, tem-se que:

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ \sigma_2 * \rho_{1,2} & \sigma_2 * \sqrt{1 - {\rho_{1,2}}^2} & 0 \\ \sigma_3 * \rho_{1,3} & \dfrac{\sigma_3(\rho_{2,3} - \rho_{1,2}\rho_{1,3})}{\sqrt{1 - {\rho_{1,2}}^2}} & \sigma_3 * \sqrt{1 - {\rho_{1,3}}^2 - \dfrac{(\rho_{2,3} - \rho_{1,2}\rho_{1,3})^2}{1 - {\rho_{1,2}}^2}} \end{bmatrix}$$

Os números aleatórios (ε_i) são definidos da seguinte maneira:

$$\varepsilon_1 = \sigma_1 * Z_1$$

$$\varepsilon_2 = \sigma_2 * \rho_{1,2} * Z_1 + \sigma_2 * \sqrt{1 - {\rho_{1,2}}^2} * Z_2$$

$$\varepsilon_3 = \sigma_3 * \rho_{1,3} * Z_1 + \frac{\sigma_3(\rho_{2,3} - \rho_{1,2}\rho_{1,3})}{\sqrt{1 - {\rho_{1,2}}^2}} * Z_2 + \sigma_3 * \sqrt{1 - {\rho_{1,3}}^2 - \frac{(\rho_{2,3} - \rho_{1,2}\rho_{1,3})^2}{1 - {\rho_{1,2}}^2}} * Z_3$$

8.2 Aplicação do Modelo Proposto

O modelo proposto foi aplicado para um portfólio de três *commodities*: açúcar, petróleo e cobre. Incialmente, fizeram-se as estimativas dos preços futuros para um mês dessas *commodities* pelo movimento geométrico *browniano*, cujos números aleatórios foram gerados pelo método descrito na seção anterior. Na decomposição de Cholesky, foi utilizada a matriz de variância-covariância histórica do retorno logarítmico diário das *commodities*, utilizando-se uma base de dados de dois anos.

Os portfólios ótimos foram calculados para a data atual (23/06/2011) pelos modelos de Markowitz e CVaR, usando um histórico de preço de dois anos. As variâncias, covariâncias e desvios padrões foram calculados pelo mesmo histórico de preço de dois anos.

Tabela 24 – Retorno esperado, variância e desvio padrão histórico das *commodities*.

	Retorno esperado	Variância	Desvio Padrão
Açúcar	0,00105	0,0004538	0,02130
Petróleo	0,00033	0,0002547	0,01595
Cobre	0,00123	0,0003139	0,01771

Tabela 25 – Matriz de covariância histórica das *commodities*

Matriz de Covariância			
	Açúcar	**Petróleo**	**Cobre**
Açúcar	0,0004538	0,0000487	-0,0000223
Petróleo	0,0000487	0,0002547	0,0000152
Cobre	-0,0000223	0,0000152	0,0003139

Foram obtidos os seguintes portfólios ótimos para a data 23/06/2011 e seus respectivos riscos, segundo os modelos de Markowitz e CVaR:

Tabela 26 – Portfólio ótimo atual (23/06/2011) segundo o modelo de Markowitz.

	Markowitz	
	Pesos	**Risco**
Açúcar	24,18%	0,00588%
Petróleo	37.36%	
Cobre	38,46%	

Tabela 27 – Portfólio ótimo atual (23/06/2011) segundo o modelo CVaR

	Pesos	CVaR	VaR
Açúcar	9,09%	4,08%	3,09%
Petróleo	37,14%		
Cobre	53,77%		

Os portfólios ótimos e seus respectivos riscos foram recalculados usando os preços estimados de um mês, segundo os modelos de Markowitz e CVaR. Obtiveram-se os seguintes portfólios e riscos para a data futura 23/07/2011:

Tabela 28 – Portfólios ótimos daqui a um mês (23/07/2011) segundo o modelo de Markowitz.

	Markowitz	
	Pesos	**Risco**
Açúcar	42,81%	0,0086%
Petróleo	1,08%	
Cobre	56,10%	

Tabela 29 – Portfólio ótimo daqui a um mês (23/07/2011) segundo o modelo CVaR

	Pesos	CVaR	VaR
Açúcar	33,45%	4,51%	3,26%
Petróleo	0%		
Cobre	66,55%		

Nota-se que os portfólios ótimos daqui a um mês tiveram mudanças para ambos os modelos. No modelo de Markowitz, a *commodity* petróleo tinha um peso de 37,36% no portfólio ótimo da data inicial 23/06/2011, mas, rebalanceando o portfólio para daqui a um mês, o peso dessa *commodity* diminuiu muito, assumindo o valor de 1,08%. Por sua vez, o peso da *commodity* açúcar quase dobrou do portfólio do dia 23/06/2011 para aquele do dia 23/07/2011. O risco (variância) do modelo de Markowitz teve uma mudança grande também, que se deve à inclusão do açúcar no portfólio, pois a variância do retorno logarítmico do açúcar é a maior dentre as três *commodities*.

No modelo CVaR, houve também mudanças grandes da composição do portfólio ótimo do dia 23/06/2011 para do dia 23/07/2011. Assim como no modelo de Markowitz, houve um aumento do peso da *commodity* açúcar do portfólio do dia 23/06/2011 para aquele do dia 23/07/2011. Já a *commodity* petróleo saiu do portfólio ótimo do dia 23/07/2011. As medidas de risco CVaR e VaR tiveram mudanças pequenas de, respectivamente, 10,54% e 5,5%.

Como há mudanças evidentes dos portfólios e de seus riscos, é aconselhável fazer o rebalanceamento dos portfólios daqui a um mês, com base na informação dos preços estimados das *commodities*. Com isso é possível prever os riscos que o portfólio pode ter ao longo do tempo e avaliar se estão dentro da política de risco da instituição.

8.2.1 Cálculo da Marcação ao Mercado

A marcação ao mercado (MTM) do portfólio ótimo da data atual, ou seja, 23/06/2011, é calculada usando os preços futuros estimados pelo movimento geométrico *browniano*. Dessa maneira, é possível estimar a exposição do risco de crédito do portfólio atual para daqui a um mês e avaliar se está dentro do apetite de risco das entidades envolvidas na operação.

A marcação ao mercado é calculada para cada preço estimado até o dia 23/07/2011, em vez de ser calculada somente para o preço do dia 23/07/2011. Os valores da diferença entre os preços das datas futuras e o preço da data atual são convertidos para o valor presente, pois assim se calcula também o custo de oportunidade em permanecer com o portfólio até o dia 23/07/2011. Adotou-se a taxa de juros básica (Selic) – hoje de aproximadamente 11% – como a taxa do custo de oportunidade.

O cálculo da marcação ao mercado pode ser equacionado da seguinte maneira:

$$MTM_x = \sum_{t=1}^{n} \frac{S_{x_t} - S_{x_0}}{i^{t/360}}$$

em que:

MTM_x= marcação ao mercado da *commodity* x.

S_{x_t}= preço da *commodity* x no tempo t.

S_{x_0}= preço atual da *commodity* x.

i= taxa do custo de oportunidade

n= número de dias

Foram obtidos os seguintes valores de marcação para o açúcar, petróleo e cobre, respectivamente: US$ 4,94/ 100 *bushels*, US$ 5,24/ barril e US$ 1661,64/ tonelada.

Tabela 30 – Marcação ao mercado do açúcar

Açúcar			
Preço Atual (S_0) = US$ 26,00 /100bushels			
Data	**Preço (S_t)**	$S_t - S_0$	$S_t - S_0 / i^{t/360}$
23/7/2011	26,4301	0,4301	0,4263
22/7/2011	26,3999	0,3999	0,3966
21/7/2011	26,3997	0,3997	0,3965
20/7/2011	26,3941	0,3941	0,3910
19/7/2011	26,3691	0,3691	0,3663
18/7/2011	26,3762	0,3762	0,3735
17/7/2011	26,3658	0,3658	0,3632
16/7/2011	26,2862	0,2862	0,2843
15/7/2011	26,3262	0,3262	0,3241
14/7/2011	26,2720	0,2720	0,2704
13/7/2011	26,2178	0,2178	0,2165
12/7/2011	26,1772	0,1772	0,1762
11/7/2011	26,1875	0,1875	0,1865
10/7/2011	26,1524	0,1524	0,1516
9/7/2011	26,1336	0,1336	0,1330
8/7/2011	26,1170	0,1170	0,1165
7/7/2011	26,0847	0,0847	0,0844
6/7/2011	26,0778	0,0778	0,0775
5/7/2011	26,0888	0,0888	0,0885
4/7/2011	26,0976	0,0976	0,0973
3/7/2011	26,0526	0,0526	0,0525
2/7/2011	25,9972	-0,0028	-0,0028
1/7/2011	25,9812	-0,0188	-0,0188
30/6/2011	26,0024	0,0024	0,0024
29/6/2011	26,0122	0,0122	0,0122
28/6/2011	25,9926	-0,0074	-0,0074
27/6/2011	25,9783	-0,0217	-0,0217
26/6/2011	26,0024	0,0024	0,0024
25/6/2011	25,9867	-0,0133	-0,0133
24/6/2011	26,0138	0,0138	0,0138
		MTM	**US$ 4,94**

Tabela 31 – Marcação ao mercado do petróleo

Petróleo			
Preço Atual (S_0) = US$ 91,02 /barril			
Data	**Preço (S_t)**	**S_t - S_0**	**S_t - S_0 / i^n**
23/7/2011	91,3142	0,2942	0,2917
22/7/2011	91,3051	0,2851	0,2827
21/7/2011	91,2056	0,1856	0,1841
20/7/2011	91,2142	0,1942	0,1927
19/7/2011	91,2880	0,2680	0,2660
18/7/2011	91,2362	0,2162	0,2146
17/7/2011	91,3723	0,3523	0,3498
16/7/2011	91,3113	0,2913	0,2894
15/7/2011	91,2994	0,2794	0,2776
14/7/2011	91,2961	0,2761	0,2744
13/7/2011	91,3451	0,3251	0,3232
12/7/2011	91,1714	0,1514	0,1506
11/7/2011	91,2391	0,2191	0,2180
10/7/2011	91,2006	0,1806	0,1798
9/7/2011	91,1654	0,1454	0,1447
8/7/2011	91,2062	0,1862	0,1854
7/7/2011	91,2787	0,2587	0,2577
6/7/2011	91,2206	0,2006	0,1998
5/7/2011	91,1927	0,1727	0,1721
4/7/2011	91,2099	0,1899	0,1893
3/7/2011	91,2470	0,2270	0,2264
2/7/2011	91,2041	0,1841	0,1837
1/7/2011	91,0698	0,0498	0,0497
30/6/2011	91,0082	-0,0118	-0,0117
29/6/2011	90,9299	-0,0901	-0,0900
28/6/2011	90,9530	-0,0670	-0,0669
27/6/2011	91,0344	0,0144	0,0144
26/6/2011	91,1438	0,1238	0,1237
25/6/2011	91,0924	0,0724	0,0723
24/6/2011	91,1151	0,0951	0,0951
		MTM	**US$ 5,24**

Tabela 32 – Marcação ao mercado do cobre

Cobre			
Preço Atual (S_0) = R$ 8978,5 /tonelada			
Data	**Preço (S_t)**	$S_t - S_0$	$S_t - S_0 / i^n$
23/7/2011	9073,0569	94,5569	93,7381
22/7/2011	9072,2910	93,7910	93,0058
21/7/2011	9067,5693	89,0693	88,3493
20/7/2011	9070,8711	92,3711	91,6509
19/7/2011	9082,8123	104,3123	103,5290
18/7/2011	9074,0569	95,5569	94,8669
17/7/2011	9064,7721	86,2721	85,6739
16/7/2011	9058,7329	80,2329	79,6998
15/7/2011	9063,3637	84,8637	84,3242
14/7/2011	9073,7162	95,2162	94,6383
13/7/2011	9077,3028	98,8028	98,2316
12/7/2011	9065,5421	87,0421	86,5640
11/7/2011	9059,6833	81,1833	80,7607
10/7/2011	9047,5586	69,0586	68,7191
9/7/2011	9046,3805	67,8805	67,5663
8/7/2011	9046,9574	68,4574	68,1604
7/7/2011	9031,1463	52,6463	52,4331
6/7/2011	9029,0663	50,5663	50,3761
5/7/2011	9026,0673	47,5673	47,4021
4/7/2011	9004,1435	25,6435	25,5618
3/7/2011	8997,8195	19,3195	19,2635
2/7/2011	8993,2319	14,7319	14,6935
1/7/2011	9003,8845	25,3845	25,3257
30/6/2011	8988,5819	10,0819	10,0614
29/6/2011	8983,8803	5,3803	5,3709
28/6/2011	8978,1664	-0,3336	-0,3331
27/6/2011	8984,8069	6,3069	6,2996
26/6/2011	8996,3677	17,8677	17,8521
25/6/2011	8990,6816	12,1816	12,1745
24/6/2011	8974,1756	-4,3244	-4,3232
		MTM	**US$ 1661,64**

O valor da marcação ao mercado calculado no dia 23/06/2011 é obtido multiplicando os valores de marcação ao mercado das *commodities* por seus respectivos pesos no portfólio.

O valor da marcação ao mercado do portfólio ótimo do dia 23/06/2011 calculado segundo o modelo de Markowitz é US$ 642,22 para 100 *bushels* de açúcar, um barril de petróleo e uma tonelada de cobre.

Tabela 33 – Marcação ao mercado para o portfólio ótimo do dia 23/06/2011 segundo o modelo de Markowitz.

	Markowitz	
	Pesos	**MTM**
Açúcar	0,2418	0,2418*4,94 = 1,19
Petróleo	0,3736	0,3736*5,24 = 1,96
Cobre	0,3846	0,3846*1661,64 = 639,07
	Total	US$ 642,22

Já o valor da marcação ao mercado do portfólio ótimo do dia 23/06/2011 calculado segundo o modelo CVaR é US$ 896,03 para 100 *bushels* de açúcar, um barril de petróleo e uma tonelada de cobre.

Tabela 34 – Marcação ao mercado para o portfólio ótimo do dia 23/06/2011 segundo o modelo CVaR.

	CVaR	
	Pesos	**MTM**
Açúcar	0,0909	0,0909*4,94 = 0,45
Petróleo	0,3714	0,3714*5,24 = 1,95
Cobre	0,5377	0,5377*1661,64 = 893,63
	Total	US$ 896,03

A diferença entre os valores de marcação ao mercado dos portfólios dos dois modelos (Markowitz e CVaR) foi muito grande, de aproximadamente 39,52%. Por isso é necessário avaliar qual dos dois modelos deve ser adotado para determinar o portfólio ótimo, antes de seu cálculo da marcação ao mercado.

Suponha-se um portfólio de valor US$ 10 milhões de dólares segundo o modelo de Markowitz, sua melhor composição e seu MTM são dados pela tabela a seguir:

Tabela 35 – Composição do portfólio e a marcação ao mercado segundo modelo Markowitz.

	Montante	Unidade	MTM
Açúcar	US$ 2.418.000	93.000 *bushels*	US$ 1.109,7
Petróleo	US$ 3.736.000	41.045,92 barris	US$ 80.450,01
Cobre	US$ 3.846.000	428,36 toneladas	US$ 274.021,9
		Total do MTM	**US$ 355.581,61**

Por sua vez, segundo o modelo CVaR, a melhor composição do portfólio e seu MTM são:

Tabela 36 – Composição do portfólio e a marcação ao mercado segundo modelo CVaR.

	Montante	Unidade	MTM
Açúcar	US$ 90.900	3496,15 *bushels*	US$ 15,73
Petróleo	US$ 3.714.000	40.804,22 barris	US$ 79.568,23
Cobre	US$ 5.377.000	598,88 toneladas	US$ 535.177,13
		Total do MTM	**US$ 614.761,09**

A diferença do valor total do MTM entre os dois modelos é de aproximadamente US$ 259 mil dólares. Essa diferença é muito alta, por isso o modelo escolhido para determinar o portfólio pode ser crucial no dimensionamento mais adequado da exposição ao risco de crédito. O modelo proposto no trabalho adota o modelo CVaR para cálculo do MTM, pois a definição dos montantes de garantias será feita com base no risco calculado pelo modelo CVaR.

8.3 Depósito de Garantia Inicial

A mitigação do risco de crédito pode ser feita pelo mecanismo de depósito de margem, que ocorre, porém, quando já houve a mudança dos preços dos ativos no portfólio, ou seja, não é possível prever o risco corrido na data inicial da operação financeira até seu vencimento. Além disso, há ainda o risco de a margem não ser depositada.

Uma forma de reduzir ainda mais o risco de exposição de crédito é fazer a cobrança de depósito inicial de garantia, ou seja, cobrar um montante de garantia na data inicial da operação financeira, mantendo, porém, o mecanismo de depósito de margem durante a vigência das operações. A definição do montante da garantia inicial é feita segundo o risco potencial do portfólio no futuro, quer dizer, as medidas de risco dos modelos de Markowitz e CVaR serão usadas para determinar o montante da garantia inicial.

Usando o exemplo dado na seção anterior, suponha-se que um banco tenha disponíveis US$ 10 milhões de dólares para montar um portfólio de *commodity* com açúcar, petróleo e cobre no dia 23/06/2011 e deseje mantê-lo por um mês. Então ele entra em uma operação de contrato a termo com um produtor de *commodities*, ou seja, o banco compra contratos a termo e o produtor vende contratos a termo de açúcar, petróleo e cobre. O preço das *commodities* definido nos contratos a termo é seu preço à vista, ou seja, o preço no dia 23/06/2011.

Segundo o modelo CVaR, o portfólio ótimo a ser selecionado no dia 23/06/2011 deve ser composto de US$ 90.900 de açúcar, US$ 3.714.000 de petróleo e US$ 6.140.000 de cobre, e a exposição do risco de crédito (MTM) do banco é de US$ 614,761.09 para daqui a um mês.

Como corre o risco de crédito de US$ 614.761,09 para daqui a um mês, o banco pode querer pedir depósito de garantia inicial para sua contraparte (produtor). A garantia inicial pode ser definida pela multiplicação do CVaR (4,08%) do dia 23/06/2011 pelo montante total do portfólio (US$ 10 milhões de dólares), que dá um total de US$ 408 mil dólares. Esse valor representa a perda do portfólio que excede o VaR, segundo nível de confiança de 99%.

Com a cobrança desse montante de garantia inicial, o banco consegue mitigar o risco de exposição de crédito de US$ 614.761,09 mil dólares e ainda proteger-se de uma possível perda do portfólio em condições adversas do mercado de *commodity*.

9. Conclusões

Este trabalho teve como objetivo utilizar um modelo de otimização de portfólios de *commodities*, tanto para data presente, como para datas futuras, além de propor sua gestão do risco de crédito. Como há inúmeras medidas de risco, ao longo do trabalho foram discutidas suas características, bem como suas eficiências e ineficiências.

Foram apresentados conceitos de estatística, finanças e do mercado financeiro para o desenvolvimento do trabalho. Os conceitos de estatística são essenciais para entender os modelos de otimização e de mensuração dos riscos, pois todas as medidas de riscos e dos modelos de otimização de portfólio os usam como base de estudo. Além disso, os estudos usam a estatística para tentar descrever o comportamento dos preços dos ativos e seus retornos. Já os conceitos de finanças foram importantes para entender as operações financeiras e os tipos de riscos nelas envolvidos. Por fim os conceitos do mercado financeiro foram apresentados para o melhor entendimento da dinâmica das operações financeiras, da forma de medir a exposição de risco de crédito e das formas de mitigar os riscos.

Os modelos de otimização de portfólios foram feitos com base no modelo de seleção de portfólio de Markowitz e no modelo de otimização CVaR apresentado por Rockafellar e Uryasev (2000). Inicialmente, foram construídos portfólios, segundo esses dois modelos, com base nos preços históricos de três *commodities* (açúcar, petróleo e cobre), para fazer uma comparação entre eles.

O modelo de Markowitz possui uma deficiência, pois adota a medida de risco pela variância dos retornos que só é uma boa medida, quando a distribuição dos retornos dos ativos é normal, o que nem sempre acontece. Por isso, o modelo de otimização CVaR fornece resultados de portfólio e de riscos mais próximos da realidade, já que este modelo não parte da premissa de que a distribuição dos retornos dos ativos seja normal.

Após aplicação dos modelos de otimização de portfólio, verificou-se que os portfólios ótimos encontrados não são os melhores depois de um período de tempo, ou seja, os modelos fornecem resultados de riscos e de portfólio apenas no momento de seu cálculo. Como o mercado financeiro é muito dinâmico, é preciso prever o comportamento dos riscos e dos portfólios no futuro e avaliar se os riscos e os portfólios estão adequados para a instituição.

Foi proposto um modelo de previsão de portfólio ótimo, por meio dos modelos de otimização de Markowitz e CVaR. Usaram-se preços históricos e preços futuros estimados nos modelos de otimização. Para fazer estimativa dos preços futuros, foi utilizado o movimento geométrico *browniano*.

O modelo proposto também pretende calcular a marcação ao mercado (potencial exposição ao risco de crédito) do portfólio atual com base na estimativa dos preços futuros. O potencial risco de crédito pode ser reduzido com o depósito de garantia inicial, cujo montante é determinado pelo risco de perdas do portfólio, ou seja, o valor da medida de risco. Foi adotada a medida de risco CVaR para determinar o montante de garantia inicial.

O modelo diferencia-se das demais metodologias por analisar os riscos de perdas dos portfólios devido à mudança dos preços ativos, que é resultado do movimento adverso do mercado, juntamente com o potencial risco de crédito do portfólio no futuro.

9.1 Recomendações para futuros trabalhos

Seguem algumas recomendações de estudo para melhorar o trabalho apresentado:

- risco de câmbio: o trabalho desenvolvido não considera o risco de câmbio dos ativos. Como as *commodities*, em sua maioria, são negociadas nos mercados financeiros fora do Brasil, elas são cotadas em dólar, assim, ao analisar os riscos das instituições brasileiras, é preciso levar em conta o risco do câmbio;

- peso negativo do ativo no portfólio: no desenvolvimento dos modelos de otimização de portfólio foram adotadas somente as posições compradas dos ativos, ou seja, o peso deles é positivo no portfólio. No entanto, é possível haver posições vendidas dos ativos também, neste caso, eles contribuem com pesos negativos nos portfólios.

10. Referência Bibliográfica

ALEXANDER, S.; COLEMAN, T. F.; LI, Y. Minimizing CVaR and VaR for a portfólio of derivatives. *Journal of Banking and Finance*, v .30, p. 583-605, 2006.

ARAÚJO, Gustavo; BARBEDO, Claudio; BESSADA, Octavio. **Mercado de derivativos no Brasil:** conceitos, operações e estratégias. Rio de Janeiro: Record, 2005.

ARTZNER, P. *et al*. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, v. 9, p. 203-208, 1998.

ASSAF NETO, Alexandre. **Mercado financeiro.** 9. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

COSTA NETO, P. L. de O. **Estatística.** 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

COSTA NETO, P. L de O.; CYMBALISTA, M. **Probabilidades.** 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

DEVORE, J. L. **Probabilidade e estatística:** para engenharia e ciências. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

HULL, J. C. **Fundamentos dos mercados futuros e de opções.** São Paulo: Bolsa de Mercadorias e Futuro, 2005.

______. ***Options, future and others derivatives.*** 6. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2006.

INOUE, Oscar**. Modelos para estimativa do risco de mercado em carteiras de derivativos.** São Paulo. 1998

LUENBERGER, D. G. ***Investment science.*** New York: Oxford University Press, 1998.

MARINS, André Cabral. **Mercados derivativos e análise de risco.** Rio de Janeiro: AMS, 2004.

MARKOWITZ, H. M. Portfolio Selection. *Journal of Finance*, v. 7, p. 77-99, 1952.

MAUSER, H.; ROSEN, D. Beyond VaR: From measuring risk to managing risk. *ALGO Research Quarterly*, 1(2), p. 5-20, 1999.

Morgan JP. **RiskMetrics**, 1994.

OGRYCZAK, W.; RUSZCZYNSKI, A. Dual stochastic dominance and quantile risk measures. *International Transactions in Operational Research*, n. 9, p. 661-680, 2002.

PASCHOARELLI, RAFAEL **Probabilidades de default:** modelo de cálculo com árvores binomiais. São Paulo: Saint Paul, 2007.

QUARANTA, A. G.; ZAFFARONI, A. Robust optimization of conditional value at risk. *Journal of Banking and Finance*, v. 32, p. 2046-2056, 2008.

ROCKAFELLER, R. T.; URYASEV, S. Optimization of conditional value-at-risk. *The Journal of Risk*, n. 2, p. 21-41, 2000.

______. Conditional value at risk for general loss distributions. *Journal of Banking and Finance*, v. 26, p. 1443-1447, 2002.

SECURATO, J. R. **Decisões financeiras em condições de risco.** São Paulo: **EDITORA**, 1996.

APÊNDICE A – Tabela dos preços futuros estimados pelo movimento geométrico *browniano*

Preços Estimados			
Data	**Açúcar (US$/100*bushels*)**	**Petróleo (US$/barril)**	**Cobre (US$/tonelada)**
23/6/2011	**26,000**	**91,020**	**8978,500**
24/6/2011	26,014	91,064	8982,842
25/6/2011	25,984	90,998	8976,058
26/6/2011	26,001	91,046	8980,901
27/6/2011	25,974	90,988	8974,935
28/6/2011	25,989	91,033	8979,420
29/6/2011	26,009	91,092	8985,326
30/6/2011	25,998	91,072	8983,241
1/7/2011	25,974	91,022	8978,056
2/7/2011	25,991	91,072	8983,002
3/7/2011	26,050	91,227	8998,668
4/7/2011	26,098	91,354	9011,480
5/7/2011	26,088	91,336	9009,659
6/7/2011	26,076	91,314	9007,269
7/7/2011	26,082	91,339	9009,736
8/7/2011	26,117	91,432	9019,092
9/7/2011	26,134	91,483	9024,201
10/7/2011	26,154	91,540	9029,889
11/7/2011	26,191	91,640	9040,017
12/7/2011	26,179	91,619	9037,810
13/7/2011	26,223	91,734	9049,419
14/7/2011	26,281	91,886	9064,755
15/7/2011	26,339	92,037	9080,043
16/7/2011	26,295	91,937	9069,792
17/7/2011	26,381	92,156	9091,979
18/7/2011	26,392	92,191	9095,413
19/7/2011	26,383	92,178	9094,053
20/7/2011	26,410	92,252	9101,450
21/7/2011	26,415	92,274	9103,569
22/7/2011	26,415	92,281	9104,208
23/7/2011	26,447	92,368	9112,983