UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

GUSTAVO HENRIQUE MARQUES GARCIA

Introdução às Teorias de Gauge não Abelianas

São Carlos
2022

GUSTAVO HENRIQUE MARQUES GARCIA

Introdução às Teorias de Gauge não Abelianas

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Attilio Cucchieri – IFSC-USP.

São Carlos
2022

Garcia, Gustavo Henrique Marques
Introdução às Teorias de Gauge não Abelianas / Gustavo Henrique Marques Garcia; orientador Attilio Cucchieri -- São Carlos, 2022.
25 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharel em Física) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2022.

1. Teorias de Gauge. 2. Simetrias. 3. Transformações de Gauge Locais. I. Cucchieri, Attilio, orient. II. Título.

Resumo

O Modelo Padrão é uma das teorias de maior sucesso na física, descrevendo três das interações fundamentais da natureza. A descrição dessas três interações se baseia nas Teoria de Gauge, ou Teorias de Calibre. Em uma Teoria de Gauge existe arbitrariedade na escolha dos potenciais, de onde emergem simetrias na Lagrangiana do sistema, chamadas de Transformações de Gauge. Tais transformações formam um Grupo de Lie, o Grupo de Gauge da teoria. No caso em que o grupo associado à Teoria de Gauge é não comutativo (Teoria de Gauge não abeliana), a teoria será não linear, o que torna seu estudo muito mais complicado, tanto a nível clássico quanto a nível quântico. Neste trabalho, são introduzidos os principais conceitos em Teorias de Campos necessários à compreensão das Teorias de Gauge. Em seguida, é considerada uma teoria na qual um campo escalar interage com o campo eletromagnético; nesse caso, o Grupo de Gauge é o grupo $U(1)$, que é abeliano. Por fim, essa teoria é generalizada para o caso do grupo SU(2), que é não abeliano.

Palavras-chave: Teorias de Gauge. Simetrias. Transformações de Gauge Locais.

Sumário

1 Introdução

Na Física, simetrias exercem um papel de grande importância. Relembramos que uma simetria está associada à noção de invariância do sistema físico sob um conjunto de transformações. No caso de Teoria de Campos, que estuda campos — como, por exemplo, o campo gravitacional e o campo eletromagnético — simetrias estão relacionadas à transformações dos campos. Um exemplo bem conhecido disso é a Teoria do Eletromagnetismo de Maxwell, onde o campo elétrico e magnético podem ser derivados a partir do potencial elétrico e do potencial vetor que satisfazem as chamadas transformações de Gauge. De fato, diferentes potenciais elétrico e vetor produzem os mesmo campos elétrico e magnético. Assim, esses potenciais não representam verdadeiros graus de liberdade físicos.

Como veremos abaixo, as transformações de Gauge estão associadas à existência de transformações locais nos campos que mantem a lagrangiana invariante, ou seja, não mudam a física. Uma transformação local representa uma classe de transformações nos campos onde a transformação depende do ponto particular do espaço-tempo, o que representa uma forte condição na teoria; por outro lado, uma condição mais fraca é dada pelas transformações globais, que independem do ponto particular do espaço-tempo e são um caso especial das transformações locais. As transformações de Gauge, nas quais se baseiam as Teorias de Gauge, ou Teorias de Calibre, constituem um grupo de Lie, o grupo de Gauge da Teoria. Dessa forma, o Eletromagnetismo é uma Teoria de Gauge invariante sob o grupo $U(1)$, que é abeliano. Sua generalização para o caso de grupos não abelianos, como proposto por Yang e Mills em 1954 (1) em uma tentativa de explicar a interação forte, leva à construção da Teoria de Yang-Mills, que é não linear. Isso torna seu estudo muito mais complicado, seja a nível clássico ou a nível quântico.

2 Conceitos em Teoria de Campos

Em Teoria de Campos, os objetos de interesse são os campos ϕ_a, com $a = 1, 2, ... , N$, que são funções reais do espaço-tempo, que aqui supomos ser o de Minkowski. Para descrever o espaço-tempo, introduzimos um sistema de coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3), onde, para um determinado observador, a coordenadas $x^0 = ct$ se refere ao tempo e as demais são as coordenadas espaciais. Além disso, o tensor métrico tem suas componentes dadas pela matriz diagonal $n_{\mu\nu} = \mathbf{diag}(1, -1, -1, -1)$ e, para simplificar as expressões que virão, vamos usar o sistema de unidades com $c = 1$ e portanto $x^0 = t$.

Aqui vamos também diferir índices abaixados ou levantados, isto é, em geral, $x^\mu \neq x_\mu$. Ao mesmo tempo, para simplificar a notação, iremos usar a convenção de soma de Einstein: isso quer dizer que expressões com índices repetidos indicam uma soma implícita. Por exemplo, $\sum_{\nu=0}^{3} n_{\mu\nu} f^\nu$ é escrito de forma mais sucinta como $n_{\mu\nu} f^\nu$, onde somamos sobre todos os valores dos índices que se repetem. Além disso, reservamos letras gregas minúsculas para índices que se referem às coordenadas do espaço-tempo, assumindo os valores $0, 1, 2, 3$, e letras latinas minúsculas para índices que podem assumir os valores inteiros genéricos $1, 2, ..., N$. Ademais, podemos usar a métrica para definir quantidades com índices abaixados a partir daquelas com índice levantado, e vice-versa. Por exemplo, temos $f_\mu := n_{\mu\nu} f^\nu$ e $f^\mu := n^{\mu\nu} f_\nu$ onde $n^{\mu\nu}$ satisfaz a relação $n_{\mu\nu} n^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho$, i.e., $n^{\mu\nu}$ é a matriz inversa de $n_{\mu\nu}$. Outrossim, iremos denotar derivadas em relação às coordenadas do espaço-tempo na forma mais compacta $\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

Dito isso, nosso interesse é obter as equações de movimento dos campos, que iremos derivar a partir do princípio variacional de Hamilton. Com esse objetivo em mente, definimos o funcional ação

$$S = \int \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a)\, d^4x \; , \tag{2.1}$$

onde a densidade de lagrangiana $\mathcal{L}$ é uma função nas variáveis ϕ_a e $\partial_\mu \phi_a$. Dessa forma, ao extremizar a ação S em relação aos campos, obtemos as equações de movimento (Euler-Lagrange)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \right) = 0 \; . \tag{2.2}$$

Agora vamos analisar as simetrias dos campos. Para isso, vamos considerar transformações *globais* para os campos da forma

$$\phi_a(x^\mu) \longrightarrow \phi_a^{'}(x^\mu) = \Omega_{ab}^c(\epsilon) \phi_b(x^\mu) \; , \tag{2.3}$$

onde ϵ é um parâmetro real e c é um índice que indica que pode haver uma família de transformações independentes entre sí. Enfatizamos que as matrizes $\Omega^c(\epsilon)$ são constantes ao longo do espaço-tempo, i.e., não dependem de x^μ. O nosso interesse está nas transformações que mantem a densidade de lagrangiana invariante, isto é, que satisfazem a relação

$$\mathcal{L}(\phi^{'}, \partial_\mu \phi^{'}) = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \ . \tag{2.4}$$

De fato, sabemos que associadas a transformações como essas, existem quantidades que são conservadas (Teorema de Noether). Para mostrar isso, vamos construir explicitamente essas quantidades. Será importante considerar transformações que sejam próximas da transformação identidade δ_{ab}, ou seja, em primeira ordem no parâmetro ϵ, queremos que $\Omega^c_{ab}(\epsilon) = \delta_{ab} + \epsilon\, \omega^c_{ab}$, onde $\omega^c_{ab} := \frac{d\Omega^c_{ab}}{d\epsilon}\big|_{\epsilon=0}$. Nesse caso, podemos reescrever as transformações (2.3) como

$$\phi_a(x^\mu) \longrightarrow \phi^{'}_a(x^\mu) = \phi_a(x^\mu) + \epsilon\, \omega^c_{ab}\, \phi_b \ . \tag{2.5}$$

Além disso, a invariância da lagrangiana sob essas transformações fornece a equação

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \mathcal{L}(\phi^{'}_a, \partial_\mu \phi^{'}_a) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a}\, \omega^c_{ab}\, \phi_b + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)}\, \partial_\mu(\omega^c_{ab}\, \phi_b) \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)}\, \omega^c_{ab}\, \phi_b \right) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \right) \right) \omega^c_{ab}\, \phi_b \ . \end{aligned}$$

Logo, assumindo que as equações (2.2) são satisfeitas, obtemos as equações de continuidade

$$\partial_\mu j^\mu_c = 0 \tag{2.6}$$

para o conjunto de correntes

$$j^\mu_c := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \omega^c_{ab} \phi_b \ , \tag{2.7}$$

onde c indica a qual transformação a corrente está associada.

Como sabemos, uma equação de continuidade estabelece uma lei de conservação. De fato, podemos definir as cargas

$$Q_c := \int j^0_c\, d^3x \ , \tag{2.8}$$

onde a integração é sobre todo o espaço. Com isso, em virtude das equações (2.6) e do teorema da divergência, obtemos

$$\partial_0 Q_c = -\int (\partial_i j^i_c)\, d^3x = -\int j^i_c\, dS_i \ ,$$

onde a última integração representa o fluxo através da fronteira do espaço. Assim, assumindo que as correntes são nulas na fronteira e lembrando que $\partial_0 = \partial_t$, obtemos $\partial_t Q_c = 0$, ou seja, a carga Q_c é conservada.

2.1 O Caso do Eletromagnetismo

Vamos agora analisar o campo eletromagnético no vácuo. Nesse caso, os campos de interesse formam o quadrivetor A_μ, a partir do qual definimos o tensor eletromagnético

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \ . \tag{2.9}$$

Assim, os campos elétrico e magnético são definidos — em termos das componentes do tensor $F_{\mu\nu}$ — pelas equações

$$E_i = F_{0i} \qquad \text{e} \qquad B_i = -\frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}F_{jk} \ . \tag{2.10}$$

De fato, temos

$$E_i = -\partial_i A_0 + \partial_0 A_i \qquad \text{e} \qquad B_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(\partial_j A_k - \partial_k A_j) = -\epsilon_{ijk}\,\partial_j A_k \ , \tag{2.11}$$

que são as relações usuais entre os potenciais ϕ e $\vec{A}$ e os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ no eletromagnetismo (com $A_0 = \phi$ e a substituição $A_j \longrightarrow -A_j$). Acima ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita.

A lagrangiana nesse caso é dada por

$$\mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{2.12}$$

e usando as equações (2.2) obtemos as equações de movimento do eletromagnetismo livre, isto é,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \ . \tag{2.13}$$

As equações acima, juntamente com a identidade $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\nu F_{\lambda\rho} = 0$ e as definições (2.10), recuperam as equações de Maxwell. Na presença de cargas e correntes, a expressão (2.12) precisa ser modificada para

$$\mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - ej^\mu A_\mu \ , \tag{2.14}$$

onde e é a unidade de carga elétrica (que fatoramos por conveniência) e o quadrivetor j^μ tem componentes dadas por $j^\mu = (\rho, \vec{\mathbf{j}})$, sendo ρ a densidade de carga elétrica e $\vec{\mathbf{j}}$ a densidade de corrente elétrica. Dessa forma, obtemos as equações de movimento do eletromagnetismo na presença de cargas elétricas, i.e.,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = ej^\nu. \tag{2.15}$$

Note que essa última equação, juntamente com a identidade $\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ (que é uma consequência da antissimétria do tensor $F_{\mu\nu}$), implica na relação $\partial_\nu j^\nu = 0$, i.e., na conservação da carga elétrica.

Uma importante propriedade do campo eletromagnético no vácuo é a sua invariância sob transformações do quadripotencial dadas por

$$A_\mu(x^\nu) \longrightarrow A'_\mu(x^\nu) = A_\mu(x^\nu) + \partial_\mu \alpha(x^\nu) \ , \tag{2.16}$$

isto é, a densidade de lagrangiana (2.12) e o tensor $F_{\mu\nu}$ não se alteram sob tais transformações. De fato, temos que

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &:= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \partial_\mu \partial_\nu \alpha - \partial_\nu \partial_\mu \alpha \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu} \ . \end{aligned}$$

No entanto, na presença de cargas, a lagrangiana do eletromagnetismo não fica invariante, embora as equações de movimento sim. Isso corresponde à invariância da ação S sob a transformação (2.16). Para ver isso notamos que

$$S[A'_\mu] = S[A_\mu] - e \int j^\mu \, (\partial_\mu \alpha) \, d^4x = S[A_\mu] - e \int \partial_\mu (j^\mu \alpha) \, d^4x \ ,$$

onde usamos a conservação da carga elétrica no último passo. Assim, usando o teorema da divergência e supondo que as cargas e as correntes são nulas na fronteira do espaço-tempo, obtemos que

$$\int \partial_\mu (j^\mu \alpha) \, d^4x = 0 \ .$$

Portanto, temos que $S[A'_\mu] = S[A_\mu]$, que implica na invariância das equações de movimento.

As transformações (2.16) são chamadas de transformações de Gauge *locais*, pois a variação $\partial_\mu \alpha(x^\nu)$ do campo depende (em geral) do ponto particular do espaço-tempo.

2.2 O Caso do Campo Escalar Complexo

Vamos agora analisar o caso de um campo escalar complexo $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ com a densidade de lagrangiana na forma

$$\mathcal{L}(\phi, \phi^*, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \phi^*) = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - V(\phi^* \phi) \ , \tag{2.17}$$

onde o campo ϕ e seu conjugado complexo ϕ^* são considerados como independentes (ao invés dos dois campos reais ϕ_1 e ϕ_2) e notamos que o potencial V depende apenas da amplitude do campo. Com isso, obtemos as equações de movimento

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \phi \frac{dV(x)}{dx}\bigg|_{x=\phi^*\phi} = 0 \qquad \text{e} \qquad \partial_\mu \partial^\mu \phi^* + \phi^* \frac{dV(x)}{dx}\bigg|_{x=\phi^*\phi} = 0 \ . \tag{2.18}$$

Além disso, nesse sistema, temos que a lagrangiana é invariante sob as transformações (globais)

$$\phi \longrightarrow e^{i\epsilon}\phi \qquad \text{e} \qquad \phi^* \longrightarrow e^{-i\epsilon}\phi^* \ , \tag{2.19}$$

com $\epsilon \in [0, 2\pi)$. Dessa forma, associada a essa transformação, temos a corrente conservada

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} i\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}(-i)\phi = i\left(\phi\, \partial^\mu \phi^* - \phi^*\, \partial^\mu \phi\right) \ . \tag{2.20}$$

Para mais, o potencial V, no caso mais simples, mas ainda de relevância, é da forma $V(\phi^*\phi) = m^2\phi^*\phi$, onde m^2 é uma constante. De fato, no regime de baixas amplitudes para o campo, um potencial arbitrário pode ser aproximado nessa forma. Além disso, nesse caso, as equações (2.18) coincidem com a equação de Klein-Gordon

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0 \tag{2.21}$$

para o potencial ϕ, e de forma análoga para ϕ^*.

2.3 Interação do Campo Eletromagnético com o Campo Escalar

Usando os exemplos considerados acima, nosso objetivo agora será explorar a interação do campo eletromagnético com um campo escalar complexo. Em particular, queremos obter as equações de movimento para essa teoria, que sejam semelhantes às equações (2.15) e (2.18), porém com a quadricorrente j^μ dependente do campo escalar, como consequência do acoplamento entre os campos. Para isso, vamos supor que a lagrangiana desse sistema é da forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{F_{\mu\nu}} + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_{\phi F_{\mu\nu}} \ , \tag{2.22}$$

onde $\mathcal{L}_{F_{\mu\nu}}$ e $\mathcal{L}_\phi$ são dados respectivamente pelas equações (2.12) e (2.17) e $\mathcal{L}_{\phi F_{\mu\nu}}$ é o termo de interação a ser determinado. Claramente, queremos recuperar as equações dos campos livres nos casos $A_\mu = 0$ ou $\phi = 0$, isto é, na ausência de interação queremos que $\mathcal{L}_{\phi F_{\mu\nu}} = 0$.

A fim de determinar o termo de interação $\mathcal{L}_{\phi F_{\mu\nu}}$, vamos explorar as transformações *locais*

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{q}\, \partial_\mu \alpha(x^\nu) \tag{2.23a}$$

$$\phi \longrightarrow \phi' = e^{i\alpha(x^\nu)}\phi \tag{2.23b}$$

$$\phi^* \longrightarrow \phi^{*'} = e^{-i\alpha(x^\nu)}\phi^* \ , \tag{2.23c}$$

que generalizam as transformações (2.16) e (2.19). Aqui, q é uma constante real. Sob essas transformações, o termo do eletromagnetismo $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ é claramente invariante, assim como o termo do potencial $V(\phi^*\phi)$. Contudo o termo cinético $(\partial_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi)$ não é invariante, pois

$$\partial_\mu\phi^{'} = e^{i\alpha}\left(\partial_\mu\phi + i(\partial_\mu\alpha)\phi\right) = e^{i\alpha}\partial_\mu\phi + i(\partial_\mu\alpha)\phi^{'} \ . \tag{2.24}$$

Nossa estratégia será então introduzir a substituição

$$\partial_\mu\phi \to D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + f(\phi, \partial_\nu\phi, A_\mu, \partial_\nu A_\mu) \tag{2.25}$$

de modo que $D_\mu^{'}\phi^{'} = e^{i\alpha}D_\mu\phi$, i.e., o termo adicional $f(\phi, \partial_\nu\phi, A_\mu, \partial_\nu A_\mu)$ é escolhido para compensar o termo $i(\partial_\mu\alpha)\phi^{'}$ na equação (2.24). Além disso, para recuperar as equações dos campos livres, é também necessário que seja $f = 0$ quando $A_\mu = 0$ ou $\phi = 0$. Note agora que da equação (2.24) obtemos a relação

$$\partial_\mu\phi^{'} - i(\partial_\mu\alpha)\phi^{'} - iqA_\mu\phi^{'} = e^{i\alpha}\partial_\mu\phi - iqA_\mu\phi^{'}$$

que pode ser reescrita na forma

$$\partial_\mu\phi^{'} - iqA_\mu^{'}\phi^{'} = e^{i\alpha}\left(\partial_\mu\phi - iqA_\mu\phi\right) \ ,$$

onde usamos as transformações (2.23a) e (2.23b). Assim, definindo

$$D_\mu\phi := (\partial_\mu - iqA_\mu)\phi \ , \tag{2.26}$$

obtemos a relação desejada $D_\mu^{'}\phi^{'} = e^{i\alpha}(D_\mu\phi)$. De forma semelhante, definimos $D_\mu^*\phi = (\partial_\mu + iqA_\mu)\phi$, que satisfaz a relação $D_\mu^{*'}\phi^{*'} = e^{-i\alpha}(D_\mu^*\phi^*)$.

Desse modo, podemos definir o lagrangiano

$$\mathcal{L} = (D_\mu^*\phi^*)(D^\mu\phi) - V(\phi^*\phi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \ , \tag{2.27}$$

que é invariante sob as transformações locais (2.23). As equações de movimento para essa teoria são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = qj^\nu \tag{2.28a}$$

$$D_\mu(D^\mu\phi) + \phi\frac{dV(x)}{dx}\bigg|_{x=\phi*\phi} = 0 \tag{2.28b}$$

$$D_\mu^*(D^{*\mu}\phi^*) + \phi^*\frac{dV(x)}{dx}\bigg|_{x=\phi*\phi} = 0 \ , \tag{2.28c}$$

onde definimos a corrente

$$j^\mu = i\left[\phi(D^{*\mu}\phi^*) - \phi^*(D^\mu\phi)\right] \ . \tag{2.29}$$

Notamos que a quadricorrente j^μ possui a mesma forma da corrente do campo escalar (2.20), mas com a substituição (2.25). Podemos agora verificar que essa corrente é, de fato, conservada. Para isso, notamos que

$$\begin{aligned}\partial_\mu(\phi\, D^{*\mu}\phi^*) &= (\partial_\mu\phi)(D^{*\mu}\phi^*) + \phi\,\partial_\mu(D^{*\mu}\phi^*)\\ &= (D^\mu\phi)(D^{*\mu}\phi^*) + iqA_\mu\phi(D^{*\mu}\phi^*) + \phi D^*_\mu(D^{*\mu}\phi^*) - iqA_\mu\phi(D^{*\mu}\phi^*)\\ &= (D^\mu\phi)(D^{*\mu}\phi^*) + \phi D^*_\mu(D^{*\mu}\phi^*)\ .\end{aligned}$$

Da mesma forma, podemos verificar que

$$\partial_\mu(\phi^* D^\mu\phi) = (D^{*\mu}\phi^*)(D^\mu\phi) + \phi^* D_\mu(D^\mu\phi)\ .$$

Logo, obtemos

$$\partial_\mu j^\mu = i[\phi\, D^*_\mu(D^{*\mu}\phi^*) - \phi^* D_\mu(D^\mu\phi)] = i\left[-\phi\,\phi^*\frac{dV(x)}{dx}\bigg|_{x=\phi*\phi} + \phi^*\phi\,\frac{dV(x)}{dx}\bigg|_{x=\phi*\phi}\right] = 0\ ,$$

onde na última igualdade usamos as equações de movimento (2.28). Logo a corrente (2.29) é, de fato, conservada.

Agora iremos expressar o tensor $F_{\mu\nu}$ em termos do operador D_μ, o que será importante na próxima seção. Para isso, iremos mostrar que

$$[D_\mu, D_\nu] := D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu = -iqF_{\mu\nu}\ , \tag{2.30}$$

onde o operador $D_\mu D_\nu$ é definido pela expressão $(D_\mu D_\nu)(\phi) := D_\mu(D_\nu\phi)$. De fato, temos que

$$\begin{aligned}(D_\mu D_\nu)(\phi) &= [(\partial_\mu - iqA_\mu)(\partial_\nu - iqA_\nu)](\phi)\\ &= \partial_\mu(\partial_\nu\phi) - iq[(\partial_\mu A_\nu)\phi + A_\nu(\partial_\mu\phi) + A_\mu(\partial_\nu\phi)] - q^2A_\mu A_\nu\ ,\end{aligned}$$

de modo que

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)(\phi) = -iq[(\partial_\mu A_\nu)\phi - (\partial_\nu A_\mu)\phi] = -iq[\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu](\phi) = -iqF_{\mu\nu}\,\phi\ .$$

3 Invariância sob o Grupo não Abeliano $SU(2)$

Nesta seção, vamos explorar uma teoria invariante sob transformações *locais* do grupo $SU(2)$, generalizando o caso apresentado na seção (2.3) [que corresponde a transformações locais do grupo $U(1)$]. Nesse contexto, os campos de interesse formam a matriz coluna

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} , \tag{3.1}$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são campos escalares complexos. Em analogia ao caso de um campo escalar, temos a densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L}(\phi, \phi^\dagger, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \phi^\dagger) = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi) \tag{3.2}$$

onde denotamos $\phi^\dagger = (\phi_1^*, \phi_2^*)$ e consideramos como independentes os campos ϕ e $\phi^\dagger$. Além disso, notamos que a expressão anterior é invariante sob as transformações *globais*

$$\phi \longrightarrow \Omega\phi \qquad \text{e} \qquad \phi^\dagger \longrightarrow \phi^\dagger \Omega^\dagger , \tag{3.3}$$

onde a matriz Ω satisfaz as relações $\Omega^\dagger \Omega = I$ (aqui I é matriz identidade) e $\det \Omega = 1$, ou seja, Ω é um elemento do grupo $SU(2)$.

Dessa forma, nosso objetivo será generalizar a teoria acima para o caso de transformações *locais*, isto é, estamos interessados na teoria que permite as transformações

$$\phi(x^\mu) \longrightarrow \phi^{'}(x^\mu) = \Omega(x^\mu)\phi(x^\mu) \tag{3.4a}$$

$$\phi^\dagger(x^\mu) \longrightarrow \phi^{'\dagger}(x^\mu) = \phi^\dagger(x^\mu)\Omega^\dagger(x^\mu) , \tag{3.4b}$$

onde, para cada ponto x^μ do espaço-tempo, a matriz $\Omega(x^\mu)$ é um elemento do grupo $SU(2)$. Note que o termo potencial $V(\phi^\dagger\phi)$ na expressão (3.2) é invariante sob essas transformações. No entanto, o termo cinético $(\partial_\mu\phi)^\dagger(\partial^\mu\phi)$, assim como no exemplo explorada na seção anterior, não é invariante, pois

$$\partial_\mu \phi^{'}(x^\nu) = \Omega(x^\nu)\partial_\mu\phi(x^\nu) + (\partial_\mu\Omega(x^\nu))\phi(x^\nu) \tag{3.5}$$

e de forma semelhante para $\phi^{'\dagger}$. Assim, em plena analogia com a estratégia adotada na seção anterior, vamos introduzir a substituição

$$\partial_\mu\phi \longrightarrow D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + A_\mu\phi , \tag{3.6}$$

onde a matriz A_μ é escolhida de forma a compensar o termo $(\partial_\mu\Omega)\phi$ na expressão (3.5), i.e., queremos que o operador D_μ se transforme (simultaneamente com o campo ϕ) de modo que o operador transformado D'_μ satisfaça as relações $D'_\mu\phi' = \Omega(D_\mu\phi)$ e $(D'_\mu\phi')^\dagger = (D_\mu\phi)^\dagger\Omega^\dagger$. Para isso, a fim de determinar como as matrizes A_μ devem se transformar, observamos que

$$\begin{aligned}\Omega D_\mu\phi = \Omega(D_\mu(\Omega^{-1}\Omega\,\phi)) = \Omega(\partial_\mu + A_\mu)\Omega^{-1}\phi' = \Omega(\partial_\mu\Omega^{-1})\phi' + \Omega\Omega^{-1}(\partial_\mu\phi') + \Omega A_\mu\Omega^{-1}\phi' \\ = \partial_\mu\phi' + [\Omega A_\mu\Omega^{-1} + \Omega(\partial_\mu\Omega^{-1})]\phi' \ .\end{aligned}$$

Por outro lado, queremos que seja válida a relação $\Omega(D_\mu\phi) = D'_\mu\phi' = \partial_\mu\phi' + A'_\mu\phi'$. Assim é necessários que as matrizes A_μ se transformem na forma

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = \Omega A_\mu\Omega^{-1} + \Omega(\partial_\mu\Omega^{-1}) \ . \tag{3.8}$$

Além disso, pode-se mostrar que as matrizes A_μ — que são os campos de Yang-Mills — assumem valores na álgebra de Lie $ASU(2)$, associada ao grupo (de Lie) $SU(2)$, ou seja, A_μ são matrizes anti-hermitianas com traço nulo. Em particular, podemos escrever

$$A_\mu(x^\nu) = -igA^a_\mu(x^\nu)\frac{\tau^a}{2} \ , \tag{3.9}$$

onde g é uma constante, chamada de constante de acoplamento de Gauge, os quadrivetores A^a_μ são campos reais e indicamos com τ^a as três matrizes de Pauli. Claramente, os campos $A^a_\mu(x^\nu)$ são variáveis da teoria, ou seja, podem ser determinados ao se especificar uma lagrangiana para o sistema. Com esse objetivo em mente, iremos generalizar o tensor $F_{\mu\nu}(x^\nu)$ dado pela expressão (2.9); em particular, queremos construir um escalar que generalize a expressão (2.12), sendo invariante sob a transformação (3.8).

Por isso, em um primeiro momento, poderíamos supor que o tensor $F_{\mu\nu}$ deve ter a mesma forma que no eletromagnetismo, isto é, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. No entanto, não iremos obter sucesso com essa abordagem. De fato, é fácil verificar que

$$\begin{aligned}F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \Omega(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\Omega^{-1} \\ + \partial_\mu(\Omega\,A_\nu\,\Omega^{-1}) - \partial_\nu(\Omega\,A_\mu\,\Omega^{-1}) + \partial_\mu[\Omega(\partial_\nu\Omega^{-1})] - \partial_\nu[\Omega(\partial_\mu\Omega^{-1})] \ ,\end{aligned}$$

i.e., devido aos termos da segunda linha na expressão acima, não iríamos recuperar a invariância do tensor $F_{\mu\nu}$ — tal menos a invariância do escalar $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ — sob a transformação (3.8), em oposição ao caso do eletromagnetismo. Por isso, em analogia com a equação (2.30), definimos

$$F_{\mu\nu} := [D_\mu, D_\nu] \ , \tag{3.11}$$

onde $[D_\mu, D_\nu] = D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu$ (como antes). Com isso, podemos mostrar que

$$F'_{\mu\nu} = [D'_\mu, D'_\nu] = \Omega\, F_{\mu\nu}\, \Omega^{-1} \;, \tag{3.12}$$

o que segue da igualdade $D'_\mu \phi = D'_\mu(\Omega\Omega^{-1}\phi) = \Omega D_\mu(\Omega^{-1}\phi)$, onde usamos a relação $D'_\mu(\Omega\,\phi) = \Omega(D_\mu\phi)$. Dessa forma, definimos a densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L}_{F_{\mu\nu}} = \frac{1}{2g^2}\,\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \;, \tag{3.13}$$

que é invariante sob a transformação (3.8), já que

$$\mathrm{Tr}(F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}) = \mathrm{Tr}(\Omega F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\Omega^{-1}) = \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \;.$$

Acima, indicamos com Tr o traço de uma matriz.

É interessante mostrar que podemos reescrever a expressão (3.11) em termos das matrizes A_μ. Para isso, usaremos a relação

$$\begin{aligned}(D_\mu D_\nu)(\phi) &= [(\partial_\mu + A_\mu)(\partial_\nu + A_\nu)](\phi)\\ &= \partial_\mu(\partial_\nu\phi) + (\partial_\mu A_\nu)\phi + A_\nu(\partial_\mu\phi) + A_\mu(\partial_\nu\phi) + A_\mu A_\nu\,\phi\end{aligned}$$

que implica

$$D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu \;,$$

isto é,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \;. \tag{3.15}$$

Logo o tensor $F_{\mu\nu}$, assim como as matrizes A_μ, assume valores na álgebra de lie $ASU(2)$. Observamos também que o último termo na expressão acima pode ser reescrito como

$$[A_\mu, A_\nu] = (-ig)^2 A^b_\mu A^c_\nu \left[\frac{\tau^b}{2}, \frac{\tau^c}{2}\right] = -ig(g\epsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu)\frac{\tau^a}{2} \tag{3.16}$$

onde ϵ^{abc} é o símbolo de Levi-Cevita. As constantes $i\epsilon^{abc}$ são chamadas de constantes de estrutura da álgebra $ASU(2)$. Com isso, o tensor $F_{\mu\nu}$ pode ser expresso na forma

$$F_{\mu\nu} = -igF^a_{\mu\nu}\frac{\tau^a}{2} \tag{3.17a}$$

onde

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\mu A^\nu + g\epsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu \;. \tag{3.17b}$$

Além disso, a densidade de lagrangiana (3.13) pode ser reescrita em termos dos campos reais

$F^a_{\mu\nu}$, isto é, $\mathcal{L}_{F_{\mu\nu}} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}(F^a)^{\mu\nu}$.

3.1 Equações de Movimento

Usando os resultados apresentados acima, vamos agora considerar a densidade de lagrangiana dada pela expressão

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi - V(\phi^\dagger\phi) - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}(F^a)^{\mu\nu} , \tag{3.18}$$

que, por construção, é invariante sob as transformações (3.3) e (3.8). A fim de obter as equações de movimento, dadas pelas equações de Euler-Lagrange (2.2), notamos que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\dagger)} = D^\mu\phi \qquad e \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\dagger} = (-A_\mu)D^\mu\phi - \phi\frac{dV(x)}{dx}\bigg|_{x=\phi^\dagger\phi} , \tag{3.19}$$

onde usamos a igualdade $A^\dagger_\mu = -A_\mu$. Desse modo, obtemos as equações de movimento

$$D_\mu(D^\mu\phi) + \phi\frac{dV(x)}{dx}\bigg|_{x=\phi^\dagger\phi} = 0 \tag{3.20a}$$

e, de forma análoga,

$$D^\dagger_\mu((D^\mu\phi)^\dagger) + \phi^\dagger\frac{dV(x)}{dx}\bigg|_{x=\phi^\dagger\phi} = 0 , \tag{3.20b}$$

onde denotamos $D^\dagger_\mu((D^\mu\phi)^\dagger) = \partial_\mu(D^\mu\phi)^\dagger + (D^\mu\phi)^\dagger A^\dagger_\mu$. Ao mesmo tempo, temos que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^a_\nu)} = -(F^a)^{\mu\nu} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^a_\nu} = g\epsilon^{abc}A^b_\mu(F^c)^{\mu\nu} - gj^\mu_a , \tag{3.21}$$

onde definimos as correntes

$$j^\mu_a = i\left[(D_\mu\phi)^\dagger\frac{\tau^a}{2}\phi - \phi^\dagger\frac{\tau^a}{2}(D_\mu\phi)\right] . \tag{3.22}$$

Dessa forma obtemos as equações de movimento

$$\partial_\mu(F^a)^{\mu\nu} + g\epsilon^{abc}A^b_\mu(F^c)^{\mu\nu} = gj^\nu_a \tag{3.23}$$

ou, de forma mais compacta,

$$D_\mu(F^a)^{\mu\nu} := \partial_\mu(F^a)^{\mu\nu} + g\epsilon^{abc}A^b_\mu(F^c)^{\mu\nu} = gj^\nu_a . \tag{3.24}$$

Podemos verificar que o tensor $(F^a)^{\mu\nu}$ satisfaz a propriedade $D_\nu(D_\mu(F^a)^{\mu\nu}) = 0$, de onde segue a igualdade $D_\mu j^\mu_a = 0$, que generaliza a relação $\partial_\mu j^\mu = 0$ válida para o caso do Eletromagnetismo.

É também bastante evidente que todo o processo acima pode ser facilmente repetido para o casos de outros grupos de Lie não abelianos, como é o caso de $SU(3)$. Também notamos que as componentes reais dos campos de Yang-Mills A_μ^a existem em mesmo número que a dimensão do grupo em consideração, i.e., temos 3 campos A_μ^a, para cada cada valor de μ, no caso do grupo $SU(2)$.

3.2 Comparação com o Eletromagnetismo

Como vimos, é claro que os tensores $F_{\mu\nu}^a$ exercem um papel análogo ao do tensor $F_{\mu\nu}$ do eletromagnetismo [veja equações (2.9) e (3.17b)]. No entanto, a presença do termo extra $g\epsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$, no primeiro caso, leva à não linearidades na teoria, isto é, as equações de movimento para os campos de Yang-Mills A_μ são não lineares, o que representa a auto-interação dos campos. Ademais, isso ocorre mesmo na ausência do campo ϕ [veja a equação (3.23)].

Além disso, como foi dito anteriormente, a teoria com a densidade de lagrangiana (3.18) generaliza a teoria apresentada na subseção (2.3). Para deixar claro que esse é o caso, podemos fazer o processo inverso, isto é, reobter a teoria mais simpes a partir da mais geral.Com esse objetivo em mente, observamos que a teoria dada pela expressão (2.27) é invariante sob o grupo de Lie $U(1)$ (que é abeliano): de fato, as transformações $e^{i\alpha(x^\mu)}$ são elementos do grupo $U(1)$, enquanto que os números complexos $i\alpha(x^\mu)$ são elementos da álgebra de Lie $AU(1)$. Além disso, notamos que o grupo $U(1)$ é homeomorfo ao grupo $\tilde{U} := \{\text{diag}\,(e^{i\alpha}, e^{-i\alpha})\,,\ \text{com } \alpha \text{ real}\}$ que claramente é um subgrupo de $SU(2)$. Agora se impomos que as matrizes Ω na transformação (3.4) são elementos do grupo $\tilde{U}$, obtemos que os campos de Yang-Mills são da forma

$$A_\mu = -i\, g\, a_\mu \frac{\tau^3}{2}\,, \tag{3.25}$$

onde a_μ são campos reais e $\tau^3 = diag(1, -1)$ é uma das matrizes de Pauli. Com isso, temos que

$$D_\mu \phi = \begin{pmatrix} \left(\partial_\mu - i\,\frac{g}{2}\,a_\mu\right)\phi_1 \\ \left(\partial_\mu + i\,\frac{g}{2}\,a_\mu\right)\phi_2 \end{pmatrix}\,, \tag{3.26}$$

de modo que a expressão (3.18) pode ser reescrita na forma

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi_1)^*(D_\mu\phi_1) + (D_\mu\phi_2^*)^*(D_\mu\phi_2^*) + V(\phi_1^*\phi_1 + \phi_2^*\phi_2) + \frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}\,, \tag{3.27}$$

onde $f_{\mu\nu} := \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$ e $D_\mu\phi_i = \partial_\mu\phi_i - i\frac{g}{2}\,a_\mu\,\phi_i$. Logo, fica claro que recuperamos a teoria com densidade de lagrangiana (2.27) quando $\phi_2 = 0$ e ao fazermos as identificações $q = \frac{g}{2}$, $a_\mu = A_\mu$ e $\phi = \phi_1$.(De modo equivalente, podemos fixar $\phi_1 = 0$ e usar a identificação $\phi = \phi_2^*$.)

Portanto, fica evidente que a não linearidade na teoria dada pela expressão (3.18) emerge do fato que o grupo de Gauge da teoria é não abeliano, i.e., a não comutatividade do grupo de

Gauge leva à não linearidades na teoria.

4 Conclusões

Como vimos acima, as transformações de Gauge estão relacionadas com a invariância da densidade de lagrangiana, para um dado sistema físico, sob transformações locais dos campos, onde as transformações são representadas pelos elementos do grupo de Gauge da teoria. Nesse contexto, a densidade de lagrangiana, que representa a interação do campo eletromagnético com um campo escalar, pode ser derivada a partir da imposição de que a teoria seja invariante sob transformações locais do grupo abeliano $U(1)$. Além disso, vimos que essa teoria pode ser generalizada para o caso do grupo não abeliano $SU(2)$, o que leva à construção dos campos de Yang e Mills: isto é, as matrizes A_μ, que exercem um papel análogo ao do quadrivetor do eletromagnetismo, assumem valores na álgebra de Lie $ASU(2)$. Ademais, essa teoria é não linear nos campos de Yang-Mills, fato que decorre da não comutatividade do grupo SU(2).

Referências

1 YANG, C. N.; MILLS, R. L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. **Physical Review**, American Physical Society, v. 96, p. 191–195, Oct 1954. Disponível em: ⟨https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.96.191⟩. Acesso em: 15 de novembro de 2022.

2 RUBAKOV, V. **Classical theory of Gauge fields**. Princeton: Princeton University Press, 2009. ISBN 9781400825097. Disponível em: ⟨https://doi.org/10.1515/9781400825097⟩. Acesso em: 15 de novembro de 2022.